Pelabelan *Cordial* pada Beberapa Graf Gabungan

Zulfa Rosdiani[1], Dian Eka Wijayanti[2]
[1]*Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Terapan, Universitas Ahmad Dahlan*
Email: zulfa1500015021@webmail.uad.ac.id
[2] *Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Terapan, Universitas Ahmad Dahlan*

Submitted :....................... Reviewed :......................... Accepted:....................

ABSTRAK

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan $G = (V, E)$ dimana V adalah himpunan tak kosong dari titik-titik sedangkan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik dari graf. Pelabelan graf adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan positif. Pelabelan *cordial* merupakan pemetaan biner $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ yang menginduksi pelabelan pada sisi uv didefinisikan dengan $|f(u) - f(v)|$ sehingga memenuhi syarat syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$.Berdasarkan hasil penelitian, graf *circulant* $C_n(1,2)$ dengan $n \geq 6$, $C_n(1,3)$ dengan $n \geq 8$, dan $C_n(1,4)$ dengan $n \geq 10$ adalah *cordial*. Selain itu, graf $C_n(1,2) + K_1$ dengan $n \geq 6$, $C_n(1,3) + K_1$ dengan $n \geq 8$, dan $C_n(1,4) \odot 2K_1$ dengan $n \geq 10$ adalah *cordial*. Beberapa graf tersebut memiliki fungsi pelabelan yang sama yaitu n genap.

Kata kunci : *Graf, Pelabelan Graf, Pelabelan Cordial, Graf Circulant.*

PENDAHULUAN

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konisberg. Salah satu hasil perkembangan teori graf yaitu munculnya konsep tentang pelabelan yang diperkenalkan pertama kali oleh Alex Rosa pada tahun 1967. Pelabelan graf memainkan peran vital dalam bidang ilmu pengetahuan seperti astronomi, teori pengkodean, radar, dan lain-lain. Selain itu, pelabelan graf dapat digunakan untuk memodelkan suatu masalah yang dipresentasikan oleh titik dan garis(sisi) agar memudahkan dalam menganalisis dan mengambil kesimpulan. Ada banyak jenis pelabelan graf yang dikembangkan salah satunya adalah pelabelan *cordial*. Pelabelan *cordial* muncul berawal dari suatu kegagalan dalam membuktikan dugaan bahwa pelabelan *gracefull* dan *harmonious* berlaku untuk semua pohon.

Definisi 1 (Sudakov, 2016) Graf G adalah pasangan himpuanan $G = (V, E)$ dimana V adalah himpunan titik pada graf G ditulis $V(G)$ dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik dari graf ditulis $E(G)$.

Definisi 2 (Morris, 2000) Graf sirkulan (*Circulant Graphs*) $C_n(1,2,\dots, [\, n/2 \,])$ adalah graf yang dapat dibangun dari graf siklus dengan *n* titik $(v_1 , v_2 ,\dots, v_n)$ secara terurut dan menambahkan sisi-sisi pada setiap titik dengan jarak $(1,2,\dots, n/2)$.

Definisi 3 (Beineke, 2000) Graf lengkap (*Complete Graphs*) K n adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya.

Definisi 4 (Gallian, 2017) Pelabelan graf adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan positif, jika domain dari fungsi adalah himpunan titik maka disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya adalah himpunan titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling).*

Definisi 5 (Cahit, 1987) Suatu pelabelan disebut pelabelan *cordial* jika ada pemetaan biner $f: V(G) \to \{0,1\}$ yang menginduksi pelabelan pada sisi $e = uv$ dinyatakan dengan $f': E(G) \to \{0,1\}$ dan didefinisikan dengan $f'(e = uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$.

METODE PENELITIAN

Alat dan Bahan

Dalam penelitian alat dan bahan yang dibutuhkan yaitu literatur yang dikumpulkan berupa buku, skripsi, artikel, jurnal atau modul yang dapat mendukung penelitian.

Jalannya Penelitian

Tahapan penelitian yang akan dilakukan penulis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan graf, operasi graf, pelabelan *cordial*, dan graf *circulant*,
2. Memahami definisi pelabelan *cordial*,

3. Menentukan operasi graf yang akan digunakan,
4. Menggambar graf,
5. Mencari pelabelan *cordial* yang ada pada graf tersebut,
6. Mengamati pola-pola pelabelan *cordial* pada graf tersebut,
7. Merumuskan teorema, kemudian dibuktikan secara matematis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 6 Misalkan graf $G = C_n(1,2); n \geq 6$ dengan *n* genap, maka *G* adalah *cordial.*

Bukti. Graf *G* dengan *n* titik, jika *f* merupakan pelabelan cordial pada graf *G*, maka fungsi pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0 \text{ (mod 2).} \\ 1 & \text{jika } i = 1 \text{ (mod 2).} \end{cases}$$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & f(v_i) + f(v_{i+2}) \quad \text{untuk } 0 < i \leq \frac{n}{2}. \\ 1 & f(v_i) + f(v_{i+1}) \quad \text{untuk } \frac{n}{2} < i \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan dari pola fungsi pelabelan titik, diperoleh kondisi yaitu $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2}$ dan $e_f(0) = e_f(1) = n$. Kondisi tersebut memenuhi syarat pelabelan cordial yaitu $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| = \left|\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right| = |0| < 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| = |n - n| = |0| < 1$.

