Sifat Irisan radikal Jacobson

by Puguh Wahyu Prasetyo

KNM XIX
Universitas Brawijaya Malang, 24-26 Juli 2018

SIFAT IRISAN RADIKAL JACOBSON

Puguh Wahyu Prasetyo

Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Ahmad Dahlan, Indonesia
e-mail: puguh.prasetyo@pmat.uad.ac.id

Abstrak. Suatu kelas yang terdiri dari ring-ring disebut kelas radikal jika tertutup terhadap homomorfisma, mempunyai induktif, dan tertutup terhadap peluasan. Didefinisikan suatu kelas ring $\mathcal{J} = \{\mathcal{A} | (A, \circ)$ merupakan grup$\}$ dengan operasi biner $a \circ b = a + b - ab$ untuk setiap $a,b \in A$ membentuk kelas radikal dan disebut Radikal Jacobson. Radikal Jacobson merupakan salah satu kelas radikal yang penting dalam perkembangan teori radikal ring sebab dapat digeneralisasikan dalam teori modul, selain itu juga dapat digunakan untuk mengkaji struktur dari suatu ring melalui radikal Jacobson. Dalam penelitian ini diberikan sifat irisan yang dimiliki oleh kelas radikal Jacobson.

Kata Kunci: radikal Jacobson, kelas radikal ring, sifat irisan radikal

1 PENDAHULUAN

Dalam penelitian ini jika disebutkan ring A maka ring A merupakan ring yang belum tentu memiliki elemen kesatuan, sedangkan jika disebutkan ring R, maka ring R merupakan ring yang memuat elemen kesatuan. Suatu ring taknol A disebut ring primitif kiri (primitif) jika A memuat suatu ideal kiri (ideal) L sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan sifat $xA \subseteq L$ mengakibatkan $x = 0$. Suatu ideal I dari ring A disebut ideal primitif jika ring faktor A/I merupakan ring primitif. Untuk memperjelas pemahaman tentang ring primitif perhatikan contoh ring primitif dan ring bukan primitif berikut ini.

Contoh 1. *Contoh nomor 1, 2 dan 4 berikut merupakan ring primitif, sedangkan nomor 3 bukan ring primitif.*

1. *Setiap lapangan (field) merupakan ring primitif,*
2. *Setiap ring sederhana dengan unit merupakan ring primitif,*
3. *Ring semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bukan merupakan ring primitif. Perhatikan bahwa setiap ideal maksimal $\mathbb{Z}$ dapat direpresentasikan sebagai pZ dengan p bilangan prima. Lebih lanjut untuk sebarang bilangan prima p, maka $2pZ \neq 0$ akan tetapi $2pZ \subseteq pZ$,*
4. *Misalkan V merupakan ruang vektor, maka himpunan semua transformasi linier T dari V merupakan ring primitif. [2].*

Lebih lanjut, suatu ideal I dari ring A disebut ideal prima jika untuk setiap J, K ideal-ideal A dengan sifat $JK \subseteq I$ maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$. Suatu ring A disebut ring prima jika 0 merupakan ideal prima di A. Ideal taknol I dari suatu ring A disebut ideal esensial jika $IJ \neq 0$ untuk setiap ideal taknol J dari ring A. Suatu ideal (ideal kiri) I dari ring A disebut ideal modular (modular kiri) jika terdapat suatu elemen $e \in A$ sehingga $a - ae \in I$ untuk setiap $a \in A$. Kelas ring μ yang terdiri dari ring-ring prima (semiprima) disebut kelas khusus (khusus lemah) jika memenuhi dua hal berikut ini:

1. Kelas μ merupakan kelas herediter, yaitu jika $A \in \mu$, maka $I \in \mu$ untuk setiap I ideal A.
2. Kelas μ tertutup terhadap perluasan esensial, yaitu untuk setiap I ideal esensial ring A dengan sifat $I \in \mu$ berakibat $A \in \mu$.\

Dengan demikian karena kelas semua ring prima π memenuhi kondisi di atas maka kelas semua ring prima π merupakan kelas khusus. Kemudian perhatikan bahwa kelas semua ring semiprima ρ juga memenuhi kedua kondisi di atas. Oleh sebab itu, kelas semua ring semiprima merupakan kelas khusus lemah.

