



Dr. Suparman, M.Si., DEA

Simulated Annealing - Estimasi Model Runtun Waktu Autoregresif
Estimasi Model Runtun Waktu Subset Autoregresif
Estimasi Model Runtun Waktu Moving Average - Estimasi Model Runtun
Waktu Subset Moving Average - Estimasi Model Subset
Autoregresif Moving Average - Segmentasi Model Synthetic Aperture Radar.

PENGANTAR SIMULATED ANNEALING DAN APLIKASINYA

**PENGANTAR
SIMULATED ANNEALING
DAN APLIKASINYA**

Dr. Suparman, M.Si., DEA



**FST UTY Press
Yogyakarta**

**PENGANTAR SIMULATED ANNEALING
DAN APLIKASINYA**

Oleh : Dr. Suparman, M.Si., DEA
Hak Cipta @ 2010 pada Penulis

Penerbit :
FST UTY Press
Jl. Ringroad Utara, Jombor
Sleman

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak buku ini sebagian atau seluruhnya, dalam bentuk dan dengan cara apa pun juga, baik secara mekanis maupun elektronis, termasuk fotokopi, rekaman, dan lain-lain tanpa izin tertulis dari penulis.

Edisi pertama
Cetakan pertama, 2010

Editor : Sugiyarto, M.Si., Ph.D
Desain Cover : Magistera Laningratum
Setting : Ayudea Az Zahra Zulfa

Dr. Suparman, M.Si., DEA
Pengantar Simulated Annealing dan Aplikasinya, _____ Yogyakarta :
FST UTY Press, 2010
vi+52 hlm; 18,5 x 26,5 cm
ISBN : 978-979-1334-30-3
Statistika : Buku Referensi

Kutipan Pasal 44 : Sangsi pelanggaran undang-undang hak cipta 1987

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak mengumumkan atau memperbanyak suatu ciptaan atau memberi ijin untuk itu, dipidana dengan pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 100.000.000,- (seratus juta rupiah).
2. Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta sebagaimana dimaksud ayat 1 (satu), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 50.000.000,- (lima puluh juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Buku ini disusun berdasarkan penelitian dan pengajaran yang penulis lakukan selama lima tahun. Di samping itu, penulis juga telah mengkaji berbagai literatur dan hasil penelitian. Buku ini ditulis sebagai buku referensi untuk para peneliti, para pengajar di Perguruan Tinggi dan para mahasiswa dalam memahami Metode Simulated Annealing. Dalam buku ini disertakan beberapa aplikasinya sehingga membuat buku ini cocok juga untuk para praktisi yang ingin memahami Metode Simulated Annealing dan permasalahan yang bisa diselesaikan dengan metode ini.

Dalam buku ini dibahas berbagai hal, yaitu : 1) Simulated Annealing; 2) Estimasi Model Runtun Waktu Autoregresif; 3) Estimasi Model Runtun Waktu Subset Autoregresif; 4) Estimasi Model Runtun Waktu Moving Average; 5) Estimasi Model Runtun Waktu Subset Moving Average; 6) Estimasi Model Subset Autoregresif Moving Average; dan 7) Segmentasi Model Synthetic Aperture Radar.

Karena saya tidak mungkin menyelesaikan buku ini sendirian, saya ingin mengucapkan banyak terima kasih pada berbagai pihak yang telah mendukung kelancaran penulisan buku ini. Akhirnya penulis tetap mengharapkan berbagai masukan, kritik dan saran demi perbaikan karya di masa yang akan datang.

Yogyakarta, Juni 2010

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI	v
BAB 1 SIMULATED ANNEALING	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Pembentukan Ukuran	4
1.3 Perhitungan Fungsi Kepadatan	6
1.4 Simulated Annealing	8
BAB 2 ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU AUTOGRESIF	11
2.1 Rumusan Masalah	11
2.2 Bayesian Hirarki	12
2.3 Metode MCMC	13
2.4 Algoritma SA	14
2.5 Aplikasi	14
2.6 Kesimpulan	18
BAB 3 ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU SUBSET AUTOGRESIF	19
3.1 Rumusan Masalah	19
3.2 Bayesian Hirarki	19
3.3 Metode MCMC	21
3.4 Algoritma SA	21
3.5 Kesimpulan	22
BAB 4 ESTIMASI MODEL RUNTUN MOVING AVERAGE	23
4.1 Rumusan Masalah	23
4.2 Bayesian Hirarki	24
4.3 Metode MCMC	25
4.4 Algoritma SA	26
4.5 Aplikasi	26
4.6 Kesimpulan	30

BAB 5 ESTIMASI MODEL RUNTUN SUBSET MOVING AVERAGE	31
5.1 Rumusan Masalah	31
5.2 Bayesian Hirarki	31
5.3 Metode MCMC	33
5.4 Algoritma SA	33
5.5 Kesimpulan	34
BAB 6 ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU SUBSET AUTOGRESIF MOVING AVERAGE	35
6.1 Rumusan Masalah	35
6.2 Bayesian Hirarki	36
6.3 Metode MCMC	37
6.4 Algoritma SA	38
6.5 Kesimpulan	38
BAB 7 SEGMENTASI MODEL SYNTHETIC APERTURE RADAR	39
7.1 Rumusan Masalah	39
7.2 Pendekatan Bayesian	40
7.3 Metode SA	41
7.4 Aplikasi	42
7.5 Kesimpulan	45
DAFTAR PUSTAKA	47

BAB 1

SIMULATED ANNEALING

1.1 PENDAHULUAN

Misalkan E menyatakan himpunan keadaan dan π menyatakan probabilitas keadaan pada E . Algoritma Metropolis-Hastings ([1], [2]) menghasilkan rantai Markov pada E yang mempunyai probabilitas stasioner sama dengan π . Pembentukan rantai Markov tersebut mendasarkan pada kondisi reversibilitate. Probabilitas π

disebut stasioner jika untuk kernel K dari rantai Markov pada E berlaku :

$$\pi(x) = \sum_{y \in E} \pi(y)K(y, x)$$

untuk semua $x \in E$. Probabilitas π disebut reversibel untuk kernel K jika

$$\pi(x)K(x, y) = \pi(y)K(y, x)$$

untuk semua $x, y \in E$. Jelas bahwa reversibilitate dari π berimplikasi pada stasionaritas untuk kernel K . Sifat ini digunakan untuk membentuk kernel K sedemikian sehingga π merupakan distribusi stasioner. Misalkan q menyatakan kernel bantu pada E . Dimulai dari $x \in E$, penarikan sebuah titik baru y dilakukan dalam 2 tahap :

1. Titik y ditarik menurut $q(x, y)$
2. Titik y diterima dengan probabilitas

$$\rho(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)q(y, x)}{\pi(x)q(x, y)} \right\}$$

Kernel K didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} K(x, y) = q(x, y)\rho(x, y) & \text{jika } x \neq y \\ K(x, y) = q(x, x) + \sum_{y \neq x} [1 - \rho(x, y)] \end{cases}$$

Kernel K ini memenuhi persamaan reversibite. Dibawah kondisi bahwa rantai Markov adalah irreduktibel dan aperiodik maka probabilitas π juga merupakan probabilitas limit.

Bab 1 Simulated Annealing

Misalkan E menyatakan ruang yang dibentuk oleh dua ruang yang berbeda dimensinya.

$$E = \{1\}_x \mathfrak{R}^{n_1} \cup \{2\}_x \mathfrak{R}^{n_2}$$

dengan n_1 dan n_2 adalah bilangan bulat yang berbeda. Untuk selanjutnya $\{1\}_x \mathfrak{R}^{n_1}$ ditulis dengan \mathfrak{R}^{n_1} dan $\{2\}_x \mathfrak{R}^{n_2}$ ditulis dengan \mathfrak{R}^{n_2} . Dengan demikian himpunan E dibentuk oleh dua unsur yaitu unsur dari \mathfrak{R}^{n_1} dan unsur dari \mathfrak{R}^{n_2} . Demikian pula, ukuran π dibentuk oleh π_1 dibawa oleh \mathfrak{R}^{n_1} dan π_2 dibawa oleh \mathfrak{R}^{n_2} .

Di dalam \mathfrak{R}^{n_1} atau \mathfrak{R}^{n_2} , algoritma Metropolis-Hastings dapat berfungsi tanpa kesulitan. Sebaliknya perlu mendefinisikan tranformasi dari \mathfrak{R}^{n_1} menuju \mathfrak{R}^{n_2} atau sebaliknya yang memenuhi persamaan reversibilitate. Idea dari Green ([3]), misalkan q menyatakan kernel instrumental dan ρ menyatakan probabilitas penerimaan/penolakan. Maka harus dipenuhi

$$\int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx') \rho(x, x') = \int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx) \rho(x', x)$$

untuk semua $A \subset B_1$ dan $B \subset B_2$. Atau

$$\int_A \pi(dx) \int_B q_{12}(x, dx') \rho(x, x') = \int_B \pi(dx') \int_A q_{21}(x', dx) \rho(x', x)$$

Dimana q_{12} menyatakan kernel probabilitas dari \mathfrak{R}^{n_1} menuju \mathfrak{R}^{n_2} dan q_{21} menyatakan kernel probabilitas dari \mathfrak{R}^{n_2} menuju \mathfrak{R}^{n_1} .

