ISBN : 978-979-16353-5-6

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Peningkatan Kontribusi Penelitian dan Pembelajaran Matematika dalam Upaya Pembentukan Karakter Bangsa "

Yogyakarta, 27 November 2010

Penyelenggara :
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
Kerjasama dengan
Himpunan Matematika Indonesia (Indo-MS)
wilayah Jateng dan DIY

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2010

PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

27 November 2010 FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Artikel-artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan pada
Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
pada tanggal ***27 November 2010***
di Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Tim Penyunting Artikel Seminar :

Dr. Hartono (UNY)
Dr. Djamilah BW (UNY)
Dr. Ali Mahmudi (UNY)
Dr. Sugiman (UNY)
Dr. Dhoriva UW (UNY)
Sahid, M.Sc (UNY)

Tim Editor :
Nur Hadi W, M.Eng.
Kuswari H, M.Kom.
Sri Andayani, M.Kom.

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2010

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA 2010

Peningkatan Kontribusi Penelitian dan Pembelajaran Matematika dalam Upaya Pembentukan Karakter Bangsa
27 November 2010

Diselenggarakan oleh:
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Diterbitkan oleh
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Kampus Karangmalang, Sleman, Yogyakarta

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
UNY, 2008

Cetakan ke – 1
Terbitan Tahun 2010
Katalog dalam Terbitan (KDT)
Seminar Nasional (2010 Novemver 27: Yogyakarta)
Prosiding/ Penyunting: Hartono [et.al] – Yogyakarta: FMIPA
Editor : Nur Hadi [et.al] – Yogyakarta: FMIPA
Universitas Negeri Yogyakarta, 2010

Penyuntingan semua tulisan dalam prosiding ini dilakukan oleh Tim Penyunting Seminar Nasional MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA 2010 dari Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Kata Pengantar

Alhamdulillah, segala puji syukur kami panjatkan hanya bagi Alloh SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karuniaNya sehingga Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema "**Peningkatan Kontribusi Penelitian dan Pembelajaran Matematika dalam Upaya Pembentukan Karakter Bangsa**" dapat terselenggara dengan lancar pada hari Sabtu, 27 November 2010. Seminar ini merupakan salah satu acara dalam rangkaian Pekan Ilmiah Pendidikan Matematika (PIPM) tahun 2010 yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.

Seminar Nasional ini diikuti tidak kurang dari 115 pemakalah yang berasal dari institusi pendidikan tinggi, sekolah menengah, dan lembaga lain. Beberapa institusi asal pemakalah antara lain Universiti Malaysia Terengganu, Universitas Syiah Kuala Banda Aceh, Universitas Negeri Medan, Universitas Riau, Universitas PGRI Palembang, Universitas Negeri Padang, Dinas Pendidikan Kabupaten Sijunjung Sumatera Barat, Universitas Muhammadiyah Bengkulu, Universitas Negeri Lampung, Universitas Bina Nusantara Jakarta Barat, Universitas Pelita Harapan Tangerang, PPPPTK BMTI Bandung, Pusat Pengembangan Informatika Nuklir –Batan Serpong, UPI Bandung, Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional (LAPAN) Bandung, UPI Kampus Tasikmalaya, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa Banten, Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan Yasika Majalengka, Universitas Siliwangi Tasikmalaya, Universitas Jenderal Soedirman, Universitas Lambung Mangkurat Banjarmasin, Universitas Borneo Tarakan, Universitas Tadulako, Universitas Hasanuddin, Universitas Negeri Makassar, Universitas Muhammadiyah Purworejo, SMP Negeri 40 Purworejo, Universitas Negeri Yogyakarta, Universitas Gadjah Mada, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta, Universitas Sebelas Maret Surakarta, Universitas Muhammadiyah Surakarta, Universitas Diponegoro, Universitas Negeri Semarang, Politeknik Negeri Semarang, IKIP PGRI Semarang, Universitas Veteran Bantara Sukoharjo, Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri (STAIN) Purwokerto, Universitas Airlangga, Institut Teknologi Surabaya, Universitas Negeri Surabaya, STIKOM Surabaya, Universitas Negeri Malang, IKIP Budi Utomo Malang, Universitas Katolik Widya Mandala Madiun, dan Universitas Mataram NTB.

Sesuai dengan tema seminar, semua makalah menyajikan berbagai ragam kajian teoritis maupun hasil penelitian matematika dan pembelajaran matematika yang diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pembentukan karakter bangsa.

Sejumlah 125 judul makalah dikelompokkan dalam 4 kategori yaitu Analisis dan Aljabar sebanyak 9 judul (9 pemakalah), Statistika 24 judul (23 pemakalah), Komputer dan Terapan 18 judul (17 pemakalah) serta Pendidikan 74 judul (66 pemakalah). Makalah yang dimuat dalam prosiding ini telah melalui tahap seleksi abstrak, yakni melalui proses review oleh tim yang nama anggotanya tercantum pada halaman lain di prosiding ini. Makalah dalam prosiding ini juga dipresentasikan dalam sidang paralel dalam seminar tanggal 27 November 2010.

Semoga prosiding seminar ini dapat menjadi catatan historis bermacam pemikiran intelektual di negeri ini yang bermanfaat sesuai dengan tema seminar, yaitu memberikan kontribusi dalam pembentukan karakter bangsa. Aamiin.

Yogyakarta, 27 November 2010
Panitia

DAFTAR ISI

Makalah Bidang Statistika					
No	**Kode**	**Nama**	**Instansi**	**Judul**	**Hal**
1.	S1	Achmad Syahrul Choir[1], Brodjol Sutijo S.U[2]	[1]Mahasiswa Magister Jurusan Statistika ITS [2]Dosen Jurusan Statistika ITS	Imputasi Berganda K-Medoid *General Regression Neural Network* Untuk Menangani *Missing Data*	73
2.	S2	Ali Shodiqin	Matematika IKIP PGRI Semarang	Strategi Untuk Mendapatkan Dividen Yang Optimal Dari Proses Surplus.	82
3.	S3	Andika Arisetyawan	Universitas Pendidikan Indonesia andikaarisetyawan@yahoo.co.id	Tinjauan Geometris Determinan Matrik Kovariansi Dan Trace Matrik Kovariansi Pada Data Multivariat	92
4.	S4	Budi Warsito[2], Suparti[3] Dan Subanar[4]	Program Studi Statistika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro [4]Program Studi Statistika Jurusan Matematika FMIPA UGM	Perbandingan Model Ffnn Dan Garch Pada Data Ihsg Bursa Efek Jakarta[1]	100
5.	S5	Chatarina Enny Murwaningtyas	Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta	Kekonvergenan Pendekatan Monte Carlo Kuadrat Terkecil Pada Harga Opsi Amerika	110
6.	S6	Didik Eko Prasetyo, Dipl.-Ing / Dr. Buldan Muslim M.Si /	Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional (LAPAN) Bandung	Minimalisasi Kesalahan Ionosfer Menggunakan Teknik Penalised Least Square Untuk Jarak Posisi GPS	*119*
7.	S7	Edwin Erifiandi	Mahasiswa S2 Jurusan Statistika FMIPA-ITS	Estimator Spline Parsial Dalam Regresi Semiparametrik Multirespon	123
8.	S8	Eko Suharto[1], Sutikno[2], Purhadi[3]	*[1]Mahasiswa Magister Jurusan Statistika ITS [2,3]Dosen Jurusan Statistika ITS*	Robust Lagrange Multiplier Pada Pemodelan Regresi Spasial Dependensi (Studi Kasus Angka Kematian Bayi Di Provinsi Jawa Timur)	130
9.	S9	Elly Ana[1], Nur Chamidah[1], Toha	1). Staf Pengajar Departemen	Pendekatan Kernel Dalam Pemodelan Kalibrasi Pada	138

