

**PENGANTAR
REVERSIBLE JUMP MARKOV
CHAIN MONTE CARLO
DAN APLIKASINYA**



Dr. Suparman, M.Si., DEA.

PENGANTAR
REVERSIBLE JUMP MARKOV CHAIN MONTE CARLO
DAN APLIKASINYA

Dr. Suparman, M.Si., DEA.



Laboratorium Teknologi Pembelajaran Sains

**PENGANTAR REVERSIBLE JUMP MARKOV CHAIN MONTE CARLO
DAN APLIKASINYA**

Oleh : Dr. Suparman, M.Si., DEA
Hak Cipta @ 2017 pada Penulis

Penerbit :
Laboratorium Teknologi Pembelajaran Sains | FKIP | Universitas Ahmad Dahlan
Yogyakarta | <http://ltps.uad.ac.id>

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak buku ini sebagian atau seluruhnya, dalam bentuk dan dengan cara apa pun juga, baik secara mekanis maupun elektronik, termasuk fotokopi, rekaman, dan lain-lain tanpa izin tertulis dari Penulis.

Edisi pertama
Cetakan pertama, 2017

Editor : Prof. Nengah Suparta, M.Si., Ph.D.
Desain Cover : Magistera Laningratum
Tata Letak : Ayudea Az Zahra Zulfa

Dr. Suparman, M.Si., DEA
Pengantar Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo dan Aplikasinya.
Yogyakarta: Lab. Teknologi Pembelajaran Sains UAD, 2017
vi+74 hlm; 18,5 x 26,5 cm.
ISBN : 978-602-50564-1-3
Buku Referensi

Kutipan Pasal 44 : Sangsi pelanggaran undang-undang hak cipta 1987

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak mengumumkan atau memperbanyak suatu ciptaan atau memberi ijin untuk itu, dipidana dengan pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 100.000.000,- (seratus juta rupiah).
2. Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta sebagaimana dimaksud ayat 1 (satu), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 50.000.000,- (lima puluh juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Buku ini disusun berdasarkan penelitian yang penulis lakukan selama beberapa tahun. Di samping itu, penulis juga telah mengkaji berbagai literatur dan hasil penelitian orang lain. Buku ini ditulis sebagai buku referensi untuk para peneliti, para pengajar di Perguruan Tinggi dan para mahasiswa dalam memahami Metode Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo. Dalam buku ini disertakan beberapa aplikasinya sehingga membuat buku ini cocok juga untuk para praktisi yang ingin memahami Metode Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo dan permasalahan yang bisa diselesaikan dengan metode ini.

Dalam buku ini dibahas berbagai hal, yaitu : 1) Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo; 2) Segmentasi Model Autoregresif Konstan Sepotong-Sepotong; 3) Segmentasi Model Moving Average Konstan Sepotong-Sepotong; 4) Regresi Linear per Potongan; dan 5) Regresi Polinomial per Potongan.

Karena penulis tidak mungkin menyelesaikan buku ini sendirian, penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih pada berbagai pihak yang telah mendukung kelancaran penulisan buku ini. Akhirnya penulis tetap mengharapkan berbagai masukan, kritik dan saran demi perbaikan karya di masa yang akan datang.

Yogyakarta, September 2017

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI	v
BAB 1 Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Pembentukan Ukuran	4
1.3 Perhitungan Fungsi Kepadatan	6
BAB 2 Segmentasi Model Autoregresif Konstan Sepotong-Sepotong	9
2.1 Rumusan Masalah	9
2.2 Metode	10
2.3 Hasil dan Diskusi	20
2.4 Kesimpulan	28
BAB 3 Segmentasi Model Moving Average Konstan Sepotong-Sepotong	31
3.1 Rumusan Masalah	31
3.2 Tinjauan Pustaka	31
3.3 Metode yang Digunakan	33
3.4 Hasil Penelitian dan Pembahasan	36
3.5 Kesimpulan	43
BAB 4 Estimasi Model Autoregresif Moving Average	45
4.1 Rumusan Masalah	45
4.2 Bayesian Hirarki	46
4.3 Metode Reversible Jump MCMC	48
4.4 Hasil dan Pembahasan	53
4.5 Kesimpulan	58
BAB 5 Regresi Linear per Potongan	59
5.1 Rumusan Masalah	59
5.2 Bayesian Hirarki	60
5.3 Metode Reversible Jump MCMC	63
5.4 Kesimpulan	64

BAB 6	Regresi Polinomial per Potongan	65
	6.1 Rumusan Masalah	65
	6.2 Bayesian Hirarki	66
	6.3 Metode Reversible Jump MCMC	69
	6.4 Kesimpulan	70
DAFTAR PUSTAKA		71

BAB 1

REVERSIBLE JUMP MARKOV CHAIN MONTE CARLO

1.1 PENDAHULUAN

Misalkan E menyatakan himpunan keadaan dan π menyatakan probabilitas keadaan pada E . Algoritma Metropolis-Hastings menghasilkan rantai Markov pada E yang mempunyai probabilitas stasioner sama dengan π . Pembentukan rantai Markov tersebut mendasarkan pada kondisi reversibilitate. Probabilitas π disebut stasioner jika untuk kernel K dari rantai Markov pada E berlaku :

$$\pi(x) = \sum_{y \in E} \pi(y)K(y, x)$$

untuk semua $x \in E$. Probabilitas π disebut reversibel untuk kernel K jika

$$\pi(x)K(x, y) = \pi(y)K(y, x)$$

untuk semua $x, y \in E$. Jelas bahwa reversibilitate dari π berimplikasi pada stasionaritas untuk kernel K . Sifat ini digunakan untuk membentuk kernel K sedemikian sehingga π merupakan distribusi stasioner. Misalkan q menyatakan kernel bantu pada E . Dimulai dari $x \in E$, penarikan sebuah titik baru y dilakukan dalam 2 tahap :

1. Titik y ditarik menurut $q(x, y)$
2. Titik y diterima dengan probabilitas

$$\rho(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)q(y, x)}{\pi(x)q(x, y)} \right\}$$

Kernel K didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} K(x, y) = q(x, y)\rho(x, y) & \text{jika } x \neq y \\ K(x, x) = q(x, x) + \sum_{y \neq x} [1 - \rho(x, y)] \end{cases}$$

Kernel K ini memenuhi persamaan reversibilitate. Dibawah kondisi bahwa rantai Markov adalah irreduktibel dan aperiodik maka probabilitas π juga merupakan probabilitas limit.

Misalkan E menyatakan ruang yang dibentuk oleh dua ruang yang berbeda dimensinya.

$$E = \{1\}_x \mathcal{R}^{n_1} \cup \{2\}_x \mathcal{R}^{n_2}$$

dengan n_1 dan n_2 adalah bilangan bulat yang berbeda. Untuk selanjutnya $\{1\}_x \mathcal{R}^{n_1}$ ditulis dengan \mathcal{R}^{n_1} dan $\{2\}_x \mathcal{R}^{n_2}$ ditulis dengan \mathcal{R}^{n_2} . Dengan demikian himpunan E dibentuk oleh dua unsur yaitu unsur dari \mathcal{R}^{n_1} dan unsur dari \mathcal{R}^{n_2} . Demikian pula, ukuran π dibentuk oleh π_1 dibawa oleh \mathcal{R}^{n_1} dan π_2 dibawa oleh \mathcal{R}^{n_2} .

Di dalam \mathcal{R}^{n_1} atau \mathcal{R}^{n_2} , algoritma Metropolis-Hastings dapat berfungsi tanpa kesulitan. Sebaliknya perlu mendefinisikan tranformasi dari \mathcal{R}^{n_1} menuju \mathcal{R}^{n_2} atau sebaliknya yang memenuhi persamaan reversibilitate. Misalkan q menyatakan kernel instrumental dan ρ menyatakan probabilitas penerimaan/penolakan. Maka harus dipenuhi

$$\int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx') \rho(x, x') = \int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx) \rho(x', x)$$

untuk semua $A \subset B_1$ dan $B \subset B_2$. Atau

$$\int_A \pi(dx) \int_B q_{12}(x, dx') \rho(x, x') = \int_B \pi(dx') \int_A q_{21}(x', dx) \rho(x', x)$$

Dimana q_{12} menyatakan kernel probabilitas dari \mathcal{R}^{n_1} menuju \mathcal{R}^{n_2} dan q_{21} menyatakan kernel probabilitas dari \mathcal{R}^{n_2} menuju \mathcal{R}^{n_1} .

Misalkan bahwa ukuran dan kernel mempunyai fungsi kepadatan terhadap ukuran Lebesque, maka

$$\begin{aligned} \iint_{A \times B} \pi_1(x) q_{12}(x, x') \rho(x, x') dx dx' &= \iint_{B \times A} \pi_2(x') q_{21}(x', x) \rho(x', x) dx' dx \\ &= \iint_{A \times B} \pi_2(x') q_{21}(x', x) \rho(x', x) dx dx' \end{aligned}$$

Atau

$$\pi_1(x) q_{12}(x, x') \rho(x, x') = \pi_2(x') q_{21}(x', x) \rho(x', x)$$

Jadi

$$\rho(x', x) = \min \left\{ 1, \frac{\pi_2(x')q_{21}(x', x)}{\pi_1(x)q_{12}(x, x')} \right\}$$

Selanjutnya dibentuk ukuran ξ dalam himpunan $E \times E$ simetris dan memenuhi $\pi(dx)q(x, dx')$ mempunyai fungsi kepadatan $f(x, x')$ dan $\pi(dx')q(x', dx)$ mempunyai fungsi kepadatan $f(x', x)$ terhadap ξ . Ingatlah bahwa ukuran ξ adalah simetris jika dan hanya jika untuk semua fungsi terukur positif $\varphi(x, y)$ diatas $E \times E$ berlaku

$$\iint_{E \times E} \varphi(x, y)\xi(dx, dy) = \iint_{E \times E} \varphi(y, x)\xi(dx, dy)$$

Karena ukuran ini simetris, maka

$$\begin{aligned} \int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx')\rho(x, x') &= \iint_{A \times B} f(x, x')\rho(x, x')\xi(dx, dx') \\ &= \iint_{B \times A} f(x', x)\rho(x', x)\xi(dx, dx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx)\rho(x', x) &= \iint_{B \times A} f(x', x)\rho(x', x)\xi(dx', dx) \\ &= \iint_{B \times A} f(x, x')\rho(x, x')\xi(dx, dx') \end{aligned}$$

Persamaan reversibilitate menjadi

$$\iint_{B \times A} f(x', x)\rho(x', x)\xi(dx, dx') = \iint_{B \times A} f(x, x')\rho(x, x')\xi(dx, dx')$$

Agar supaya persamaan ini dipenuhi, cukup dipenuhi

$$f(x', x) \rho(x', x) = f(x, x') \rho(x, x')$$

untuk semua $(x, x') \in E \times E$. Atau

$$\rho(x, x') = \min \left\{ 1, \frac{f(x', x)}{f(x, x')} \right\}.$$

Permasalahan selanjutnya adalah bagaimana membentuk ukuran ξ yang simetris diatas $E \times E$ dan fungsi kepadatan f yang berkaitan dengan transformasi yang dilakukan.

1.2 PEMBENTUKAN UKURAN

Ide umum adalah melengkapi dua ruang \mathcal{R}^{n_1} dan \mathcal{R}^{n_2} untuk berada dalam ruang yang sama dimensinya. Misalkan m_1 dan m_2 adalah dua bilangan positif sedemikian sehingga

$$n_1 + m_1 = n_2 + m_2$$

Selanjutnya mendefinisikan transformasi-transformasi yang bersesuaian. Misalkan

$$\begin{cases} g_2 : \mathcal{R}^{n_1+m_1} \rightarrow \mathcal{R}^{n_2} \\ (x, x_1) \rightarrow g_2(x, x_1) \end{cases}$$

dan

$$\begin{cases} g_1 : \mathcal{R}^{n_2+m_2} \rightarrow \mathcal{R}^{n_1} \\ (x', x_2) \rightarrow g_1(x', x_2) \end{cases}$$

Anggap bahwa ada ijektivitas dari transformasi-transformasi terhadap komponen, yaitu untuk $i = 1, 2$ berlaku

$$g_i(u, \alpha) = g_i(u, \beta) \Rightarrow \alpha = \beta$$

Anggap juga bahwa ada sebuah rumus inversi yang memungkinkan untuk kembali ke belakang. Untuk semua $x \in \mathcal{R}^{n_1}$ dan $x_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$, terdapat dengan tunggal $x_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ sedemikian sehingga $g_1[g_2(x, x_1), x_2] = x$. Definisikan juga sebuah fungsi h_2 dari $\mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{m_1}$ ke dalam \mathcal{R}^{m_2} dengan memisalkan $x_2 = h_2(x, x_1)$ yang memenuhi persamaan sebelumnya.

Secara simetris, untuk semua $x' \in \mathcal{R}^{n_2}$ dan $x_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ terdapat dengan tunggal $x_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ sedemikian sehingga $g_2[g_1(x', x_2), x_1] = x'$. Definisikan fungsi h_1 dari $\mathcal{R}^{n_2} \times \mathcal{R}^{m_2}$ ke dalam \mathcal{R}^{m_1} dengan memisalkan $x_1 = h_1(x', x_2)$. Akhirnya sifat inversi ini memungkinkan berdasarkan g_1 dan g_2 , untuk membentuk dua aplikasi yang saling invers

$$\begin{aligned} \Psi_{12} : \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{m_1} &\rightarrow \mathcal{R}^{n_2+m_2} \\ (x, x_1) &\rightarrow (g_2(x, x_1), h_2(x, x_1)) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \Psi_{21} : \mathcal{R}^{n_2} \times \mathcal{R}^{m_3} &\rightarrow \mathcal{R}^{n_1+m_1} \\ (x', x_2) &\rightarrow (g_1(x', x_2), h_1(x', x_2)) \end{aligned}$$

Untuk ilustrasi, misalkan $n_1 = 1$ dan $n_2 = 2$. Maka lengkapi ruang \mathcal{R} dan ambil $m_1 = 1$ dan $m_2 = 0$. Definisikan aplikasi g_1 dan g_2 dengan cara berikut

$$\begin{cases} g_2 : \mathcal{R}^2 &\rightarrow \mathcal{R}^2 \\ (x, x_1) &\rightarrow g_2(x, x_1) = (x - x_1, x + x_1) \end{cases}$$

dan

$$\begin{cases} g_1 : \mathcal{R}^2 &\rightarrow \mathcal{R} \\ x := (x'_1, x'_2) &\rightarrow g_1(x) = \left(\frac{x'_1 + x'_2}{2} \right) \end{cases}$$

Ingatlah bahwa E adalah berbentuk $\{1\} \times \mathcal{R}^{n_1} \cup \{2\} \times \mathcal{R}^{n_2}$ dan ukuran ξ simetris diatas $E \times E$ berdasarkan aplikasi g_1 dan g_2 . Dimulai dengan mendefinisikan ξ pada $\mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2}$ kemudian secara simetris pada $\mathcal{R}^{m_1} \times \mathcal{R}^{m_2}$ dan akhirnya diperluas pada $E \times E$. Pertimbangkan aplikasi

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{m_1} &\rightarrow \mathcal{R}^{n_2} \times \mathcal{R}^{m_2} \\ (x, x_1) &\rightarrow (x, g_2(x, x_1)) \end{aligned}$$

Karena ξ adalah bayangan dari ukuran Lebesque λ dari $\mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2}$ melalui aplikasi φ maka dapat dimisalkan $d\xi = \varphi.d\lambda$. Untuk $A \subset \mathcal{R}^{n_1}$ dan $B \subset \mathcal{R}^{n_2}$ berlaku

$$\xi(A \times B) = \lambda \left\{ (x, x_1) \in \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{m_1} \mid x \in A \text{ dan } g_2(x, x_1) \in B \right\}$$

Definisi ini diperluas pada $\mathcal{R}^{m_1} \times \mathcal{R}^{m_2}$ melalui sifat simetris dengan memisalkan

$$\xi(B \times A) = \xi(A \times B) \text{ untuk } A \subset \mathcal{R}^{n_1} \text{ dan } B \subset \mathcal{R}^{n_2}.$$

Akhirnya

$$\xi(A \times B) = \xi(A \cap \mathcal{R}^{n_1} \times B \cap \mathcal{R}^{n_2}) + \xi(A \cap \mathcal{R}^{n_2} \times B \cap \mathcal{R}^{n_1})$$

Perhatikan bahwa

$$\xi(A \times B) = 0 \text{ jika } A \subset \mathcal{R}^{n_1} \text{ dan } B \subset \mathcal{R}^{n_1}$$

Dan

$$\xi(AxB) = 0 \text{ jika } A \subset \mathfrak{R}^{n_2} \text{ dan } B \subset \mathfrak{R}^{n_2}$$

Untuk sebuah fungsi dua variabel positif $\psi(x, y)$ pada ExE berlaku

$$\begin{aligned} \iint_{ExE} \psi(x, x') \xi(dx, dx') &= \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_1}} \psi(x, x') \xi(dx, dx') \\ &+ \iint_{\mathfrak{R}^{n_2} \times \mathfrak{R}^{n_2}} \psi(x, x') \xi(dx, dx') \end{aligned}$$

Karena ξ simetris maka juga berlaku

$$\iint_{ExE} \psi(x, x') \xi(dx, dx') = \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_1}} (\psi(x, x') + \psi(x', x)) \xi(dx, dx')$$

Akhirnya, untuk $A \subset \mathfrak{R}^{n_1}$ dan $B \subset \mathfrak{R}^{n_2}$ berlaku

$$\begin{aligned} &\iint_{AxB} \psi(x, x') \xi(dx, dx') \\ &= \iint_{ExE} 1_A(x) 1_B(x') \psi(x, x') \xi(dx, dx') \\ &= \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_2}} 1_A(x) 1_B(g_2(x, x_1)) \psi(x, g_2(x, x_1)) \xi(dx, dx_1) \end{aligned}$$

1.3 PERHITUNGAN FUNGSI KEPADATAN

Misalkan $x \in \mathfrak{R}^{n_1}$. Dipilih lompatan menuju \mathfrak{R}^{n_2} dengan probabilitas $j(2,x)$ dan tinggal di \mathfrak{R}^{n_1} dengan probabilitas $1-j(2,x)$. Ambil secara random titik $x_1 \in \mathfrak{R}^{m_1}$ dengan distribusi bantu $q_1(x_1)$ dan kemudian dimisalkan $x' = g_2(x, x_1)$

Misalkan $\pi_1(x)$ dan $\pi_2(x)$ adalah fungsi-fungsi kepadatan terhadap ukuran Lebesgue dari \mathfrak{R}^{n_1} dan \mathfrak{R}^{n_2} . Maka

$$\begin{aligned} &\int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx') \rho(x, x') \\ &= \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_2}} 1_A(x) \pi_1(x) 1_B(g_2(x, x_1)) \\ &\quad j(2, x) \rho(x, g_2(x, x_1)) q_1(x_1) dx dx_1 \end{aligned}$$

dengan $A \subset \mathfrak{R}^{n_1}$ dan $B \subset \mathfrak{R}^{n_2}$.