Misalkan bahwa ukuran dan kernel mempunyai fungsi kepadatan terhadap ukuran Lebesgue, maka

$$\begin{aligned} \iint_{A \times B} \pi_1(x) q_{12}(x, x') \rho(x, x') dx dx' &= \iint_{B \times A} \pi_2(x') q_{21}(x', x) \rho(x', x) dx' dx \\ &= \iint_{A \times B} \pi_2(x') q_{21}(x', x) \rho(x', x) dx dx' \end{aligned}$$

Atau

$$\pi_1(x) q_{12}(x, x') \rho(x, x') = \pi_2(x') q_{21}(x', x) \rho(x', x)$$

Jadi

$$\rho(x', x) = \min \left\{ 1, \frac{\pi_2(x')q_{21}(x', x)}{\pi_1(x)q_{12}(x, x')} \right\}$$

Selanjutnya dibentuk ukuran ξ dalam himpunan ExE simetris dan memenuhi $\pi(dx) q(x, dx')$ mempunyai fungsi kepadatan $f(x, x')$ dan $\pi(dx') q(x', dx)$ mempunyai fungsi kepadatan $f(x', x)$ terhadap ξ . Ingatlah bahwa ukuran ξ adalah simetris jika dan hanya jika untuk semua fungsi terukur positif $\varphi(x, y)$ diatas ExE berlaku

$$\iint_{ExE} \varphi(x, y) \xi(dx, dy) = \iint_{ExE} \varphi(y, x) \xi(dx, dy)$$

Karena ukuran ini simetris, maka

$$\begin{aligned} \int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx') \rho(x, x') &= \iint_{A \times B} f(x, x') \rho(x, x') \xi(dx, dx') \\ &= \iint_{B \times A} f(x', x) \rho(x', x) \xi(dx, dx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx) \rho(x', x) &= \iint_{B \times A} f(x', x) \rho(x', x) \xi(dx', dx) \\ &= \iint_{B \times A} f(x, x') \rho(x, x') \xi(dx, dx') \end{aligned}$$

Persamaan reversibilitate menjadi

$$\iint_{B \times A} f(x', x) \rho(x', x) \xi(dx, dx') = \iint_{B \times A} f(x, x') \rho(x, x') \xi(dx, dx')$$

Agar supaya persamaan ini dipenuhi, cukup dipenuhi

$$f(x', x) \rho(x', x) = f(x, x') \rho(x, x')$$

untuk semua $(x, x') \in ExE$. Atau

$$\rho(x, x') = \min \left\{ 1, \frac{f(x', x)}{f(x, x')} \right\}.$$

Permasalahan selanjutnya adalah bagaimana membentuk ukuran ξ yang simetris diatas $E \times E$ dan fungsi kepadatan f yang berkaitan dengan transformasi yang dilakukan.

1.2 PEMBENTUKAN UKURAN

Ide umum adalah melengkapi dua ruang \mathfrak{R}^{n_1} dan \mathfrak{R}^{n_2} untuk berada dalam ruang yang sama dimensinya. Misalkan m_1 dan m_2 adalah dua bilangan positif sedemikian sehingga

$$n_1 + m_1 = n_2 + m_2$$

Selanjutnya mendefinisikan transformasi-transformasi yang bersesuaian. Misalkan

$$\begin{cases} g_2 : \mathfrak{R}^{n_1+m_1} \rightarrow \mathfrak{R}^{n_2} \\ (x, x_1) \rightarrow g_2(x, x_1) \end{cases}$$

dan

$$\begin{cases} g_1 : \mathfrak{R}^{n_2+m_2} \rightarrow \mathfrak{R}^{n_1} \\ (x', x_2) \rightarrow g_1(x', x_2) \end{cases}$$

Anggap bahwa ada ijektivitas dari transformasi-transformasi terhadap komponen, yaitu untuk $i = 1, 2$ berlaku

$$g_i(u, \alpha) = g_i(u, \beta) \Rightarrow \alpha = \beta$$

Anggap juga bahwa ada sebuah rumus inversi yang memungkinkan untuk kembali ke belakang. Untuk semua $x \in \mathfrak{R}^{n_1}$ dan $x_1 \in \mathfrak{R}^{m_1}$, terdapat dengan tunggal $x_2 \in \mathfrak{R}^{m_2}$ sedemikian sehingga $g_1[g_2(x, x_1), x_2] = x$. Definisikan juga sebuah fungsi h_2 dari $\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{m_1}$ ke dalam \mathfrak{R}^{m_2} dengan memisalkan $x_2 = h_2(x, x_1)$ yang memenuhi persamaan sebelumnya.

Secara simetris, untuk semua $x' \in \mathfrak{R}^{n_2}$ dan $x_2 \in \mathfrak{R}^{m_2}$ terdapat dengan tunggal $x_1 \in \mathfrak{R}^{m_1}$ sedemikian sehingga $g_2[g_1(x', x_2), x_1] = x'$. Definisikan fungsi h_1 dari $\mathfrak{R}^{n_2} \times \mathfrak{R}^{m_2}$ ke dalam \mathfrak{R}^{m_1} dengan memisalkan $x_1 = h_1(x', x_2)$ Akhirnya sifat inversi ini memungkinkan berdasarkan g_1 dan g_2 , untuk membentuk dua aplikasi yang saling invers

$$\begin{aligned} \Psi_{12} : \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{m_1} &\rightarrow \mathcal{R}^{n_2+m_2} \\ (x, x_1) &\rightarrow (g_2(x, x_1), h_2(x, x_1)) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \Psi_{21} : \mathcal{R}^{n_2} \times \mathcal{R}^{m_2} &\rightarrow \mathcal{R}^{n_1+m_1} \\ (x', x_2) &\rightarrow (g_1(x', x_2), h_1(x', x_2)) \end{aligned}$$

Untuk ilustrasi, misalkan $n_1 = 1$ dan $n_2 = 2$. Maka lengkapi ruang \mathcal{R} dan ambil $m_1 = 1$ dan $m_2 = 0$. Definisikan aplikasi g_1 dan g_2 dengan cara berikut

$$\begin{cases} g_2 : \mathcal{R}^2 &\rightarrow \mathcal{R}^2 \\ (x, x_1) &\rightarrow g_2(x, x_1) = (x - x_1, x + x_1) \end{cases}$$

dan

$$\begin{cases} g_1 : \mathcal{R}^2 &\rightarrow \mathcal{R} \\ x := (x'_1, x'_2) &\rightarrow g_1(x) = \left(\frac{x'_1 + x'_2}{2} \right) \end{cases}$$

Ingatlah bahwa E adalah berbentuk $\{1\} \times \mathcal{R}^{n_1} \cup \{2\} \times \mathcal{R}^{n_2}$ dan ukuran ξ simetris diatas $E \times E$ berdasarkan aplikasi g_1 dan g_2 . Dimulai dengan mendefinisikan ξ pada $\mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2}$ kemudian secara simetris pada $\mathcal{R}^{m_1} \times \mathcal{R}^{m_2}$ dan akhirnya diperluas pada $E \times E$. Pertimbangkan aplikasi

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{m_1} &\rightarrow \mathcal{R}^{n_2} \times \mathcal{R}^{m_2} \\ (x, x_1) &\rightarrow (x, g_2(x, x_1)) \end{aligned}$$

Karena ξ adalah bayangan dari ukuran Lebesque λ dari $\mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2}$ melalui aplikasi φ maka dapat dimisalkan $d\xi = \varphi.d\lambda$. Untuk $A \subset \mathcal{R}^{n_1}$ dan $B \subset \mathcal{R}^{n_2}$ berlaku

$$\xi(A \times B) = \lambda \left\{ (x, x_1) \in \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{m_1} \mid x \in A \text{ dan } g_2(x, x_1) \in B \right\}$$

Definisi ini diperluas pada $\mathcal{R}^{m_1} \times \mathcal{R}^{m_2}$ melalui sifat simetris dengan memisalkan

$$\xi(B \times A) = \xi(A \times B) \text{ untuk } A \subset \mathcal{R}^{n_1} \text{ dan } B \subset \mathcal{R}^{n_2}.$$

Akhirnya

$$\xi(A \times B) = \xi(A \cap \mathcal{R}^{n_1} \times B \cap \mathcal{R}^{n_2}) + \xi(A \cap \mathcal{R}^{n_2} \times B \cap \mathcal{R}^{n_1})$$

Perhatikan bahwa

$$\xi(A \times B) = 0 \text{ jika } A \subset \mathcal{R}^{n_1} \text{ dan } B \subset \mathcal{R}^{n_1}$$