Kemudian, suatu kelas ring γ disebut kelas radikal jika memenuhi pernyataan berikut ini [5]:

1. Jika $A \in \gamma$, maka $A/I \in \gamma$
2. Himpunan $\gamma(A) = \sum\{I \lhd A | I \in \gamma\}$ merupakan elemen di γ juga untuk setiap ring A. Himpunan $\gamma(A)$ juga merupakan ideal $\gamma(A)$. Himpunan $\gamma(A)$ disebut sebagai radikal γ dari ring A.
3. Untuk setiap ring A sehingga terdapat I ideal A dengan sifat $I, A/I \in \gamma$ maka berakibat $A \in \gamma$

Kelas ring $\mathcal{J}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{J} = \{\mathcal{A} | (A, \circ) \text{ merupakan grup}\}$$

dengan $a \circ b = a + b - ab$ untuk setiap $a, b \in A$ memenuhi definisi kelas radikal [2]. Oleh sebab itu kelas ring J merupakan kelas radikal dan disebut sebagai radikal Jacobson. Banyak penelitian terkait radikal Jacobson, misalnya A. V. Kelarev dalam [1] menggunakan radikal Jacobson dalam penelitiannya untuk mengkaji radikal Jacobson dari suatu ring semigroup. Szasz dalam penelitiannya [4] menyebutkan bahwa radikal Jacobson adalah yang paling banyak di-gunakan dalam perkembangan Teori Ring. Sifat-sifat radikal Jacobson juga dapat dilihat dalam [4]. Akan tetapi dalam penelitiannya, Szasz dalam [4], mengkaji struktur ring yang menjadi anggota kelas radikal Jacobson. Radikal Jacobson dari sebarang ring belum dikaji dalam [4]. Di lain pihak, dalam [8] untuk sebarang ring A, radikal Jacobson dari A didefinisikan seba-gai irisan semua ideal kiri maksimal A. Akan tetapi belum dijelaskan motivasi mengapa dapat didefinisikan demikian. Dalam penelitian ini akan dijelaskan mengapa untuk kasus ring komu-tatif dengan elemen kesatuan, radikal Jacobson dapat didefinisikan sebagai irisan semua ideal maksimal dari sudut pandang kelas radikal ring yang memiliki sifat irisan relatif terhadap kelas khusus yang membangun kelas radikal tersebut.

Dalam perkembangan Teori Radikal Ring, terdapat kelas ring yang bukan kelas radikal, mis-alnya kelas ring $N_0 = \{A | \exists n \in N - 0 \ni A^n = 0\}$ dengan N merupakan himpunan semua bilangan natural. Meskipun bukan kelas radikal, dapat ditentukan kelas radikal terkecil $\mathcal{L}N_0$ yang memuat N_0. Konstruksi kelas radikal ini disebut radikal bawah (lower radical). Rincian dari kontruksi radikal bawah ini dapat dilihat dalam [5].

Di lain pihak untuk sebarang kelas ring yang merupakan kelas ring yang herediter dapat ditentukan radikal atasnya, yaitu $\mathcal{U}(\mu) = \{A | A/I \notin \mu$ untuk setiap I ideal sejati A$\}$ [5]. Jika kelas ring μ merupakan kelas khusus (khusus lemah), maka radikal atas $\mathcal{U}(\mu)$ disebut radikal khusus (supernilpoten) [2].

Di lain pihak suatu elemen a dari ring A disebut kuasi regular kiri jika $a \circ b = a + b - ab = 0$ untuk suatu elemen $b \in A$. Sebaliknya, a disebut kuasi regular kanan jika $b \circ a = b + a - ba = 0$ untuk suatu $b \in A$ [6]. Dalam [6]. Radikal Jacobson dari suatu ring A didefinisikan oleh $\mathcal{J}(A) = \cap\, \{(0{:}M)_A | M$ merupakan A-modul tak tereduksi$\}$. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan bahwa definisi yang digunakan oleh [6] ekuivalen dengan sifat radikal Jacobson dari sudut pandang kelas radikal.