		Saifudin[1], Erfiani[2], A.H. Wigena[2]	Matematika FST Universitas Airlangga 2). Staf Pengajar Departemen Statistika FMIPA IPB Bogor	Data Kurkumin	
10.	S10	Epi Priyanto[1*], Sony Sunaryo[2]	Mahasiswa Magister Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Jurusan Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember	Model Ketahanan Pangan Pulau Kalimantan Menggunakan Partial Least Square Generalized Linear Regression	145
11.	S11	Georgina M. Tinungki	Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin	Estimasi Regresi Semiparametrik Dalam Mengukur Kesalahan Random Pada Komponen Parameetrik	154
12.	S12	Georgina M. Tinungki	Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin	Penerapan Metode Time Series Regression Dan Arima Dalam Memprediksi Kunjungan Wisatawan Manca Negara Melalui Bandara Internasional Sultan Hasanuddin Makassar	162
13.	S13	Heri Purnomo , Purhadi	Mahasiswa Magister Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Dosen Jurusan Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember	Pemodelan Suku Bunga Dan Inflasi Di Indonesia Dengan Pendekatan Threshold Vector Error Correction Model	174
14.	S14	I Gde Adnyana, [2] Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, Ms.	Jurusan Statistika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,	Estimator Spline Dalam Regresi Nonparametrik Birespon	180
15.	S15	Ina Rusmiyati , Nur Iriawan	Mahasiswa Magister Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Jurusan Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember	Technology Acceptance Model (Tam) Pengolahan Data Hasil Sensus Penduduk 2010 Menggunakan Scanner Dengan Stuctural Equation Modeling (Sem) Pendekatan Bayesian (Studi Kasus Pada Pusat	186

				Pengolahan Bps Provinsi Jawa Timur)	
16.	S16	Iqbal Kharisudin	Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang	Model Regresi Fuzzy Tak Simetris Sebagai Generalisasi Model Regresi Linear	198
17.	S17	Iwan Fajar Prasetyawan[1], Sutikno[2], Setiawan[3]	[1] Mahasiswa Magister Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember [2,3] Jurusan Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,	Penentuan Matriks Pembobot Pada Pemodelan *Geographically Weighted Regression* Untuk Analisis Kemiskinan Di Jawa Tengah	207
18.	S18	Jadongan Sijabat, Se., M.Si	Mahasiswa Program Doktor Ilmu Ekonomi UNDIP	Karakteristik Personal Auditor Dan Perilaku Menyimpang Dalam Pelaksanaan Audit: Studi Empiris Di Kap Besar Di Jakarta Yang Berafiliasi Dengan Kap Asing (*The Big Four*)	218
19.	S19	Joko Prasetiyo, Nur Iriawan[2]	[1]Mahasiswa Magister Jurusan Statistika ITS [2]Dosen Jurusan Statistika ITS	Model Penerimaan Teknologi Pengolahan Data Berbasis Jaringan Dengan Pendekatan Bayesian *Structural Equation Modeling (Sem)* (Studi Kasus Pada Badan Pusat Statistik Kabupaten/Kota Di Sulawesi Selatan)	233
20.	S20	Putriaji Hendikawati	Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang	Algoritma Levenberg Marquardt Untuk *Feedforward Neural Network* Pada Peramalan Data *Time Series*	244
21.	S21	Sahar Mildino, Setiawan, Sutikno	Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember,	Pendekatan Bayesian Spatio-Temporal Untuk Mengatasi Heteroskedastisitas Pada Pemodelan Nilai Ketimpangan Pendapatan Masyarakat Di Propinsi Sepulau Jawa	254
22.	S22	Supandi	Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI Semarang	Pengaruh Perubahan Besar Premi Pada Bonus Malus System Terhadap Nilai Efisiensi Melalui Rantai Markov (Bms Singapura Dan Malaysia)	261

				Fungsi Riemann Theta	
11.	T11	Umi Mahmudah[1], Sugiyarto[2], M. Toifur[2]	Jabatan Matematik, Fakulti Sains Dan Teknologi, Universiti Malaysia Terengganu Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta	Model Matematika Pada Vibrasi Kisi Atom Ni, Fe, Dan Ni Fe Dalam Ruang Berdimensi Satu	379
12.	T12	Yosza Bin Dasril Sugiyarto Ismail Bin Mohd	Department Of Mathematics, Faculty Of Mathematics And Natural Sciences Universitas Ahmad Dahlan, Department Of Industrial Electronics, Faculty Of Electronics And Computer Engineering, Universiti Teknikal Malaysia Melaka (Utem), Hang Tuah Jaya 76100 Melaka, Malaysia Department Of Mathematics, Faculty Of Science And Technology Universiti Malaysia Terengganu (UMT) 21300 Kuala Terengganu, Malaysia	Fuzzy Constrained Minimization On Quadratic Programming Problem	386
13.	T13	Yudi Ari	Prodi Matematika Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta	Fungsi Lyapunov Dan Metoda Dalam Analisis Kestabilan Global Model Epidemik	394
14.	T14	Muhammad Abdy Tahir Ahmad	Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar	Mengkonstruksi Persekitaran Fuzzy Dari Pusat-Pusat Cluster Arus Listrik Pada Flat Eeg	403
15.	T15	Entin Hartini (1), Dinan Andiwijayakusuma (1)	Pusat Pengembangan Informatika Nuklir BATAN	Pengembangan Sistem Untuk Evaluasi Penampang Lintang Pada Data Nuklir Untuk	409

				Analisis Ketidakpastian Probabilistik Pada Simulasi Dan Analisis Neutronik.	
16.	T16	Eminugroho Ratna Sari	Program Studi Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta	Syarat Cukup Untuk Meminimalkan Penyebaran Penyakit Tuberkulosis Pada Suatu Komunitas	416

Makalah Bidang Pendidikan Matematika					
No	**Kode**	**Nama**	**Instansi**	**Judul**	
1.	P1	Aan Hasanah , M.Pd - Prof. Jozua Sabandar, M.A., Ph.D	Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA-UPI	Mengembangkan Kemampuan Berpikir Kreatif Siswa Sekolah Menengah Atas (SMA) Melalui Pembelajaran Kontekstual Yang Menekankan Pada Intuisi Matematis	424
2.	P2	Achmad Buchori SPd.M.Pd	IKIP PGRI Semarang	Keefektivan Penggunaan Classpad Casio, Cabri 2d Dan Geometer's Sketchpad Sebagai Media Pembelajaran Matematika	436
3.	P3	Adi Nur Cahyono, S.Pd., M.Pd	Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang	*Vygotskian Perspective*: Proses *Scaffolding* Untuk Mencapai *Zone Of Proximal Development (ZPD)* Peserta Didik Dalam Pembelajaran Matematika	*442*
4.	P4	Agung Prabowo	Program Studi MatematikaFakultas Sains dan Teknik - Universitas Jenderal Soedirman	Bilangan Dalam Khasanah Budaya Jawa	449
5.	P5	Agung Prabowo	Program Studi MatematikaFakultas Sains dan Teknik - Universitas Jenderal Soedirman	Memahatkan Spirit *Young Mathematicians* Pada Diri Siswa	458
6.	P6	Ali Mahmudi	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta	Membelajarkan Geometri Dengan Program *Geogebra*	469
7.	P7	Ani Minarni	mahasiswa S3	Peran Penalaran	478