Dan

$$\xi(AxB) = 0 \text{ jika } A \subset \mathfrak{R}^{n_1} \text{ dan } B \subset \mathfrak{R}^{n_2}$$

Untuk sebuah fungsi dua variabel positif $\psi(x, y)$ pada $E \times E$ berlaku

$$\begin{aligned} \iint_{E \times E} \psi(x, x') \xi(dx, dx') &= \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_1}} \psi(x, x') \xi(dx, dx') \\ &+ \iint_{\mathfrak{R}^{n_2} \times \mathfrak{R}^{n_2}} \psi(x, x') \xi(dx, dx') \end{aligned}$$

Karena ξ simetris maka juga berlaku

$$\iint_{E \times E} \psi(x, x') \xi(dx, dx') = \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_1}} (\psi(x, x') + \psi(x', x)) \xi(dx, dx')$$

Akhirnya, untuk $A \subset \mathfrak{R}^{n_1}$ dan $B \subset \mathfrak{R}^{n_2}$ berlaku

$$\begin{aligned} \iint_{A \times B} \psi(x, x') \xi(dx, dx') &= \iint_{E \times E} 1_A(x) 1_B(x') \psi(x, x') \xi(dx, dx') \\ &= \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_2}} 1_A(x) 1_B(g_2(x, x_1)) \psi(x, g_2(x, x_1)) \xi(dx, dx_1) \end{aligned}$$

1.3 PERHITUNGAN FUNGSI KEPADATAN

Misalkan $x \in \mathfrak{R}^{n_1}$. Dipilih lompatan menuju \mathfrak{R}^{n_2} dengan probabilitas $j(2, x)$ dan tinggal di \mathfrak{R}^{n_1} dengan probabilitas $1-j(2, x)$. Ambil secara random titik $x_1 \in \mathfrak{R}^{n_2}$ dengan distribusi bantu $q_1(x_1)$ dan kemudian dimisalkan $x' = g_2(x, x_1)$

Misalkan $\pi_1(x)$ dan $\pi_2(x)$ adalah fungsi-fungsi kepadatan terhadap ukuran Lebesgue dari \mathfrak{R}^{n_1} dan \mathfrak{R}^{n_2} . Maka

$$\begin{aligned} \int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx') \rho(x, x') &= \iint_{\mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_2}} 1_A(x) \pi_1(x) 1_B(g_2(x, x_1)) \\ & j(2, x) \rho(x, g_2(x, x_1)) q_1(x_1) dx dx_1 \end{aligned}$$

dengan $A \subset \mathfrak{R}^{n_1}$ dan $B \subset \mathfrak{R}^{n_2}$.

Menurut kondisi inversi, untuk x dan x' yang diberikan terdapat dengan tunggal x_1 sedemikian sehingga $x' = g_2(x, x_1)$. Dengan demikian $q_1(x_1)$ dinyatakan dengan $q_1(x, x')$.

$$\int_A \pi(dx) \int_B q(x, dx') \rho(x, x')$$

$$= \iint_{A \times B} \pi_1(x) j(2, x) \rho(x, x') q_1(x, x') \xi(dx, dx')$$

Sehingga fungsi kepadatan terhadap ukuran ξ dapat ditulis sebagai

$$f(x, x') = \pi_1(x) j(2, x) q_1(x, x')$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx) \rho(x', x)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} 1_B(x') \pi_2(x') 1_A(g_1(x', x_2))$$

$$j(1, x') \rho(x', g_1(x', x_2)) q_2(x_2) dx dx_2$$

Untuk menyatakan integral ini terhadap ukuran ξ , lakukan perubahan variabel

$$\begin{cases} x' &= g_2(x, x_1) \\ x_2 &= h_2(x, x_1) \end{cases}$$

Jika integral di ruas kanan dinyatakan sebagai fungsi dari x dan x_1 maka akan muncul jacobian

$$\left| \frac{\partial(x', x_2)}{\partial(x, x_1)} \right|$$

Sehingga

$$\int_B \pi(dx') \int_A q(x', dx) \rho(x', x)$$

$$= \iint_{A \times B} 1_B(x') \pi_2(x') 1_A(x)$$

$$j(1, x') \rho(x', x) q_2(x', x) \left| \frac{\partial(x', x_2)}{\partial(x, x_1)} \right| \xi(dx, dx')$$

Maka diperoleh

$$f(x', x) = \pi_2(x') j(1, x') q_2(x', x) \left| \frac{\partial(x', x_2)}{\partial(x, x_1)} \right|$$

Probabilitas penerimaan menjadi

$$\rho(x, x') = \min \left\{ 1, \frac{\pi_2(x') j(1, x') q_2(x', x) \left| \frac{\partial(x', x)}{\partial(x, x_1)} \right|}{\pi_1(x) j(2, x) q_1(x, x') \left| \frac{\partial(x, x_1)}{\partial(x', x_2)} \right|} \right\}.$$

1.4 SIMULATED ANNEALING

Algoritma reversibel jump Markov chain Monte Carlo yang diuraikan dalam bagian sebelumnya menghasilkan pengamatan $\{x^i\}$ dalam ruang keadaan E menurut distribusi π .

Dalam bagian ini, diuraikan versi simulated annealing dari algoritma reversible jump Markov chain Monte Carlo. Algoritma Simulated Annealing (lihat sebagai contoh [4]) menggunakan skema penurunan temperatur $\{T_i\}$ dan menghasilkan $\{x^i\}$ menurut distribusi

$$\pi_{T_i}(x) \propto \left\{ -\frac{h(x)}{T_i} \right\}$$

dimana $h(x) = -\log \pi(x)$. Dengan menurunkan temperatur T_i menuju 0, nilai yang disimulasikan berada disekitar dekat sekali dengan minimum global dari fungsi $h(x)$.

Bartoli dan Del Moral memberikan kondisi sangat umum dari kekonvergenan algoritma simulated annealing dalam ruang terukur sembarang. Kondisi reversibilitas dari kernel otomatis dipenuhi untuk kernel Metropolis-Hasting. Di sini, skema penurunan

temperatur T_i dicari secara empiris. Probabilitas penerimaan/penolakan $\alpha(x, x^*)$ menjadi

$$\alpha_T(x, x^*) = \min \left\{ 1, \frac{j_{21}(x^*)h(u^*)}{j_{12}(x)g(u)} \left| \frac{\partial f_{12}(x, u)}{\partial(x, u)} \right| \exp \left[-\frac{1}{T_i} \Delta(x, x^*) \right] \right\}$$

dengan

$$\begin{cases} \Delta(x, x^*) = h(x^*) - h(x) \\ h(x) = -\log \pi(x) \\ h(x^*) = -\log \pi(x^*) \end{cases}$$

BAB 2

ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU AUTOREGRESIF

2.1 RUMUSAN MASALAH

Misalkan $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ adalah suatu runtun waktu berharga riil. Runtun waktu $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ dikatakan memiliki model AR dengan orde p , dinotasikan sebagai $AR(p)$, jika $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ memenuhi persamaan stokhastik berikut :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i^{(p)} X_{t-i} + E_t \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

di mana orde $p \in \mathbb{N}^+$, vektor koefisien

$$\phi^{(p)} = (\phi_1^{(p)}, \phi_2^{(p)}, \dots, \phi_p^{(p)}) \in \mathbb{R}^p$$

dan $(E_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ merupakan suatu barisan peubah acak berharga riil yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi σ^2 ([5]). Data jumlah pembangkit tenaga listrik oleh industri listrik, jumlah pendaftaran mobil di suatu negara, jumlah penumpang pesawat udara dan data jumlah penjualan industri merupakan beberapa contoh data riil yang dapat dimodelkan oleh model AR.

Selanjutnya model AR $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ disebut stasioner jika dan hanya jika persamaan suku banyak

$$\phi(a) = 1 + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(p)} a^i$$

bernilai nol untuk nilai a di luar lingkaran dengan jari-jari sama dengan satu ([6]).

Berdasarkan data x_t ($t = 1, 2, \dots, n$), selanjutnya kita akan berusaha untuk menaksir harga

$$p, \phi^{(p)}, \text{ dan } \sigma^2.$$

Untuk melakukan itu, kita akan menggunakan pendekatan Bayesian hierarki, yang akan diuraikan dalam bagian berikut ini.

2.2 BAYESIAN HIERARKI

Andaikan $s = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model AR(p). Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ diketahui, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\ell(s | p, \phi^{(p)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-p)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=q+1}^n g^2(t, p, \phi^{(p)}) \tag{2.2}$$

di mana

$$g(t, p, \phi^{(p)}) = x_t - \sum_{i=1}^p \phi_i^{(p)} x_{t-i}$$

untuk $t = p+1, p+2, \dots, n$ dengan nilai awal $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \dots = \hat{x}_p = 0$ ([7]).