Menurut kondisi inversi, untuk x dan x' yang diberikan terdapat dengan tunggal x_1 sedemikian sehingga $x' = g_2(x, x_1)$. Dengan demikian $q_1(x_1)$ dinyatakan dengan $q_1(x, x')$.

$$\int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx') \rho(x, x')$$

$$= \iint_{A \times B} \pi_1(x) j(2, x) \rho(x, x') q_1(x, x') \xi(dx, dx')$$

Sehingga fungsi kepadatan terhadap ukuran ξ dapat ditulis sebagai

$$f(x, x') = \pi_1(x) j(2, x) q_1(x, x')$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx) \rho(x', x)$$

$$= \iint_{\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m} 1_B(x') \pi_2(x') 1_A(g_1(x', x_2))$$

$$j(1, x') \rho(x', g_1(x', x_2)) q_2(x_2) dx dx_2$$

Untuk menyatakan integral ini terhadap ukuran ξ , lakukan perubahan variabel

$$\begin{cases} x' &= g_2(x, x_1) \\ x_2 &= h_2(x, x_1) \end{cases}$$

Jika integral di ruas kanan dinyatakan sebagai fungsi dari x dan x_1 maka akan muncul jacobian

$$\left| \frac{\partial(x', x_2)}{\partial(x, x_1)} \right|$$

Sehingga

$$\int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx) \rho(x', x)$$

$$= \iint_{A \times B} 1_B(x') \pi_2(x') 1_A(x)$$

$$j(1, x') \rho(x', x) q_2(x', x) \left| \frac{\partial(x', x_2)}{\partial(x, x_1)} \right| \xi(dx, dx')$$

Maka diperoleh

$$f(x', x) = \pi_2(x') j(1, x') q_2(x', x) \left| \frac{\partial(x', x_2)}{\partial(x, x_1)} \right|$$

Probabilitas penerimaan menjadi

$$\rho(x, x') = \min \left\{ 1, \frac{\pi_2(x') j(1, x') q_2(x', x) \left| \frac{\partial(x', x_2)}{\partial(x, x_1)} \right|}{\pi_1(x) j(2, x) q_1(x, x') \left| \frac{\partial(x, x_1)}{\partial(x', x_2)} \right|} \right\}.$$

BAB 2

SEGMENTASI AR

2.1 RUMUSAN MASALAH

Model *autoregresif* (AR) stasioner konstan per segmen merupakan model yang sering digunakan untuk memodelkan berbagai jenis data. Data indeks Dow-Jones, data indeks harga konsumen (IHK) dan data laju inflasi merupakan dua contoh data riil yang dapat dimodelkan oleh model AR stasioner konstan per segmen. Apabila model AR stasioner konstan per segmen dicocokkan terhadap data riil, umumnya parameter model tidak diketahui. Parameter model di sini meliputi : banyaknya segmen, waktu terjadinya perubahan model AR dan parameter model AR untuk tiap-tiap segmen. Parameter model AR meliputi : orde, koefisien dan variansi gangguan stokhastik.

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan Bayesian. Parameter model dipertimbangkan sebagai variabel random yang mempunyai distribusi tertentu. Distribusi ini dikenal sebagai distribusi prior. Distribusi prior dari parameter model dan fungsi kemungkinan dari sinyal dikombinasikan untuk mendapatkan distribusi posterior dari parameter model. Estimasi Bayesian didasarkan pada distribusi posterior.

Distribusi posterior mempunyai bentuk yang sangat rumit menyebabkan penentuan estimator tidak dapat dilakukan secara analitis. Untuk mengatasi masalah ini, digunakan algoritma *reversible jump Markov Chain Monte Carlo* (MCMC).

Uraian dalam artikel ini disusun sebagai berikut. Dalam Seksi 2, dibahas metode yang mencakup model AR Stasioner konstan per segmen, pendekatan Bayesian, algoritma *reversible jump* MCMC dan penurunan rumus. Sedangkan hasil dan diskusi dijelaskan dalam Seksi 3. Dalam seksi 3 diuraikan implementasi dari algoritma

reversible jump MCMC pada data sintesis dan data riil. Akhirnya kesimpulan dari hasil penelitian disajikan dalam Seksi 4.

2.2 METODE

MODEL AR STASIONER KONSTAN PER SEGMENT

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah data. Data ini dikatakan mempunyai model AR konstan per segmen dengan banyaknya segmen k ($k = 0, 1, \dots, k_{\max}$) apabila (untuk $t = 1, 2, \dots, n$) data tersebut memenuhi persamaan stokhastik berikut (Suparman and Doisy 2002) :

$$X_t = Z_t - \sum_{j=1}^{q_{i,k}} \theta_{i,k,j}^{(q_{i,k})} X_{t-j}, \quad \tau_{i,k} < t \leq \tau_{i+1,k}, \quad (2.1)$$

di mana $i = 0, 1, \dots, k$ dan di bawah asumsi k segmen : $\tau_{i,k}$ adalah waktu terjadinya perubahan model AR ke- i , dengan konvensi $\tau_{0,k} = 0$ dan $\tau_{k+1,k} = n$ dan untuk tiap-tiap segmen ke- i :

- $q_{i,k}$ dan $\theta_{i,k}^{(q_{i,k})} = (\theta_{i,k,1}^{(q_{i,k})}, \dots, \theta_{i,k,q_{i,k}}^{(q_{i,k})})$ adalah orde dan koefisien model AR yang bersesuaian dengan segmen ke- i .
- Z_t adalah nilai gangguan stokhastik pada saat t yang bersesuaian dengan segmen ke- i . Z_t dimodelkan sebagai distribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\sigma_{i,k}^2$.

Selanjutnya model AR ke- i ($i=0,1, \dots, k$) disebut stasioner jika dan hanya jika persamaan suku banyak

$$\phi(b) = 1 - \sum_{j=1}^{q_{i,k}} \theta_{i,k,j}^{(q_{i,k})} b^j$$

bernilai nol untuk nilai b di luar lingkaran dengan jari-jari sama dengan satu (Brockwell and Davis 1991).

Apabila banyaknya segmen k diasumsikan diketahui, waktu terjadinya perubahan model AR diasumsikan diketahui dan orde yang diasumsikan diketahui, maka permasalahan inferensi model

AR konstan per segmen menjadi permasalahan identifikasi orde dan estimasi parameter model AR untuk tiap-tiap segmen.

Apabila orde model AR diasumsikan diketahui, maka permasalahan identifikasi orde model AR dan estimasi parameter model AR menjadi permasalahan estimasi parameter model AR. Estimasi parameter model AR dapat dilakukan dengan menggunakan berbagai metode. Metode-metode tersebut diantaranya diusulkan oleh Shaarawy and Broemeling (1984), Brockwell and Davis (1991), Box *et al.* (1994) dan Suparman dan Soejoeti (1999). Shaarawy and Broemeling (1984) menggunakan Metode Bayesian untuk mengestimasi parameter AR. Sedangkan ketiga peneliti lainnya, Brockwell and Davis (1991), Box *et al.* (1994) dan Suparman dan Soejoeti (1999), menggunakan Metode Kemungkinan Maksimum untuk mengestimasi parameter model AR. Selanjutnya metode identifikasi orde dan estimasi parameter model AR diusulkan oleh Suparman (2006).

Dalam penelitian ini, banyaknya segmen dan orde model AR untuk masing-masing segmen diasumsikan tidak

$$\ell(s|\theta) = \prod_{i=0}^k (2\pi\sigma_{i,k}^2)^{-\frac{1}{2}(\tau_{i+1,k} - \tau_{i,k})} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{i,k}^2}\right\}$$

diketahui. Algoritma *reversible jump* MCMC (Green 1995) digunakan untuk mendeteksi banyaknya segmen, lokasi perubahan model AR, mengidentifikasi orde model AR dan mengestimasi parameter model AR secara bersamaan dalam satu tahap. Untuk mengatasi masalah hiperparameter yang muncul, diadopsi Bayesian hirarkis (Robert 1999). Kinerja algoritma yang diusulkan akan diuji dengan menggunakan data sintesis.

METODE BAYESIAN HIRARKI

Andaikan $s = (x_{q_{\text{maks}}+1}, x_{q_{\text{maks}}+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model AR konstan per segmen. Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{q_{\text{maks}}})$ diketahui dan

$\theta = \left(k, \tau^{(k)}, \left\{ \theta_{i,k}^{(q_{i,k})} \right\}_{i=0}^k, \sigma^{(k)} \right)$, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\sum_{t=\tau_{i,k}+1}^{\tau_{i+1,k}} \left(x_t - \sum_{j=1}^{q_{i,k}} G(\rho_{i,k}^{(q_{i,k})}) x_{t-j} \right)^2 \quad (2.2)$$

Untuk $t = q_{\text{maks}} + 1, \dots, n$.

Misalkan $S_{q_{i,k}}$ adalah daerah stasionaritas. Dengan menggunakan transformasi

$$F: \theta_{i,k}^{(q_{i,k})} \in I_q \mapsto \rho_{i,k}^{(q_{i,k})} \in (-1, 1)^{q_{i,k}} \quad (2.3)$$

maka model AR $(X_t)_{t \in Z}$ stasioner jika dan hanya jika $\rho_{i,k}^{(q_{i,k})} \in (-1, 1)^{q_{i,k}}$ (Barndorff-Nielsen and Schou 1973). Apabila $\rho = \left(k, \tau^{(k)}, \left\{ \rho_{i,k}^{(q_{i,k})} \right\}_{i=0}^k, \sigma^{(k)} \right)$, maka fungsi kemungkinan dapat ditulis kembali sebagai :

$$\ell(s | \rho) = \prod_{i=0}^k (2\pi\sigma_{i,k}^2)^{-\frac{1}{2}(\tau_{i+1,k} - \tau_{i,k})} \exp - \frac{1}{2\sigma_{i,k}^2} \sum_{t=\tau_{i,k}+1}^{\tau_{i+1,k}} \left(x_t - \sum_{j=1}^{q_{i,k}} G^{-1}(\theta_{i,k}^{(q_{i,k})}) x_{t-j} \right)^2 \quad (2.4)$$

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Banyaknya segmen k berdistribusi Binomial dengan parameter λ

$$\pi(k | \lambda) = C_{k_{\text{maks}}}^k \lambda^k (1 - \lambda)^{k_{\text{maks}} - k}$$

- b) Posisi τ_k berdistribusi indeks genap dari statistik terurut $2k+1$ yang diambil seragam tanpa pengembalian dalam $\{1, 2, \dots, n-1\}$.
- c) Orde $p_{i,k}$ berdistribusikan seragam dalam $\{0, 1, \dots, p_{\text{maks}}\}$.
- d) Untuk orde $p_{i,k}$ ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\rho_{i,k}^{p_{i,k}}$ berdistribusikan seragam pada interval $(-1, 1)^{p_{i,k}}$.
- e) Variansi $\sigma_{i,k}^2$ berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma_{i,k}^2 | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma_{i,k}^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp-\beta/(2\sigma_{i,k}^2)$$

Di sini parameter λ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval $(0,1)$, nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk parameter $H_1 = (q_{i,k}, \rho_{i,k}^{q_{i,k}}, \sigma_{i,k}^2)$ dan $H_2 = (\lambda, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2) = \pi(q_{i,k} | \lambda) \pi(\rho_{i,k}^{q_{i,k}} | q_{i,k}) \pi(\sigma_{i,k}^2 | \alpha, \beta) \pi(\lambda) \pi(\beta) \quad (2.5)$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \quad (2.6)$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode *reversible jump* MCMC.

METODE REVERSIBLE JUMP MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode MCMC merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, M_2, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel (Robert, 1996) sedemikian hingga M_1, M_2, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, M_2, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida (Robert, 1996) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$
2. Simulasi distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$

Distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$ mempunyai bentuk eksplisit. Sehingga Algoritma Gibbs dapat digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$. Distribusi marginal posterior dari H_2 dapat dituliskan sebagai :

$$\pi(H_2 | H_1, s) = B(k+1, k_{\text{maks}} - k + 1) \otimes G\left(\frac{\alpha}{2}(k+1), \sum_{i=0}^k \frac{1}{2\sigma_{i,k}^2}\right)$$

Sebaliknya, distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$ tidak mempunyai bentuk eksplisit. Sehingga simulasi eksak tidak mungkin dilakukan. Untuk itu, dusulkan algoritma hibrida, yang mengabungkan algoritma *Reversible Jump* MCMC (Green, 1995) dengan algoritma Gibbs, untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Algoritma *Reversible Jump* MCMC merupakan rampatan dari algoritma Metropolis-Hastings (Metropolis *et al.*, 1953; Hastings, 1970). Algoritma hibrida ini terdiri dari tiga tahap :

- Tahap 2.1 : Simulasi $\pi(k, \tau_k, p_k, \rho_k^{(p_k)} | H_2, s)$
- Tahap 2.2 : Simulasi $\pi(p_k, \rho_k^{(p_k)} | k, \tau_k, H_2, s)$

- Tahap 2.3 : Simulasi $\pi(\sigma_k^2 | k, \tau_k, p_k, \rho_k^{p_k}, H_2, s)$

Karena harga k dan p_k tidak diketahui maka pada Tahap 2.1 dan Tahap 2.2 digunakan Algoritma *reversible jump* MCMC.

Sebaliknya, pada Tahap 2.3 digunakan Algoritma Gibbs. Dari Persamaan (6), diperoleh :

$$\begin{aligned} &\pi(k, \tau_k, p_k, \rho_k^{p_k}, H_2 | s) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^+)^{k+1}} \pi(k, \tau_k, p_k, \rho_k^{p_k}, \sigma_k^2, H_2 | s) d(\sigma^2)^{(k)} \\ &\propto C_{k_{\text{maks}}}^k \lambda^k (1-\lambda)^{k_{\text{maks}}-k} \frac{\prod_{i=0}^k (\tau_{i+1} - \tau_i - 1)}{C_{n-2}^{2k+1}} \\ &\quad \frac{1}{(p_{\text{maks}} + 1)^{k+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=0}^k p_{i,k}} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\prod_{i=0}^k} \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \\ &\quad \prod_{i=0}^k \frac{\Gamma(A)}{B^A} \end{aligned}$$

di mana

$$A = \frac{1}{2} (\alpha + \tau_{i+1,k} - \tau_{i,k})$$

dan

$$B = \frac{1}{2} \left(\beta + \sum_{t=\tau_{i,k}+1}^{\tau_{i+1,k}} (z_t - \sum_{j=1}^{p_{i,k}} G(\rho_{i,k}^{p_{i,k}}) x_{t-j})^2 \right)$$

Di lain pihak, diperoleh

$$\begin{aligned} &\pi(p_k, \rho_k^{(p_k)} | k, \tau_k, H_2, s) \\ &\propto \frac{1}{(p_{\text{maks}} + 1)^{k+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=0}^k p_{i,k}} \prod_{i=0}^k \frac{\Gamma(A)}{B^A} \end{aligned}$$

Dan

$$\pi(\sigma_k^2 | k, \tau_k, p_k, \rho_k^{p_k}, H_2, s)$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} (\sigma_{i,k}^2)^{-A} \exp - \frac{B}{\sigma_{i,k}^2} \otimes_{i=0}^k \text{IG}(A, B)$$

Simulasi distribusi $\pi(k, \tau_k, p_k, \rho_k^{(p_k)} | H_2, s)$

Misalkan $\varphi = (k, \tau_k, p_k, \rho_k^{(p_k)})$ adalah titik aktual dari rantai markov. Terdapat 3 transformasi yang digunakan, yaitu : kelahiran segmen, kematian segmen dan perubahan waktu terjadinya perubahan model. Selanjutnya akan diandaikan N_k adalah probabilitas lompatan dari k menuju ke k+1, D_k adalah probabilitas lompatan dari k+1 menuju k, dan P_k adalah probabilitas lompatan dari k menuju ke k.

Kelahiran/kematian sebuah segmen

Misalkan $\varphi = (k, \tau_k, p_k, \rho_k^{(p_k)})$ adalah titik aktual dari rantai markov. Jika kelahiran yang dipilih, maka banyaknya segmen k berubah dari k menjadi k+1. Untuk itu, sebuah titik z dipilih secara acak dalam $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \tau_k$. Jika $z \in [\tau_{i,k} + 1, \tau_{i+1,k} - 1]$ maka

$$\tau_{1,k+1}^* = \tau_{1,k}, \dots, \tau_{i-1,k+1}^* = \tau_{i-1,k}, \tau_{i,k+1}^* = z, \tau_{i+1,k+1}^* = \tau_{i,k}$$

$$, \dots, \tau_{k+1,k+1}^* = \tau_{k,k}$$

Orde $p_{i,k}$ digantikan oleh dua orde $p_{i,k+1}^*$ dan $p_{i+1,k+1}^*$ mengikuti

rumus

$$p_{i,k+1}^* = u \text{ dan } p_{i+1,k+1}^* = p_{i,k} - p_{i,k+1}^*$$

di mana $u \sim U(0, \dots, p_{i,k})$. Vektor $\rho_{i,k}^{(p_{i,k})}$ digantikan oleh $\rho_{i,k+1}^{*(p_{i,k+1})}$ dan $\rho_{i+1,k+1}^{*(p_{i,k+1})}$ di mana

$\rho_{i,k+1}^{*(p_{i,k+1})}$ di ambil dari distribusi seragam dalam $(-1, 1)^{p_{i,k+1}}$ dan $\rho_{i+1,k+1}^{*(p_{i,k+1})}$ di ambil dari distribusi seragam dalam $(-1, 1)^{p_{i+1,k+1}}$. Kemudian kita misalkan $\varphi^* = (k+1, \tau_{k+1}^*, p_{k+1}^*, \rho_k^{*(p_k)})$ sebagai titik yang diperoleh setelah kelahiran.

