AdMathEdu

ISSN 2088 - 687X

JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA, ILMU MATEMATIKA DAN MATEMATIKA TERAPAN

AdMathEdu | Vol. 2 No. 1 | Juni 2012 | Hal. 1 - 114

IMPLEMENTASI METODE BOOTSTRAP UNTUK PENGUJIAN HIPOTESIS MENGENAI DUA MEAN POPULASI

Suparman
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UAD
Jl. Prof. Dr. Soepomo, SH. Janturan Yogyakarta
suparman@netcourrier.com

ABSTRAK

Tulisan ini mengkaji masalah pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi. Kebanyakan pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi, didasarkan pada anggapan bahwa masing-masing sampel random diambil dari populasi normal. Dalam tulisan ini akan dikaji masalah pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi yang tidak menggunakan anggapan normalitas dan homogenitas.

Metode yang digunakan untuk menguji hipotesis mengenai dua mean populasi adalah metode bootstrap. Ide dasar dari metode bootstrap yaitu pengambilan sampel ulang dari data sampel dengan pengembalian. Sampel ulang digunakan untuk menentukan estimator titik dari *Achieved Significance Level* (ASL).

Kinerja metode bootstrap diuji dengan menggunakan data simulasi. Hasil pengujian menunjukkan bahwa metode bootstrap dapat menguji hipotesis mengenai dua mean populasi dengan baik. Selanjutnya metode bootstrap diimplementasikan pada data riil.

Kata Kunci : Bootstrap, Pengujian Hipotesis, ASL.

ABSTRACT

This paper examines the problem of testing hypotheses about two population means. Most testing hypotheses about two population means, based on the assumption that each random sample drawn from a normal population. In this paper studied the problem of testing hypotheses about two population means are not using the assumption of normality and homogeneity.

The method used to test hypotheses about two population means are the bootstrap method. The basic idea of the bootstrap method of repeated sampling with replacement from the sample data. Replication of samples used to determine the point estimator of Achieved Significance Level (ASL).

Performance of the bootstrap method was tested using simulated data. The test results show that the bootstrap method to test the hypothesis of two population means well. Furthermore bootstrap method implemented on real data.

Keywords : Bootstrap, Hypothesis Testing, ASL.

Pendahuluan

Dalam kegiatan penelitian ilmiah, banyak perhatian dicurahkan untuk menjawab pertanyaan tentang kebenaran atau kesalahan hipotesis mengenai suatu parameter populasi. Apakah suatu metode pembelajaran baru akan lebih efektif dibandingkan dengan metode pembelajaran konvensional ? Apakah lama belajar berpengaruh terhadap hasil belajar ? Apakah motivasi belajar berhubungan dengan prestasi belajar ?

Jika parameter populasi dinotasikan dengan θ maka pengujian hipotesis mengenai θ akan dirumuskan menggunakan istilah hipotesis nol H_0 dan hipotesis alternatif H_1. Jika Ω merupakan ruang parameter, maka hipotesis nol berkaitan dengan Ω_0 yaitu himpunan bagian dari Ω. Hipotesis alternatif berkaitan dengan komplemennya, $\Omega - \Omega_0$. Dalam kasus hipotesis sederhana dengan $\Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$, himpunan Ω_0 dan himpunan komplemennya mempunyai satu anggota saja, $\Omega_0 = \{\theta_0\}$ dan $\Omega - \Omega_0 = \{\theta_1\}$, di mana $\theta_0 \neq \theta_1$ (Bain and Engelhardt, 1992).

Pengujian hipotesis akan mengacu pada proses untuk memutuskan kebenaran atau kesalahan hipotesis tersebut berdasarkan data sampel yang diambil dari populasi. Dengan kata lain, penerimaan atau penolakan hipotesis nol didasarkan pada data sampel. Statistik penguji yang sesuai dengan hipotesis akan membagi daerah di bawah kurva distribusi samplingnya menjadi dua daerah, yaitu daerah kritis dan daerah penerimaan. Jika nilai statistik penguji dari data sampel berada di daerah kritis, maka H_0 akan ditolak. Sebaliknya, jika nilai statistik penguji dari data sampel tidak berada di daerah kritis, maka H_0 akan diterima.