Misalkan S_p adalah daerah stabilitas. Dengan menggunakan transformasi

$$G : \phi^{(p)} = (\phi_1^{(p)}, \phi_2^{(p)}, \dots, \phi_p^{(p)}) \in S_p \mapsto r^{(p)} = (r_1, r_2, \dots, r_p) \in (-1, 1)^p \tag{2.3}$$

maka model AR $(X_t)_{t \in Z}$ stasioner jika dan hanya jika $r^{(p)} = (r_1, \dots, r_p) \in (-1, 1)^p$ ([8]). Selanjutnya fungsi kemungkinan dapat ditulis kembali sebagai :

$$\ell(s | p, r^{(p)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-p)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n g^2(t, p, G^{-1}(\phi^{(p)})) \tag{2.4}$$

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Orde p berdistribusikan Binomial dengan parameter λ :

$$\pi(p | \lambda) = C_{p_{\max}}^p \lambda^p (1 - \lambda)^{p_{\max} - p}$$

b) Untuk orde q ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $r^{(p)}$ berdistribusikan seragam pada interval $(-1, 1)^q$.

c) Variansi σ^2 berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp - \beta/(2\sigma^2)$$

Di sini parameter λ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval $(0, 1)$, nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk parameter $H_1 = (p, r^{(p)}, \sigma^2)$ dan $H_2 = (\lambda, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2) = \pi(p | \lambda) \pi(r^{(p)} | p) \pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) \pi(\lambda) \pi(\beta) \tag{2.5}$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \quad (2.6)$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Fungsi kemungkinan bersifat obyektif sementara distribusi prior ini bersifat subyektif. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode MCMC.

2.3 METODE MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel ([9]) sedemikian hingga M_1, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida ([9]) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | s)$
2. Simulasi distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$

Algoritma Gibbs digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | s)$ dan algoritma hibrida, yang menggabungkan algoritma Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC) ([3]) untuk mensimulasikan parameter $(p, r^{(p)})$ dengan algoritma Gibbs untuk mensimulasikan parameter σ^2 , digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Algoritma RJMCMC merupakan rampatan dari algoritma Metropolis-Hastings ([1], [9]).

Estimator yang dihasilkan oleh metode MCMC dalam dua tahap. Tahap pertama adalah estimator dari orde q . Tahap kedua adalah estimator dari parameter model AR dan variansi σ^2 yang bersesuaian dengan orde q yang diperoleh pada tahap pertama.

Untuk mendapatkan kecepatan dan efisiensi diperlukan suatu algoritma untuk menentukan estimator orde q , parameter model AR dan variansi σ^2 secara bersamaan. Untuk keperluan itu, diusulkan algoritma Simulated Annealing (SA).

2.4 ALGORITMA SA

Algoritma SA ([10]) diperoleh dengan menambahkan barisan temperatur T_1, \dots, T_m dalam metode MCMC di atas. Selanjutnya algoritma SA akan memproduksi suatu rantai Markov $M(T_1), \dots, M(T_m)$ yang tidak lagi homogen. Dengan suatu hipotesis tertentu pada T_1, \dots, T_m ([11]) maka $M(T_m)$ akan konvergen menuju suatu nilai yang memaksimumkan distribusi posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$.

2.5 APLIKASI

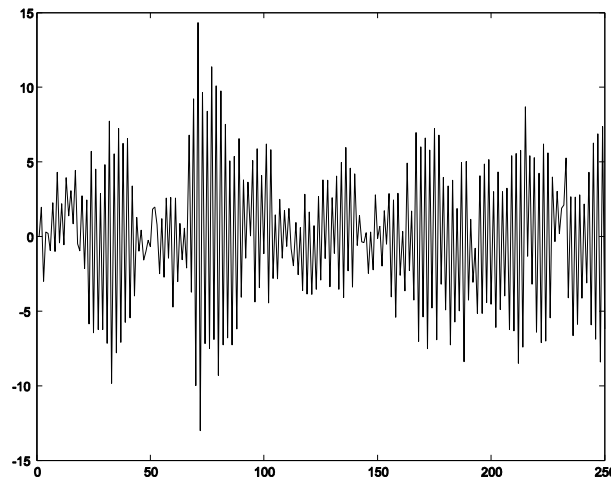
Sebagai ilustrasi, kita akan menerapkan metode ini untuk mengidentifikasi orde dan menaksir parameter data AR sintesis dan data riil. Studi simulasi ditempuh untuk mengkonfirmasi kinerja dari algoritma SA apakah dapat berkerja dengan baik. Sedangkan studi kasus diberikan untuk memberikan contoh penerapan penelitian dalam memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Baik untuk data AR sintesis maupun data AR riil ini, kita akan menggunakan algoritma SA untuk mengidentifikasi orde dan mengestimasi parameter model AR yang bersesuaian. Untuk keperluan itu, algoritma SA diimplementasikan sebanyak 70000 iterasi dengan nilai awal temperatur $T_0 = 10$ kemudian temperatur diturunkan dengan faktor 0,995 hingga mencapai temperatur akhir $T_{1400} = 0,01$. Nilai orde q dibatasi maksimum 10 sehingga $q_{\text{maks}} = 10$.

Data AR Sintesis

Gambar 2.1 merupakan data AR sintesis yang dibuat menurut persamaan (2.1) di atas dengan menggunakan bahasa pemrograman

MATLAB, dengan jumlah data $n = 250$, orde $p = 2$, $\phi_1^{(2)} = 0,4162$, $\phi_2^{(2)} = -0,5377$ dan $\sigma^2 = 4$.

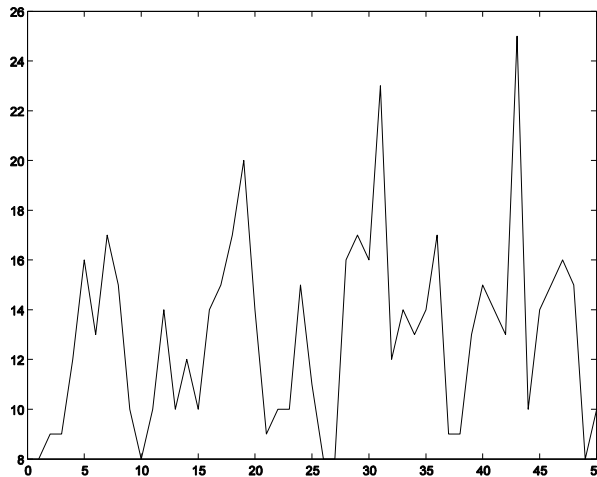


Gambar 2.1. Data AR Sintesis

Selanjutnya berdasarkan data dalam Gambar 2.1 orde p , parameter model AR, variansi σ^2 akan ditentukan atau lebih tepat akan ditaksir dengan menggunakan algoritma SA. Penaksir orde, parameter model AR dan variansi σ^2 yang dihasilkan oleh algoritma SA adalah $\hat{p} = 2$, $\hat{\phi}_1^{(2)} = 0,4073$, $\hat{\phi}_2^{(2)} = -0,5430$ dan $\hat{\sigma}^2 = 3,5239$.

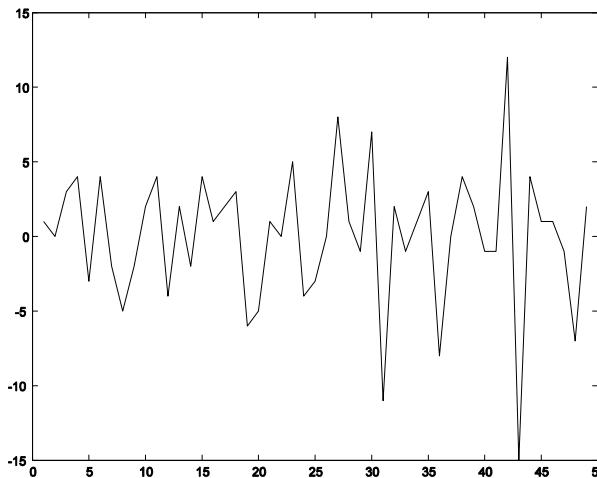
Data AR Riil

Gambar 2.2 menyajikan data penjualan suatu produk pada CV Jaya Warsa Klaten untuk 50 periode yaitu dari Januari 2002 sampai Pebruari 2006 ([12]). Dari plot data dapat kita lihat bahwa bahwa data tidak stasioner. Untuk mendapatkan menstasionerkan data, dibuat data baru yang terdiri dari perbedaan data asli antara periode yang berturut-turut.



Gambar 2.2. Data Penjualan suatu Produk pada CV Jaya Warsa

Dengan melakukan pembedaan pertama terhadap data asli pada Gambar 2.2 akan menghasilkan suatu data stasioner yang plotnya ditunjukkan pada Gambar 2.3.