Kemudian jika kematian yang dipilih mulai dari titik φ^* , maka banyaknya segmen berubah dari $k+1$ menjadi k . Untuk itu, sebuah lokasi dipilih secara random di antara $\{\tau_{1,k}, \tau_{2,k}, \dots, \tau_{k,k}\}$. Apabila $\tau_{i+1,k+1}^*$ dipilih, maka ia dihapus dan

$$\tau_{1,k} = \tau_{1,k+1}^*, \dots, \tau_{i-1,k} = \tau_{i-1,k+1}^*, \tau_{i,k} = \tau_{i+1,k+1}^*, \dots, \tau_{k,k} = \tau_{k+1,k+1}^*$$

Dua orde $p_{i,k+1}^*$ dan $p_{i+1,k+1}^*$ digantikan oleh $p_{i,k} = p_{i,k+1}^* + p_{i+1,k+1}^*$. Selanjutnya kedua vektor koefisien $(\rho_{i,k+1}^*)^{p_{i,k+1}^*}$ dan $(\rho_{i+1,k+1}^*)^{p_{i+1,k+1}^*}$ juga digantikan oleh satu koefisien $(\rho_{i,k}^{(p_{i,k})})$ di mana $(\rho_{i,k}^{(p_{i,k})})$ dibangkitkan dari distribusi seragam pada daerah $(-1,1)^{p_{i,k}}$. Kedua transformasi, kelahiran dan kematian, adalah saling kebalikan sehingga kedua transformasi adalah reversibel.

Probabilitas penerimaan untuk kelahiran (ditulis dengan a_n) dan probabilitas penerimaan untuk kematian (ditulis dengan a_d) adalah sebagai berikut :

$$a_n(\varphi, \varphi^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\varphi^* | H_2, s) q(\varphi^*, \varphi)}{\pi(\varphi | H_2, s) q(\varphi, \varphi^*)} \right\}$$

dan

$$a_d(\varphi^*, \varphi) = \min \left\{ 1, \frac{1}{a_n(\varphi, \varphi^*)} \right\}$$

di mana

$$\frac{q(\varphi^*, \varphi)}{q(\varphi, \varphi^*)} = \frac{D_{k+1}}{N_k} \frac{N-2-k}{k+1} P_{i,k+1}$$

Perubahan waktu terjadinya perubahan model

Misalkan $\varphi = (k, \tau_k, p_k, \rho_k^{(p_k)})$ adalah titik aktual dari rantai markov. Jika perubahan lokasi yang dipilih, maka sebuah titik dipilih secara random di antara $\{\tau_{1,k}, \dots, \tau_{k,k}\}$. Misalkan $\tau_{i,k}$ yang terpilih, maka titik ini digantikan oleh $\tau_{i,k}^*$ yang dibangkitkan dari distribusi seragam pada himpunan $\{\tau_{i-1,k} + 1, \dots, \tau_{i+1,k} - 1\} \setminus \{\tau_{i,k}\}$. Tetapi orde dan koefisiennya tidak berubah. Selanjutnya titik yang diperoleh setelah proses perubahan lokasi akan ditulis sebagai $\varphi^* = (k, \tau_k^*, p_k, \rho_k^{(p_k)})$. Dan probabilitas penerimaan untuk perubahan lokasi adalah

$$a_p(\varphi, \varphi^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\varphi^* | H_2, s) q(\varphi^*, \varphi)}{\pi(\varphi | H_2, s) q(\varphi, \varphi^*)} \right\}$$

di mana $\frac{q(\varphi^*, \varphi)}{q(\varphi, \varphi^*)} = 1$

Simulasi distribusi $\pi(p_k, \rho_k^{(p_k)} | k, \tau_k, H_2, s)$

Untuk $i = 0, 1, \dots, k$, distribusi $\pi(p_{i,k}, \rho_{i,kk}^{(p_{i,kk})} | k, \tau_{i,kk}, H_2, s)$ tidak berbentuk eksplisit sehingga untuk mensimulasikan digunakan algoritma MCMC. Apabila orde p_k ditentukan, kita dapat menggunakan algoritma Metropolis Hastings. Oleh karena dalam kasus ini orde tidak diketahui, rantai Markov harus melompat orde p_k dengan parameter $\rho_k^{(p_k)}$ menuju p_k^* dengan parameter $\rho_k^{*(p_k^*)}$. Untuk memecahkan masalah ini, kita gunakan algoritma Reversible Jump MCMC.

Misalkan $p_{i,k}$ menyatakan titik courant untuk orde, kita akan tulis $\eta_{p_{i,k}}$ adalah peluang lompatan dari $p_{i,k}$ ke $p_{i,k}+1$, $\delta_{p_{i,k}}$ adalah peluang lompatan dari $p_{i,k}$ ke $p_{i,k}-1$ dan $\zeta_{p_{i,k}}$ adalah peluang lompatan dari $p_{i,k}$ ke $p_{i,k}$

Kelahiran/kematian dari orde

Andaikan $p_{i,k}$ adalah nilai courant untuk orde, $\rho_{i,k}^{(p_{i,k})}$ adalah nilai koefisien. Anggap bahwa kita ingin melakukan lompatan dari $p_{i,k}$ menuju $p_{i,k}+1$. Kita mengambil variabel random u menurut distribusi triangular dengan mean 0

$$g(u) = \begin{cases} u + 1, & -1 < u < 0 \\ 1 - u, & 0 < u < 1 \end{cases}$$

Kita lengkapi vektor $\rho_{i,k}^{(p_{i,k})}$ dengan variabel random u . Sehingga vektor koefisien baru yang diusulkan adalah

$$\rho_{i,k}^{(p_{i,k}+1)} = (\rho_{i,k}^{(p_{i,k})}, u)$$

Sebaliknya, lompatan dari $p_{i,k}+1$ menuju $p_{i,k}$ dilakukan dengan cara menghapus koefisien terakhir dalam $\rho_{i,k}^{(p_{i,k}+1)}$. Sehingga vektor koefisien baru yang diusulkan adalah $\rho_{i,k}^{(p_{i,k})}$. Probabilitas penerimaan/penolakan masing-masing adalah

$$\alpha_N = \min\{1, r_N\} \text{ dan } \alpha_D = \min\{1, r_N^{-1}\}$$

di mana

$$r_N = \frac{w(\beta, p_{i,k} + 1, \rho^{(p_{i,k}+1)})^{-v(\alpha)}}{w(\beta, p_{i,k}, \rho^{(p_{i,k}+1)})^{-v(\alpha)}} \frac{p_{i,k} + 1}{p_{i,k} + 1} \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{1}{2} \frac{\eta_{p_{i,k}+1}}{\delta_{p_{i,k}}} \frac{1}{g(r_{p_{i,k}+1})}$$

Perubahan koefisien

Andaikan sekarang bahwa lompatan yang dipilih adalah dari $p_{i,k}$ menuju $p_{i,k}$ tanpa perubahan orde tetapi hanya perubahan koefisien-koefisiennya. Apabila $\rho_{i,k}^{(p_{i,k})}$ adalah vektor koefisien, kita modifikasi vektor koefisien komponen tiap komponen. Kita mendefinisikan titik u_j untuk menggantikan koefisien ke- j dengan cara berikut :

$$u_j = \sin(\rho_{i,k,j}^{p_{i,k}} + s)$$

dengan s diambil menurut distribution seragam pada interval $[-\pi/10, \pi/10]$.

Dengan menuliskan $\rho_{i,k}^{(p_{i,k})}$ sebagai titik yang lama dan $\rho_{i,k}^{*(p_{i,k})}$ sebagai titik yang baru, probabilitas penerimaan/penolakan yang bersesuaian adalah

$$\alpha_C = \min\{1, r_C\}$$

di mana

$$r_C = \frac{w(\beta, p_{i,k}, \rho_{i,k}^{*(p_{i,k})})^{-v(\alpha)} \left(\frac{1 + \rho_{i,k,j}^{(p_{i,k})}}{1 + u_j} \frac{1 - \rho_{i,k,j}^{(p_{i,k})}}{1 - u_j} \right)^{1/2}}{w(\beta, p_{i,k}, \rho_{i,k}^{(p_{i,k})})^{-v(\alpha)}}$$

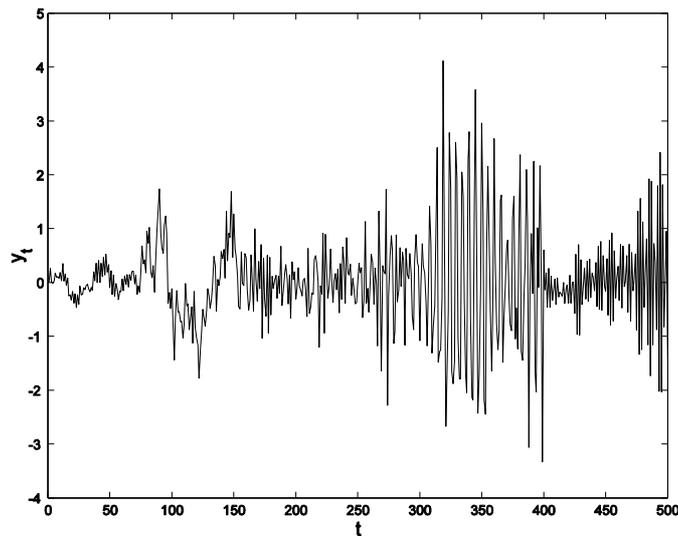
2.3 HASIL DAN DISKUSI

Sebagai ilustrasi, kita akan menerapkan metode ini untuk mengidentifikasi orde dan menaksir parameter data sintesis. Studi simulasi ini ditempuh untuk mengkonfirmasi kinerja dari algoritma *reversible jump* MCMC apakah dapat berkerja dengan baik. Algoritma *reversible jump* MCMC digunakan untuk mengestimasi banyaknya segmen, waktu terjadinya perubahan model AR, orde model AR untuk masing-masing segmen, dan koefisien model AR untuk masing-masing model AR serta variansi gangguan stokhastik yang bersesuaian. Untuk keperluan itu, algoritma *reversible jump* MCMC dimplementasikan 70000 iterasi dengan periode pemanasan

10000 iterasi. Nilai orde q_{maks} dibatasi maksimum 10 sehingga $p_{\text{maks}} = 10$.

Data sintesis

Gambar 2.1 merupakan data sintesis dengan model AR konstan per segmen yang dibuat menurut persamaan (3.1) di atas.



Gambar 2.1 : Data sintesis model AR konstan per segmen

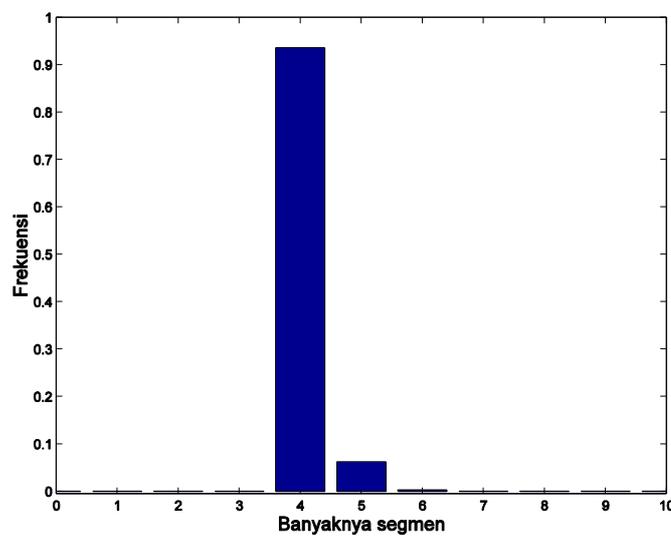
Pembuatan sinyal sintesis dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB (Hanselman and Littlefield 1997), dengan jumlah data $n = 500$, $k = 4$ dan waktu terjadinya perubahan model AR adalah $\tau = (75, 150, 250, 400)$. Sedangkan orde, koefisien, dan gangguan stokastik model AR untuk masing-masing segmen dinyatakan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 : Nilai parameter model

Segmen ke-i	$\sigma_{i,4}$	$p_{i,4}$	$\theta_{i,4}^{(p_i,1)}$
0	0.12	3	(-0.25, -0.79, 0,34)
1	0,5	2	(-1.54, -0.41)

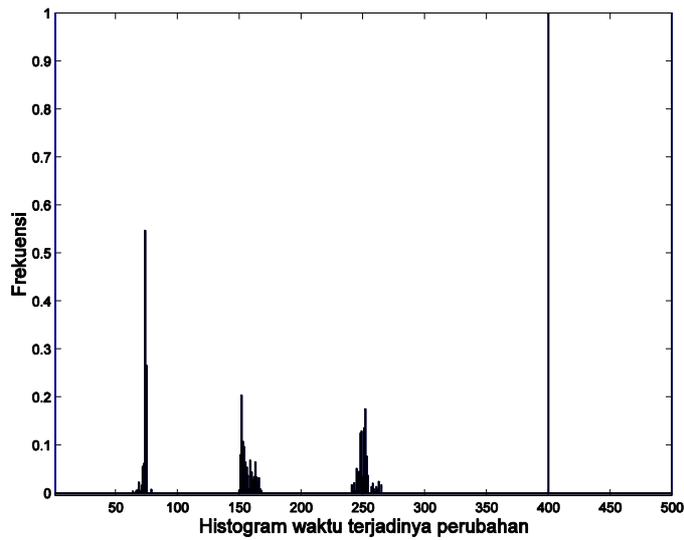
2	0,4	1	(0.19)
3	0,5	4	(0.59, 0.99, 0.64, 0.87)
4	0,12	3	(0.86, -0.83, -0.96)

Berdasarkan data dalam Gambar 2.1, selanjutnya parameter model diestimasi dengan menggunakan *reversible jump* MCMC. Histogram dari k disajikan pada Gambar 2.2.



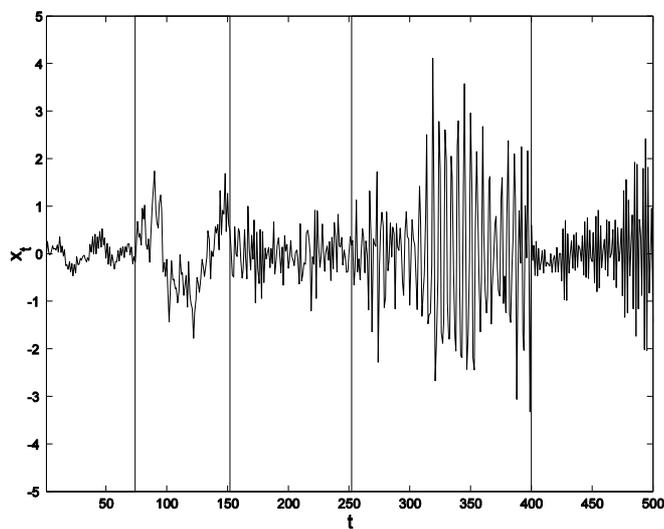
Gambar 2.2 : Histogram dari banyaknya segmen

Hasilnya adalah $\hat{k} = 4$. Histogram untuk τ yang bersesuaian dengan nilai $\hat{k} = 4$ diberikan pada Gambar 2.3.



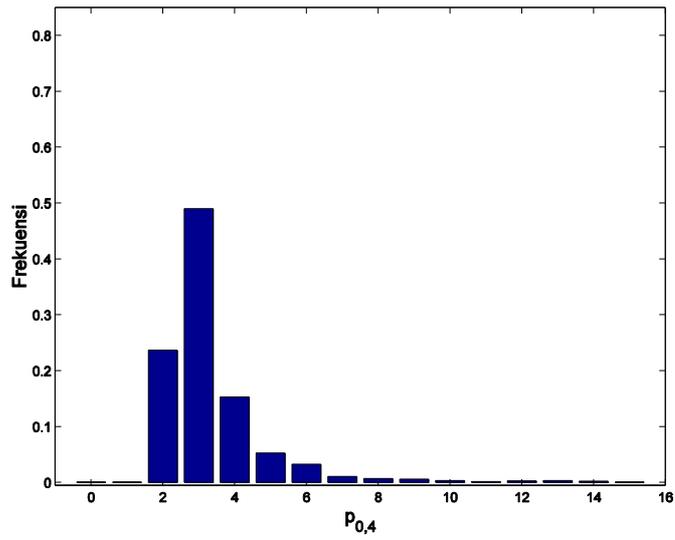
Gambar 2.3 : Histogram waktu terjadinya perubahan model

Hasilnya adalah $\hat{\tau} = (75, 150, 250, 400)$. Hasil segmentasi disajikan dalam Gambar 2.4.

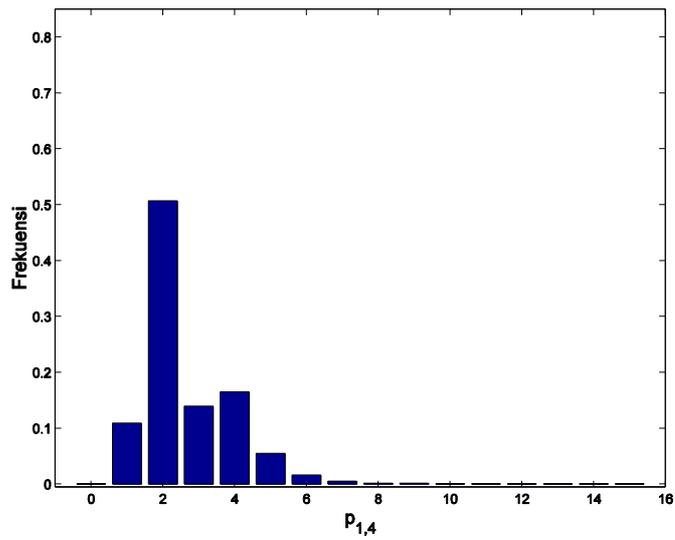


Gambar 2.4 : Segmentasi data

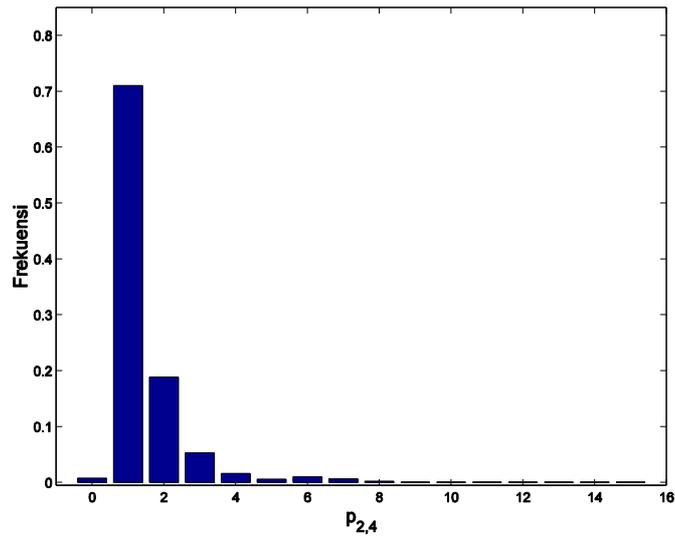
Histogram untuk orde yang bersesuaian dengan nilai $\hat{k} = 4$ dan diberikan pada Gambar 2.5 – 2.9.