Sebagian besar prosedur pengujian hipotesis statistik yang telah dikembangkan sejauh ini dibangun dengan asumsi bahwa populasi didistribusikan menurut distribusi normal. Padahal kenyataannya seringkali asumsi nornalitas tidak dipenuhi. Tujuan artikel ini adalah untuk mengembangkan pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi yang tidak dipenuhinya asumsi normalitas dan homogenitas.

Metode Penelitian

Penelitian dimulai dengan mengkaji berbagai pustaka terkait pengujian hipotesis secara parametrik mengenai dua mean populasi, metode bootstrap dan pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi dengan metode bootstrap. Berdasarkan teori yang dihasilkan dari berbagai kajian pustaka tersebut, selanjutnya dibuat program komputasinya dengan menggunakan MATLAB. Program komputer digunakan untuk menguji hipotesis mengenai dua mean populasi.

Pengujian Hipotesis Secara Parametrik

Misalkan dua sampel yang saling bebas diambil dari dua populasi normal yang berbeda. Misalkan $z = (z_1, z_2. \cdots, z_n)$ merupakan suatu sampel random berukuran n yang dimbil dari populasi 1 dengan mean μ_1 dan variansi σ_1^2. Juga misalkan $y = (y_1, y_2. \cdots, y_m)$ merupakan suatu sampel random berukuran m yang diambil dari populasi 2 dengan mean μ_2 dan variansi σ_2^2. Jika dipenuhi dua asumsi, yaitu kedua populasi berdistribusi normal dan kedua variansi sama $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ tidak diketahui, maka untuk menguji hipotesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

digunakan statistik penguji:

$$t_0 = \frac{\bar{z} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

di mana

$$s = \frac{s_1^2(n-1) + s_2^2(m-1)}{n + m - 2}$$

Pada taraf signifikansi α, hipotesis H_0 ditolak jika $t_0 > t_{\alpha/2}(n + m - 2)$ atau $t_0 < -t_{\alpha/2}(n + m - 2)$ (Walpole dan Myers, 1995); Suparman, 2012).

Jika tidak ada asumsi bahwa variansi kedua populasi adalah sama, maka uji hipoitesis didasarkan pada

$$t(x) = \frac{\bar{z} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}}$$

Namun karena distribusi sampling t(x) tidak lagi berdistribusi t, maka beberapa pendekatan diusulkan. Dalam literatur, ini dikenal sebagai masalah Behrens-Fisher (Efron and Tibshirani, 1993).

Bootstrap

Metode bootstrap adalah metode berbasis komputer untuk mengestimasi suatu distribusi dengan menggunakan sampel bootstrap (Munandar *et al.*, 2008). Misalnya x = (x_1, ..., x_n) merupakan sampel random yang diambil dari populasi berdistribusi F. Pertimbangkan statistik t(x). Salah satu tujuan dalam inferensi statistik adalah untuk menentukan distribusi sampling dari statistik t(x). Jika Fn adalah distribusi empiris dari x yang dimbil dengan probabilitas 1/n pada setiap x_1, ..., x_n, maka versi bootstrap dari t(x) diberikan oleh t(x^{*b}) di mana x^{*b} = (x_1^{*b},

$x_2{}^{*b}$, ... , $x_n{}^{*b}$) adalah sampel bootstrap ke b (b =1, 2, …, B) yang diambil dengan pengembalian dari $x = (x_1, ..., x_n)$ (Efron and Tibshirani, 1993; Gentle, 2002).