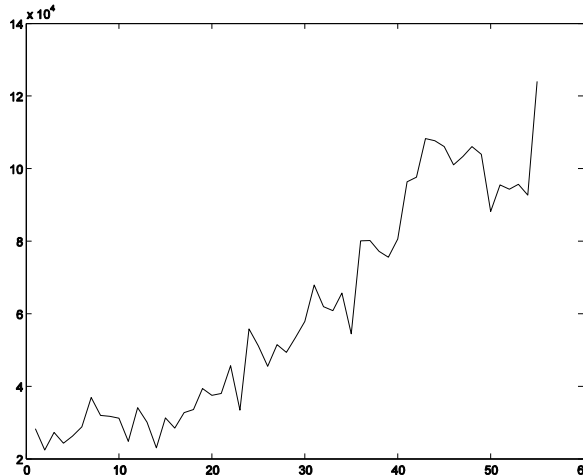


Gambar 2.3. Pembedaan Pertama Data Penjualan suatu Produk pada CV Jaya Warsa.

Seperti untuk kasus data sintesis, berdasarkan data pada Gambar 2.3 orde p , parameter model AR dan varisnsi σ^2 diestimasi dengan menggunakan algoritma SA. Hasilnya adalah $\hat{p} = 4$, $\hat{\phi}_1^{(4)} = 0,5105$, $\hat{\phi}_2^{(4)} = 0,3414$, $\hat{\phi}_3^{(4)} = 0,2809$, $\hat{\phi}_4^{(4)} = 0,2250$ dan $\hat{\sigma}^2 = 16,6262$.

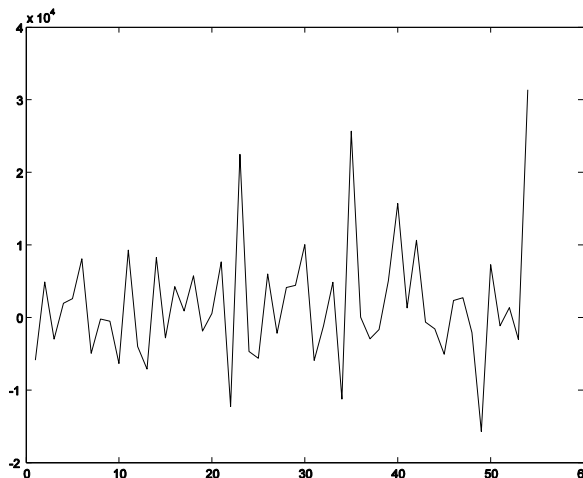
Data riil kedua disajikan pada Gambar 2.4. Data tersebut merupakan data penjualan Penjualan Jasa Penumpang Pesawat

Udara (PJP2U) dalam negeri pada PT Angakasa Pura I Bandar Udara Internasional Adisutjipto Yogyakarta untuk 55 periode yaitu Januari 2001 sampai Juli 2005 ([13]). Terlihat jelas pada Gambar 4 bahwa data inipun tidak stasioner.



Gambar 2.4. Data Penjualan PJP2U dalam negeri pada PT Angakasa Pura I.

Untuk mendapatkan data yang stasioner dilakukan pembedaan pertama dan hasilnya ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5. Pembedaan Pertama Data Penjualan PJP2U dalam Negeri pada PT Angakasa Pura I.

Berdasarkan data pada Gambar 2.5 selanjutnya orde p , parameter model AR dan variansi σ^2 ditaksir dengan menggunakan

algoritma SA. Hasilnya adalah $\hat{p} = 1$, $\hat{\phi}_1^{(1)} = 0,3926$ dan $\hat{\sigma}^2 = 6,8499 \times 10^7$.

2.6 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma SA dan penerapannya pada identifikasi orde p , penaksiran vektor koefisien $\phi^{(p)}$, dan penaksiran variansi σ^2 dari model AR. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa algoritma SA dapat menaksir parameter-parameter itu dengan baik.

Sebagai implementasi algoritma SA, diambil dua data riil pada CV Jaya Warsa dan PT Angkasa Pura I. Hasilnya adalah data penjualan suatu produk pada CV Jaya Warsa Klaten dapat dimodelkan dengan model ARI(4) dan data penjualan PJP2U dalam negeri pada PT Angkasa Pura I Bandar Udara Internasional Adisutjipto Yogyakarta dapat dimodelkan dengan model ARI(1). Selanjutnya model-model yang diperoleh dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penjualan pada CV Jaya Warsa dan juga jumlah penjualan PJP2U dalam negeri pada PT Angkasa Pura I Bandar Udara Internasional Adisutjipto pada periode berikutnya.

BAB 3

ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU SUBSET AUTOREGRESIF

3.1 RUMUSAN MASALAH

Misalkan $(X_t)_{t \in Z}$ adalah suatu runtun waktu berharga riil. Runtun waktu $(X_t)_{t \in Z}$ dikatakan memiliki model Subset AutoRegresif dengan orde p , dinotasikan sebagai SAR(p), jika $(X_t)_{t \in Z}$ memenuhi persamaan stokhastik berikut :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_{m_i}^{(p)} X_{t-m_i} + E_t, \dots t \in Z \quad (3.1)$$

di mana orde $p \in N^+$ dan vektor koefisien

$$\phi^{(p)} = \left(\phi_{m_1}^{(p)}, \dots, \phi_{m_p}^{(p)} \right) \in \mathfrak{R}^p.$$

Di sini, $(E_t)_{t \in Z}$ merupakan suatu barisan peubah acak berharga riil yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ^2 . Data kurs mata uang rupiah terhadap euro, jumlah pendaftaran mobil di suatu negara, jumlah penumpang pesawat udara dan data jumlah penjualan industri merupakan beberapa contoh data riil yang dapat dimodelkan oleh model SAR.

Berdasarkan data x_t ($t = 1, 2, \dots, n$), selanjutnya kita akan berusaha untuk menaksir harga

$$p, \phi^{(p)} \text{ dan } \sigma^2.$$

Untuk melakukan itu, kita akan menggunakan pendekatan Bayesian hierarki, yang akan diuraikan dalam bagian berikut ini.

3.2 BAYESIAN HIERARKI

Andaikan $s = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model SAR(p). Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ diketahui, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\ell(s | p, \phi^{(p)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-p)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n g^2(t, p, \phi^{(p)}) \quad (3.2)$$

di mana

$$g(t, p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}) = x_t + \sum_{i=1}^p \phi_{mi}^{(p)} x_{t-mi}$$

untuk $t = p+1, p+2, \dots, n$ dengan nilai awal $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \dots = \hat{x}_p = 0$.

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Orde p berdistribusikan Binomial dengan parameter λ :

$$\pi(p | \lambda) = C_{p_{\max}}^p \lambda^p (1-\lambda)^{p_{\max}-p}$$

b) Untuk orde p ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\phi^{(p)}$ berdistribusikan normal dengan mean 0 dan variansi 1.

c) Variansi σ^2 berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp - \beta/(2\sigma^2)$$

Di sini parameter λ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval $(0,1)$, nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk parameter $H_1 = (p, \phi^{(p)}, \sigma^2)$ dan $H_2 = (\lambda, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned} \pi(H_1, H_2) &= \pi(H_1 | H_2) \pi(H_2) \\ &= \pi(p | \lambda) \pi(\phi^{(p)} | p) \pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) \pi(\lambda) \pi(\mu) \pi(\beta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \quad (3.4)$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Fungsi kemungkinan bersifat obyektif sementara distribusi prior ini bersifat subyektif. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

3.3 METODE MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel ([9]) sedemikian hingga M_1, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida ([9]) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$
2. Simulasi distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$

Untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$ dipergunakan algoritma hibrida. Algoritma hibrida merupakan penggabungan algoritma Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJCMCMC) ([3]) dan algoritma Gibbs. Algoritma RJCMCMC dipergunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Sedangkan algoritma Gibbs dipergunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Algoritma RJCMCMC merupakan rampatan dari algoritma Metropolis-Hastings ([1], [2]).

Estimator yang dihasilkan oleh algoritma RJCMCMC dalam dua tahap. Tahap pertama algoritma RJCMCMC menghasilkan estimator untuk orde p . Tahap kedua algoritma RJCMCMC menghasilkan estimator untuk parameter model SAR dan variansi σ^2 yang bersesuaian dengan orde p yang diperoleh pada tahap pertama. Untuk mendapatkan kecepatan dan efisiensi diperlukan suatu algoritma yang dapat menentukan estimator orde p , parameter model SAR dan variansi σ^2 secara bersamaan. Untuk keperluan itu, diusulkan algoritma Simulated Annealing (SA).

3.4 ALGORITMA SA

Algoritma SA ([10]) diperoleh dengan menambahkan barisan temperatur T_1, \dots, T_m dalam metode MCMC di atas. Selanjutnya algoritma SA akan memproduksi suatu rantai Markov

$M(T_1), \dots, M(T_m)$ yang tidak lagi homogen. Dengan suatu hipotesis tertentu pada T_1, \dots, T_m ([11]) maka $M(T_m)$ akan konvergen menuju suatu nilai yang memaksimumkan distribusi posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$.

3.5 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma SA untuk pengidentifikasi orde p , penaksiran vektor koefisien $\phi^{(p)}$ dan penaksiran variansi σ^2 dari model SAR.