			Pendidikan Matematika SPS UPI Bandung.	Matematik Untuk Meningkatkan Kemampuapemecahan Masalah Matematik Siswa.	
8.	P8	ARY WORO KURNIASIH	JUR. MATEMATIKA FMIPA UNNES	Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika Fmipa Unnes Dalam Menyelesaikan Masalah Matematika	485
9.	P9	Asep Ikin Sugandi dan Utari Sumarmo	Dosen PS. Pend. Matematika FKIP Unlam Banjarmasin/mhs S3 UPI Bandung STKIP Siliwangi	Pengaruh Pembelajaran Berbasis Masalah Dengan Setting Kooperatif Jigsaw Terhadap Kemampuan Koneksi Matematis Serta Kemandirian Belajar Siswa SMA	494
10.	P10	Asep Ikin Sugandi dan Utari Sumarmo	Dosen PS. Pend. Matematika FKIP Unlam Banjarmasin/mhs S3 UPI Bandung STKIP Siliwangi	Pengaruh Pembelajaran Berbasis Masalah Dengan Setting Kooperatif Jigsaw Terhadap Kemampuan Komunikasi Matematis Serta Kemandirian Belajar Siswa SMA	506
11.	P11	Atma Murni	Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Riau	Pembelajaran Matematika Dengan Pendekatan Metakognitif Berbasis Masalah Kontekstual	518
12.	P12	Bambang Priyo Darminto	Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Purworejo	Peningkatan Kreativitas Dan Pemecahan Masalah Bagi Calon Guru Matematika Melalui Pembelajaran Model Treffinger	528
13.	P13	Djamilah Bondan Widjajanti	Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY	Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah Untuk Mahasiswa Calon Guru Matematika: Sebuah Ilustrasi	537
14.	P14	Dwijo Susanto dan Mujiyem Sapti	SMP Negeri 40 Purworejo dan Prodi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Purworejo	Pengembangan Media Pembelajaran Dalam Penentuan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel	545

		Dahlan.		Mahasiswa Melalui Pendekatan *Problem Posing* Model *Searc, Solve, Create And Share* (SSCS).	
23.	P23	Kartinah, S.Si, M.Pd	IKIP PGRI SEMARANG	Pengembangan Perangkat Pembelajaran Pada Mata Kuliah Kalkulus Dengan Strategi Kombinasi Langsung-Tidak Langsung Di Jurusan Pendidikan Matematika	628
24.	P24	Kms. Muhammad Amin Fauzi Didi Suryadi	Unimed Pendidikan Matematika Medan	Pedagogical Content Knowledge (PCK) Melalui Peran Guru Dan Konteks Dalam Antisipasi Didaktis Dan Pedagogis (ADP) Menuju Matematika Abstrak (Membantu Siswa Memahami Matematika Yang Abstrak	636
25.	P25	Kms. Muhammad Amin Fauzi Jozua Sabandar	Unimed Pendidikan Matematika Medan	Pengembangan Kemandirian Belajar Siswa Melalui Pembelajaran Dengan Pendekatan Metakognitif (Membantu Siswa Dalam Membiasakan Berpikir Tentang Pikirannya)	648
26.	P26	Lucy Karyati Basar	FMIPA UNIMED	Kontribusi Pembelajaran Matematika Dalam Pembentukan Karakter Bangsa	660
27.	P27	Maria Ulpah	(Mahasiswa S3 Pendidikan Matematika UPI-Bandung)	Penggunaan Konteks Dalam Pembelajaran Statistika	668
28.	P28	Muhammad Turmuzi Insan Sari	*Dosen Pend. Matematika FKIP Unram Mataram NTB* *Alumnus IKIP Mataram*	Penaruh *Emotional Quotient (Eq)* Terhadap Prestasi Belajar Matematika Siswa Kelas X Semester II MAN 3 Sumbawa Tahun Pelajaran 2007/2008	674
29.	P29	Muhammad Turmuzi	Dosen Pend. Matematika FKIP Unram Mataram NTB	Penerapan Model Pembelajaran *Inquiri* Terpimpin Untuk Meningkatkan Hasil	681

				Belajar Siswa Kelas VIIC Semester II Di SMPN 1 Batukliang Utara Tahun Pelajaran 2008/2009 Pada Materi Pokok Himpunan	
30.	P30	Mutijah	Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri (STAIN) Purwokerto	Pembelajaran Matematika Di Sekolah Dasar Yang Berperspektif Gender	691
31.	P31	Nur Hadi Waryanto	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	E-Learning Readiness Score Sebagai Pedoman Penerapan E-Learning	699
32.	P32	Nur Hadi Waryanto	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Color Theory Dalam Pengembangan CD Pembelajaran Interaktif	708
33.	P33	Nur Izzati, S.Pd., M.Si. Prof Dr.. Didi Suryadi, M.Ed.	– Dinas Pendidikan Kabupaten Sijunjung, Sumatera Barat. Dosen Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung.	Komunikasi Matematik Dan Pendidikan Matematika Realistik	721
34.	P34	Risnanosanti	Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Bengkulu	Perbedaan *Self-Efficacy* Terhadap Matematika Siswa Berdasarkan Gender Dalam Pembelajaran Inkuiri	730
35.	P35	Rita P. Khotimah, Hesti Triwulandari	Universitas Muhammadiyah Surakarta Program Studi Pend.Matematika	Implementasi Pembelajaran Matematika Melalui Strategi Pembelajaran *Index Card Match* Dan *Giving Question And Getting Answers* Ditinjau Dari Motivasi Belajar Siswa SMP Negeri 2 Simo Kelas VII Semester Ii Tahun 2009/2010	737
36.	P36	Drs. Rudy Kurniawan, M.Pd Prof. Jozua Sabandar., M.A., Ph.D	Program Studi Pendidikan Matematika. STKIP Yasika Majalengka Program Studi Pendidikan Matematika Pascasarjana UPI Bandung	Pemahaman Dan Pemecahan Masalah Matematis (Artikel Kajian Pendidikan Matematika)	744