Teorema 7 Misalkan graf $G = C_n(1,3); n \geq 8$ dengan *n* genap, maka *G* adalah *cordial.*

Bukti. Graf *G* dengan *n* titik, *f* merupakan pelabelan cordial pada graf *G*, maka fungsi pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0,1 \ (mod\ 4). \\ 1 & \text{jika } i = 2,3 \ (mod\ 4). \end{cases}$$

Sebagai akibat, maka diperoleh dua kasus yaitu:

1. Kasus I: $n = 0 \ (mod\ 4)$

$$f(e_i) = 0 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 2,4, \dots, n. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 1,3, \dots, n-1. \end{cases}$$

$$f(e_i) = 1 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 1,3, \dots, n-1. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 2,4, \dots, n. \end{cases}$$

2. Kasus II: $n = 2\ (mod\ 4)$

$$f(e_i) = 0 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 2,4,\dots,n-2. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 1,3,\dots,n-3. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = n-2, i = n. \end{cases}$$

$$f(e_i) = 1 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 1,3,\dots,n-1. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 2,4,\dots,n-4. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = n-1. \\ f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

Berdasarkan dari pola fungsi pelabelan titik, diperoleh kondisi yaitu $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2}$ dan $e_f(0) = e_f(1) = n$. Kondisi tersebut memenuhi syarat pelabelan cordial yaitu $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| = \left|\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right| = |0| < 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| = |n - n| = |0| < 1$.

Teorema 8 Misalkan graf $G = C_n(1,4); n \geq 10$ dengan *n* genap, maka *G* adalah *cordial.*

Bukti. Graf *G* dengan *n* titik, *f* merupakan pelabelan cordial pada graf *G*, maka fungsi pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0\ (mod\ 2). \\ 1 & \text{jika } i = 1\ (mod\ 2). \end{cases}$$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & f(v_i) + f(v_{i+4}) \quad \text{untuk } i = 1,2,\dots,n. \\ 1 & f(v_i) + f(v_{i+1}) \quad \text{untuk } i = 1,2,\dots,n. \end{cases}$$

Berdasarkan dari pola fungsi pelabelan titik, diperoleh kondisi yaitu $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2}$ dan $e_f(0) = e_f(1) = n$. Kondisi tersebut memenuhi syarat pelabelan cordial yaitu $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| = \left|\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right| = |0| < 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| = |n - n| = |0| < 1$.

Teorema 9 Misalkan graf $G = C_n(1,2) + K_1; n \geq 6$ dengan *n* genap, maka *G* adalah *cordial*.

Bukti. Graf *G* dengan titik sebanyak *n+1, f* merupakan pelabelan cordial pada graf *G*, maka fungsi pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0\ (mod\ 2). \\ 1 & \text{jika } i = 1\ (mod\ 2). \end{cases}$$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$$f(e_i) = 0 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+2}) & \text{untuk } i = 1,2,\dots,n. \\ f(v_i) + f(v_j) & \text{untuk } i = 1,3,\dots,n-1.\ j = n+1. \end{cases}$$

$$f(e_i) = 1 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 1,2,\dots,n. \\ f(v_i) + f(v_j) & \text{untuk } i = 2,4,\dots,n.\ j = n+1. \end{cases}$$

Berdasarkan dari pola fungsi pelabelan titik, diperoleh kondisi yaitu $v_f(0) = \frac{n}{2}, v_f(1) = \frac{n}{2} + 1$ dan $e_f(0) = e_f(1) = 2n - \frac{n}{2}$. Kondisi tersebut memenuhi syarat pelabelan cordial yaitu $|v_f(0) - v_f(1)| = \left|\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right| = |-1| = 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| = \left|2n - \frac{n}{2} - \left(2n - \frac{n}{2}\right)\right| = |0| < 1$.

Teorema 10 Misalkan graf $G = C_n(1,3) + K_1; n \geq 8$ dengan *n* genap, maka *G* adalah *cordial*.

