Kekuatan Tak Beraturan Sisi Total pada Graf Hasil Gabungan Graf Lintasan dengan Beberapa Kelas Graf

Setyo Dwi Pratama[1], Dian Eka Wijayanti[2]

[1]*Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Terapan, Universitas Ahmad Dahlan*

Email: setyo1400015056@webmail.uad.ac.id

[2] *Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Terapan, Universitas Ahmad Dahlan*

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai kekuatan tak beraturan sisi total pada graf hasil gabungan graf lingkaran dengan graf lintasan $G = (C_n \cup P_n)$ dan graf hasil gabungan dua graf lingkaran $G = (C_n \cup C_n)$ masing-masing untuk $n \geq 3$.
Pelabelan tak beraturan sisi total pada graf $G(V, E)$, dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E suatu fungsi $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga bobot setiap sisinya berbeda. Nilai k terkecil pada pelabelan tak beraturan sisi total disebut kekuatan tak beraturan sisi total dari G yang dinotasikan dengan $tes\ (G)$. Selanjutnya, bobot sebuah sisi uv dengan fungsi pelabelan λ yaitu $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$.
Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa nilai kekuatan tak beraturan sisi total pada graf hasil gabungan graf lingkaran dengan graf lintasan dan graf hasil gabungan dua graf lingkaran yang berturut-turut mempunyai nilai $tes\ (G) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$ dan $tes\ (G) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.

Kata kunci: *Kekuatan tak beraturan sisi total, graf hasil gabungan graf lingkaran dengan graf lintasan, graf hasil gabungan dua graf lingkaran.*

PENDAHULUAN

Pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Label yang digunakan berupa bilangan bulat positif atau bilangan asli. Pada umumnya jika domain berupa titik maka disebut pelabelan titik (*vertex labelings*), jika domain berupa sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labelings*) sedangkan jika domain berupa titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labelings*). (Wallis, 2001) Suatu bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Pada pelabelan total bobot sebuah titik v dengan fungsi pelabelan λ adalah

$$wt(v) = \lambda\,(v) + \sum_{uv \in E} \lambda\,(uv)$$

Dan pada pelabelan total bobot sebuah sisi uv dengan fungsi pelabelan λ adalah

$$wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v).$$

Definisi 1 (Baca, 2007) Misalkan graf $G = (V, E)$, pelabelan total yaitu didefinisikan sebagai suatu fungsi $\lambda : V \cup E \to \{1,2, \ldots, k\}$. λ dinamakan sebagai pelabelan tak beraturan total dari graf G jika bobot dari setiap titik atau sisi adalah berbeda. Pelabelan tak beraturan dibagi menjadi 3 yaitu pelabelan tak beraturan titik total, pelabelan tak beraturan sisi total, dan pelabelan tak beraturan total.

Definisi 2 (Baca, 2007) Misalkan graf $G = (V, E)$, didefinisikan fungsi pelabelan total $\lambda : V \cup E \to \{1,2, \ldots, k\}$. λ dinamakan sebagai pelabelan tak beraturan titik total dari graf G jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda maka $wt(u) \neq wt(v)$. $wt(u)$ merupakan bobot titik u yang dinyatakan sebagai berikut:

$$wt(u) = \lambda\,(u) + \sum_{uv \in E} \lambda\,(uv).$$

Label k minimum pada G yang memenuhi pelabelan tak beraturan titik total disebut kekuatan nilai titik total (*total vertex strength*) yang dinotasikan sebagai $tvs(G)$.

Definisi 3 (Baca, 2007) Misalkan graf $G = (V, E)$, didefinisikan fungsi pelabelan total $\lambda : V \cup E \to \{1,2, \ldots, k\}$. λ dinamakan sebagai pelabelan tak beraturan sisi total dari graf G jika untuk setiap sisi xy dan uv yang berbeda maka $wt(xy) \neq wt(uv)$. $wt(uv)$ merupakan bobot sisi uv yang dinyatakan sebagai berikut:

$$wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v).$$

Label k minimum pada G yang memenuhi pelabelan tak beraturan sisi total disebut kekuatan nilai sisi total (*total edge strength*) yang dinotasikan sebagai $tes(G)$.