Suatu modul M atas ring A disebut modul tak tereduksi jika M merupakan modul sederhana dan $AM = M$. Suatu modul M atas ring A disebut modul setia jika himpunan $(0{:}M)_A = \{a \in A | aM = 0\} = 0$. Sifat-sifat lanjutan dari modul setia dan aplikasinya dalam teori graf dapat dikaji dalam [3].

Diketahui ϱ kelas ring tertentu. Untuk sebarang ring A, himpunan $(A)_\varrho$ didefinisikan oleh $(A)_\varrho = \{I \lhd A | A/I \in \varrho\}$

2 KELAS SEMUA RING PRIMITIF

Dalam bagian ini akan ditunjukkan bahwa kelas semua ring primitif merupakan kelas khusus yang diawali oleh teorema berikut ini.

Proposisi 1. *[2] Suatu ring A merupakan anggota dari kelas radikal Jacobson $\mathcal{J}$ jika dan hanya jika A tidak mempunyai A-modul tak tereduksi.*

Teorema 1. *Kelas semua primitif ring $\mathcal{P}$ terdiri dari ring-ring prima.*

Bukti. Untuk menunjukkan kebenaran dari teorema ini, maka ekuivalen dengan menunjukkan bahwa setiap pengambilan sebarang ring taknol A di kelas $\mathcal{P}$, maka A merupakan ring prima. Diambil sebarang ring $A \in P$ dan misalkan M merupakan A-modul setia tak tereduksi. Selanjutnya, andaikan I dan K merupakan ideal-ideal A yang tidak sama dengan nol sehingga $IK = 0$, maka $KM \neq 0$, akibatnya $KM = M$. Kemudian $IM \neq 0$. Jadi $M = I(KM) = 0$, suatu kontradiksi. Dengan demikian pengandaian salah, yang benar adalah $I = 0$ atau $K = 0$. Dengan kata lain A merupakan ring prima. Oleh sebab itu, kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$ terdiri dari ring-ring prima. □

Akibat dari Teorema 1 di atas adalah sebagai berikut.

Akibat 1. *Kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$ merupakan kelas khusus.*

Bukti. Pada Teorema 1 telah ditunjukkan bahwa kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$ terdiri dari ring-ring prima. Diambil sebarang $0 \neq I \lhd A \in P$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ring primitif. Karena $A \in P$, maka berdasarkan Proposisi 4.4.7 di [2] terdapat A-modul setia yang sederhana, katakan M. Jadi M merupakan A-modul sederhana dengan sifat $(0{:}M)_A = 0$. Karena M merupakan A-modul sederhana, maka M juga I-modul sederhana. Didefinisikan $(0:M)_I = \{a \in I | aM = 0\}$. Diambil sebarang $a \in (0{:}M)_I$, maka $aM = 0$. Akibatnya $a \in (0:M)_A = 0$, sehingga $a = 0$. Dengan demikian $(0:M)_I = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa I merupakan ring primitif. Selanjutnya misalkan A sebarang ring sehingga terdapat I ideal esensial A dengan sifat $I \in P$. Dengan demikian terdapat I-modul M sederhana sehingga $(0:M)_I = 0$. Lebih lanjut $IM \neq 0$ merupakan A-modul sederhana. Kemudian didefinisikan $(0:IM)_A = \{a \in A | a(IM) = 0\}$. Dapat ditunjukkan bahwa $(0{:}IM)_A = 0$. Dengan demikian $A \in P$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{P}$ merupakan kelas khusus. □

3 RADIKAL JACOBSON

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa kelas Jacobson radikal merupakan radikal atas dari kelas semua ring primitif. Akibat 1 menunjukkan bahwa kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$ merupakan kelas khusus. Dengan demikian radikal atas $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ dari $\mathcal{P}$ merupakan radikal khusus. Didefin-isikan $(A)_P = \cap\{P \lhd A | P$ merupakan ideal primitif A$\}$. Teorema di bawah ini menunjukkan bahwa $\mathcal{U}(\mathcal{P})$. Akan tetapi sebelumnya perhatikan Proposisi di bawah ini.