BAB 4

ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU MOVING AVERAGE

4.1 RUMUSAN MASALAH

Misalkan $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ adalah suatu runtun waktu berharga riil. Runtun waktu $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ dikatakan memiliki model MA dengan orde q , dinotasikan sebagai $MA(q)$, jika $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ memenuhi persamaan stokhastik berikut :

$$X_t = \sum_{j=1}^q \theta_j^{(q)} E_{t-j} + E_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

di mana orde $p \in \mathbb{N}^+$, vektor koefisien

$$\theta^{(q)} = (\theta_1^{(q)}, \dots, \theta_q^{(q)}) \in \mathbb{R}^q$$

dan $(E_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ merupakan suatu barisan peubah acak berharga riil yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi σ^2 ([5]). Data jumlah pembangkit tenaga listrik oleh industri listrik, jumlah pendaftaran mobil di suatu negara, jumlah penumpang pesawat udara dan data jumlah penjualan industri merupakan beberapa contoh data riil yang dapat dimodelkan oleh model MA.

Selanjutnya model MA $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ disebut inversibel jika dan hanya jika persamaan suku banyak

$$\theta(a) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^{(q)} a^j$$

bernilai nol untuk nilai a di luar lingkaran dengan jari-jari sama dengan satu ([6]).

Berdasarkan data x_t ($t = 1, 2, \dots, n$), selanjutnya kita akan berusaha untuk menaksir harga

$$q, \theta^{(q)}, \text{ dan } \sigma^2.$$

Untuk melakukan itu, kita akan menggunakan pendekatan Bayesian hierarki, yang akan diuraikan dalam bagian berikut ini.

4.2 BAYESIAN HIERARKI

Andaikan $s = (x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model MA(q). Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ diketahui, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\ell(s | q, \theta^{(q)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-q)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=q+1}^n g^2(t, q, \theta^{(q)}) \tag{4.2}$$

di mana

$$g(t, q, \theta^{(q)}) = x_t - \sum_{j=1}^q \theta_j^{(q)} \hat{e}_{t-j}$$

dan

$$\hat{e}_t = x_t - \sum_{j=1}^q \theta_j^{(q)} \hat{e}_{t-j}$$

untuk $t = q+1, q+2, \dots, n$ dengan nilai awal $\hat{e}_1 = \hat{e}_2 = \dots = \hat{e}_q = 0$ ([7]).

Misalkan I_q adalah daerah inversilibite. Dengan menggunakan transformasi

$$F: \theta^{(q)} = (\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \dots, \theta_q^{(q)}) \in I_q \mapsto \rho^{(q)} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q) \in (-1, 1)^q \tag{4.3}$$

maka model MA $(X_t)_{t \in Z}$ inversibel jika dan hanya jika $\rho^{(q)} = (\rho_1, \dots, \rho_q) \in (-1, 1)^q$ ([14]). Selanjutnya fungsi kemungkinan dapat ditulis kembali sebagai :

$$\ell(s | q, \rho^{(q)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-q)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=q+1}^n g^2(t, q, F^{-1}(\theta^{(q)})) \tag{4.4}$$

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Orde q berdistribusikan Binomial dengan parameter λ :

$$\pi(q | \lambda) = C_{q_{\max}}^q \lambda^q (1 - \lambda)^{q_{\max} - q}$$

b) Untuk orde q ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\rho^{(q)}$ berdistribusikan seragam pada interval $(-1, 1)^q$.

c) Variansi σ^2 berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp - \beta/(2\sigma^2)$$

Di sini parameter λ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval $(0, 1)$, nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan

berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk parameter $H_1 = (q, \rho^{(q)}, \sigma^2)$ dan $H_2 = (\lambda, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2) = \pi(q | \lambda) \pi(\rho^{(q)} | q) \pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) \pi(\lambda) \pi(\beta) \quad (4.5)$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \quad (4.6)$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Fungsi kemungkinan bersifat obyektif sementara distribusi prior ini bersifat subyektif. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode MCMC.

4.3 METODE MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel ([9]) sedemikian hingga M_1, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida ([9]) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | s)$
2. Simulasi distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$

Algoritma Gibbs digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | s)$ dan algoritma hibrida, yang mengabungkan algoritma Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC) ([3]) untuk mensimulasikan parameter $(p, r^{(p)})$ dengan algoritma Gibbs untuk mensimulasikan parameter σ^2 , digunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Algoritma RJMCMC merupakan rampatan dari algoritma Metropopolis-Hastings ([1], [2]).

Estimator yang dihasilkan oleh metode MCMC dalam dua tahap. Tahap pertama adalah estimator dari orde q . Tahap kedua adalah estimator dari parameter model MA dan variansi σ^2 yang bersesuaian dengan orde q yang diperoleh pada tahap pertama. Oleh karena itu diusulkan suatu algoritma untuk menentukan estimator orde q , parameter model MA dan variansi σ^2 secara simultan. Untuk keperluan itu, diadopsi algoritma Simulated Annealing (SA).

4.4 ALGORITMA SA

Algoritma SA ([10]) diperoleh dengan menambahkan barisan temperatur T_1, \dots, T_m dalam metode MCMC di atas. Selanjutnya algoritma SA akan memproduksi suatu rantai Markov $M(T_1), \dots, M(T_m)$ yang tidak lagi homogen. Dengan suatu hipotesis tertentu pada T_1, \dots, T_m ([11]) maka $M(T_m)$ akan konvergen menuju suatu nilai yang memaksimumkan distribusi posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$.

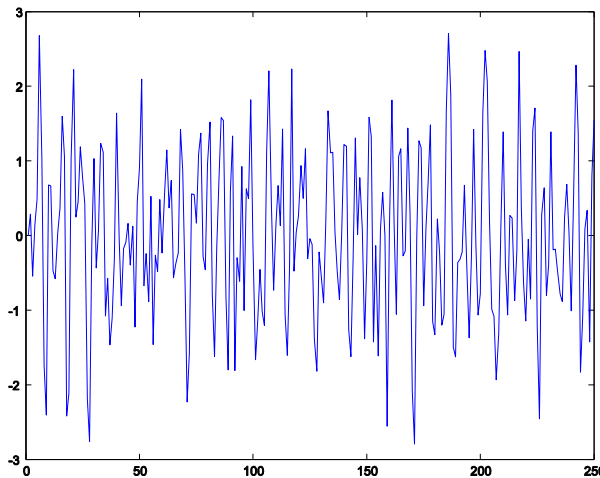
4.5 APLIKASI

Sebagai ilustrasi, kita akan menerapkan metode ini untuk mengidentifikasi orde dan menaksir parameter data MA sintesis dan data riil. Studi simulasi ditempuh untuk mengkonfirmasi kinerja dari algoritma SA apakah dapat berkerja dengan baik. Sedangkan studi kasus diberikan untuk memberikan contoh penerapan penelitian dalam memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Baik untuk data MA sintesis maupun data MA riil ini, kita akan menggunakan algoritma SA untuk mengidentifikasi orde dan mengestimasi parameter model MA yang bersesuaian. Untuk keperluan itu, algoritma SA diimplementasikan sebanyak 70000 iterasi dengan nilai awal temperatur $T_0 = 10$ kemudian temperatur diturunkan dengan faktor 0,995 hingga mencapai temperatur akhir $T_{1400} = 0,01$. Nilai orde q dibatasi maksimum 10 sehingga $q_{\text{maks}} = 10$.

Data MA Sintesis

Gambar 4.1 merupakan data MA sintesis yang dibuat menurut persamaan (4.1) di atas dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB, dengan jumlah data $n = 250$, orde $q = 3$, $\theta_1^{(3)} = 0,5900$, $\theta_2^{(3)} = -0,3616$, $\theta_3^{(3)} = -0,8936$ dan $\sigma^2 = 0,49$.

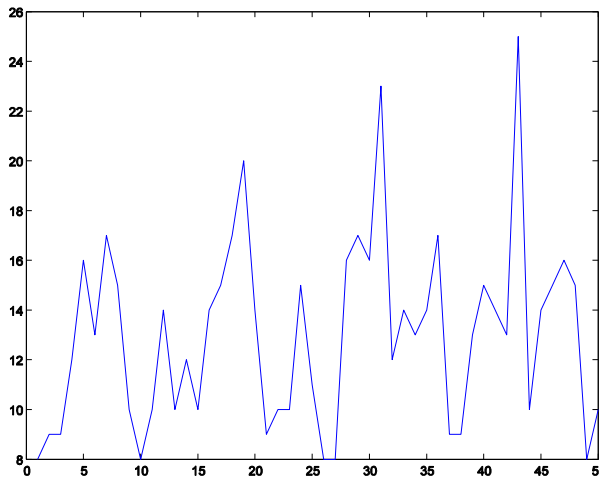


Gambar 4.1. Data MA Sintesis

Selanjutnya berdasarkan data dalam Gambar 4.1 orde q , parameter model MA, variansi σ^2 akan ditentukan atau lebih tepat akan ditaksir dengan menggunakan algoritma SA. Penaksir orde, parameter model MA dan variansi σ^2 yang dihasilkan oleh algoritma SA adalah $\hat{q} = 3$, $\hat{\theta}_1^{(3)} = 0,5700$, $\hat{\theta}_2^{(3)} = -0,3623$, $\hat{\theta}_3^{(3)} = -0,8811$ dan $\hat{\sigma}^2 = 0,5655$.