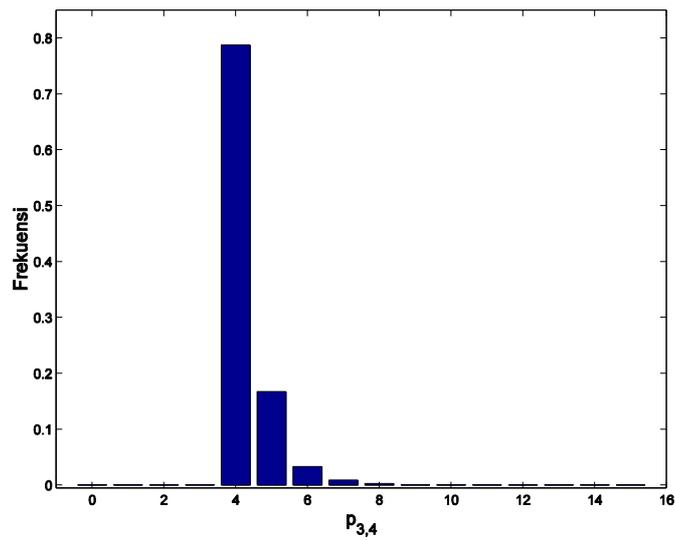
Gambar 2.5 : Histogram orde segmen ke-0



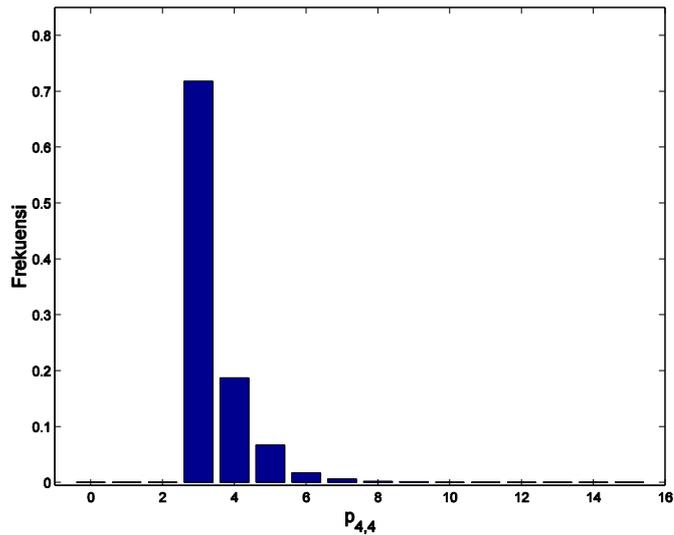
Gambar 2.6 : Histogram orde segmen ke-1



Gambar 2.7 : Histogram orde segmen ke-2



Gambar 2.8 : Histogram orde segmen ke-3



Gambar 2.9 : Histogram orde segmen ke-4

Sedangkan hasil estimasi dari koefisien dan simpangan baku gangguan stokhastik tiap-tiap segmen ditulis dalam Tabel 2.2.

Tabel 2.2 : Estimator untuk orde, koefisien dan simpangan baku gangguan stokhastik.

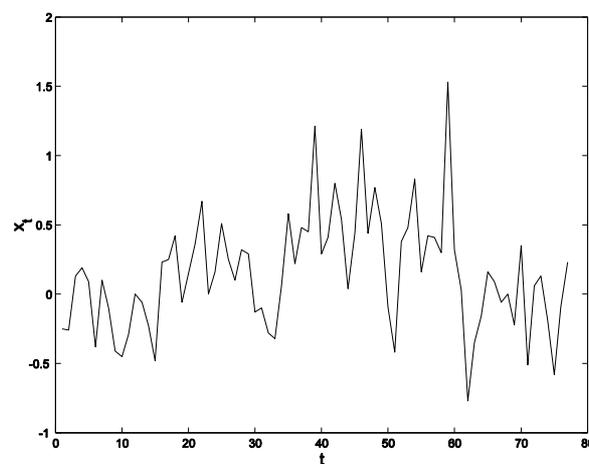
Segmen ke-i	$\hat{\sigma}_{i,4}$	$\hat{p}_{i,4}$	$\hat{\theta}_{i,4}^{(\hat{p}_{i,4})}$
0	0.13	3	(-0.23, -0.76, 0.23)
1	0.47	2	(-0.50, -0.27)
2	0.41	1	(0.34)
3	0.52	4	(0.57, 0.93, 0.62, 0.83)
4	0.13	3	(0.86, -0.79, -0.94)

Berdasarkan output dari algoritma, pada data Gambar 2.1 terbagi atas 5 segmen. Pada segmen pertama ($t = 1, 2, \dots, 74$) data

bermodel AR(3), segmen kedua ($t = 75, 76, \dots, 149$) data bermodel AR (2), segmen ketiga ($t = 150, 151, \dots, 249$) data bermodel AR(1), segmen keempat ($t = 250, 251, \dots, 399$) data bermodel AR (4) dan segmen kelima ($t = 401, 402, \dots, 499$) data bermodel AR (3).

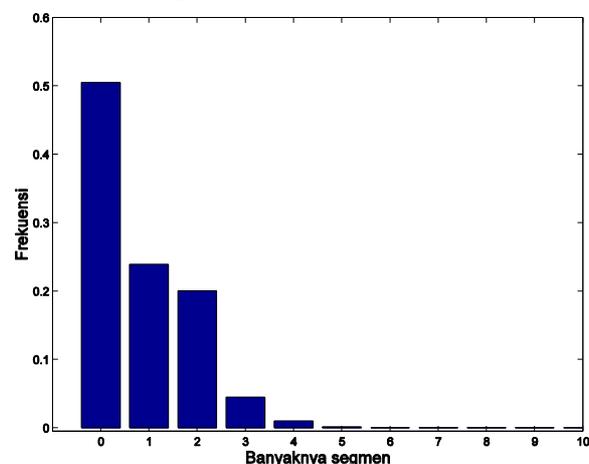
Data riil

Gambar 2.10 merupakan sinyal riil berupa evolusi indeks Dow-Jones (Brockwell and Davis, 1993).



Gambar 2.10 : Data real model AR

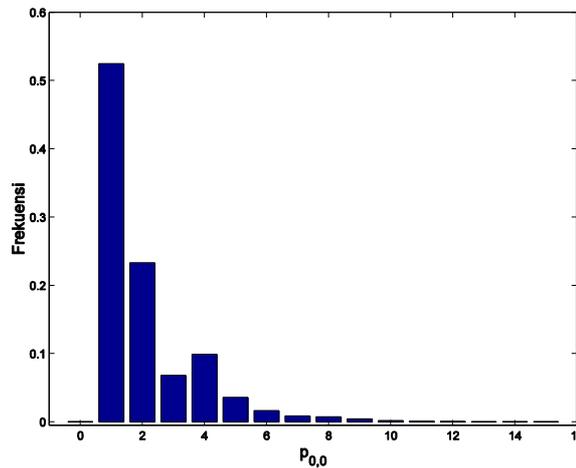
Berdasarkan data dalam Gambar 2.10, selanjutnya parameter model diestimasi dengan menggunakan *reversible jump* MCMC. Histogram dari k disajikan pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 : Histogram dari

banyaknya segmen

Hasilnya adalah $\hat{k} = 0$. Oleh karena $\hat{k} = 0$ maka tidak ada estimasi untuk lokasi. Sehingga histogram untuk waktu terjadinya perubahan model adalah tidak ada. Histogram untuk orde yang bersesuaian dengan nilai $\hat{k} = 0$ dan diberikan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 : Histogram orde segmen ke-0

Hasil estimasi untuk koefisien dan simpangan baku gangguan stokhastik ditulis dalam Tabel 2.3.

Tabel 2.3 : Estimator untuk orde, koefisien dan simpangan baku gangguan stokhastik.

Segmen ke-i	$\hat{\sigma}_{i,0}$	$\hat{p}_{i,0}$	$\hat{\theta}_{i,0}^{(\hat{p}_{i,0})}$
0	0.39	1	-0.46

2.4 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma *reversible jump* MCMC dan penerapannya pada inferensi model AR konstan per segmen. Dengan membandingkan antara nilai parameter dan nilai estimasinya dari data sintesis menunjukkan bahwa algoritma

reversible jump MCMC dapat menaksir parameter-parameter itu dengan baik. Estimator untuk orde, koefisien, dan gangguan stokhastik model AR untuk masing-masing segmen disajikan dalam Tabel 2.2. Sebagai contoh implementasi, algoritma diterapkan pada data riil.

Penelitian ini masih dapat diperluas dan dikembangkan dengan cara menggantikan konsep AR konstan per segmen dengan konsep ARMA (*autoregressive moving average*) konstan per segmen.

BAB 3

SEGMENTASI MA

3.1 RUMUSAN MASALAH

Model MA (*Moving Average*) konstan sepotong demi sepotong merupakan model yang sering digunakan untuk memodelkan signal. Sinyal **EEG** (*Electro Encephalo Gram* (**EEG**) dan sinyal *Electro Cardio Gram* (**ECG**) merupakan beberapa contoh data riil yang dapat dimodelkan oleh model MA konstan sepotong demi sepotong. Apabila model MA konstan sepotong demi sepotong dicocokkan terhadap sinyal, umumnya parameter model tidak diketahui. Parameter model di sini meliputi : banyaknya segmen, lokasi perubahan model MA dan parameter model MA untuk tiap-tiap segmen. Parameter model MA meliputi orde, koefisien dan variansi galat.

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan bayesian. Parameter model dipertimbangkan sebagai variabel random yang mempunyai distribusi tertentu. Distribusi ini dikenal sebagai distribusi prior. Distribusi prior dari parameter model dan fungsi kemungkinan dari sinyal dikombinasikan untuk mendapatkan distribusi posterior dari parameter model. Estimasi Bayesian didasarkan pada distribusi posterior.

Distribusi posterior mempunyai bentuk yang sangat rumit menyebabkan penentuan estimator tidak dapat dilakukan secara analitis. Untuk mengatasi masalah ini, digunakan algoritma *reversibel jump* MCMC.

3.2 TINJAUAN PUSTAKA

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n adalah suatu sinyal. Sinyal ini dikatakan mempunyai model MA konstan sepotong demi sepotong dengan banyaknya segmen k ($k = 0, 1, \dots, k_{\max}$) apabila (untuk $t = 1, 2, \dots$,

n) sinyal tersebut memenuhi persamaan stokastik berikut (Suparman *et al.* 2002) :

$$X_t = Z_t + \sum_{j=1}^{q_{i,k}} \theta_{i,k,j}^{(q_{i,k})} Z_{t-j}, \quad \tau_{i,k} < t \leq \tau_{i+1,k}, \quad (3.1)$$

di mana $i = 0, 1, \dots, k$ dan di bawah asumsi k segmen : $\tau_{i,k}$ adalah waktu terjadinya perubahan model MA ke- i , dengan konvensi $\tau_{0,k} = 0$ dan $\tau_{k+1,k} = n$ dan untuk tiap-tiap segmen ke- i :

- $q_{i,k}$ dan $\theta_{i,k}^{(q_{i,k})} = (\theta_{i,k,1}^{(q_{i,k})}, \dots, \theta_{i,k,q_{i,k}}^{(q_{i,k})})$ adalah orde dan koefisien model MA yang bersesuaian dengan segmen ke- i .
- Z_t adalah nilai galat pada saat t yang bersesuaian dengan segmen ke- i . Z_t dimodelkan sebagai distribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\sigma_{i,k}^2$.

Selanjutnya model MA ke- i ($i=0,1, \dots, k$) disebut inversibel jika dan hanya jika persamaan suku banyak

$$\phi(b) = 1 + \sum_{j=1}^{q_{i,k}} \theta_{i,k,j}^{(q_{i,k})} b^j$$

bernilai nol untuk nilai b di luar lingkaran dengan jari-jari sama dengan satu (Brockwell *et al.*, 1993).

Apabila banyaknya segmen k diasumsikan diketahui, lokasi perubahan model MA diasumsikan diketahui dan orde yang diasumsikan diketahui, maka permasalahan segmentasi model MA konstan per segmen menjadi permasalahan identifikasi orde dan estimasi parameter model MA untuk tiap-tiap segmen.

Apabila orde model MA diasumsikan diketahui, maka permasalahan identifikasi orde model MA dan estimasi parameter model MA menjadi permasalahan estimasi parameter model MA. Estimasi parameter model MA dapat dilakukan dengan menggunakan berbagai metode. Metode-metode tersebut diantaranya diusulkan oleh Shaarawy *et al.* (1984), Brockwell *et al.* (1991), Box *et al.* (1994) dan **Suparman** *et. al* (1999). Shaarawy *et al.*

(1984) menggunakan Metode Bayesian untuk mengestimasi parameter MA. Sedangkan ketiga peneliti lainnya, Brockwell *et al.* (1991), Box *et al.* (1994) dan **Suparman** *et. al* (1999), menggunakan Metode Kemungkinan Maksimum untuk mengestimasi parameter model MA. Selanjutnya metode identifikasi orde dan estimasi parameter model MA diusulkan oleh **Suparman** (2006).

Dalam penelitian ini, banyaknya segmen dan orde model MA untuk masing-masing segmen diasumsikan tidak diketahui. Algoritma *reversible jump* MCMC (Green 1995) digunakan untuk mendeteksi banyaknya segmen, lokasi perubahan model MA, mengidentifikasi orde model MA dan mengestimasi parameter model MA secara bersamaan dalam satu tahap. Untuk mengatasi masalah hiperparameter yang muncul, diadopsi Bayesian hirarki (Robert 1999). Kinerja algoritma yang diusulkan akan diuji dengan menggunakan sinyal sintesis.

3.3 METODE YANG DIGUNAKAN

Dalam penelitian ini digunakan pendekatan bayesian hirarki, yang akan diuraikan dalam bagian berikut.

Metode Bayesian Hirarki

Andaikan $s = (x_{q_{maks}+1}, x_{q_{maks}+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model MA konstan sepotong demi sepotong. Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{q_{maks}})$ diketahui dan $\theta = (k, \tau^{(k)}, \{\theta_{i,k}^{(q_{i,k})}\}_{i=0}^k, \sigma^{(k)})$, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\ell(s | \theta) = \prod_{i=0}^k (2\pi\sigma_{i,k}^2)^{-\frac{1}{2}(\tau_{i+1,k} - \tau_{i,k})} \exp - \frac{1}{2\sigma_{i,k}^2} \sum_{t=\tau_{i,k}+1}^{\tau_{i+1,k}} (y_t - \sum_{j=1}^{q_{i,k}} G(\rho_{i,k}^{(q_{i,k})}) \hat{z}_{t-j})^2 \tag{3.2}$$

di mana

$$\hat{z}_1 = \dots = \hat{z}_{q_{\text{maks}}} = 0$$

Dan di mana untuk semua $t = q_{\text{maks}} + 1, \dots, n$

$$\hat{z}_t = x_t - \sum_{j=1}^{q_{i,k}} G(\rho_{i,k}^{(q_{i,k})}) \hat{z}_{t-j}, \quad n \in [\tau_{i,k} + 1, \tau_{i+1,k}]$$

Misalkan $I_{q_{i,k}}$ adalah daerah inversilibite. Dengan menggunakan transformasi

$$F: \theta_{i,k}^{(q_{i,k})} \in I_q \mapsto \rho_{i,k}^{(q_{i,k})} \in (-1, 1)^{q_{i,k}} \quad (3.3)$$

maka model MA $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ inversibel jika dan hanya jika $\rho_{i,k}^{(q_{i,k})} \in (-1, 1)^{q_{i,k}}$ (Bhansali, 1983). Apabila $\rho = \left(k, \tau^{(k)}, \left\{ \rho_{i,k}^{(q_{i,k})} \right\}_{i=0}^k, \sigma^{(k)} \right)$, maka fungsi kemungkinan dapat ditulis kembali sebagai :

$$\ell(s | \rho) = \prod_{i=0}^k (2\pi\sigma_{i,k}^2)^{-\frac{1}{2}(\tau_{i+1,k} - \tau_{i,k})} \exp - \frac{1}{2\sigma_{i,k}^2} \quad (3.4)$$

$$\sum_{t=\tau_{i,k}+1}^{\tau_{i+1,k}} \left(x_t - \sum_{j=1}^{q_{i,k}} G^{-1}(\theta_{i,k}^{(q_{i,k})}) \hat{z}_{t-j} \right)^2$$

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Orde $q_{i,k}$ berdistribusikan Binomial dengan parameter λ :

$$\pi(q_{i,k} | \lambda) = C_{q_{\text{maks}}}^{q_{i,k}} \lambda^{q_{i,k}} (1 - \lambda)^{q_{\text{maks}} - q_{i,k}}$$

b) Untuk orde $q_{i,k}$ ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\rho_{i,k}^{q_{i,k}}$ berdistribusikan seragam pada interval $(-1, 1)^{q_{i,k}}$.

c) Variansi $\sigma_{i,k}^2$ berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma_{i,k}^2 | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma_{i,k}^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp-\beta/(2\sigma_{i,k}^2)$$

Di sini parameter λ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval (0,1), nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk parameter $H_1 = (q_{i,k}, \rho_{i,k}^{q_{i,k}}, \sigma_{i,k}^2)$ dan $H_2 = (\lambda, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2) = \pi(q_{i,k} | \lambda) \pi(\rho_{i,k}^{q_{i,k}} | q_{i,k}) \pi(\sigma_{i,k}^2 | \alpha, \beta) \pi(\lambda) \pi(\beta) \tag{3.5}$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \tag{3.6}$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Fungsi kemungkinan bersifat obyektif sementara distribusi prior ini bersifat subyektif. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode MCMC.

Metode MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, M_2, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan *irreducible* (Robert, 1996) sedemikian hingga M_1, M_2, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel random yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, M_2, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida (Robert, 1996) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | s)$

2. Simulasi distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$

Algoritma Gibbs digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | s)$ dan algoritma hibrida, yang menggabungkan algoritma *Reversible Jump* MCMC (Green, 1995) untuk mensimulasikan parameter $(q_{i,k}, \rho_{i,k}^{(q_{i,k})})$ dengan algoritma Gibbs untuk mensimulasikan parameter $\sigma_{i,k}^2$, digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Algoritma RJMCMC merupakan rampatan dari algoritma Metropolis-Hastings (Metropolis *et al.*, 1953; Hastings, 1970).