Proposisi 2. *[2] Jacobson radikal $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ dari sebarang ring A merupakan irisan dari semua ideal kiri maksimal modular M dan $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ juga sama dengan irisan semua ideal primitif A.*

Bukti. Untuk membuktikan Proposisi 2 harus ditunjukkan bahwa

$$\mathcal{J}(A) \supseteq M \supseteq (A)_P \supseteq \mathcal{J}(A),$$

dengan M merupakan irisan dari ideal kiri maksimal modular dari ring A yang diberikan.

Andaikan $\mathcal{M} \nsubseteq \mathcal{J}(\mathcal{A})$. Karena $\mathcal{M}$ merupakan ideal kiri, maka terdapat suatu elemen $a \in M$ sehingga $a \neq xa - x$ untuk setiap $x \in A$. Hal ini berarti $a \notin L$ dengan $L = \{xa - x | x \in A\}$ yang merupakan ideal kiri A. Dengan menggunakan prinsip Lemma Zorn terdapat L_0 yang merupakan ideal kiri A yang memuat L dan yang merupakan ideal maksimal relatif terhadap a. Perhatikan $xa - x \in L \subseteq L_0 \nsubseteq$, maka L_0 modular. Misalkan K merupakan sebarang ideal kiri A dengan sifat $L_0 \subset K \subseteq A$. Dengan pemilihan L_0 diperoleh $a \in K$ yang berakibat setiap elemen $x \in A$ memenuhi $x =- (xa - x) + xa \in L_0 + K \subseteq K$. Hal ini mengakibatkan $K = A$ dan L_0 merupakan ideal kiri modular maksimal dari A sehingga $a \notin L_0 \supset \mathcal{M}$. Hal ini kontradiksi dengan $a \in M$. Oleh sebab itu $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{J}(A)$.

Dalam hal ini harus ditunjukkan bahwa setiap ideal kiri maksimal modular dari suatu ring A memuat suatu ideal primitif sehingga $(A)_P \subseteq M$. Misalkan L merupakan ideal maksimal modular dari ring A dan didefinisikan $I = (L{:}A)_A = \{x \in AxA \subseteq L\}$. Jelas bahwa I merupakan ideal dua sisi dari A. Kemudian, dapat ditunjukkan bahwa $I \subseteq L$. Sifat modular dari L mengakibatkan adanya suatu elemen $e \in A$ sehingga $xe - x \in L$ for every $x \in L$. Khususnya jika $x \in I$, maka $xe \in L$ dan $x = xe - (xe - x) \in L + L = L$. Berdasarkan definisi $xA \subseteq L$ mengakibatkan xI, maka modul faktor A/L merupakan A/I-modul tak tereduksi. Oleh sebab itu A/I ring primitif. Oleh sebab itu I merupakan ideal primitif yang termuat dalam ideal kiri maksimal modular L.