37.	P37	Rudi Santoso Yohanes	Universitas Katolik Widya Mandala Madiun	Membangun Kepribadian Siswa Melalui Pembelajaran Matematika	751
38.	P38	Sehatta Saragih Sabandar Jozua	UPI Bandung	Penerapan Pendekatan Pembelajaran Matematika Realistik Untuk Meningkatan Kemampuan Keruangan, Berfikir Logis Dan Sikap Positif Terhadap Matematika	759
39.	P39	Siti Chotimah , Dwijo Susanto	Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UM Purworejo SMP Negeri 40 Purworejo	Peningkatan Aktivitas Dan Hasil Belajar Matematika Melalui Model Pembelajaran *Problem Posing* Siswa Kelas VII D SMP Negeri 40 Purworejo Tahun Pelajaran 2009/2010	775
40.	P40	Slamet Hw., Rita P.Khotimah[i]	Program Studi Pend. Matematika UMS	Peningkatan Kompetensi Guru Matematika Sekolah Dasar Dalam Implementasi Pendidikan Matematika Realistik (PMR) Melalui Lesson Study	782
41.	P41	Sugiman	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Fleksibilitas Matematis Dalam Pendidikan Matematika Realistik	792
42.	P42	Sukayasa, Drs.M.Pd	Email: sukayasa08@yahoo.co.id Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Tadulako	Profil Karakteristik Penalaran Siswa SMP Dalam Memecahkan Masalah Geometri (Studi Awal Dalam Rangka Pengembangan Instrumen Penelitian)	799
43.	P43	Sukayasa,Drs. M.Pd	Email: sukayasa08@yahoo.co.id Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Tadulako	Karakteristik Bernalar Siswa SMP Berkemampuan Tinggi Dalam Menyelesaikan Soal Geometri Ditinjau Dari Perbedaan Gender	810
44.	P44	Sulis Janu Hartati	Mahasiswa S3 Pendidikan Matematika Universitas Negeri	Pemahaman Operasi Pembagian Pada Siswa SD Dengan Gaya Belajar Kinestetik	822

			Surabaya Dosen S1 Sistem Informasi STIKOM Surabaya		
45.	P45	Sumardi,Drs.M.Si dan Luthfia Amni Rismiyati.	Jurusan Pendidikan Matematika FKIP - UMS	Upaya Peningkatan Keaktifan Siswa Pada Standar Kompetensi Bangun Ruang Melalui Metode Savi (*Somatic,Auditory,Visual,Intellectually*) Dengan Pemanfaatan *Software Macromedia Flash* (Ptk Kelas VIIIA SMP Negeri 1 Boyolali Tahun Ajaran 2009/2010)	832
46.	P46	Suparni, S.Pd., M.Pd.	Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	Membangun Karakter Bangsa Dengan Teori Polya Pada Pembelajaran Matematika	840
47.	P47	Supratman	Prodi Pendidikan Matematika FKIP Univ. Siliwangi Tasikmalaya	Analisis Hasil Belajar Matematika Siswa Dengan Pembelajaran Open-Ended	847
48.	P48	Widya Kusumaningsih S.Pd, M.Pd	IKIP PGRI Semarang	Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Dengan Strategi Think Talk Write Melalui Model Pembelajaran Kooperatif Jigsaw Untuk Meningkatkan Kemampuan Menulis Matematik Siswa Smp.	865
49.	P49	Yanto Permana Utari Sumarmo	(PPPPTK BMTI Bandung)	Mengembangkan Kemampuan Pemahaman Dan Disposisi Matematis Siswa Sekolah Menengah Atas Melalui *Model-Eliciting Activities*	875
50.	P50	Yonandi dan Sumarmo		Meningkatan Kemampuan Komunikasi Dan Disposisi Matematik Melalui Pembelajaran Kontekstual Berbantuan Komputer (*Computer-Assisted Instructions*)	884
51.	P51	Dylmoon Hidayat, Ph. D	Dosen Jurusan Pendidikan	Himpunan Minimal Operasi Logika Yang	898

			Matematika Universitas Pelita Harapan, Tangerang	Cukup Abstrak	
52.	P52	Prof. Dr. Rusgianto HS	Jurusan Pendidikan Matematika UNY	The Relationship Between Reasoning, And Emotional Intelligence In Social Interaction With Mathematics Achievement	905
53.	P53	Armiati dan Yozua Sabandar	Dosen Matematika UNP Padang Dosen Matematika UPI, Bandung	Pengembangan Perangkat Pembelajaran Berdasarkan Model Problem Base Untuk Menumbuhkan Kemampuan Komunikasi Matematis Dan Kecerdasan Emosional Mahasiswa	911
54.	P54	Edi Prajitno	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Karya Ilmiah Guru Matematika Dan Lesson Study	918
55.	P55	Elly Arliani	Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY	Meningkatkan Kepercayaan Diri Guru Dan Siswa Melalui Lesson Study	923
56.	P56	Himmawati Puji Lestari	Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY	Pemanfaatan Excel Solver Dalam Pembelajaran Pemrograman Linear	927
57.	P57	Hj. Epon Nur'aeni Utari Sumarmo	UPI Kampus (Tasikmalaya) UPI	Pengembangan Kemampuan Pemahaman Konsep Geometri Siswa Sekolah Dasar Melalui Pembelajaran Geometri Berbasis Teori *Van Hiele*	932
58.	P58	Kartono	Jurusan Matematika FMIPA UNNES	Merancang Dan Menilai Tugas Untuk Melatih Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Matematika (Kbttm) Bagi Siswa Sebagai Sisipan Dalam Kegiatan Pembelajaran	944
59.	P59	Nila Kesumawati	Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas PGRI Palembang	Mengembangkan Penalaran Dalam Matematika	954
60.	P60	Sri Sutarni, Candra Sakti NW[ii]	Program Studi Pend. Matematika Universitas Muhammadiyah	Peningkatan Keaktifan Siswa Dan Prestasi Belajar Matematika Pada Segi Empat Melalui	960

			Surakarta	Pendekatan *Cooperative Learning* Tipe *Two Stay Two Stray*(PTK Pada Siswa Kelas VII SMP Negeri 2 Sawit Boyolali)	
61.	P61	Dr. Sri Hastuti Noer, M.Pd.	Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Lampung	Peranan Kemandirian Belajar Dalam Pembelajaran Berbasis Masalah (Prinsip Dan Penerapannya Pada Siswa SMP)	967
62.	P62	Sri Subarinah	Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mataram	Penciptaan Suasana PAKEM Di Kelas Rendah SDN 44 Ampenan Mataram Dengan ABP Koper Matik (Kotak Permainan Matematika Realistik)	976
63.	P63	Suciati	Staf Pengajar Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Borneo Tarakan.	Analisis Kompetensi Guru Matematika SMA Dan Pengaruhnya Terhadap Prestasi Belajar Siswa Di Kota Tarakan	986
64.	P64	Susilo Bekti	IKIP Budi Utomo Malang	Strategi Untuk Mengaktifkan Mahasiswa Dalam Proses Pembelajaran Dan Mengungkap Profilnya	993
65.	P65	Yayuk Wahyuni, Inna Kuswandari	Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga	Penggunaan Tabel Alur Pikir (TAp) Untuk Peningkatan Pemahaman Materi Struktur Aljabar	999

FUNGSI LYAPUNOV DAN METODA DALAM ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL EPIDEMIK

Yudi Ari Adi

Prodi Matematika FMIPA Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta
Jl. Prof. Dr. Soepomo,SH, Janturan Yogyakarta
Email: yudiari@uad.ac.id

ABSTRAK

Telah diketahui bahwa parameter penting dalam analisis kestabilan model epidemik adalah angka reproduksi dasar, R_0. Jika $R_0 \leq 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil global pada daerah layak dan penyakit akan lenyap, sedangkan jika $R_0 > 1$, titik kesetimbangan endemik akan stabil global di dalam interior dari daerah layaknya dan penyakit akan selalu ada dalam suatu level epidemik tertentu.
Fungi Lyapunov banyak dibahas dalam literature system dinamik. Pada makalah ini dibahas beberapa metoda untuk menunjukkan kestabilan global pada beberapa model dinamika populasi. Dibahas penggunaan fungsi lyapunov, prinsip invariant Lassale, sifat Poincare bendixon, sistem kompetisi serta *second additive compound matrix* untuk analisis kestabilan model epidemik SIRS, SEIR, serta model dinamika penyakit DBD baik internal maupun eksternal.
Penelitian menunjukkan bahwa langkah kunci dalam analisis kestabilan global model epidemik adalah menentukan fungsi lyapunov dari sistem persamaan yang ada.