Uji Hipotesis Bootstrap

Dua sampel random $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ yang saling independen diambil dari dua populasi, yang mungkin berbeda. Misalkan populasi 1 mempunyai mean μ_1 dan variansi σ_1^2. Sedangkan populasi 2 mempunyai mean μ_2 dan variansi σ_2^2. berdasarkan sampel z dan y, akan diuji hipotesis bahwa tidak ada perbedaan mean antara populasi 1 dan populasi 2. Sehingga

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Asumsi variansi sama merupakan asumsi yang sangat penting untuk uji t karena menyederhanakan bentuk distribusi sampling yang dihasilkan. Dalam mempertimbangkan pengujian hipotesis dengan menggunakan metode bootstrap tidak ada alasan kuat untuk menganggap bahwa variansi kedua populasi sama. Oleh karena itu di sini tidak diasumsikan bahwa variansi kedua populasi adalah sama. Sehingga uji hipotesis didasarkan pada statistik penguji

$$t(x) = \frac{\bar{z} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}}$$

Kemudian dihitung nilai statistik penguji untuk tiap sampel bootstrap (b = 1,2, …, B)

$$t(x^{*b}) = \frac{\bar{z}^{*b} - \bar{y}^{*b}}{\sqrt{\frac{s_1^{2*b}}{n} + \frac{s_2^{2*b}}{m}}} .$$

Dan nilai dari *Achieved Significance Level* (ASL) bootstrap diperoleh dengan rumus berikut :

$$\hat{ASL}_{boot} = \frac{\#\left\{\left|t(x^{*b})\right| \geq \left|t(x)\right|\right\}}{B}$$

Pada taraf signifikansi α, jika $\hat{ASL}_{boot} < \alpha$ maka H_0 ditolak.

Prosedur pengujian ini disajikan sebagai berikut :

1. Misalkan $\hat{F}$ menempatkan probabilitas yang sama pada titik $\tilde{z}_i = z_i - \bar{z} + \bar{x}$ untuk i = 1,2, …, n dan $\hat{G}$ menempatkan probabilitas yang sama pada titik $\tilde{y}_i = y_i - \bar{y} + \bar{x}$ untuk i=1,2, …m, di mana $\bar{z}$ dan $\bar{y}$ adalah mean masing-masing sampel dan $\bar{x}$ adalah mean dari sampel gabungan.
2. Bentuk B himpunan data bootstrap (z^{*b}, y^{*b}) di mana z^{*b} adalah sampel dengan penggantian dari $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \cdots, \tilde{z}_n$

dan y^{*b} adalah sampel dengan penggantian dari $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \cdots, \tilde{y}_m$.

3. Mengevaluasi pada setiap set data

$$t(x^{*b}) = \frac{\bar{z}^{*b} - \bar{y}^{*b}}{\sqrt{\frac{s_1^{2*b}}{n} + \frac{s_2^{2*b}}{m}}}$$

4. Menaksir nilai ASL_{boot} dengan menggunakan persamaan

$$\hat{ASL}_{boot} = \frac{\#\left\{\left|t(x^{*b})\right| \geq \left|t(x)\right|\right\}}{B}$$

Berikut merupakan listing program yang ditulis dalam instruksi bahasa pemrograman MATLAB untuk pengujian hipotesis mengenai mean dua populasi :

```
clear all
clc

alpha = 0.05
z=normrnd(2,2,n,1);
y=normrnd(4,3,m,1);
B=1000

n=length(z); zbar=mean(z);
m=length(y); ybar=mean(y);
xbar=((n*zbar)+(m*ybar))/(n+m);
ztilda=z-zbar+xbar; ytilda=y-ybar+xbar;

tobs=(mean(z)-mean(y))
   /(sqrt(var(z)/n+var(y)/m));

zboot=zeros(n,B); yboot=zeros(m,B);
tboot=zeros(1,B);
nt=0;
for i=1:B,
   b1=randi(n,n,1); b2=randi(m,m,1);
   zboot(:,i)=ztilda(b1);
   yboot(:,i)=ytilda(b2);
   tboot(i)=(mean(zboot(:,i))
            -mean(yboot(:,i)))
            /sqrt(var(zboot(:,i))
            /n+var(yboot(:,i))/m);
   if abs(tboot(i))>=abs(tobs)
      nt=nt+1;
   else
      nt=nt;
   end;
end;
aslboot=nt/B

if aslboot<=alpha
   disp('Tolak hipotesis nol')
else
   disp('Terima hipotesis nol')
end;
```