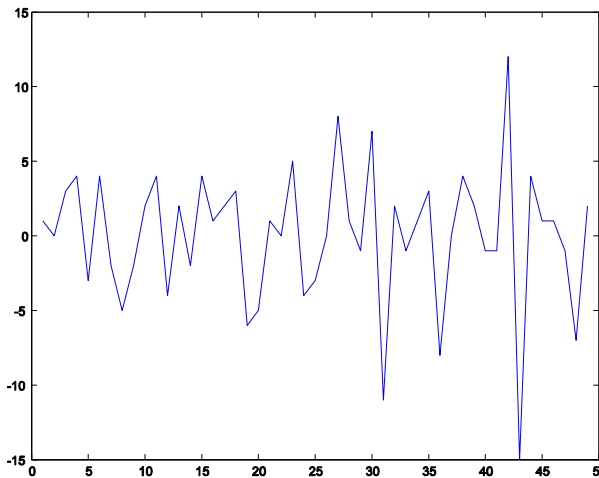
Data MA Riil

Gambar 4.2 menyajikan data penjualan suatu produk pada CV Jaya Warsa Klaten untuk 50 periode yaitu dari Januari 2002 sampai Pebruari 2006. Dari plot data dapat kita lihat bahwa bahwa data tidak stasioner. Untuk mendapatkan menstasionerkan data, dibuat data baru yang terdiri dari perbedaan data asli antara periode yang berturut-turut.



Gambar 4.2. Data Penjualan suatu Produk pada CV Jaya Warsa

Dengan melakukan pembedaan pertama terhadap data asli pada Gambar 4.2 akan menghasilkan suatu data stasioner yang plotnya ditunjukkan pada Gambar 4.3.

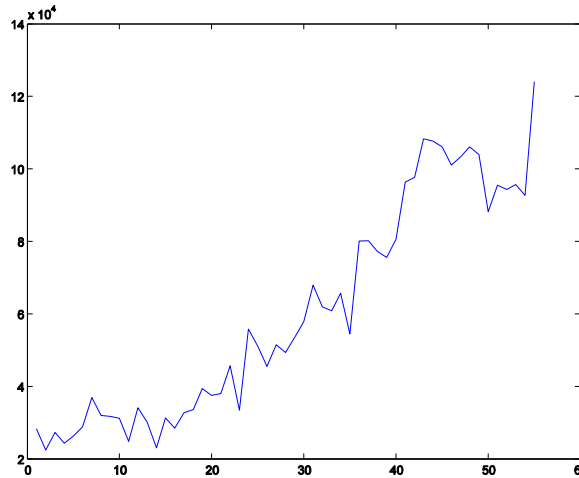


Gambar 4.3. Pembedaan Pertama Data Penjualan suatu Produk pada CV Jaya Warsa.

Seperti untuk kasus data sintesis, berdasarkan data pada Gambar 4.3 orde q , parameter model MA dan varisnsi σ^2 diestimasi dengan menggunakan algoritma SA. Hasilnya adalah $\hat{q} = 2$, $\hat{\theta}_1^{(2)} = -0,6285$, $\hat{\theta}_2^{(2)} = -0,2025$, dan $\sigma^2 = 15,4388$.

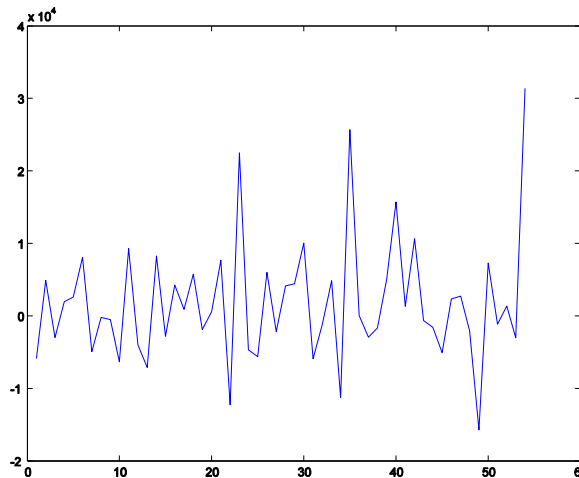
Data riil kedua disajikan pada Gambar 4.4. Data tersebut merupakan data penjualan Penjualan Jasa Penumpang Pesawat

Udara (PJP2U) dalam negeri pada PT Angakasa Pura I Bandar Udara Internasional Adisutjipto Yogyakarta untuk 55 periode yaitu Januari 2001 sampai Juli 2005. Terlihat jelas pada Gambar 4 bahwa data inipun tidak stasioner.



Gambar 4.4. Data Penjualan PJP2U dalam negeri pada PT Angakasa Pura I.

Untuk mendapatkan data yang stasioner dilakukan pembedaan pertama dan hasilnya ditunjukkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5. Pembedaan Pertama Data Penjualan PJP2U dalam Negeri pada PT Angakasa Pura I.

Berdasarkan data pada Gambar 4.5 selanjutnya orde q , parameter model MA dan variansi σ^2 ditaksir dengan menggunakan

algoritma SA. Hasilnya adalah $\hat{q} = 1$, $\hat{\theta}_1^{(1)} = -0,3301$ dan $\sigma^2 = 7,0977 \times 10^7$.

4.6 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma SA dan penerapannya pada identifikasi orde q , penaksiran vektor koefisien $\theta^{(q)}$, dan penaksiran variansi σ^2 dari model MA. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa algoritma SA dapat menaksir parameter-parameter itu dengan baik.

Sebagai implementasi algoritma SA pada dua data riil yang diambil dari CV Jaya Warsa dan PT Angkasa Pura I. Hasilnya adalah data penjualan suatu produk pada CV Jaya Warsa Klaten dapat dimodelkan dengan model IMA(2) dan data penjualan PJP2U dalam negeri pada PT Angkasa Pura I Bandar Udara Internasional Adisutjipto Yogyakarta dapat dimodelkan dengan model IMA(1). Selanjutnya model-model yang diperoleh dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penjualan pada CV Jaya Warsa dan juga jumlah penjualan PJP2U dalam negeri pada PT Angkasa Pura I Bandar Udara Internasional Adisutjipto pada periode berikutnya.

BAB 5

ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU SUBSET MOVING AVERAGE

5.1 RUMUSAN MASALAH

Misalkan $(X_t)_{t \in Z}$ adalah suatu runtun waktu berharga riil. Runtun waktu $(X_t)_{t \in Z}$ dikatakan memiliki model Subset Moving Average dengan orde q , dinotasikan sebagai SMA(p, q), jika $(X_t)_{t \in Z}$ memenuhi persamaan stokhastik berikut :

$$X_t = E_t - \sum_{j=1}^q \theta_{k_j}^{(q)} E_{t-k_j}, \dots t \in Z \quad (5.1)$$

di mana orde $q \in N^+$, vektor koefisien dan $\theta^{(q)} = (\theta_{k_1}^{(q)}, \dots, \theta_{k_q}^{(q)}) \in \mathfrak{R}^q$.

Di sini, $(E_t)_{t \in Z}$ merupakan suatu barisan peubah acak berharga riil yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ^2 ([5]). Data kurs mata uang rupiah terhadap euro, jumlah pendaftaran mobil di suatu negara, jumlah penumpang pesawat udara dan data jumlah penjualan industri merupakan beberapa contoh data riil yang dapat dimodelkan oleh model SMA.

Berdasarkan data x_t ($t = 1, 2, \dots, n$), selanjutnya kita akan berusaha untuk menaksir harga

$q, \theta^{(q)}$ dan σ^2 .

Untuk melakukan itu, kita akan menggunakan pendekatan Bayesian hierarki, yang akan diuraikan dalam bagian berikut ini.

5.2 BAYESIAN HIERARKI

Andaikan $s = (x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model SARMA(p, q). Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ diketahui, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\ell(s | q, \theta^{(q)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{(n-q)/2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n g^2(t, q, \theta^{(q)}) \quad (5.2)$$

di mana

$$g(t, p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}) = x_t - \sum_{j=1}^q \theta_{kj}^{(q)} z_{t-k_j}$$

untuk $t = q+1, q+2, \dots, n$ dengan nilai awal $\hat{e}_1 = \hat{e}_2 = \dots = \hat{e}_q = 0$.