Kata kunci : *Angka reproduksi dasar, fungsi lyapunov, kestabilan global*

Bab 1. Pendahuluan

Model epidemik merupakan model yang mempelajari keterkaitan individu-individu dalam suatu populasi, terutama dalam proses berjangkitnya wabah penyakit dalam suatu kawasan. Model ini disajikan dalam suatu sistem persamaan diferensial orde satu, yang menggambarkan dinamika populasi individu-individu sehat, terinfeksi, laten, maupun *recovered* . Pada umumnya model ini diterapkan pada proses penyebaran penyakit, seperti influenza, tuberkolosis, HIV, demam berdarah, dan lain-lain.

Salah satu parameter penting dalam model epidemik adalah berapa banyaknya rata-rata kasus penyakit jika ada satu kasus primer atau lebih dikenal dengan istilah angka reproduksi dasar (*basic reproduction number*). Salah satu kegunaan penting dari R_0 adalah untuk menentukan kriteria kestabilan dari titik kesetimbangan sistem. Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan akan stabil dan epidemik akan berakhir dan jika $R_0 > 1$ maka akan terjadi epidemik. Kestabilan global suatu titik kesetimbangan berarti bahwa semua trayektori konvergen ke titik kesetimbangan tersebut. Kestabilan global untuk system nonlinier secara umum merupakan masalah yang tidak mudah.

Pada 2004 , Korobeinkov [5] telah menunjukkan kestabilan global untuk model SEIR dan SEIS dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Metode Lyapunov ini pertama kali dikenalkan oleh Voltera, yang selanjutnya banyak dirujuk dan digunakan oleh peneliti-

peneliti sesudahnya untuk analisis model-model epidemik. Pada 2008, Bame dkk [2] melakukan generalisasi metode Lyapunov untuk analisis kestabilan model SEIS dengan *n* kompartemen laten. Metode Lyapunov juga digunakan oleh Georgescu [4] pada 2006 untuk analsis kestabilan global model dinamika virus. Dalam literatur model-model epidemik tersebut, juga disinggung beberapa metode dalam menentukan kestabilan global, misalnya dengan menggunakan fungsi Lyapunov, teori matriks gabungan dan system kompetisi, serta metode persamaan integral-differensial.
Seperti telah dijelaskan pada bagian awal, bahwa parameter yang beperan penting dalam analisis kestabilan ini adalah angka reproduksi dasar, R_0, sehingga parameter ini harus ditemukan terlebih dahulu sebelum analisis kestabilan. Salah satu metode penentuan R_0 ini telah dibahas oleh Ari [1] pada 2009 dan oleh Chavez C.C. pada 2002 [3], yang membahas metode *next generation matrix* untuk menentukan R_0 pada beberapa kasus model dinamika populasi.

Bab 2. Kajian Teori

Berikut ini ditinjau kembali beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan analisis kestabilan system nonlinier, diantaranya; *lyapunov's direct* dan *indirect methods* serta *Lasalle's invariance principle*, *second additive compound matrix*, serta teori *Poincare bendixon*. Metode langsung Lyapunov, sering disebut metode lyapunov kedua, adalah metode analisis kestabilan system persamaan diferensial yang dilakukan tanpa mengintegralkan persamaan diferensial tersebut.

Definisi 2.1

Suatu fungsi terdeferensial kontinu $V : R^n \to R_+$ disebut fungsi definit positif (*positive definite function*) di dalam suatu daerah $U \in R^n$ yang memuat titik asal, jika :

(1) $V(0) = 0$
(2) $V(x) > 0, \forall x \in U, x \neq 0$

Fungsi *V* dikatakan positif semidefinit jika $V(x) \geq 0, \forall x \in U, x \neq 0$.
Sebaliknya jika $V(x) < 0$, maka disebut definit negatif, dan dikatakan semidefinit negatif jika $V(x) \leq 0$.

Teorema 2.1.

Misalkan $x = 0$ adalah titik kesetimbangan dari sistem sistem dinamik

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

dimana $f: U \longrightarrow R^n$ lipschitz local dan $U \in R^n$ domain yang memuat titik asal.
Misalkan $V: U \to R$ terdiferensial kontinu, fungsi positif definit di dalam U .

(1) Jika $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \, . \, f(x) \leq 0$ (negative semi definit, maka *x* = 0 adalah titik kesetimbangan yang stabil.
(2) Jika $\dot{V}(x)$ definit negatif, maka *x* = 0 merupakan titik kesetimbangan yang stabil asymtotik.

Pada dua kondisi di atas, *V* disebut fungsi *Lyapunov*. Lebih lanjut jika kondisi tersebut dipenuhi untuk setiap $x \in R^n$ dan jika $\|x\| \to \infty$ berakibat $V(\boxminus) \to \infty$, maka $x = 0$ pada kasus 1 stabil global, dan stabil global secara asymtotik (*globally asymptotically stable*) dalam kasus 2.

Teorema 2.2 (*Lyapunov indirect method*)

Misalkan $x = 0$ adalah titik kesetimbangan system nonlinier $x' = f(x)$ dengan $f: U \longrightarrow R^n$ kontinu terdiferensial dan *U* merupakan lingkungan dari $x = 0$. Misalkan *A* matriks Jacobi di $x = 0$, dideinisikan dengan

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$

dan $\lambda_i, i = 1,2, \dots, n$ adalah nilai eigen dari A, maka

1. $x = 0$ stabil asymtotik jika $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ untuk setiap nilai eigen dari A
2. $x = 0$ tidak stabil jika $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ untuk suatu nilai eigen dari A

Selanjutnya, *Lasalle's teorem* digunakan untuk menentukan kestabilan asimtotik suatu titik kesetimbangan dalam hal $-\dot{V}(x,t)$ tidak positif definit local. Dengan demikian teori ini hanya diterapkan pada system autonomous atau system periodik. Untuk selanjutnya penyelesaian trayektori dari system autonomous (2.1) $x' = f(x)$ dinyatakan dengan $s(t, x_0, t_0)$, yaitu penyelesaian pada saat *t* di mulai dari x_0 di t_0.

Definisi 2.3.

Himpunan $S \in R^n$ disebut $\omega\; limit\; set$ dari trayektori $s(., x_0, t_0)$ jika untuk setiap $y \in S$ terdapat barisan naik tegas t_n, sedemikian sehingga $s(t_n, x_0, t_0) \to y$ jika $t_n \to y$.