Hasil dan Pembahasan

Sebagai ilustrasi, di sini metode bootstrap akan diimplementasikan untuk menguji hipotesis mengenai dua mean populasi pada data sintesis (studi simulasi) dan data riil (studi kasus). Studi simulasi (Law and Kelton, 2000) ditempuh untuk mengkonfirmasi kinerja dari pendekatan yang diusulkan apakah dapat bekerja dengan baik. Sedangkan studi kasus diberikan untuk memberikan contoh penerapan penelitian dalam memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Komputasi ditulis dalam bahasa

 ISSN: 2088-687X

pemrograman MATLAB (Hanselman and Littlefield, 1997).

Data Sintesis

Tabel 1 menunjukkan data simulasi sampel 1 diambil dari populasi berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 16. Sedangkan sampel 2 diambil dari populasi berdistribusi normal dengan mean 5 dan variansi 25.

Tabel 1 : Data sintesis

z	y
-1.6665	1.5244
-0.9786	12.7383
-2.3251	7.2338
4.7958	-0.3053
-7.6532	4.5957
-0.8577	6.2931
1.1777	18.9566
-2.3565	3.7741
-1.3786	6.3701
2.9073	-0.1921
7.855	5.2916
2.9077	5.3109
-3.8819	1.8309
2.351	-1.7485
5.983	1.4346
-4.4519	
3.3374	
4.3556	
	8.6611
	1.1849
	3.8737
	0.651
	6.0478
	4.6373
	-4.4509

Kedua sampel digunakan untuk menguji hipotesis

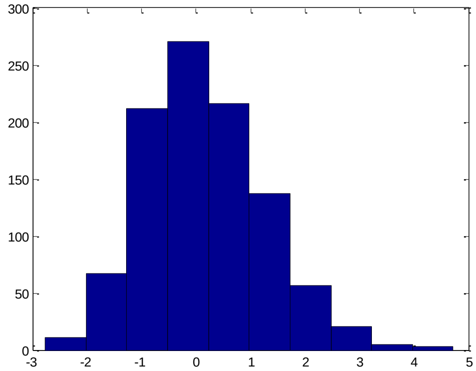
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Tabel 2 menyajikan hasil pengujian hipotesis untuk nilai $\alpha = 0.05$ dan berbagai nilai B.

Tabel 2 : Hasil pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi sintesis

B	$\hat{ASL}_{boot}$	Kesimpulan
1000	0.0440	Tolak H_0
5000	0.0436	Tolak H_0
10000	0.0417	Tolak H_0
20000	0.0428	Tolak H_0



Gambar 1 : Nilai statistik penguji untuk 1000 sampel bootstrap.

Jadi terdapat perbedaan antara mean populasi 1 dengan mean populasi 2. Dari data simulasi terlihat bahwa uji hipotesis bootstrap memberikan keputusan yang benar.

Data Riil

Tabel 3 menunjukkan data riil (Rokhmah, 2012). Sampel 1 menyatakan nilai tes hasil belajar matematika kelas yang menggunakan strategi pembelajaran aktif *Index Card Match* (ICM). Sedangkan sampel 2 menyatakan nilai tes hasil belajar matematika kelas yang menggunakan strategi pembelajaran aktif *Team Quiz* (TQ).

Kedua sampel digunakan untuk menguji hipotesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Tabel 4 menyajikan hasil pengujian hipotesis untuk nilai $\alpha = 0.05$ dan berbagai nilai B.