Bukti. Graf *G* dengan titik sebanyak *n+1*, *f* merupakan pelabelan cordial pada graf *G*, maka fungsi pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0,1\ (mod\ 4). \\ 1 & \text{jika } i = 2,3\ (mod\ 4). \end{cases}$$

Sebagai akibat, maka diperoleh dua kasus yaitu:

1. Kasus I: $n = 0\ (mod\ 4)$

$$f(e_i) = 0 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 1,3,\dots,n-1. \\ f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 2,4,\dots,n. \\ f(v_i) + f(v_j) & \text{untuk } i = 2,3\ (mod\ 4), \qquad j = n+1. \end{cases}$$

$$f(e_i) = 1 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 1,3,\dots,n-1. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 2,4,\dots,n. \\ f(v_i) + f(v_j) & \text{untuk } i = 1,4\ (mod\ 4), \qquad j = n+1 \end{cases}$$

2. Kasus II: $n = 2\ (mod\ 4)$

$$f(e_i) = 0 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 2,4,\dots,n-2. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 1,3,\dots,n-3. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = n-2, \qquad i = n. \end{cases}$$

$$f(e_i) = 1 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 1,3,\dots,n-1. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = 2,4,\dots,n-4. \\ f(v_i) + f(v_{i+3}) & \text{untuk } i = n-1. \\ f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

Berdasarkan dari pola fungsi pelabelan titik, diperoleh kondisi yaitu $v_f(0) = \frac{n}{2}, v_f(1) = \frac{n}{2} + 1$ dan $e_f(0) = e_f(1) = n + \frac{n}{2}$. Kondisi tersebut memenuhi syarat pelabelan cordial yaitu $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| = \left|\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right| = |-1| = 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| = \left|n + \frac{n}{2} - \left(n + \frac{n}{2}\right)\right| = |0| < 1$.

Teorema 11 Misalkan graf $G = C_n(1,4) \odot 2K_1; n \geq 10$ dengan *n* genap, maka *G* adalah *cordial.*

Bukti. Graf *G* memiliki titik sebanyak $3n$. Jika *f* merupakan pelabelan cordial pada graf *G*, maka fungsi pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0\ (mod\ 2). \\ 1 & \text{jika } i = 1\ (mod\ 2). \end{cases}$$

Sebagai akibat, maka diperoleh:

$$f(e_i) = 0 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+4}) & \text{untuk } i = 1,2, \dots, n. \\ f(v_i) + f(v_j) & \text{untuk } i = 1,2, \dots, n.\ \ j = n+1, n+2, \dots, 3n. \end{cases}$$

$$f(e_i) = 1 \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) & \text{untuk } i = 1,2, \dots, n. \\ f(v_i) + f(v_{j+1}) & \text{untuk } i = 1,2, \dots, n.\ \ j = n+1, n+2, \dots, 3n. \end{cases}$$

Berdasarkan dari pola fungsi pelabelan titik, diperoleh kondisi yaitu $v_f(0) = v_f(1) = \frac{n}{2}$ dan $e_f(0) = e_f(1) = n$. Kondisi tersebut memeuhi syarat pelabelan cordial yaitu $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| = \left|n + \frac{n}{2} - \left(n + \frac{n}{2}\right)\right| = |0| < 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| = |2n - 2n| = |0| < 1$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Pelabelan *cordial* merupakan pemetaan biner $f: V(G) \to \{0,1\}$ yang menginduksi pelabelan pada sisi $e = uv$ dinyatakan dengan $f': E(G) \to \{0,1\}$ dan didefinisikan dengan $f'(e = uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga memenuhi syarat syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$.
2. Fungsi pelabelan untuk setiap *n* genap pada garf *circulant* dan beberapa graf gabungan adalah sebagai berikut:

- Untuk graf *circulant* $C_n(1,2)$ dan graf $C_n(1,2) + K_1$ yaitu:
  $$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0 \text{ (mod 2).} \\ 1 & \text{jika } i = 1 \text{ (mod 2).} \end{cases}$$
- Untuk graf *circulant* $C_n(1,3)$ dan graf $C_n(1,3) + K_1$ yaitu:
  $$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0,1\ (mod\ 4). \\ 1 & \text{jika } i = 2,3\ (mod\ 4). \end{cases}$$
- Untuk graf *circulant* $C_n(1,4)$ dan graf $C_n(1,4) \odot 2K_1$ yaitu:
  $$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = 0 \text{ (mod 2).} \\ 1 & \text{jika } i = 1 \text{ (mod 2).} \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

Beineke, Lowell W. 2000. *Graph Theory: Introduction to Graphs.* Washington DC: CRC Press, 532-550.

Cahit, I. 1987. *Cordial Graphs: A Weaker Version of Graceful and Harmonious Graphs, Arc Combinatorial,* 23, 102-107.

Gallian, J. A. 2017. *A Dynamic Survey of Graph Labeling.* Mathematics Subject Classifications: 05C78, 73.

Rokad, A. H., & Patadiya, K. M. 2017. *Cordial Labeling of Some Graphs*. International Journals of Multi Dimensional Research, Vol .09 Issue-01.

Rosen, K. H. Dkk. 2000. *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*. New York: CRC Press,

Sudakov, Benny. 2016. *Graph Theory*. ETC, 4.

Widyawati, T., & Rahadjeng, M. B. 2014. *Pelabelan Cordial dan E-Cordial pada Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Roda*. MATHunesa (Volume 3 No 3).