Definisi 2.4.

Himpunan $M \in R^n$ disebut himpunan invariant jika untuk setiap $y \in M$ dan $t_0 \geq 0$, berlaku:

$$s(t, \_, t_0) \in M, \qquad \forall t \geq t_0.$$

Jadi himpunan $\omega\; limit$ untuk setiap trayektori adalah himpunan tertutup dan invariant.

Teorema 2.3. *LaSalle's Invariance Principle*.

Misalkan $V: R^n \to R$ positif definit sedemikian sehingga pada himpunan kompak $\Omega_c = \{x \in R^n : V(x) \leq c\}$ berlaku $\dot{V}(x) \leq 0$. Misalkan

$$S = \{x \in \Omega_c \; : V(x) = 0\}.$$

Untuk $t \to \infty$, trayektori menuju himpunan invariant terbesar di dalam *S*, yaitu himpunan $\omega\; limit$-nya termuat di dalam himpunan invariant terbesar di dalam *S*. Dengan kata lain, jika *S* tidak memuat himpunan invarian selain *x* = 0, maka 0 stabil secara asimtotik.

Definisi. 2.5.

Misalkan *A* operator linier pada R^n dan sekaligus merupakan representasi matriks yang bersesuaian dengan basis standard dari R^n. Misalkan $\wedge^2 R^n$ menyatakan hasilkali luar dari R^n. Didefinisikan

$$A^{[2]}(u_1 \wedge u_2) = A(u_1) \wedge u_2 + u_1 \wedge A(u_2)$$

untuk $u_1, u_2 \in R^n$. Representasi matriks dari $A^{[2]}$ yang bersesuaian dengan basis di dalam $\wedge^2 R^n$disebut *second additive compound matrix* dari *A*. Matriks ini berukuran $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ dan memenuhi sifat $(A+B)^{[2]} = A^{[2]} + B^{[2]}$. Jika *n* = 2 maka diperoleh $A^{[2]}_{2\times 2} = trace\; A$. Untuk *n* = 3 maka *second additive compound matrix* dari $A = (a_{ij})$ adalah

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{23} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.5

Suatu himpunan tak kosong, $\omega\; limit$ kompak dari (2.1) yang tidak memuat titik kesetimbangan adalah suatu orbit tertutup.

Teorema 2.4.

Misalkan $n = 3$ dan D himpunan konvek. Jika sistem (3.2) kompetitif di dalam D maka sifat *Poincare Bendixon* terpenuhi.
Definisi 2.6.
Sistem (2.1) disebut sistem kompetisi di dalam $D \in R^n$ jika untuk suatu matriks diagonal

$$H = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

dimana σ_i bernilai 1 atau -1, $H^{-1}JH$ mempunyai elemen

$$\sigma_i \sigma_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \le 0, \qquad i \ne j.$$

Definisi 2.7.
Sistem (2.1) dikatakan persisten jika dan hanya jika setiap solusi yang dimulai dari interior D akan menuju ke jarak positif dari batas daerah fisibelnya.
Definisi 2.8. [Li & Muldonev]
Misalkan $x' = f(x)$ sistem autonomous di dalam himpunan konvek, terbatas $D \in R^3$ yang merupakan sistem kompetisi, persisten dan mempunyai periodik orbit yang stabil. Jika x^0 adalah satu-satunya titik kesetimbangan di dalam interior daerah fisibelnya, dan stabil asimtotik lokal, maka dia stabil asimtotik secara global.

Bab 3. Analisis Kestabilan Global

3.1 Kestabilan global menggunakan fungsi Lyapunov dan prinsip Lassale

Pada bagian berikut disajikan penggunaan fungsi lyapunov dan prinsip invariant Lasalle untuk analisis kesetabilan global model epidemik SIRS [6]. Vargas, 2009 dalam [6] menunjukkan kestabilan global tiitk kesetimbangan model epidemic SIRS menggunakan fungsi lyapunov dan prinsip invariant Lassale. Model epidemik SIRS berbentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \beta SI - \mu S + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\kappa + \mu + \alpha)I \\ \frac{dR}{dt} &= \kappa I - (\mu + \gamma)R. \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan parameter A, μ, β, κ, dan α konstanta positif, serta $\gamma \ge 0$. Parameter κ menyatakan laju perubahan individu terinfeksi menuju recoveri. Jika $\gamma = 0$ diperoleh model SIR, yang menunjukan bahwa individu yang sudah pernah terinfeksi akan kebal dan tidak akan dapat terinfeksi kembali.
Daerah penyelesaian untuk system ini adalah himpunan invarian:

$$G = \{(S, I, R) \in R_+^3 : S \ge 0, I \ge 0, R \ge 0, S + I + R \le \frac{A}{\mu}\}.$$

Sistem (3.1) mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan tanpa penyakit (*disease free equilibrium, DFE*), $E^0 = (S^0, I^0, R^0) = \left(\frac{A}{\mu}, 0{,}0\right)$ dan titik kesetimbangan penyakit (*endemic equilibrium*) $E^* = (S^*, I^*, R^*)$, dengan $S^* = \frac{S^0}{R_0}$, $I^* = \frac{\mu(\mu+\gamma)(\kappa+\mu+\alpha)(R_0-1)}{\beta(\kappa\mu+(\mu+\gamma)(\alpha+\mu)}$, $R^* = \frac{\kappa\mu(\kappa+\mu+\alpha)(R_0-1)}{\beta(\kappa\mu+(\mu+\gamma)(\alpha+\mu)}$.

Dengan $R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\kappa+\mu+\_)}$ adalah angka reproduksi dasar dari system (3.1)
Kesetabilan global dari titik DFE dinyatakan dalam teorema berikut:
Teorema 3.1.
Titik kesetimbangan tanpa penyakit $E^0 = (S^0, I^0, R^0) = \left(\frac{A}{\mu}, 0{,}0\right)$ stabil asimtotik global di dalam G jika $R_0 < 1$.
Bukti:
Misalkan $W = \{(S, I, R) \in G: S > 0\} \rightarrow R$ dengan

$$W(S, I, R) = \frac{1}{2}[(S - S^0) + I + R]^2 + \frac{\alpha + 2\mu}{\beta} I + \frac{\alpha + 2\mu}{2\kappa} R^2 .$$

maka $W \in C^1[G]$, E^0 adalah minimum global dari W pada G, dan $W(S^0, I^0, R^0) = 0$.
Turunan W sepanjang penyelesaian system (3.1) adalah

$$\begin{aligned} W' &= [(S - S^0) + I + R] \quad \frac{d}{dt}(S + I + R) + \frac{\alpha + 2\mu}{\beta}\frac{dI}{dt} + \frac{\alpha + 2\mu}{2\kappa} R \frac{dR}{dt} \\ &= [(S - S^0) + I + R] \quad (A - \mu(S + I + R) - \alpha I) \\ &\quad + \frac{\alpha + 2\mu}{\beta}(\beta SI - (\kappa + \mu + \alpha)I) \\ &\quad + \frac{\alpha + 2\mu}{\beta} R(\kappa I - (\mu + \gamma)R). \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan $A = \mu S^0$, diperoleh