Definisi 4 (Siti, 2017) Suatu pelabelan total $\lambda : V \cup E \to \{1,2, \ldots, k\}$ disebut pelabelan tak beraturan total dari graf G jika untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ memenuhi $wt(u) \neq wt(v)$ dan setiap dua sisi xy dan uv yang berbeda di $E(G)$ memenuhi $wt(xy) \neq wt(uv)$ dimana $wt(u) = \lambda\,(u) + \sum(uv)$ dan $wt(uv) = \lambda\,(u) + \lambda\,(uv) + \lambda\,(v)$.
Label k minimum pada G yang memenuhi pelabelan tak beraturan total disebut kekuatan nilai total (*total strength*) yang dinotasikan sebagai $ts(G)$.

Teorema 5 (Baca, 2007) Nilai tak beraturan sisi total dari graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga G memiliki pelabelan tak beraturan sisi total, dan memberikan batas bawah dan batas atas nilai tak beraturan sisi total untuk sembarang graf $G(V, E)$, yaitu

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|.$$

METODE PENELITIAN

Alat dan Bahan

Dalam penelitian alat dan bahan yang dibutuhkan yaitu literatur yang dikumpulkan berupa buku, skripsi, artikel, jurnal atau modul yang dapat mendukung penelitian.

Jalannya Penelitian

Tahapan penelitian yang akan dilakukan penulis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan topik yang diteliti yaitu mengenai graf, operasi graf, dan pelabelan tak beraturan sisi total.
2. Memahami definisi graf.
3. Memahami definisi pelabelan tak beraturan sisi total.
4. Menggambar graf.
5. Melakukan pengoperasian pada graf.
6. Memberikan pelabelan tak beraturan sisi total.
7. Menentukan suatu bobot tak beraturan sisi total pada graf hasil gabungan graf lintasan dengan beberapa kelas graf.
8. Menentukan nilai kekuatan tak beraturan sisi total pada graf hasil gabungan dua kelas graf.
9. Mengamati pola-pola pelabelan tak beraturan sisi total dari beberapa contoh graf yang dikonstruksi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 6 Kekuatan tak beraturan sisi total pada graf $G = (C_n \cup P_n)$, adalah $tes\ (G) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil\ untuk\ n \geq 3.$

Bukti. Berdasarkan pola pelabelan, pembuktian ini dibagi menjadi 2 kasus yaitu kasus dengan $n = 0\ mod\ 3$ dan $n = 1{,}2\ mod\ 3$.

1. Kasus dengan $n = 0\ mod\ 3$.

Definisikan fungsi pelabelan untuk titik dan sisinya, sebagai berikut:

$$f(v_i) = \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil - 1, & untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, & untuk\ i = 0\ mod\ 3 \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, & untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

Dengan fungsi pelabelan diatas, diperoleh fungsi bobot setiap sisi:

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3 \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

2. Kasus dengan $n = 1{,}2\ mod\ 3$.

Definisikan fungsi pelabelan untuk titik dan sisinya, sebagai berikut:

$$f(v_i) = \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3 \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

Dengan fungsi pelabelan diatas, diperoleh fungsi bobot setiap sisi:

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i = n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3 \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

Teorema 7 Kekuatan tak beraturan sisi total pada graf $G = (C_n \cup C_n)$, adalah

$$tes\ (G) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil\ untuk\ n \geq 3.$$

Bukti. Berdasarkan pola pelabelan, pembuktian ini dibagi menjadi 2 kasus yaitu kasus dengan $n = 0\ mod\ 3$, $n = 1\ mod\ 3$ dan $n = 2\ mod\ 3$.