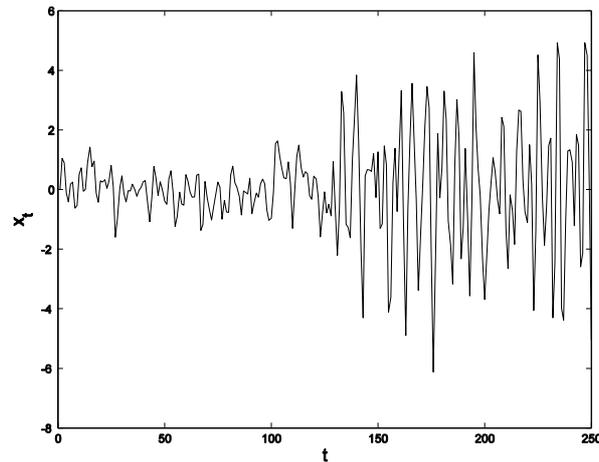
Estimator yang dihasilkan oleh metode MCMC dalam dua tahap. Tahap pertama adalah estimator dari orde $q_{i,k}$. Tahap kedua adalah estimator dari parameter model MA dan variansi $\sigma_{i,k}^2$ yang bersesuaian dengan orde $q_{i,k}$ yang diperoleh pada tahap pertama.

3.4 HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

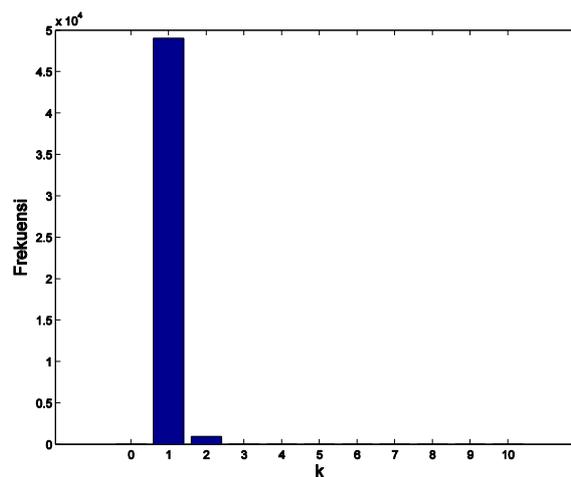
Sebagai ilustrasi, kita akan menerapkan metode ini untuk mengidentifikasi orde dan menaksir parameter sinyal sintesis. Studi simulasi ditempuh untuk mengkonfirmasi kinerja dari algoritma *reversible jump* MCMC apakah dapat berkerja dengan baik.

Algoritma *reversible jump* MCMC digunakan untuk mengestimasi banyaknya segmen, lokasi perubahan model MA, orde model MA untuk masing-masing segmen, dan koefisien model MA untuk masing-masing model MA serta variansi galat yang bersesuaian. Untuk keperluan itu, algoritma *reversible jump* MCMC dimplementasikan sebanyak 70000 iterasi dengan periode pemanasan sebanyak 10000 iterasi. Nilai orde q_{maks} dibatasi maksimum 10 sehingga $q_{maks} = 10$.

Gambar 3.1 merupakan sinyal sintesis dengan model MA konstan sepotong demi sepotong yang dibuat menurut persamaan (3.1) di atas.



Gambar 3.1 : Sinyal model MA
sepotong demi
sepotong.



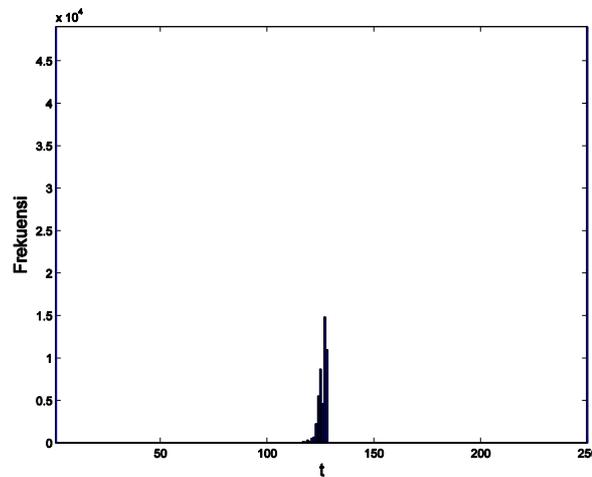
Gambar 3.2 : Histogram dari
banyaknya segmen

Pembuatan sinyal sintesis dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB (Hanselman *et al.* 1997), dengan jumlah data $n = 250$, $k = 1$ dan waktu terjadinya perubahan model MA adalah $\tau = (125)$. Sedangkan orde, koefisien, dan galat model MA untuk masing-masing segmen dinyatakan dalam Tabel 3.1 berikut.

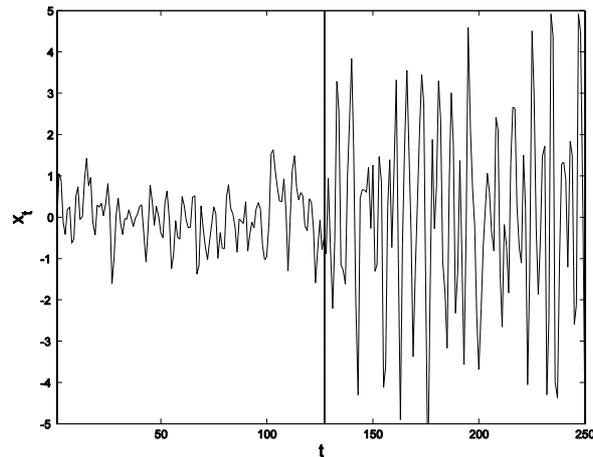
Segmen ke-i	$\sigma_{i,1}$	$q_{i,1}$	$\phi_{i,1}^{(q_{i,1})}$
0	0.5	1	(0.78)
1	1,5	3	(0.52, -0.09, -0.96)

Tabel 3.1 : Nilai parameter sinyal sintesis

Berdasarkan data dalam Gambar 3.1, selanjutnya parameter model diestimasi dengan menggunakan *reversible jump* MCMC. Histogram dari k disajikan pada Gambar 3.2. Hasilnya adalah $\hat{k} = 1$.

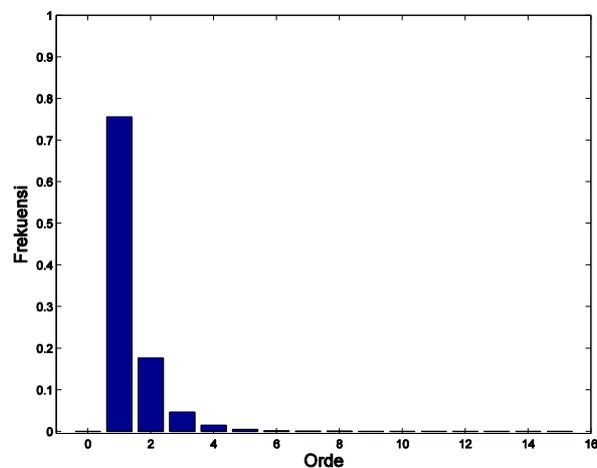


Gambar 3.3 : Histogram lokasi perubahan model

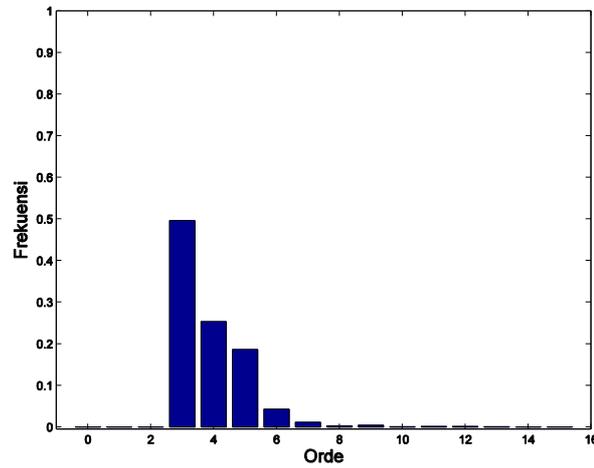


Gambar 3.4 : Segmentasi sinyal

Histogram untuk τ yang bersesuaian dengan nilai $\hat{k}=1$ diberikan pada Gambar 3.3. Hasilnya adalah $\hat{\tau}=(127)$. Hasil segmentasi disajikan dalam Gambar 3.4. Histogram untuk orde yang bersesuaian dengan nilai $\hat{k}=1$ dan $\hat{\tau}=(127)$ diberikan pada Gambar 3.5 dan Gambar 3.6.

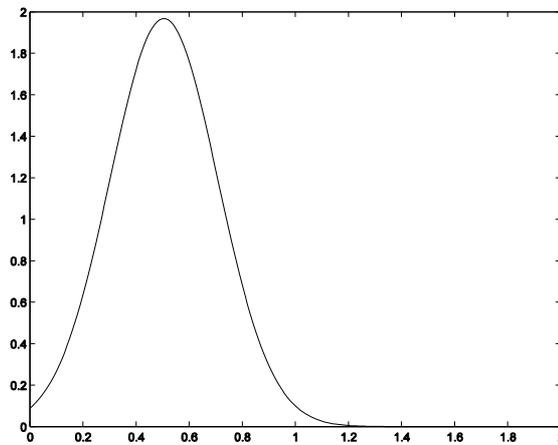


Gambar 3.5 : Histogram orde segmen ke-0

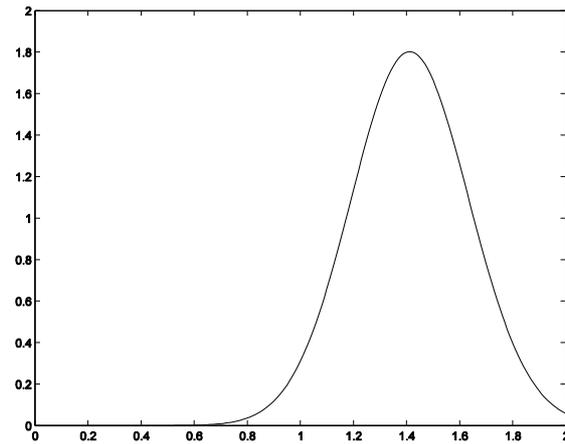


Gambar 3.6 : Histogram orde segmen ke-1

Histogram untuk $\sigma_{i,1}$ yang bersesuaian dengan nilai $\hat{k} = 1$ dan $\hat{\tau} = (127)$ diberikan pada Gambar 3.7 dan Gambar 3.8.



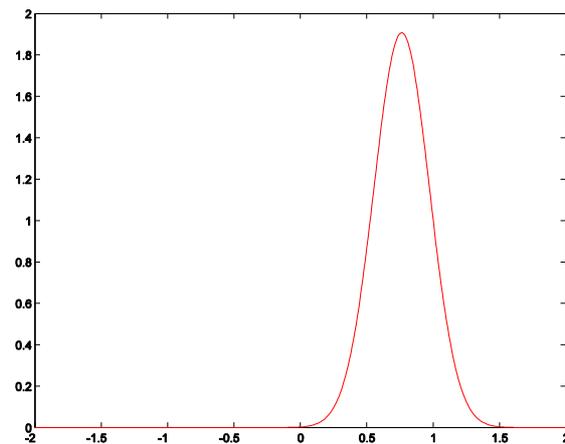
Gambar 3.7 : Distribusi variansi galat segmen ke-0



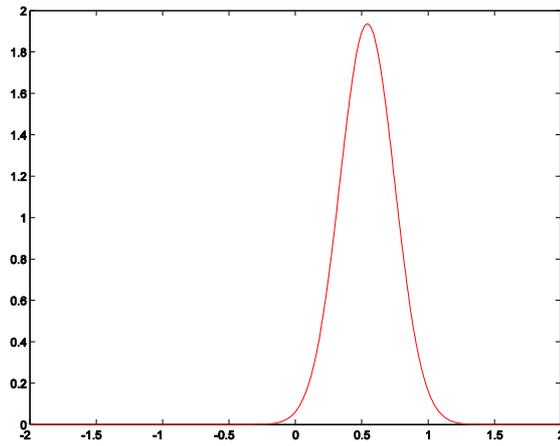
Gambar 3.8 :Distribusi variansi
galat

segmen ke-1

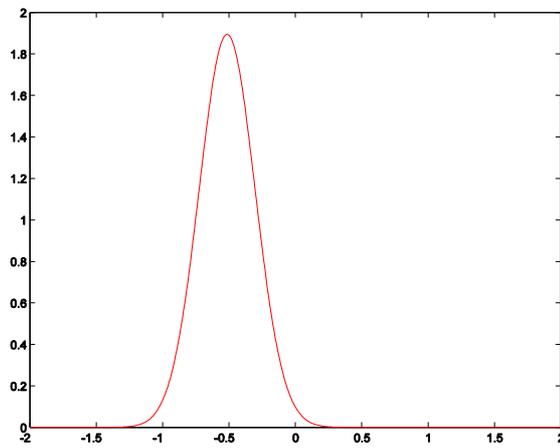
Sedangkan histogram untuk koefisien model MA yang bersesuaian diberikan pada Gambar 3.9-3.12.



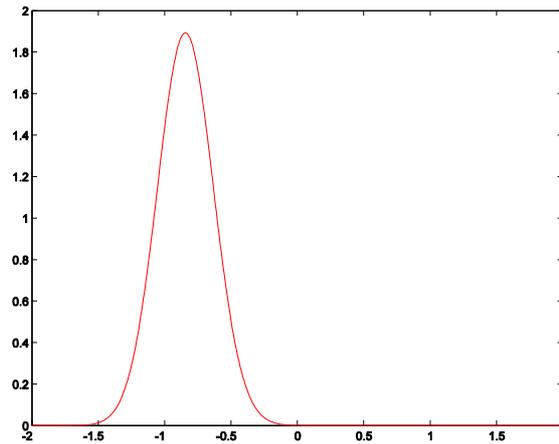
Gambar 3.9 : Distribusi
koefisien ke-1 segmen ke-0



Gambar 3.10 : Distribusi koefisien ke-1 segmen ke-1



Gambar 3.11 : Distribusi koefisien ke-2 segmen ke-1



Gambar 3.12 : Distribusi koefisien ke-3 segmen ke-1

Hasilnya ditulis dalam Tabel 3.2.

Segmen ke-i	$\hat{\sigma}_{i,1}$	$\hat{q}_{i,1}$	$\hat{\phi}_{i,1}^{(q_i,1)}$
0	0.41	1	(0.47)
1	1.16	3	(0.22, -0,21, -0,34)

Tabel 3.2 : Estimator untuk orde, koefisien dan variansi galat

Berdasarkan output dari algoritma, sinyal pada Gambar 3.1 terbagi atas dua segmen. Pada segmen pertama ($t = 1, 2, \dots, 150$) sinyal bermodel MA(1) dan pada segmen kedua ($t = 151, 152, \dots, 250$) sinyal bermodel MA (3).

3.5 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma *Reversible Jump* MCMC dan penerapannya pada segmentasi sinyal bermodel MA konstan sepotong demi sepotong. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa algoritma *reversible jump* MCMC dapat

menaksir parameter-parameter itu dengan baik. Kebaikan ini dapat dilihat dengan membandingkan antara nilai parameter dari sinyal pada Tabel 3.1 dan nilai estimasi pada Tabel 3.2.

Beberapa kelebihan yang diperoleh dari algoritma *Reversible Jump* MCMC ini, yaitu : (1) Algoritma *Reversible Jump* MCMC menyegmentasi sinyal model MA konstan sepotong demi sepotong dalam satu tahap saja. Apabila digunakan metode lain, umumnya proses segmentasi dilakukan dalam tiga tahap. (2) Algoritma *Reversible Jump* MCMC menghasilkan model MA yang inversibel untuk masing-masing segmen. Metode lain, biasanya menghasilkan model MA yang tidak inversibel.

Penelitian ini masih dapat dikembangkan dengan cara menggantikan konsep MA konstan sepotong demi sepotong dengan konsep **ARMA** (**A**uto**R**egressive **M**oving **A**verage) konstan sepotong demi sepotong.

BAB 4

AUTOREGRESIF MOVING AVERAGE

4.1 RUMUSAN MASALAH

Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ adalah suatu data deret berkala. Deret berkala ini dikatakan mempunyai model ARMA orde (p,q) , ditulis ARMA (p,q) , bila deret berkalanya memenuhi persamaan stokastik berikut (Box *et al.*, 1994) :

$$X_t = Z_t + \sum_{j=1}^q \theta_j Z_{t-j} - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

di mana Z_t adalah galat acak pada saat t , ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) dan θ_j ($j = 1, 2, \dots, q$) adalah koefisien-koefisien. Di sini Z_t diasumsikan berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ^2 .

Model ARMA $(X_t)_{t \in Z}$ disebut stasioner jika dan hanya jika persamaan suku banyak $\phi(b) = 1 + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(p)} b^i$ bernilai nol untuk nilai b di luar lingkaran dengan jari-jari sama dengan satu. Selanjutnya model ARMA $(X_t)_{t \in Z}$ disebut inversibel jika dan hanya jika persamaan suku banyak $\theta(b) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^{(q)} b^j$ bernilai nol untuk nilai b di luar lingkaran dengan jari-jari sama dengan satu (Brockwell *et al.*, 1991).

Untuk orde (p,q) diasumsikan diketahui, penaksiran parameter model ARMA telah diteliti oleh beberapa peneliti, misalnya (Box *et al.*, 1994), (Brockwell *et al.*, 1991) dan (**Suparman** *et al.*, 1999). Dalam praktek bila kita mencocokkan model ARMA terhadap data, umumnya orde (p,q) tidak diketahui.

Sedangkan untuk orde (p,q) tidak diketahui, identifikasi orde dan penaksiran parameter dilakukan dalam 2 tahap. Tahap pertama mengestimasi koefisien dan variansi galat dengan asumsi orde (p,q) diketahui. Tahap berikutnya berdasarkan estimator koefisien dan

variansi galat untuk berbagai harga (p,q) , dipilih orde (p,q) yang “terbaik”. Kriteria yang digunakan untuk menentukan harga (p,q) yang “terbaik” telah diusulkan oleh berbagai peneliti, di antara Kriteria **Akaike Information Criteria (AIC)**, Kriteria **Bayesian Information Criterion (BIC)**, dan Kriteria **Final Prediction Error (FPE)**.

Berdasarkan data x_t ($t = 1, 2, \dots, n$), penelitian ini mengusulkan suatu metode untuk menaksir harga $p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}$, dan σ^2 secara simultan. Untuk melakukan itu, kita akan menggunakan pendekatan Bayesian hierarki (Robert, 1991), yang akan diuraikan dalam bagian berikut ini.