$$\begin{aligned} W' &= [(S - S^0) + I + R] \quad (\mu S^0 - \mu(S + I + R) - \alpha I) \\ &\quad + \frac{\alpha + 2\mu}{\beta}(\beta SI - (\kappa + \mu + \alpha)I \\ &\quad + \frac{\alpha + 2\mu}{\beta}(\kappa RI - (\mu + \gamma)R^2). \\ &= \mu[(S - S^0) + I + R]^2 - (\mu + \alpha)I^2 - \frac{(\alpha + 2\mu)(\mu + \gamma)}{\kappa} R^2 \\ &\quad - \frac{(\alpha + 2\mu)(\kappa + \alpha + \mu)}{\beta}(1 - R_0)I. \\ &= \mu[(S - S^0) + I + R]^2 - (\mu + \alpha)I^2 - \frac{(\alpha + 2\mu)(\mu + \gamma)}{\kappa} R^2 \\ &\quad - \frac{(\alpha + 2\mu)(\kappa + \alpha + \mu)}{\beta}(1 - R_0)I. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa jika $R_0 \leq 1$ maka $W' \leq 0$. $W' = 0$ jika dan hanya jika $S = S^0$, $I = 0$, dan $R = 0$. Dengan demikian himpunan kompak invariant terbesar di dalam $\{(S, I, R) \in G: W' = 0\}$ adalah singleton $\{E^0\}$, dimana E^0 adalah titik kesetimbangan tanpa penyakit. Menurut prinsip invariant LaSalle maka E^0 stabil asimtotik global di dalam G.

3.2 Analisis Kestabilan menggunakan teori Poincare-Bendixon

Berikut ini disajikan analisis kestabilan system dinamik menggunakan fungsi lyapunov dan teori Poincare bendixon, seperti dikemukakan oleh Li dkk dalam [7].

Sistem (2.1) dikatakan memenuhi sifat *Poincare Bendixon* jika suatu himpunan $\omega\ limit$ kompak dari (2.1) yang tidak memuat titik kesetimbangan adalah suatu orbit tertutup.

Untuk sistem dengan dimensi lebih dari tiga yang memenuhi sifat Poincare Bendixon, diberikan teorema untuk kestabilan global berikut:
Teorema 3.3.
Asumsikan bahwa:
(1) Terdapat suatu himpunan terserap kompak $K \subset D$
(2) Persamaan (2.1) mempunyai titik kesetimbangan tunggal $\bar{x}$ di dalam *D*.
(3) $\bar{x}$ stabil asimtotik lokal
(4) Sistem (2.1) memenuhi sifat Poincare Bendixon
(5) Setiap orbit periodik dari (2.1) di dalam *D* mengorbit stabil secara asimtotik

Asumsi (4) terpenuhi jika *D* adalah daerah konvek di dalam R^3 dan (2.1) merupakan system kompetisi di dalam *D*.
Teorema 3.4.
Suatu orbit periodik $\Omega = \{p(t): 0 \leq t < \omega\}$ dari (2.1) mengorbit stabil secara asimtotik dengan fase asimtotik jika sistem linier

$$z'(t) = \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}\big(p(t)\big)z(t.) \tag{3.2}$$

stabil secara asimtotik, dimana $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$ adalah *second additive compound matrix* dari matriks jacobi $\frac{\partial f}{\partial x}$ dari *f*.
Suatu matriks dikatakan stabil jika bagiaa real semua nilai eigennya negatif.
Teorema 3.5.
Asumsikan bahwa :
(1) Terdapat suatu himpunan terserap kompak $K \subset D$
(2) Persamaan (2.1) mempunyai titik kesetimbangan tunggal $\bar{x}$ di dalam *D*.
(3) Sistem (2.1) memenuhi sifat Poincare Bendixon
(4) Untuk setiap solusi periodik *x* = *p*(*t*) dengan $p(0) \in D$, system (3.2) stabil asimtotik
(5) $(-1)^n det\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})\right) > 0$.

Maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ stabil asimtotik global di dalam *D*.
Model epidemic SEIR diberikan dalam system [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \mu S - \lambda IS \\ \frac{dE}{dt} &= \lambda IS - (\epsilon + \mu) \\ \frac{dI}{dt} &= \epsilon E - (\gamma + \alpha + \mu)I \end{aligned} \tag{3.3}$$

Daerah layak dari (3.3) adalah $\Gamma = \left\{(S, E, I) \in R_+^3 : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, S + E + I \leq \frac{A}{\mu}\right\}$ yang adalah himpunaninvarian positif untuk (6.3). Angka reproduksi dasar untuk system ini adalah $R_0 = \frac{A\lambda\epsilon}{\mu(\mu+\epsilon)(\gamma+\mu+\alpha)}$.
Sedangkan titik kesetimbangannya adalah titik kesetimbangan tanpa penyakit, $T^0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0,0\right)$, yang merupakan satu-satunya titik kesetimbangan di dalam Γ jika $R_0 \leq 1$. Jika $R_0 > 1$, maka terdapat satu titik kesetimbangan penyakit $T^* = (S^*, E^*, I^*) \in \Gamma^o$, dengan $S^* = \frac{A}{\mu R_0}$, $E^* = \frac{\mu(R_0-1)}{\lambda}$, $I^* = \frac{\epsilon}{(\gamma+\mu+\alpha)}E^*$.

Kestabilan titik kesetimbangan penyakit dinyatakan dalam teorema berikut
Teorema 3.6.
Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan penyakit T^* stabil asimtotik global di dalam Γ^o.
Bukti.
Matriks Jacobi , $J = \frac{\partial f}{\partial x}$ dari system (3.3) yang bersesuaian dengan solusi $(S(t), E(t), I(t))$ adalah

$$J = \begin{bmatrix} -(\mu + \lambda I) & 0 & -\lambda S \\ \lambda I & -(\epsilon + \mu) & \lambda S \\ 0 & \epsilon & -(\gamma + \alpha + \mu) \end{bmatrix}$$

Jadi (3.3) merupakan system kompetisi di dalam daerah konvek Γ^o, sehingga menurut teorema 2.4, system (3.3) memenuhi sifat Poincare bendixon dan kondisi (1), (2), dan (3) dalam teorema 3.5. Selanjutnya diperoleh *second additive compound matix* sepanjang solusi periodik $(S(t), E(t), I(t))$ adalah

$$J^{[2]} = \begin{bmatrix} -(2\mu + \lambda I + \epsilon) & \lambda S & \lambda S \\ \epsilon & -(2\mu + \gamma + \alpha + \lambda I) & 0 \\ 0 & \lambda I & -(\epsilon + \gamma + \alpha + 2\mu) \end{bmatrix},$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} X' &= -(2\mu + \lambda I + \epsilon)X + \lambda SY + \lambda SZ \\ Y' &= \epsilon X - (2\mu + \gamma + \alpha + \lambda I)Y \\ Z' &= \lambda IY - (\epsilon + \gamma + \alpha + 2\mu)Z \end{aligned} \tag{3.4}$$