Selanjutnya diasumsikan $\mathcal{J} \nsubseteq (A)_P$, maka terdapat ideal P_0 sehingga A/P_0 merupakan ring primitif dengan sifat $\mathcal{J}(\mathcal{A}) \nsubseteq P_0$. Oleh sebab itu karena P_0 ideal primitif, maka terdapat ideal kiri maksimal L yang memuat P_0 sehingga $xA \subseteq L$ mengakibatkan $x \in P_0$. Karena $\mathcal{J}(A) \nsubseteq P_0$, berakibat $\mathcal{J}(\mathcal{A})\mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{L}$, dan karena kemaksimalan dari L mengakibatkan $\mathcal{J}(\mathcal{A})\mathcal{A} + \mathcal{L} = \mathcal{A}$. Lebih lanjut, $P_0 \neq A$ mengakibatkan $AA \nsubseteq L$ dan $A(J(A)A + L) = AA \nsubseteq L$. Oleh sebab itu karena $A(\mathcal{J}(A)A + L)AJ(A)A + AL$, dapat disimpulkan bahwa $AJA \nsubseteq L$. Dengan demikian terdapat $a \in J(A)$ dan $b \in A$ sehingga $Aab \nsubseteq L$ dan karena kemaksimalan dari L diperoleh $Aab + L = A$. Jadi terdapat elemen $x \in A$ sehingga $b \in xab + L$ yaitu $b - xab \in L$. Oleh sebab itu $a \in J(A)$. Lebih lanjut $xa \in J(A)$. Dengan demikian xa mempunyai kuasi-invers y. Kemudian karena $b - xab \in L$, diperoleh $b = b\,(y \circ (xa))b = (b - xab) - y(b - xab) \in L$. Oleh sebab itu $Aab \subseteq L$, kontradiksi dengan kondisi $Aab \nsubseteq L$. Hal ini menunjukkan bahwa$\mathcal{J}(A) \subseteq (A)_P$. □

4 SIFAT IRISAN RADIKAL JACOBSON

Pada bagian ini akan dibahas sifat irisan radikal Jacobson sebagai materi utama dalam paper ini. Proposisi berikut ini merupakan jaminan bahwa $\mathcal{J} = \mathcal{U}(P)$.

Proposisi 3. *[2] kelas radikal Jacobson $\mathcal{J}$ merupakan radikal atas $\mathcal{J} = \mathcal{U}(\mathcal{P})$ dari kelas semua primitif ring. Lebih lanjut, radikal Jacobson $\mathcal{J} = \gamma\sum$ dengan $\gamma\sum$ adalah kelas semua ring A dengan sifat untuk setiap A modul M, M bukan modul tak tereduksi.*

Diketahui γ adalah kelas radikal ring. Kelas radikal γ mempunyai sifat irisan relatif terhadap kelas ring ϱ jika berlaku $\gamma(A) = (A)_\varrho$ untuk setiap ring A dengan $A_\varrho = \{I \lhd A | A/I \in \varrho\}$. Berikut ini merupakan sifat dari radikal atas yang dibangun oleh kelas yang bersifat herediter.

Proposisi 4. *[2] Diketahui ϱ merupakan kelas ring herediter maka radikal atas $\mathcal{U}(\varrho)$ herediter jika dan hanya jika $\mathcal{U}(\varrho)$ mempunyai sifat irisan relatif terhadap tutup esensial ε_ϱ.*

Perhatikan bahwa radikal Jacobson $\mathcal{J}$ merupakan radikal atas yang ditentukan oleh kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$ yang merupakan kelas khusus. Dengan demikian, radikal Jacobson $\mathcal{J}$ merupakan radikal khusus. Oleh sebab itu, radikal Jacobson $\mathcal{J}$ herediter. Dengan demikian berdasarkan Proposisi 4 dapat disimpulkan bahwa radikal Jacobson $\mathcal{J}$ mempunyai sifat irisan relatif terhadap εP dengan εP merupakan tutup esensial dari kelas semua ring primitif P. Lebih lanjut, karena $\mathcal{P}$ merupakan kelas khusus, maka $\mathcal{P}$ tertutup terhadap perluasan esensial. Akibatnya $\varepsilon P = P$. Jadi dapat disimpulkan bahwa radikal Jacobson $\mathcal{J}$ mempunyai sifat irisan relatif terhadap kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$. Hal ini sejalan dengan yang telah dibuktikan pada Proposisi 2.