4.2 BAYESIAN HIERARKI

Andaikan $s = (x_{p+q+1}, x_{p+q+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model ARMA(p,q). Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{p+q})$ diketahui, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\ell(s | p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-p)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+q+1}^n g^2(t, p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}) \tag{4.2}$$

di mana $g(t, p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}) = x_t + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(p)} x_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j^{(q)} z_{t-j}$ untuk $t = p+q+1, p+q+2, \dots, n$ dengan nilai awal $x_1 = x_2 = \dots = x_{p+q} = 0$ (Shaarawy *et al.*, 1984). Misalkan S_p dan I_q masing-masing adalah daerah stasionaritas dan daerah inversibilitas . Dengan menggunakan transformasi

$$F: \phi^{(p)} = (\phi_1^{(p)}, \dots, \phi_p^{(p)}) \in S_p \quad \mapsto \quad r^{(p)} = (r_1, \dots, r_p) \in (-1, 1)^p$$

$$G: \theta^{(q)} = (\theta_1^{(q)}, \dots, \theta_q^{(q)}) \in I_q \quad \mapsto \quad \rho^{(q)} = (\rho_1, \dots, \rho_q) \in (-1, 1)^q$$

maka model ARMA $(X_t)_{t \in Z}$ stasioner jika dan hanya jika $r^{(p)} = (r_1, r_2, \dots, r_q) \in (-1, 1)^p$ (Bhansali, 1983) dan model ARMA $(X_t)_{t \in Z}$ inversibel jika dan hanya jika $\rho^{(q)} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q) \in (-1, 1)^q$ (Barndorff *et al*, 1973). Selanjutnya fungsi kemungkinan dapat ditulis kembali sebagai :

$$\ell(s | p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-p)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n g^2(t, p, q, F^{-1}(\phi^{(p)}), G^{-1}(\theta^{(q)})) \quad (4.3)$$

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Orde p berdistribusikan Binomial dengan parameter λ :

$$\pi(p | \lambda) = C_{p_{\max}}^p \lambda^p (1 - \lambda)^{p_{\max} - p}$$

b) Orde q berdistribusikan Binomial dengan parameter μ :

$$\pi(q | \mu) = C_{q_{\max}}^q \mu^q (1 - \mu)^{q_{\max} - q}$$

c) Untuk orde p ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $r^{(p)}$ berdistribusikan seragam pada interval $(-1, 1)^p$.

d) Untuk orde q ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\rho^{(q)}$ berdistribusikan seragam pada interval $(-1, 1)^q$.

e) Variansi σ^2 berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp - \beta/(2\sigma^2)$$

Di sini parameter λ dan μ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval $(0, 1)$, nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk

parameter $H_1 = (p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)}, \sigma^2)$ dan $H_2 = (\lambda, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned} \pi(H_1, H_2) \\ = \pi(p | \lambda) \pi(r^{(p)} | p) \pi(q | \mu) \pi(\rho^{(q)} | q) \pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) \pi(\lambda) \pi(\beta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \quad (4.5)$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Fungsi kemungkinan bersifat obyektif sementara distribusi prior ini bersifat subyektif. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode *Reversible Jump MCMC*.

4.3 METODE REVERSIBLE JUMP MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode MCMC merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, M_2, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel (Robert, 1996) sedemikian hingga M_1, M_2, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, M_2, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida (Robert, 1996) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$
2. Simulasi distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$

Algoritma Gibbs digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$ dan algoritma hibrida, yang mengabungkan algoritma *Reversible Jump* MCMC (Green, 1995) untuk mensimulasikan parameter $(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)})$ dengan algoritma Gibbs untuk mensimulasikan parameter σ^2 , digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Algoritma *Reversible Jump* MCMC merupakan rampatan dari algoritma Metropolis-Hastings (Metropolis *et al.*, 1953; Hastings, 1970).

Simulasi Distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$

Distribusi bersyarat H_2 apabila diketahui H_1 dan s , $\pi(H_2 | H_1, s)$, dapat dinyatakan sebagai

$$\pi(H_2 | H_1, s) \propto \lambda^p (1 - \lambda)^{p_{\max} - p} \mu^q (1 - \mu)^{q_{\max} - q} (\beta/2)^{\alpha/2} \exp - \beta/(2\sigma^2) \beta^{-1}.$$

Distribusi tersebut tidak lain adalah distribusi gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $1/(2\sigma^2)$. Sehingga untuk mensimulasikannya dapat menggunakan algoritma Gibbs.

Simulasi Distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$

Jika distribusi bersyarat H_1 apabila diketahui H_2 dan s , $\pi(H_1 | H_2, s)$, diintegrasikan terhadap σ^2 , maka akan diperoleh

$$\pi(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)} | H_2, s) = \int_{R^+} \pi(H_1 | H_2, s) d\sigma^2$$

Dengan memisalkan

$$v = \frac{\alpha}{2} + \frac{n - p_{\max}}{2} \quad \text{dan} \quad w = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=p_{\max}+1}^n g^2(t, p, q, F^{-1}(r^{(p)}), G^{-1}(\rho^{(q)}))$$

serta menggunakan

$$\int_{\mathbb{R}^+} (\sigma^2)^{-(1+\nu)} \exp\left(-\frac{w}{\sigma^2}\right) d\sigma^2 = \frac{\Gamma(\nu)}{w^\nu}$$

maka kita dapatkan

$$\pi(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)} | H_2, s) \propto C_{p_{\max}}^p \lambda^p (1-\lambda)^{p_{\max}-p} C_{q_{\max}}^q \pi^q (1-\mu)^{q_{\max}-q} \left(\frac{1}{2}\right)^{p+q}$$

$$\frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \frac{1}{\beta} \frac{\Gamma(\nu)}{w^\nu}$$

Di lain pihak, kita mempunyai juga

$$\pi(\sigma^2 | p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)}, H_2, s) \propto (\sigma^2)^{-(\nu+1)} \exp\left(-w/(\sigma^2)\right)$$

Sehingga kita dapat menyatakan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$ sebagai hasil kali dari distribusi $\pi(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)} | H_2, s)$ dan distribusi $\pi(\sigma^2 | p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)}, H_2, s)$, yaitu :

$$\pi(H_1 | H_2, s) = \pi(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)} | H_2, s) \times \pi(\sigma^2 | p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)}, H_2, s)$$

Selanjutnya untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$, kita gunakan algoritma hibrida yang terdiri dari dua tahap :

- Tahap 1 : Mensimulasikan distribusi $\pi(\sigma^2 | p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)}, H_2, s)$
- Tahap 2 : Mensimulasikan distribusi $\pi(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)} | H_2, s)$

Kemudian untuk mensimulasikan distribusi $\pi(\sigma^2 | p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)}, H_2, s)$ digunakan algoritma Gibbs. Sebaliknya, distribusi $\pi(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)} | H_2, s)$ tidak berbentuk eksplisit sehingga untuk mensimulasikan digunakan algoritma *Reversible Jump* MCMC.

Apabila orde (p, q) ditentukan, kita dapat menggunakan algoritma Metropolis Hastings. Oleh karena dalam kasus ini orde tidak diketahui, rantai Markov harus melompat orde (p, q) dengan parameter $(r^{(p)}, \rho^{(q)})$, menuju (p^*, q^*) dengan parameter $(r^{(p^*)}, \rho^{(q^*)})$.

Untuk memecahkan masalah ini, kita gunakan algoritma *Reversible Jump* MCMC.

Pemilihan Jenis Lompatan

Misalkan (p, q) menyatakan nilai aktual untuk orde, kita akan tulis : η_p^{AR} peluang lompatan dari p ke $p+1$, δ_p^{AR} peluang lompatan dari p ke $p-1$, ζ_p^{AR} peluang lompatan dari p ke p , η_q^{MA} peluang lompatan dari q ke $q+1$, δ_q^{MA} peluang lompatan dari q ke $q-1$ dan ζ_q^{MA} peluang lompatan dari q ke q . Untuk tiap komponen, kita akan memilih distribusi seragam pada kemungkinan lompatan. Sebagai contoh untuk bagian AR, distribusi ini tergantung pada p dan memenuhi

$$\eta_p^{AR} + \delta_p^{AR} + \zeta_p^{AR} = 1$$

Kita tetapkan $\delta_0^{AR} = \zeta_0^{AR} = 0$ dan $\eta_{p_{max}}^{AR} = 0$. Di bawah pembatasan ini, kita akan memilih probabilitas sedemikian sehingga

$$\eta_p^{AR} = c \min \left\{ 1, \frac{\pi(p+1)}{\pi(p)} \right\} \quad \text{dan} \quad \delta_p^{AR} = c \min \left\{ 1, \frac{\pi(p)}{\pi(p+1)} \right\}$$

dengan c konstanta, sebesar mungkin sedemikian sehingga $\eta_p^{AR} + \delta_p^{AR} \leq 0,9$ untuk $p = 0, 1, \dots, p_{max}$. Tujuannya untuk memiliki

$$\eta_p^{AR} \pi(p) = \delta_{p+1}^{AR} \pi(p+1)$$

Kelahiran / Kematian dari Orde

Sebagai contoh untuk bagian AR, andaikan p adalah nilai aktual untuk orde dari model ARMA, $r^{(p)} = (r_1, r_2, \dots, r_p)$ adalah nilai koefisien. Anggap bahwa kita ingin melakukan lompatan dari p menuju $p+1$. Kita mengambil variabel random u menurut distribusi triangular dengan mean 0

$$g(u) = \begin{cases} u + 1, & -1 < u < 0 \\ 1 - u, & 0 < u < 1 \end{cases}$$

Kita lengkapi vektor $r^{(p)}$ dengan variabel random u . Sehingga vektor koefisien baru yang diusulkan adalah

$$r^{(p+1)} = (r_1, r_2, \dots, r_p, u)$$

Catat bahwa, apabila kita terjemahkan transformasi pada parameter lama, transformasi ini akan mengubah secara total semua nilai. Terlihat jelas bahwa Jacobian dari transformasi bernilai 1.

Sebaliknya, lompatan dari $p+1$ menuju p dilakukan dengan cara menghapus koefisien terakhir dalam $r^{(p+1)} = (r_1, r_2, \dots, r_p, r_{p+1})$. Sehingga vektor koefisien baru yang diusulkan adalah $r^{(p)} = (r_1, \dots, r_p)$. Probabilitas penerimaan/penolakan masing-masing adalah

$$\alpha_N = \min\{1, r_N\} \text{ dan } \alpha_D = \min\{1, r_N^{-1}\}$$

di mana

$$r_N = \frac{\pi(p+1, q, r^{(p+1)}, \rho^{(q)} | H_2, s) q(p+1, r^{(p+1)}; p, r^{(p)})}{\pi(p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)} | H_2, s) q(p, r^{(p)}; p+1, r^{(p+1)})}$$

Kita mempunyai

$$\begin{cases} q(p+1, r^{(p+1)}; p, r^{(p)}) = \delta_{p+1} \\ q(p, r^{(p)}; p+1, r^{(p+1)}) = \eta_p g(r_{p+1}) \end{cases}$$

Akhirnya, kita peroleh

$$r_N = \frac{w(\beta, p+1, q, r^{(p+1)}, \rho^{(q)})^{-v(\alpha)} p^{\max-p} \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{2} \eta_{p+1}}{w(\beta, p, q, r^{(p+1)}, \rho^{(q)})^{-v(\alpha)} p+1} \frac{1}{\delta_p g(r_{p+1})}$$

Perubahan Koefisien

Andaikan sekarang bahwa lompatan bagian AR yang dipilih adalah dari p menuju p tanpa perubahan orde tetapi hanya perubahan koefisien-koefisiennya. Apabila $r^{(p)} = (r_1, r_2, \dots, r_p)$ adalah vektor

koefisien, kita modifikasi vektor koefisien komponen tiap komponen. Anggap bahwa r_1, r_2, \dots, r_{i-1} diaktualisasi dan andaikan bahwa $r_1^*, r_2^*, \dots, r_{i-1}^*$ titik yang diperoleh. Kita mendefinisikan titik u_i dengan cara berikut :

$$u_i = \sin(r_i + s)$$

dengan s diambil menurut distribution seragam pada interval $[-\pi/10, \pi/10]$. Maka u_i dipilih dengan distribusi

$$f(u_i | r_i) = \frac{5}{\pi \sqrt{1 - u_i^2}}$$

dalam interval $[\sin(r_i - \pi/10), \sin(r_i + \pi/10)]$.

Dengan menuliskan $r^{*(p)} = (r_1^*, \dots, r_{i-1}^*, r_i, r_{i+1}, \dots, r_p)$ dan $\tilde{r}^{*(p)} = (r_1^*, \dots, r_{i-1}^*, u_i, r_{i+1}, \dots, r_p)$, probabilitas penerimaan/penolakan yang bersesuaian adalah

$$\alpha_c = \min\{1, r_c\}$$

di mana

$$r_c = \frac{\pi(p, q, r^{*(p)}, \rho^{(q)}, H_2 | s) q(p, r^{*(p)}; p, \tilde{r}^{*(p)})}{\pi(p, q, \tilde{r}^{*(p)}, \rho^{(q)}, H_2 | s) q(p, \tilde{r}^{*(p)}; p, r^{*(p)})}$$

Oleh karena

$$\frac{q(p, r^{*(p)}; p, \tilde{r}^{*(p)})}{q(p, \tilde{r}^{*(p)}; p, r^{*(p)})} = \left(\frac{1 + r_i}{1 + u_i} \frac{1 - r_i}{1 - u_i} \right)^{1/2}$$

Maka

$$r_c = \frac{w(\beta, p, q, r^{*(p)}, \rho^{(q)})^{-v(\alpha)}}{w(\beta, p, q, r^{(p)}, \rho^{(q)})^{-v(\alpha)}} \left(\frac{1 + r_i}{1 + u_i} \frac{1 - r_i}{1 - u_i} \right)^{1/2}$$

4.4 HASIL DAN PEMBAHASAN

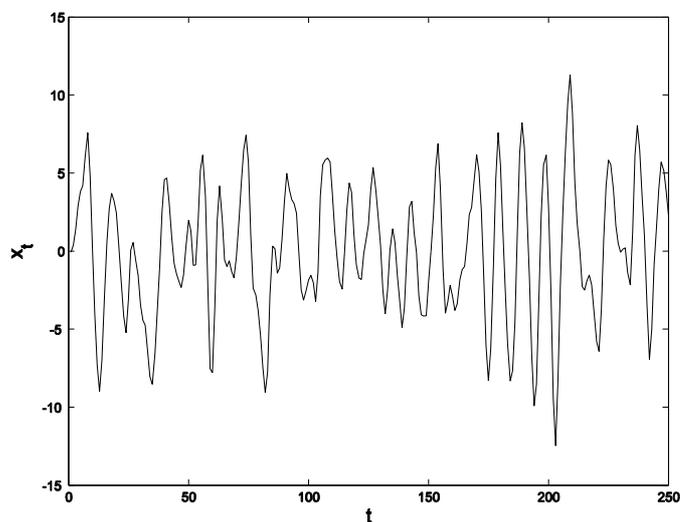
Sebagai ilustrasi, kita akan menerapkan metode ini untuk mengidentifikasi orde dan menaksir parameter data ARMA sintesis

dan data riil. Studi simulasi ditempuh untuk mengkonfirmasi kinerja dari algoritma *Reversible Jump* MCMC apakah dapat berkerja dengan baik. Sedangkan studi kasus diberikan untuk memberikan contoh penerapan penelitian dalam memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Baik untuk data ARMA sintesis maupun data ARMA riil ini, kita akan menggunakan algoritma *Reversible Jump* MCMC untuk mengidentifikasi orde dan mengestimasi parameter model ARMA yang bersesuaian. Untuk keperluan itu, algoritma tersebut diimplementasikan sebanyak 70000 iterasi dengan periode pemanasan sebanyak 20000. Nilai orde p dan q dibatasi maksimum 10 sehingga $p_{maks} = q_{maks} = 10$.

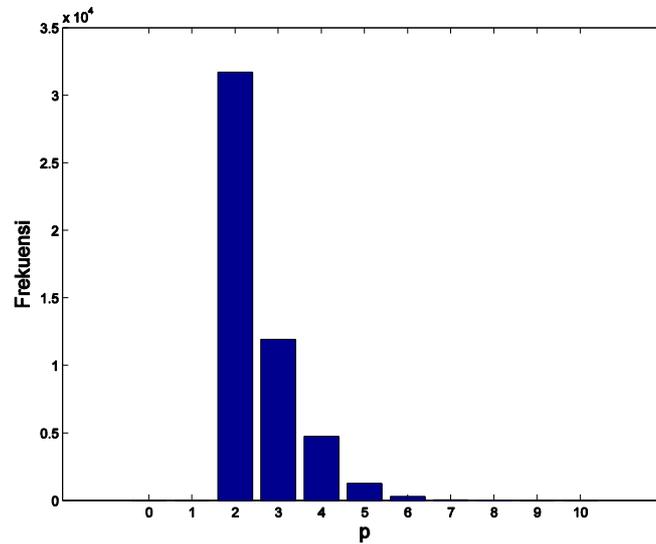
Data ARMA Sintesis

Gambar 4.1 merupakan data ARMA sintesis yang dibuat menurut persamaan (4.1) di atas dengan menggunakan bahasa pemograman MATLAB, dengan jumlah data $n = 250$, orde $p = 2$, $q = 1$, $\phi^{(2)} = (-1.36, 0.7)$, $\theta^{(1)} = (0.7)$ dan $\sigma^2 = 1$.

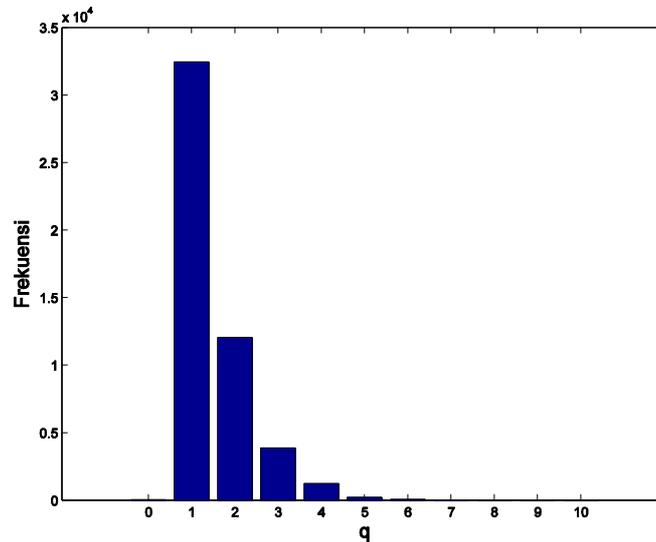


Gambar 4.1. Data ARMA Sintesis

Berdasarkan data simulasi dalam Gambar 4.1 selanjutnya orde p , orde q , parameter model ARMA dan variansi σ^2 diestimasi dengan menggunakan algoritma *Reversible Jump* MCMC. Histogram untuk orde p dan orde q ditampilkan masing-masing pada Gambar 4.2 dan Gambar 4.3.