Untuk menunjukkan bahwa (3.4) stabil asimtotik, dibentuk fungsi Lyapunov

$$V(X, Y, Z; S, E, I) = sup\left\{|X|, \frac{E}{I}(|Y| + |Z|)\right\}.$$

Untuk suatu orbit Q dari solusi periodik $(S(t), E(t), I(t))$ akan berada pada jarak positif dari batas Γ karena persisten seragam. Dengan demikian terdapat suatu konstanta *c* > 0 sedemikian sehingga

$$V(X, Y, Z; S, E, I) \geq c\ sup\{|X|, |Y|, |Z|\}$$

untuk semua $(X, Y, Z) \in R^3$ dan $(S, E, I) \in Q$. Derivatif positif dari V sepanjang solusi $(X(t), Y(t), Z(t))$ dan $(S(t), E(t), I(t))$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D_+|X(t)| &\leq -(2\mu + \lambda I + \epsilon)|X(t)| + \lambda S|Y(t)| + \lambda S|Z(t)| \\ &= -(2\mu + \lambda I + \epsilon)|X(t)| + \frac{\lambda IS}{E}\frac{E}{I}\left(|Y(t) + |Z(t)||\right), \\ D_+|Y(t)| &\leq \epsilon|X(t)| - (2\mu + \lambda I + \alpha + \gamma)|Y(t)| \\ D_+|Z(t)| &\leq \lambda I|Y(t)| - (2\mu + \epsilon + \alpha + \gamma)|Z(t)|. \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} D_+\frac{E}{I}(|X(t)| + |Z(t)|) &= \left(\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right)\frac{E}{I}(|Y(t)| + |Z(t)|) + \frac{E}{I}D_+(|Y(t)| + |Z(t)|) \\ &\leq \frac{\epsilon E}{I}|X(t)| + \left(\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \gamma - \alpha\right)\frac{E}{I}(|Y(t)| + |Z(t)|). \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$D_+V(t) \leq \max\{g_1(t), g_2(t)\}\, V(t),$$

dimana

$$g_1(t) = \lambda IS - (2\mu + \lambda I + \epsilon),$$

$$g_2(t) = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - (2\mu + \lambda I + \alpha) + \frac{\epsilon E}{I}.$$

Selanjutnya dengan mengingat system (3.3), diperoleh

$$\frac{\lambda IS}{E} = \frac{E'}{E} + \epsilon + \mu,$$

$$\frac{\epsilon E}{I} = \frac{I'}{I} + \alpha + \gamma + \mu.$$

Jadi $\max\{g_1(t), g_2(t)\} \leq \frac{E'(t)}{E(t)} - \mu$, sehingga dengan mengingat $E(t)$ periodik dengan periode minimal ω diperoleh

$$\int_0^{\omega} \max\{g_1(t), g_2(t)\}\,\mathrm{dt} \leq \ln E(t)|_0^{\omega} - \mu = -\mu.$$

Dari persamaan teakhir, diperoleh $\lim_{t\to\infty} V(t) = 0$, yang berakibat $(X(t), Y(t), Z(t)) \to 0$ untuk $t \to \infty$. Dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa (3.4) stabil asimtotik jika periode minimal $\omega > 0$. Hal ini sekaligus menunjukkan bahwa kondisi (4) dalam teorema 3.5 terpenuhi.

Selanjutnya misalkan $J(T^*)$ adalah matriks Jacobi dari system (3.3),

$$\mathrm{Det}(J(T^*)) = \begin{vmatrix} -\lambda I^* - \mu & 0 & -\lambda S^* \\ \lambda I^* & -\epsilon - \mu & \lambda S^* \\ 0 & \epsilon & -\gamma - \alpha - \mu \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda I^* + \mu)(\epsilon + \mu)(\gamma + \alpha + \mu) + \lambda \epsilon S^* \mu.$$

dengan mengingat $\lambda \epsilon S^* = (\epsilon + \mu)(\gamma + \alpha + \mu)$, diperoleh

$$\mathrm{Det}(J(T^*)) = = -\lambda I^*(\epsilon + \mu)(\gamma + \alpha + \mu) < 0.$$

Dengan demikian kondisi (5) pada teorema 3.5 terpenuhi. Dengan kata lain titik kesetimbangan T^* stabil global.

Bab 4. Penutup

Pada makalah ini dibahas beberapa metode dalam menentukan kestabilan global suatu model dinamika populasi. Parameter penting dalam analisis kestabilan ini adalah angka reproduksi dasar, R_0. Jika $R_0 \leq 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil global pada daerah layak dan penyakit akan lenyap, sedangkan jika $R_0 > 1$, titik satu-satunya kesetimbangan endemic akan stabil global di dalam interior dari daerah layaknya dan penyakit akan selalu ada, berada dalam suatu level epidemic tertentu.

Fungsi Lyapunov masih merupakan metode yang ampuh untuk menunjukkan kestabilan suatu system dinamik. Metode dalam analisis kestabilan global lain merupakan pengembangan yang berangkat dari fungsi lyapunov. Pada penelitian ini telah disajikan metode lyapunov, prinsip Lassale, Poincare bendixon, system kompetisi serta second additive compound matriks untuk menunjukkan kestabilan global pada beberapa model dinamika populasi.

Dari pembahasan di atas, tampak bahwa langkah kunci dalam analisis kestabilan ini adalah cara membentuk fungsi lyapunov dari system persamaan yang ada.

Daftar Pustaka

[1] Ari, Y.A (2009), *Metode Penentuan Angka Reproduksi Dasar pada Model Epidemik*, Laporan Peneltian Mandiri UAD 2009, tidak dipublikasikan.

[2] Bame, N., Bowong, S., Mbang, J., Sallet, G., Tewa, J.J (2009), *Global Stability Analysis For SEIA Models with n Latent Classes*, Mathematical Biosciences and Enginering, Vol.5 (1): pp : 20 - 33

[3] Castilo Chavez,C. Feng, Z., Huang, W. (2002), *On The Computation of R_o and Its Rule on Global Stability*, http://www.math.asu.edu/Chavez/2002/ JB276.pdf, ditemukenali 25 Maret 2010.

[4] Georgescu, P., Hsieh, Y. H. (2006), *Global Stability for A Virus Dynamics Model with Nonlinier Incidence of Infevtion and Removal*, SIAM J. Appl. Math. Vol. 67. No. 2 , pp: 337 – 353.

[5] Korobeinikov, A., Maini, P.K (2004), *A Lyapunov Function and Global Properties for SIR and SEIR Epidemiological Models with Nonlinear Incidence*, Mathematical Biosciences and Enginering, Vol.1 (1): pp : 57 – 60

[6] Vargas, Cruz De Leon (2009), *Constructions of Lyapunov Functions for Classics SIS,SIR and SIRS Epidemic model with Variable Population Size*,http://www.red-mat.unam.mx-foro, ditemu kenali September 2010

[7] Li,M.Y, Smith, H.L, dan Wang. L. , *Global stabilityof an SEIR epidemiological Model with Vertical Transmission*, SIAM J. Appl. Math.

[8] Ari, Y.A, *Global Stability of Dengue Virus Transmission Model in Human Blood Circulation*, Prosiding Seminar Internasional MIPA UAD, 2007

[9] Hsu, Sze Bi, *A Survey of constructing Lyapunov Functions for Mathematical Models in population Biology*, Taiwanese Journal of Mathematic, Vol 9, No. 2 pp 151 – 173,June 2005