Lemma 1. *Untuk kasus khusus ketika $\mathcal{R}$ merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan, maka untuk setiap ideal kiri modular maksimal dari $\mathcal{R}$ merupakan ideal maksimal.*

Bukti. Perhatikan bahwa, setiap ideal kiri $\mathcal{R}$ merupakan ideal dua sisi. Hal dijamin oleh sifat komutatif yang dimiliki oleh $\mathcal{R}$. Lebih lanjut, setiap ideal $\mathcal{R}$ pasti modular sebab terdapat elemen satuan, katakan e dengan sifat $a - ae = a - a = 0 \in I$ untuk setiap $a \in R$. □

Teorema berikut merupakan akibat dari sifat irisan yang dimiliki oleh radikal Jacobson $\mathcal{J}$ relatif terhadap kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$, sifat komutatif dari ring dan eksistensi elemen kesatuannya.

Teorema 2. *Diketahui ring $\mathcal{R}$ merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan, maka*

$$\mathcal{J}(R) = \cap \{I \lhd R | I \text{ merupakan ideal maksimal } R\}.$$

Bukti. Berdasarkan 2 dan proposisi3.7.3 diperoleh $\mathcal{J}(\mathcal{R}) = \mathcal{M} = (\mathcal{R})_\mathcal{P}$ dengan $\mathcal{M}$ merupakan irisal semua ideal kiri modular maksimal $\mathcal{R}$. Lebih lanjut berdasarkan Lemma 1 diperoleh $\mathcal{J}(R) = \cap \{I \lhd R | I$ merupakan ideal maksimal $\mathcal{R}\}$. □

Akibat 2. *Untuk ring komutatif dengan elemen kesatuan $\mathcal{R}$ berlaku $\mathcal{J}(R) = \cap \{I \lhd R | I$ merupakan ideal maksimal $R\} = \cap \{(0{:}M)_A | M$ merupakan A modul tak tereduksi$\}$*

5 KESIMPULAN

- Berdasarkan sifatnya, radikal Jacobson merupakan radikal atas yang dibangun oleh kelas semua ring primitif $\mathcal{P}$. Oleh sebab itu, untuk sebarang ring A, radikal Jacobson dari A dapat ditentukan dengan mencari $(A)_\mathcal{P}$, yaitu $(A)_\mathcal{P} = \cap \{I \lhd A | A/I \in P\}$.

- Untuk kasus khusus ketika bekerja pada ring komutatif dengan elemen satuan $\mathcal{R}$, radikal Jacobson dari $\mathcal{R}$ adalah irisan semua ideal maksimal $\mathcal{R}$.

REFERENCES

[1] A. V. Kelarev, The Jacobson Radical of Commutative Semigroup Rings, Journal of Alge-bra, 150, 378-387, 1992.

[2] B.J. Gardner, R. Wiegandt, R. Radical Theory of Rings. New York: Marcel Dekker, Inc, 2004.

[3] B. Harianto, S. H. Saputri, Graf Torsi Atas Modul, Jurnal LOG!K@, 7, No. 2, 86-95, 2017.

[4] F. A. Szasz, On Jacobson Radical Rings, SERDICA, Bulgaricae Mathematicae Publica-tions, 15, 174-175, 1989.

[5] P. W. Prasetyo, I. E. Wijayanti, H. France-Jackson, Dari Radikal Ring ke Radikal Modul. Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Jember (pp. 272-282). Jember, Universitas Jember, November 19, 2014.

[6] R. H. Tjahjana, Sifat-sifat Ideal Regular, Jurnal Matematika dan Komputer, 7, No. 2, 19-25, 2004.

[7] R. W. Gilmer, The Pseudo-Radical of Commutative Ring, Pasific Journal of Mathematics, 19, 275-284, 1966.

[8] T. Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, USA : Springer-Verlag, 1990.

Sifat Irisan radikal Jacobson

ORIGINALITY REPORT

16%	16%	1%	0%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	pdffox.com Internet Source	6%
2	jurnal.unej.ac.id Internet Source	5%
3	iptek.its.ac.id Internet Source	3%
4	ejournal2.undip.ac.id Internet Source	2%
5	jurnal.umus.ac.id Internet Source	1%

Exclude quotes Off
Exclude bibliography On
Exclude matches < 1%