Gambar 4.2. Histogram Orde p untuk Data ARMA Sintesis

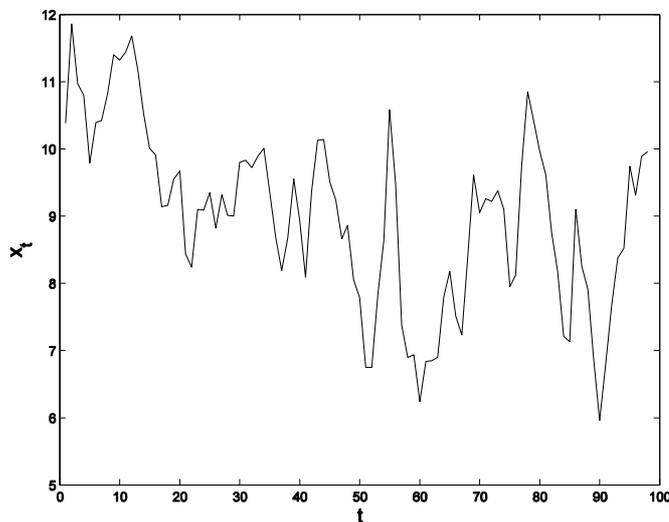


Gambar 4.3. Histogram Orde q untuk Data ARMA Sintesis

Penaksir orde p , orde q parameter model ARMA dan variansi σ^2 yang dihasilkan oleh algoritma *Reversible Jump* MCMC adalah $\hat{p} = 2$, $\hat{q} = 1$, $\hat{\phi}^{(2)} = (-0.36, 0.70)$, $\theta^{(1)} = (0.70)$ dan $\hat{\sigma}^2 = 1.09$. Apabila kita bandingkan antara nilai sebenarnya dan nilai estimasi, terlihat bahwa algoritma *Reversible Jump* MCMC dapat berkerja dengan baik.

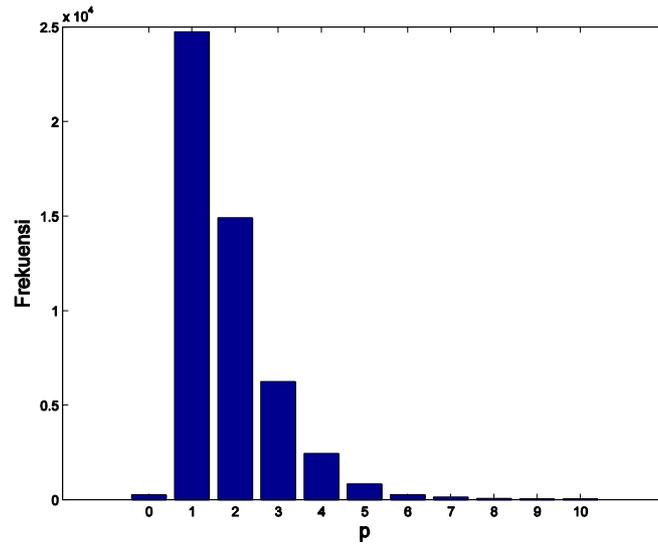
Data ARMA Riil

Data riil pada Gambar 4.4 merupakan data level ketinggian air di Telaga Huron USA (dalam feet) dari tahun 1875 sampai tahun 1972 (Brockwell *et al.*, 1991).

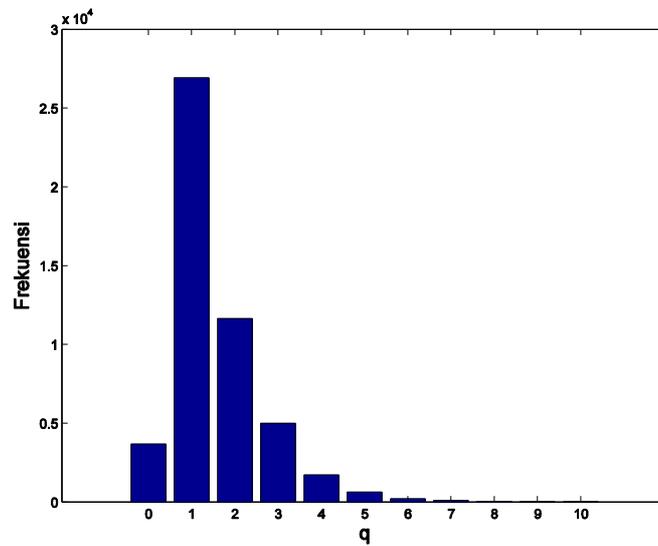


Gambar 4.4. Data Level Ketinggian Air di Telaga Huron USA (1875 – 1972)

Berdasarkan data pada Gambar 4.3 selanjutnya orde p , orde q , parameter model ARMA dan variansi σ^2 ditaksir dengan menggunakan algoritma *Reversible Jump* MCMC.



Gambar 4.5. Histogram Orde p untuk ARMA Riil



Gambar 4.6. Histogram Orde q untuk ARMA Riil

Penaksir orde p , orde q parameter model ARMA dan variansi σ^2 yang dihasilkan oleh algoritma *Reversible Jump* MCMC adalah $\hat{p} = 1$, $\hat{q} = 1$, $\phi_1^{(1)} = -0,75$, $\theta_1^{(1)} = 0,32$ dan $\hat{\sigma}^2 = 0,48$.

4.5 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma *Reversible Jump* MCMC dan penerapannya pada identifikasi orde p dan q , penaksiran vektor koefisien $\phi^{(p)}$ dan $\theta^{(q)}$, dan penaksiran variansi σ^2 dari model ARMA. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa algoritma *Reversible Jump* MCMC dapat menaksir parameter-parameter itu dengan baik.

Beberapa kelebihan yang diperoleh dari algoritma *Reversible Jump* MCMC ini, yaitu : (1) Algoritma *Reversible Jump* MCMC mengidentifikasi orde dan mengestimasi parameter model ARMA dalam satu tahap saja. Apabila digunakan metode lain, umumnya proses identifikasi dan estimasi dilakukan dalam dua tahap. (2) Algoritma *Reversible Jump* MCMC tidak hanya menghasilkan model ARMA yang cocok terhadap suatu data runtun waktu tetapi juga model ARMA yang stasioner. Sifat stasioneritas model ARMA ini sangat penting apabila model ARMA digunakan untuk melakukan peramalan. Metode lain, biasanya menghasilkan model ARMA yang tidak stasioner.

Sebagai implementasi algoritma *Reversible Jump* MCMC, diambil data level ketinggian air di Telaga Huron USA dari tahun 1875 sampai dengan tahun 1972. Hasilnya data level ketinggian air telaga tersebut dapat dimodelkan dengan model ARIMA(1,1). Selanjutnya model-model yang diperoleh dapat digunakan untuk memprediksi level ketinggian air di Telaga Huron pada periode-periode berikutnya.

BAB 5

REGRESI LINEAR PER POTONGAN

5.1 RUMUSAN MASALAH

Model regresi linear per potongan merupakan model yang sering digunakan dalam berbagai bidang. Dalam bidang ekologi, model regresi linear per potongan digunakan untuk memodelkan hubungan antara suhu organisme dan suhu eksternal (Meunier, 2014). Dalam bidang ekonometri, model regresi linear per potongan digunakan untuk modelisasi pemberian komisi (Gujarati, 1978). Dalam bidang demografi, model regresi linear per potongan dapat digunakan untuk modelisasi pertumbuhan populasi manusia atas berbagai periode waktu yang berbeda. Sebagai contoh, selama suatu interval waktu populasi menunjukkan pertumbuhan linear namun pada periode waktu yang lain menunjukkan pertumbuhan linear yang lain.

Jika model regresi linear konstan per potongan dicocokkan terhadap data, maka umumnya parameter model tidak diketahui. Mengingat begitu banyak model regresi linear konstan per potongan, di sini akan dibatasi pada model regresi linear konstan per potongan dengan galat berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ^2 di mana σ^2 adalah parameter.

Regresi linear per potongan dari variabel terikat y_t terhadap variabel bebas x_t untuk $t = 1, 2, \dots, n$ dapat dituliskan dalam persamaan berikut :

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1^{(k)} + \beta_1^{(k)} x_t + z_t & \tau_0^{(k)} < t \leq \tau_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} + \beta_2^{(k)} x_t + z_t & \tau_1^{(k)} < t \leq \tau_2^{(k)} \\ \vdots & \\ \alpha_k^{(k)} + \beta_k^{(k)} x_t + z_t & \tau_{k-1}^{(k)} < t \leq \tau_k^{(k)} \end{cases}$$

dengan $\tau_0^{(k)} = 0$, $\tau_k^{(k)} = n$ dan

$$\begin{aligned}
 z_t &\sim N(0, \sigma_1^{2(k)}) & \tau_0^{(k)} \leq t < \tau_1^{(k)} \\
 z_t &\sim N(0, \sigma_2^{2(k)}) & \tau_1^{(k)} \leq t < \tau_2^{(k)} \\
 &\vdots \\
 z_t &\sim N(0, \sigma_k^{2(k)}) & \tau_{k-1}^{(k)} \leq t < \tau_k^{(k)}
 \end{aligned}$$

Dalam persamaan di atas :

- a) k menyatakan banyaknya titik ambang
- b) $\tau_0^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k)}$ menyatakan titik-titik ambang yang bersesuaian,
- c) $\alpha_0^{(k)}, \dots, \alpha_k^{(k)}$ dan $\beta_0^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \dots, \beta_k^{(k)}$ menyatakan koefisien regresi,
- d) $\sigma_1^{2(k)}, \sigma_2^{2(k)}, \dots, \sigma_k^{2(k)}$ menyatakan variansi galat.

Jika θ menyatakan parameter model regresi linear di atas, maka

$$\theta = \left(k, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_k^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \dots, \beta_k^{(k)}, \sigma_1^{2(k)}, \dots, \sigma_k^{2(k)} \right)$$

Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n merupakan sampel random yang diambil dari suatu populasi yang bermodel regresi linear konstan per potongan. Berdasarkan sampel random tersebut, permasalahan utama adalah bagaimana cara mengestimasi parameter θ . Dalam paper ini, metode Bayesian digunakan untuk mengestimasi parameter θ . Kajian mengenai Metode Bayesian dapat ditemukan diberbagai literatur, misalnya Robert (2001). Namun fungsi kemungkinan untuk parameter θ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga penaksir parameter θ tidak dapat ditentukan secara analitik. Untuk mengatasi masalah tersebut, dalam penelitian ini digunakan Algoritma Reversible Jump MCMC (Green, 1995).

5.2 BAYESIAN HIERARKI

Untuk $i = 1, 2, \dots, k$, oleh karena z_t berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\sigma_i^{2(i)}$ untuk $\tau_{i-1}^{(i)} < t < \tau_i^{(i)}$, maka fungsi kepadatan dari z_t berbentuk

$$f(z_t | \sigma_i^{2(i)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{2(i)}}} \right) \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(i)}} z_t^2$$

Kajian mengenai fungsi kemungkinan dapat ditemukan dalam berbagai literatur, misalnya Bain and Engelhardt (1992). Sehingga untuk $z_i = (z_{\tau_{i-1}^{(i)}+1}, \dots, z_{\tau_i^{(i)}})$ fungsi kepadatan gabungan dari z_i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(z_i | \sigma_i^{2(i)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{2(k)}}} \right)^{\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)}} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} z_t^2$$

Dengan menggunakan transformasi variabel

$$y_t = \alpha_t^{(k)} + \beta_t^{(k)} x_t + z_t,$$

maka diperoleh $z_t = y_t - \alpha_t^{(k)} - \beta_t^{(k)} x_t$ dan $\frac{dz_t}{dy_t} = 1$. Sehingga fungsi

kepadatan dari y_i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(y_i | \alpha_i^{(i)}, \beta_i^{(i)}, \sigma_i^{2(i)}) = (2\pi\sigma_i^{2(k)})^{-\frac{1}{2}(\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)})} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2$$

Akhirnya fungsi kemungkinan maksimum untuk $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$L(y | \theta) = \prod_{i=1}^k \prod_{t=\tau_{i-1}^{(k)}+1}^{\tau_i^{(k)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{2(k)}}} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2$$

atau

$$L(y | \theta) = \prod_{i=1}^k \left\{ (2\pi\sigma_i^{2(k)})^{-\frac{1}{2}(\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)})} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2 \right\}$$

Untuk mendapatkan distribusi posterior, terlebih dahulu ditentukan distribusi prior untuk parameter

$$\theta = (k, \tau^{(k+1)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \sigma^{2(k)}),$$

dengan cara sebagai berikut :

$$\pi(k) = C_k^{k_{maks}} \lambda^k (1 - \lambda)^{k_{maks} - k}$$

untuk $k = 1, 2, \dots, k_{maks}$

$$\pi(\tau^{(k)} | k) = \frac{(2k+1)!}{n^{2k}} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1})$$

$$\pi(\alpha^{(k)} | k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp - \frac{1}{2a^2} \alpha_i^2$$

$$\pi(\beta^{(k)} | k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp - \frac{1}{2b^2} \beta_i^2$$

$$\pi(\sigma^{2k} | k) = \prod_{i=1}^k \frac{a}{2} (\sigma_i^{2(i)})^{-2} \exp - \frac{a}{2\sigma_i^{2(i)}}$$

Namun timbul permasalahan baru yaitu adalah dengan hadirnya hiperparameter $\varphi = (\lambda, c, d, a, b)$ dalam distribusi prior di atas. Selanjutnya hiperparameter φ dipandang sebagai suatu variabel acak dengan distribusi tertentu, yaitu:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &\propto \frac{1}{\lambda} & \pi(c) &\propto \frac{1}{c} \\ \pi(a) &\propto \frac{1}{a} & \pi(b) &\propto \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Misalkan $\pi(\theta, \varphi)$ menyatakan distribusi prior untuk (θ, φ) . Karena $\pi(\theta | \varphi) = \frac{\pi(\theta, \varphi)}{\pi(\varphi)}$ maka distribusi prior untuk (θ, φ) dapat ditentukan sebagai berikut

$$\pi(\theta, \varphi) = \pi(\theta | \varphi) \pi(\varphi)$$

atau

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \varphi) &\propto C_k^{k_{maks}} \lambda^k (1-\lambda)^{k_{maks}-k} \frac{(2k+1)!}{n^{2k}} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1}) \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp - \frac{1}{2a^2} \alpha_i^2 \\ &\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp - \frac{1}{2b^2} \beta_i^2 \prod_{i=1}^k \frac{a}{2} (\sigma_i^{2(i)})^{-2} \exp - \frac{a}{2\sigma_i^{2(i)}} \\ &\frac{1}{\lambda} \frac{1}{c} \frac{1}{a} \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Misalkan $\pi(\theta, \varphi | y)$ merupakan distribusi posterior untuk (θ, φ) . Dengan menggunakan Teorema Bayes, maka distribusi posterior untuk parameter (θ, φ) dapat dinyatakan sebagai hasil kali fungsi kemungkinan dan distribusi prior

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \varphi | y) &\propto f(y | \theta) \pi(\theta, \varphi) \propto f(y | \theta) \pi(\theta, \varphi) \pi(\theta | \varphi) \pi(\varphi) \\ &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ (\sigma_i^{2(k)})^{-\frac{1}{2}(\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)})} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2 \right\} \\ &C_k^{k_{maks}} \lambda^k (1-\lambda)^{k_{maks}-k} \frac{(2k+1)!}{n^{2k}} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1}) \\ &\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{a^2}} \exp - \frac{1}{2a^2} \alpha_i^2 \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{b^2}} \exp - \frac{1}{2b^2} \beta_i^2 \prod_{i=1}^k \frac{a}{2} (\sigma_i^{2(i)})^{-2} \exp - \frac{a}{2\sigma_i^{2(i)}} \\ &\frac{1}{\lambda} \frac{1}{c} \frac{1}{a} \frac{1}{b} \end{aligned}$$

5.3 METODE REVERSIBLE JUMP MCMC

Misalkan $M(\theta, \varphi)$. Secara umum, metode MCMC merupakan suatu metode sampling dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, M_2, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel (Robert and Casella, 1999) sedemikian hingga M_1, M_2, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang berdistribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$. Dengan demikian M_1, M_2, \dots, M_m dapat digunakan untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan hal tersebut, diadopsi Algoritma Gibbs (Robert and Casella, 1999) yang terdiri dari dua tahap :

- (1) Simulasi distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$
- (2) Simulasi distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$.

Distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$ mempunyai bentuk eksplisit. Sehingga Algoritma Gibbs dapat digunakan untuk membuat simulasi distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$. Sebaliknya, distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$ tidak mempunyai bentuk eksplisit. Sehingga simulasi eksak tidak mungkin dilakukan. Penyelesaiannya menggunakan Algoritma Hibrida yang terdiri dari tiga tahap sebagai berikut:

- (2.1) Simulasi $\pi(k, \tau^{(k)} | \varphi, y)$
- (2.2) Simulasi $\pi(\sigma^{2(k)} | k, \tau^{(k)}, \varphi, y)$.

Karena k tidak diketahui maka algoritma MCMC biasa tidak bisa digunakan untuk membuat suatu simulasi distribusi $\pi(k, \tau^{(k)} | \varphi, y)$. Sebagai gantinya, digunakan Algoritma Reversible Jump MCMC untuk membuat simulasi distribusi $\pi(k, \tau^{(k)} | \varphi, y)$. Kajian mengenai aplikasi Algoritma Reversible Jump MCMC dapat ditemukan diberbagai literatur, misalnya *Suparman et al.* (2002), *Suparman* (2008), *Suparman* (2009), *Suparman* (2010a), dan *Suparman* (2010b). Sebaliknya distribusi

$$\pi(\sigma^{2(k)} | k, \tau^{(k)}, \varphi, y)$$

mempunyai bentuk eksplisit, sehingga Algoritma Gibbs dapat digunakan untuk membuat suatu simulasi distribusi

$$\pi(\sigma^{2(k)} | k, \tau^{(k)}, \varphi, y)$$

5.4 KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dikaji estimasi parameter model regresi linear konstan per potongan. Jika banyaknya regresi diketahui, maka estimasi parameter dapat dilakukan dengan Metode Markov Chain Monte Carlo. Namun dalam penelitian ini, banyaknya regresi tidak diketahui. Dengan kata lain, banyaknya regresi juga merupakan variabel. Sehingga Metode Markov Chain Monte Carlo tidak dapat digunakan. Penggantinya digunakan Metode Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo.