1. Kasus dengan $n = 0\ mod\ 3$.

Definisikan fungsi pelabelan untuk titik dan sisinya, sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ 1 \leq i < 2n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 2n \end{cases}$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil - 1, \; untuk\ i = n \\ 1, \; untuk\ i = 2n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \; untuk\ i < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i\ < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + 1, \; untuk\ i > n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \end{cases}$$

Dengan fungsi pelabelan diatas, diperoleh fungsi bobot setiap sisi:

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \; untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1, \; untuk\ i = 2n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \; untuk\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + 1, \; untuk\ i > n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \end{cases}$$

2. Kasus dengan $n = 1\ mod\ 3$.
Definisikan fungsi pelabelan untuk titik dan sisinya, sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \; untuk\ 1 \le i < 2n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \; untuk\ i = 2n \end{cases}$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil - 1, \; untuk\ i = n \\ 1, \; untuk\ i = 2n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \; untuk\ i < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i\ < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + 1, \; untuk\ i > n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \\ \left\lceil \frac{2n-1+1}{3} \right\rceil, \; untuk\ i = 2n - 1 \end{cases}$$

Dengan fungsi pelabelan diatas, diperoleh fungi bobot setiap sisi:

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i = 2n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i > n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \\ 2\left\lceil \frac{2n-1+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 2n-1 \end{cases}$$

3. Kasus dengan $n = 2\ mod\ 3$.
Definisikan fungsi pelabelan untuk titik dan sisinya, sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ 1 \leq i < 2n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 2n \end{cases}$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = n \\ 1, \ untuk\ i = 2n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i\ < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i > n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \end{cases}$$

Dengan fungsi pelabelan diatas, diperoleh fungi bobot setiap sisi:

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i = 2n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i > n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \end{cases}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Graf hasil gabungan graf lingkaran dengan graf lintasan memiliki nilai kekuatan tak beraturan sisi total dengan $tes(G) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.
    - Untuk $n = 0 \bmod 3$

$$f(v_i) = \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil - 1, & untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, & untuk\ i = 0 \bmod 3 \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, & untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil, & untuk\ i = n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, & untuk\ i = 0 \bmod 3 \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, & untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

    - Untuk $n = 1,2 \bmod 3$

$$f(v_i) = \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil, & untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, & untuk\ i = 0 \bmod 3 \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, & untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil + 1, & untuk\ i = n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, & untuk\ i = 0 \bmod 3 \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, & untuk\ i\ lainnya \end{cases}$$

2. Graf hasil gabungan dua graf lingkaran memiliki nilai kekuatan tak beraturan sisi total dengan $tes(G) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$.
   - Untuk $n = 0 \ mod \ 3$

$$f(v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk \ 1 \leq i < 2n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk \ i = 2n \end{cases}$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk \ i = n \\ 1, \ untuk \ i = 2n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk \ i < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, \ untuk \ i = 0 \ mod \ 3 \ dan \ i \ < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + 1, \ untuk \ i > n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk \ i = 0 \ mod \ 3 \ dan \ i > n \end{cases}$$

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk \ i = n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk \ i = 2n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk \ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk \ i = 0 \ mod \ 3 \ dan \ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk \ i > n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk \ i = 0 \ mod \ 3 \ dan \ i > n \end{cases}$$

   - Untuk $n = 1 \ mod \ 3$

$$f(v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk \ 1 \leq i < 2n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk \ i = 2n \end{cases}$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = n \\ 1, \ untuk\ i = 2n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i\ < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i > n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \\ \left\lceil \frac{2n-1+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 2n-1 \end{cases}$$

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i = 2n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i > n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \\ 2\left\lceil \frac{2n-1+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 2n-1 \end{cases}$$

- Untuk $n = 2\ mod\ 3$

$$f(v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ 1 \leq i < 2n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 2n \end{cases}$$

$$f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = n \\ 1, \ untuk\ i = 2n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil - 1, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i\ < n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + 1, \ untuk\ i > n \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \ untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \end{cases}$$

$$w(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + 1, \; untuk\ i = n \\ \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1, \; untuk\ i = 2n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \; untuk\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil - 1, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i < n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + 1, \; untuk\ i > n \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil, \; untuk\ i = 0\ mod\ 3\ dan\ i > n \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

Baca, dkk. 2007. *On Irregular Total Labellings*. Discrete Mathematics. 307 (2007) 1378-1388.

Siti, J., dkk. 2017. *Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf Bunga F_n*. Vol. X No. 1. 1979-8911.

Wallis, W. D. 2001. *Magic Graph*. Birkhauser Boston.