Tabel 4 : Hasil pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi riil

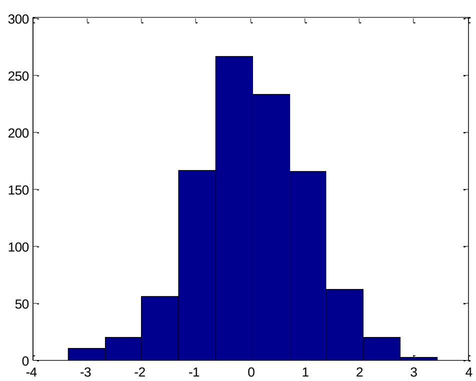
B	$\hat{ASL}_{boot}$	Kesimpulan
1000	0.0040	Tolak H_0
5000	0.0048	Tolak H_0
10000	0.0059	Tolak H_0
20000	0.0060	Tolak H_0

Tabel 3 : Nilai tes hasil belajar matematika dengan strategi ICM dan TQ

ICM	TQ
62	50
44	62
50	25
56	62
81	69
62	44
31	44
50	31
56	62
75	81
69	69
88	75
75	75
75	50

81	50
50	56
81	44
75	31
69	25
75	50
69	56
75	50
81	62
50	75
62	62
75	75
69	38
56	31
	69

Sedangkan hasil nilai statistik penguji untuk 1000 sampel bootstrap disajikan dalam Gambar 2.



Gambar 2 : Nilai statistik penguji untuk 1000 sampel bootstrap.

Jadi terdapat perbedaan antara mean nilai tes hasil belajar matematika kelas yang menggunakan strategi pembelajaran aktif ICM dengan nilai tes hasil belajar matematika kelas yang menggunakan strategi pembelajaran aktif TQ.

Kesimpulan

Dalam artikel ini dikembangkan uji hipotesis mengenai dua mean populasi yang tidak memerlukan prasarat normalitas dan homogenitas.

Metode bootstrap dapat menguji kesamaan dua mean populasi baik jika kedua variansinya diketahui sama, maupun jika mungkin kedua variansinya tidak sama. Dalam kasus prasarat normalitas dan homogenitas dipenuhi sehingga memungkinkan digunakan uji t, maka metode bootstrap ini akan memberikan suatu alternatif untuk pengujian hipotesis mengenai dua mean populasi.

Pustaka

Bain, L.J. and Engelhardt, M., 1992, *Introduction to Probability and mathematical statistics*, California : Duxbury Press.

Efron, B. and Tibshirani, R.J., 1993, *An Introduction to the Bootstrap*, New York : Chapman & Hall.

Gentle, J.E., 2002, *Elements of Computational Statistics*, New York : Springer-Verlag.

Hanselman, D and Littlefield, B., 1997 *Matlab : Bahasa Komputasi Teknis*, Yogyakarta : Andi.

Law, A.M. and Kelton, W.D., 2000, "*Simulation Modeling and Analysis"*, Singapore : McGraw-Hill.

Munandar, A., Fajriyah, R dan Suparman, 2008, Bootstrap dengan S-plus dalam Uji Hipotesis Mean Satu Sampel. *Jurnal Eksakta*, 10(1) : 36-46.

Rokhmah, N. 2012, *Efektivitas Penggunaan Strategi Pembelajaran Aktif Index Card Match dan Team Quiz Terhadap Hasil Belajar Matematika Siswa Kelas VII Semester Genap SMP Muhammadiyah 13 Wonosegoro Kabupaten Boyolali Tahun Pelajaran 2011/2012*, Yogyakarta : Skripsi Pendidikan Matematika UAD.

Suparman, 2012, *Statistika Matematika*, Yogyakarta : FMIPA UAD Press.

Walpole, R.E dan Myers, R.H., 1995, Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan, Bandung : ITB Press.

Alamat Redaksi
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UAD
Jl. Prof. Dr. Soepomo, SH Warungboto Yogyakarta 55164
Telp. (0274) 8250518 E-mail : admathedu@gmail.com
Website : http://admathedu.uad.ac.id

UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN
Perguruan Tinggi Muhammadiyah Yogyakarta

9 772088 687008