BAB 6

REGRESI POLINOMIAL PER POTONGAN

6.1 RUMUSAN MASALAH

Model regresi linear per potongan merupakan model yang sering digunakan dalam berbagai bidang. Dalam bidang ekologi, model regresi linear per potongan digunakan untuk memodelkan hubungan antara suhu organisme dan suhu eksternal (Meunier, 2014). Dalam bidang ekonometri, model regresi linear per potongan digunakan untuk modelisasi pemberian komisi (Gujarati, 1978). Dalam bidang demografi, model regresi linear per potongan dapat digunakan untuk modelisasi pertumbuhan populasi manusia atas berbagai periode waktu yang berbeda. Sebagai contoh, selama suatu interval waktu populasi menunjukkan pertumbuhan linear namun pada periode waktu yang lain menunjukkan pertumbuhan linear yang lain.

Jika model regresi linear konstan per potongan dicocokkan terhadap data, maka umumnya parameter model tidak diketahui. Mengingat begitu banyak model regresi linear konstan per potongan, di sini akan dibatasi pada model regresi linear konstan per potongan dengan galat berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ^2 di mana σ^2 adalah parameter.

Regresi linear per potongan dari variabel terikat y_t terhadap variabel bebas x_t untuk $t = 1, 2, \dots, n$ dapat dituliskan dalam persamaan berikut :

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1^{(k)} + \beta_1^{(k)} x_t + z_t & \tau_0^{(k)} < t \leq \tau_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} + \beta_2^{(k)} x_t + z_t & \tau_1^{(k)} < t \leq \tau_2^{(k)} \\ \vdots & \\ \alpha_k^{(k)} + \beta_k^{(k)} x_t + z_t & \tau_{k-1}^{(k)} < t \leq \tau_k^{(k)} \end{cases}$$

dengan $\tau_0^{(k)} = 0$, $\tau_k^{(k)} = n$ dan

$$\begin{aligned}
 z_t &\sim N(0, \sigma_1^{2(k)}) & \tau_0^{(k)} \leq t < \tau_1^{(k)} \\
 z_t &\sim N(0, \sigma_2^{2(k)}) & \tau_1^{(k)} \leq t < \tau_2^{(k)} \\
 & \vdots \\
 z_t &\sim N(0, \sigma_k^{2(k)}) & \tau_{k-1}^{(k)} \leq t < \tau_k^{(k)}
 \end{aligned}$$

Dalam persamaan di atas :

- a) k menyatakan banyaknya titik ambang
- b) $\tau_0^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k)}$ menyatakan titik-titik ambang yang bersesuaian,
- c) $\alpha_0^{(k)}, \dots, \alpha_k^{(k)}$ dan $\beta_0^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \dots, \beta_k^{(k)}$ menyatakan koefisien regresi,
- d) $\sigma_1^{2(k)}, \sigma_2^{2(k)}, \dots, \sigma_k^{2(k)}$ menyatakan variansi galat.

Jika θ menyatakan parameter model regresi linear di atas, maka

$$\theta = \left(k, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_k^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \dots, \beta_k^{(k)}, \sigma_1^{2(k)}, \dots, \sigma_k^{2(k)} \right)$$

Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n merupakan sampel random yang diambil dari suatu populasi yang bermodel regresi linear konstan per potongan. Berdasarkan sampel random tersebut, permasalahan utama adalah bagaimana cara mengestimasi parameter θ . Dalam paper ini, metode Bayesian digunakan untuk mengestimasi parameter θ . Kajian mengenai Metode Bayesian dapat ditemukan diberbagai literatur, misalnya Robert (2001). Namun fungsi kemungkinan untuk parameter θ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga penaksir parameter θ tidak dapat ditentukan secara analitik. Untuk mengatasi masalah tersebut, dalam penelitian ini digunakan Algoritma Reversible Jump MCMC (Green, 1995).

6.2 BAYESIAN HIERARKI

Untuk $i = 1, 2, \dots, k$, oleh karena z_t berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\sigma_i^{2(i)}$ untuk $\tau_{i-1}^{(i)} < t < \tau_i^{(i)}$, maka fungsi kepadatan dari z_t berbentuk

$$f(z_t | \sigma_i^{2(i)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{2(i)}}} \right) \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(i)}} z_t^2$$

Kajian mengenai fungsi kemungkinan dapat ditemukan dalam berbagai literatur, misalnya Bain and Engelhardt (1992). Sehingga

untuk $z_i = (z_{\tau_{i-1}^{(i)}+1}, \dots, z_{\tau_i^{(i)}})$ fungsi kepadatan gabungan dari z_i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(z_i | \sigma_i^{2(i)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{2(k)}}} \right)^{\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)}} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} z_t^2$$

Dengan menggunakan transformasi variabel

$$y_t = \alpha_t^{(k)} + \beta_t^{(k)} x_t + z_t,$$

maka diperoleh $z_t = y_t - \alpha_t^{(k)} + \beta_t^{(k)} x_t$ dan $\frac{dz_t}{dy_t} = 1$. Sehingga fungsi kepadatan dari y_i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(y_i | \alpha_i^{(i)}, \beta_i^{(i)}, \sigma_i^{2(i)}) = (2\pi\sigma_i^{2(k)})^{-\frac{1}{2}(\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)})} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2$$

Akhirnya fungsi kemungkinan maksimum untuk $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$L(y | \theta) = \prod_{i=1}^k \prod_{t=\tau_{i-1}^{(k)}+1}^{\tau_i^{(k)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{2(k)}}} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2$$

atau

$$L(y | \theta) = \prod_{i=1}^k \left\{ (2\pi\sigma_i^{2(k)})^{-\frac{1}{2}(\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)})} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2 \right\}$$

Untuk mendapatkan distribusi posterior, terlebih dahulu ditentukan distribusi prior untuk parameter

$$\theta = (k, \tau^{(k+1)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \sigma^{2(k)}),$$

dengan cara sebagai berikut :

$$\pi(k) = C_k^{k_{maks}} \lambda^k (1 - \lambda)^{k_{maks} - k}$$

untuk $k = 1, 2, \dots, k_{maks}$

$$\pi(\tau^{(k)} | k) = \frac{(2k+1)!}{n^{2k}} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1})$$

$$\pi(\alpha^{(k)} | k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp - \frac{1}{2a^2} \alpha_i^2$$

$$\pi(\beta^{(k)} | k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp - \frac{1}{2b^2} \beta_i^2$$

$$\pi(\sigma^{2k} | k) = \prod_{i=1}^k \frac{a}{2} (\sigma_i^{2(i)})^{-2} \exp - \frac{a}{2\sigma_i^{2(i)}}$$

Namun timbul permasalahan baru yaitu adalah dengan hadirnya hiperparameter $\varphi = (\lambda, c, d, a, b)$ dalam distribusi prior di atas. Selanjutnya hiperparameter φ dipandang sebagai suatu variabel acak dengan distribusi tertentu, yaitu:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &\propto \frac{1}{\lambda} & \pi(c) &\propto \frac{1}{c} \\ \pi(a) &\propto \frac{1}{a} & \pi(b) &\propto \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Misalkan $\pi(\theta, \varphi)$ menyatakan distribusi prior untuk (θ, φ) . Karena $\pi(\theta | \varphi) = \frac{\pi(\theta, \varphi)}{\pi(\varphi)}$ maka distribusi prior untuk (θ, φ) dapat ditentukan sebagai berikut

$$\pi(\theta, \varphi) = \pi(\theta | \varphi) \pi(\varphi)$$

atau

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \varphi) &\propto C_k^{k_{maks}} \lambda^k (1-\lambda)^{k_{maks}-k} \frac{(2k+1)!}{n^{2k}} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1}) \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp - \frac{1}{2a^2} \alpha_i^2 \\ &\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp - \frac{1}{2b^2} \beta_i^2 \prod_{i=1}^k \frac{a}{2} (\sigma_i^{2(i)})^{-2} \exp - \frac{a}{2\sigma_i^{2(i)}} \\ &\frac{1}{\lambda} \frac{1}{c} \frac{1}{a} \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Misalkan $\pi(\theta, \varphi | y)$ merupakan distribusi posterior untuk (θ, φ) . Dengan menggunakan Teorema Bayes, maka distribusi posterior untuk parameter (θ, φ) dapat dinyatakan sebagai hasil kali fungsi kemungkinan dan distribusi prior

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \varphi | y) &\propto f(y | \theta) \pi(\theta, \varphi) \propto f(y | \theta) \pi(\theta, \varphi) \pi(\theta | \varphi) \pi(\varphi) \\ &\propto \prod_{i=1}^k \left\{ (\sigma_i^{2(k)})^{-\frac{1}{2}(\tau_i^{(k)} - \tau_{i-1}^{(k)})} \exp - \frac{1}{2\sigma_i^{2(k)}} \sum_{t=\tau_{i-1}^{(k)}}^{\tau_i^{(k)}} (y_t - \alpha_i^{(k)} - \beta_i^{(k)} x_t)^2 \right\} \\ &C_k^{k_{maks}} \lambda^k (1-\lambda)^{k_{maks}-k} \frac{(2k+1)!}{n^{2k}} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1}) \\ &\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{a^2}} \exp - \frac{1}{2a^2} \alpha_i^2 \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{b^2}} \exp - \frac{1}{2b^2} \beta_i^2 \prod_{i=1}^k \frac{a}{2} (\sigma_i^{2(i)})^{-2} \exp - \frac{a}{2\sigma_i^{2(i)}} \\ &\frac{1}{\lambda} \frac{1}{c} \frac{1}{a} \frac{1}{b} \end{aligned}$$

6.3 METODE REVERSIBLE JUMP MCMC

Misalkan $M(\theta, \varphi)$. Secara umum, metode MCMC merupakan suatu metode sampling dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, M_2, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel (Robert and Casella, 1999) sedemikian hingga M_1, M_2, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang berdistribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$. Dengan demikian M_1, M_2, \dots, M_m dapat digunakan untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan hal tersebut, diadopsi Algoritma Gibbs (Robert and Casella, 1999) yang terdiri dari dua tahap :

- (1) Simulasi distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$
- (2) Simulasi distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$.

Distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$ mempunyai bentuk eksplisit. Sehingga Algoritma Gibbs dapat digunakan untuk membuat simulasi distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$. Sebaliknya, distribusi $\pi(\theta, \varphi | y)$ tidak mempunyai bentuk eksplisit. Sehingga simulasi eksak tidak mungkin dilakukan. Penyelesaiannya menggunakan Algoritma Hibrida yang terdiri dari tiga tahap sebagai berikut:

- (2.1) Simulasi $\pi(k, \tau^{(k)} | \varphi, y)$
- (2.2) Simulasi $\pi(\sigma^{2(k)} | k, \tau^{(k)}, \varphi, y)$.

Karena k tidak diketahui maka algoritma MCMC biasa tidak bisa digunakan untuk membuat suatu simulasi distribusi $\pi(k, \tau^{(k)} | \varphi, y)$. Sebagai gantinya, digunakan Algoritma Reversible Jump MCMC untuk membuat simulasi distribusi $\pi(k, \tau^{(k)} | \varphi, y)$. Kajian mengenai aplikasi Algoritma Reversible Jump MCMC dapat ditemukan diberbagai literatur, misalnya *Suparman et al.* (2002), *Suparman* (2008), *Suparman* (2009), *Suparman* (2010a), dan *Suparman* (2010b). Sebaliknya distribusi

$$\pi(\sigma^{2(k)} | k, \tau^{(k)}, \varphi, y)$$

mempunyai bentuk eksplisit, sehingga Algoritma Gibbs dapat digunakan untuk membuat suatu simulasi distribusi

$$\pi(\sigma^{2(k)} | k, \tau^{(k)}, \varphi, y)$$

6.4 KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dikaji estimasi parameter model regresi linear konstan per potongan. Jika banyaknya regresi diketahui, maka estimasi parameter dapat dilakukan dengan Metode Markov Chain Monte Carlo. Namun dalam penelitian ini, banyaknya regresi tidak diketahui. Dengan kata lain, banyaknya regresi juga merupakan variabel. Sehingga Metode Markov Chain Monte Carlo tidak dapat digunakan. Penggantinya digunakan Metode Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo.

DAFTAR PUSTAKA

- Barndorff-Nielsen, O. and Schou, G. 1973. On the parametrization of autoregressive models by partial autocorrelation, *J. Multivar. Anal.*, Vol. 3, 408-419.
- Bhansali, R.J. 1983. The inverse partial correlation function of a time series and its applications, *J. Multivar. Anal.*, Vol. 13, 310-327.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C. 1994. *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Prentice Hall, New Jersey.
- Brockwell, P.J. and Davis, R.A. 1991. *Times Series : Theory and Methods*, Springer, New York.
- Gilks, W.R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.J. (1996) *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall.
- Gujarati, D. 1978. *Ekonometrika Dasar*, Erlangga, Jakarta.
- Green, P.J. (1995) Reversible jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination, *Biometrika*, vol. 82, 711-732.
- Hastings, W.K. (1970) Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*, Vol. 57, 97-109.
- Hanselman, D. and Littlefield, B. 1977. *Matlab*, Pearson Education Asia and Andi.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Teller, A.H. and Teller, E. (1953) Equations of state calculations by fast computing machines, *Journal Chemical Physics*, Vol 21, 1087-1091.
- Meunier, C.L., Malzahn, A.M., Boersma, M. 2014 A New Approach to Homeostatic Regulation: Towards a Unified View of Physiological and Ecological Concepts. *Plos ONE*, Vol. 9 Issue 9, pp. 1-7.
- Olivier, C.J. and Quegan, S. (1998) *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Artech House
- Robert, C.P. (1996) *Méthodes de Monte Carlo par Chaîne de Markov*, Ekonomika.

- Robert, C.P., 1999. *The Bayesian Choice. A Decision-Theoretic Motivation*, Springer Texts in Statistics.
- Robert, C.P. and Casella, G. 1999. *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer, New York.
- Shaarawy, S. and Broemeling, L. 1984. Bayesian inferences and forecasts with moving averages processes. *Commun. Statist. – Theory Meth.*, 13(15), 1871-1888.
- Suparman, Doisy, M. and Tourneret, J.Y. (2002) *Changepoint Detection using Reversible Jump MCMC Methods. Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Orlando Florida, 1569-1572.
- Suparman 2006 Identifikasi dan estimasi Bayesian hierarki dalam runtun waktu AR dengan menggunakan algoritma SA, *Jurnal Pakar*, Vol. 7 No. 1 hal. 17-28.
- Suparman. 2008. Pemilihan Model Bayesian Hirarki Dalam Model ARMA Menggunakan Algoritma *Reversible Jump MCMC*, *Jurnal Eksakta*, Vol. 10, No. 2, Hal 66-76.
- Suparman. 2009. Estimator Bayesian Hirarki untuk Parameter Model Sinyal Multiplikatif Menggunakan Algoritma MCMC Hibrida, *Prosiding Seminar Nasional Teknologi V*, Buku 8, Hal. 41-47.
- Suparman. 2010a. Segmentasi Bayesian Hirarki untuk Model MA Inversiblel Konstan Sepotong demi Sepotong Berbasis Algoritma Reversibel Jump MCMC, *Jurnal Eksakta*, Vol. 11, No. 1, Hal 9-15.
- Suparman. 2010b. Inferensi Bayesian Hirarki untuk Model AR Stasioner Konstan per Segmen Menggunakan Algoritma *Reversible Jump MCMC*, *Jurnal Kadikma*, Vol. 2, No 1, Hal 81-95.
- Suparman dan Soejoeti, Z. 1999. Bayesian Estimation of ARMA Time Series Models, *Jurnal WKSI*, Vol. 2 No. 3 hal. 91-98.
- Tourneret, J.Y., Suparman and Doisy, M. (2003) Hierarchical Bayesian Segmentation of Signals Corrupted by Multiplicative Noise. *IEEE*, Vol. VI, pp. 165-168.

Tentang Penulis

Dr. Suparman, M.Si., DEA dilahirkan di Bantul Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY). Sarjana Pendidikan Matematika di Universitas Lampung (UNILA) diselesaikan pada tahun 1992. Magister Matematika di Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta diselesaikan pada tahun 1997. Magister Matematika Terapan di Universitas Toulouse III Perancis diselesaikan pada tahun 2000. Doktor Matematika Terapan di Universitas Toulouse III Perancis diselesaikan pada tahun 2003.

Menjabat Dekan Fakultas Sains dan Teknologi (FST) Universitas Teknologi Yogyakarta (UTY) dari tahun 2006 s/d 2010. Menjabat Wakil Rektor Bidang Kemahasiswaan UTY dari tanggal 5 Juli 2010 s/d 31 Januari 2011. Menjabat Wakil Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Ahmad Dahlan (UAD) sejak bulan Maret 2013. Menjabat Ketua Program Studi Magister Pendidikan Matematika Program Pascasarjana (PPs) UAD sejak bulan Pebruari 2017.

Saat ini, sebagai Dosen Tetap Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UAD di Yogyakarta. *Scopus Author ID* : 6507107541. Nomor Pencatatan Hak Cipta Buku “Teori Peluang” oleh Kementerian Hukum dan Hak Asasi Manusia : 079763

PENGANTAR *REVERSIBLE JUMP MARKOV CHAIN MONTE CARLO* DAN APLIKASINYA



Buku ini disusun berdasarkan penelitian dan pengajaran yang penulis lakukan selama lima tahun. Di samping itu, penulis juga telah mengkaji berbagai literatur dan hasil penelitian. Buku ini ditulis sebagai buku referensi untuk para peneliti, para pengajar di Perguruan Tinggi dan para mahasiswa dalam memahami Metode *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo*. Dalam buku ini disertakan beberapa aplikasinya sehingga membuat buku ini cocok juga untuk para praktisi yang ingin memahami Metode *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo* dan permasalahan yang bisa diselesaikan dengan metode ini.

Dalam buku ini dibahas berbagai aplikasi, yaitu :

1. *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo*.
2. Segmentasi Model *Autoregresif* Konstan Sepotong-Sepotong.
3. Segmentasi Model *Moving Average* Konstan Sepotong-Sepotong.
4. Estimasi Model *Autoregresif Moving Average*.
5. Regresi Linear per Potongan
6. Regresi Polinomial per Potongan



Laboratorium Teknologi Pembelajaran Center
FOOTPRINTS OF LEARNING

Bagian Penerbitan

Kampus 3, JAD Sayap Utara

Jalan Prof. Dr. Saepone, SH., Wanungora, Yogyakarta 55164

Email: itso@jad.ac.id

Laman: laps.jad.ac.id/