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Orde q berdistribusikan Binomial dengan parameter μ :

$$\pi(q | \mu) = C_{Q_{\max}}^q \mu^q (1 - \mu)^{Q_{\max} - q}$$

b) Untuk orde q ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\theta^{(q)}$ berdistribusikan normal dengan mean 0 dan variansi 1.

c) Variansi σ^2 berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp - \beta/(2\sigma^2)$$

Di sini parameter μ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval $(0,1)$, nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk parameter $H_1 = (q, \theta^{(q)}, \sigma^2)$ dan $H_2 = (\mu, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned} \pi(H_1, H_2) &= \pi(H_1 | H_2) \pi(H_2) \\ &= \pi(q | \mu) \pi(\theta^{(q)} | q) \pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) \pi(\mu) \pi(\beta) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \quad (5.4)$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Fungsi kemungkinan bersifat obyektif sementara distribusi prior ini bersifat subyektif. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

5.3 METODE MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel ([9]) sedemikian hingga M_1, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida ([9]) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$
2. Simulasi distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$

Untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$ dipergunakan algoritma hibrida. Algoritma hibrida merupakan penggabungan algoritma Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJCMCMC) ([3]) dan algoritma Gibbs. Algoritma RJCMCMC dipergunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Sedangkan algoritma Gibbs dipergunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Algoritma RJCMCMC merupakan rampatan dari algoritma Metropolis-Hastings ([1], [2]).

Estimator yang dihasilkan oleh algoritma RJCMCMC dalam dua tahap. Tahap pertama algoritma RJCMCMC menghasilkan estimator untuk orde q . Tahap kedua algoritma RJCMCMC menghasilkan estimator untuk parameter model SMA dan variansi σ^2 yang bersesuaian dengan orde q yang diperoleh pada tahap pertama. Untuk mendapatkan kecepatan dan efisiensi diperlukan suatu algoritma yang dapat menentukan estimator orde q , parameter model SMA dan variansi σ^2 secara bersamaan. Untuk keperluan itu, diusulkan algoritma Simulated Annealing (SA).

5.4 ALGORITMA SA

Algoritma SA ([10]) diperoleh dengan menambahkan barisan temperatur T_1, \dots, T_m dalam metode MCMC di atas. Selanjutnya algoritma SA akan memproduksi suatu rantai Markov

$M(T_1), \dots, M(T_m)$ yang tidak lagi homogen. Dengan suatu hipotesis tertentu pada T_1, \dots, T_m ([11]) maka $M(T_m)$ akan konvergen menuju suatu nilai yang memaksimumkan distribusi posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$.

5.5 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma SA untuk pengidentifikasi orde q , penaksiran vektor koefisien $\theta^{(q)}$, dan penaksiran variansi σ^2 dari model SMA.

BAB 6

ESTIMASI MODEL RUNTUN WAKTU SUBSET AUTOREGRESIF MOVING AVERAGE

6.1 RUMUSAN MASALAH

Misalkan $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ adalah suatu runtun waktu berharga riil. Runtun waktu $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ dikatakan memiliki model Subset AutoRegresif Moving Average dengan orde p dan q , dinotasikan sebagai SARMA(p, q), jika $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ memenuhi persamaan stokhastik berikut :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_{m_i}^{(p)} X_{t-m_i} + E_t - \sum_{j=1}^q \theta_{k_j}^{(q)} E_{t-k_j}, \dots, t \in \mathbb{Z} \quad (6.1)$$

di mana orde $p, q \in \mathbb{N}^+$, vektor koefisien

$$\phi^{(p)} = (\phi_{m_1}^{(p)}, \dots, \phi_{m_p}^{(p)}) \in \mathbb{R}^p, \text{ dan } \theta^{(q)} = (\theta_{k_1}^{(q)}, \dots, \theta_{k_q}^{(q)}) \in \mathbb{R}^q.$$

Di sini, $(E_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ merupakan suatu barisan peubah acak berharga riil yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ^2 ([5]). Data kurs mata uang rupiah terhadap euro, jumlah pendaftaran mobil di suatu negara, jumlah penumpang pesawat udara dan data jumlah penjualan industri merupakan beberapa contoh data riil yang dapat dimodelkan oleh model SARMA.

Berdasarkan data x_t ($t = 1, 2, \dots, n$), selanjutnya kita akan berusaha untuk menaksir harga

$$p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)} \text{ dan } \sigma^2.$$

Untuk melakukan itu, kita akan menggunakan pendekatan Bayesian hierarki, yang akan diuraikan dalam bagian berikut ini.

6.2 BAYESIAN HIERARKI

Andaikan $s = (x_{p+q+1}, x_{p+q+2}, \dots, x_n)$ adalah suatu realisasi dari model SARMA(p,q). Jika nilai $s_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{p+q})$ diketahui, maka fungsi kemungkinan dari s dapat ditulis kurang lebih sebagai berikut :

$$\ell(s|p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(n-p)/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+q+1}^n g^2(t, p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)})\right] \tag{6.2}$$

di mana

$$g(t, p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}) = x_t + \sum_{i=1}^p \phi_{mi}^{(p)} x_{t-mi} - \sum_{j=1}^q \theta_{kj}^{(q)} z_{t-kj}$$

untuk $t = p+q+1, p+q+2, \dots, n$ dengan nilai awal $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \dots = \hat{x}_{p+q} = 0$ (Shaarawy *et al.* [16]).

Penentuan distribusi prior untuk parameter-parameter tersebut di atas adalah sebagai berikut :

a) Orde p berdistribusikan Binomial dengan parameter λ :

$$\pi(p|\lambda) = C_{p_{\max}}^p \lambda^p (1-\lambda)^{p_{\max}-p}$$

b) Orde q berdistribusikan Binomial dengan parameter μ :

$$\pi(q|\mu) = C_{q_{\max}}^q \mu^q (1-\mu)^{q_{\max}-q}$$

c) Untuk orde p ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\phi^{(p)}$ berdistribusikan normal dengan mean 0 dan variansi 1.

d) Untuk orde q ditentukan terlebih dahulu, vektor koefisien $\theta^{(q)}$ berdistribusikan normal dengan mean 0 dan variansi 1.

e) Variansi σ^2 berdistribusikan invers gamma dengan parameter $\alpha/2$ dan $\beta/2$:

$$\pi(\sigma^2|\alpha, \beta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} (\sigma^2)^{-(1+\alpha/2)} \exp\{-\beta/(2\sigma^2)\}$$

Di sini parameter λ dan μ diasumsikan berdistribusi seragam pada interval (0,1), nilai α diambil sama dengan 2 dan parameter β diasumsikan berdistribusi Jeffrey. Sehingga distribusi prior untuk parameter $H_1 = (p, q, \phi^{(p)}, \theta^{(q)}, \sigma^2)$ dan $H_2 = (\lambda, \mu, \beta)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned} \pi(H_1, H_2) \\ = \pi(H_1|H_2)\pi(H_2) \end{aligned}$$

$$= \pi(p | \lambda) \pi(q | \mu) \pi(\phi^{(p)} | p) \pi(\theta^{(q)} | q) \pi(\sigma^2 | \alpha, \beta) \pi(\lambda) \pi(\mu) \pi(\beta) \quad (6.3)$$

Menurut Teorema Bayes, maka distribusi a posteriori untuk parameter H_1 dan H_2 dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(H_1, H_2 | s) \propto \ell(s | H_1) \pi(H_1, H_2) \quad (6.4)$$

Distribusi a posteriori merupakan gabungan dari fungsi kemungkinan dan distribusi prior yang kita asumsikan sebelum sampel diambil. Fungsi kemungkinan bersifat obyektif sementara distribusi prior ini bersifat subyektif. Dalam kasus ini, distribusi a posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$ mempunyai bentuk yang sangat rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitis. Untuk mengatasi masalah tersebut, diusulkan metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

6.3 METODE MCMC

Misalkan $M = (H_1, H_2)$. Secara umum, metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen M_1, \dots, M_m yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel ([9]) sedemikian hingga M_1, \dots, M_m dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(H_1, H_2 | s)$. Dengan demikian M_1, \dots, M_m dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter M . Untuk merealisasikan itu diadopsi algoritma Gibbs Hibrida ([9]) yang terdiri dari dua tahap :

1. Simulasi distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$
2. Simulasi distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$

Untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_2 | H_1, s)$ dipergunakan algoritma hibrida. Algoritma hibrida merupakan penggabungan algoritma Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMC) ([3]) dan algoritma Gibbs. Algoritma RJMC dipergunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Sedangkan algoritma Gibbs dipergunakan untuk mensimulasikan distribusi $\pi(H_1 | H_2, s)$. Algoritma RJMC merupakan rampatan dari algoritma Metropolis-Hastings ([1], [2]).

Estimator yang dihasilkan oleh algoritma RJMC dalam dua tahap. Tahap pertama algoritma RJMC menghasilkan estimator untuk orde p dan q . Tahap kedua algoritma RJMC menghasilkan

estimator untuk parameter model SARMA dan variansi σ^2 yang bersesuaian dengan orde p dan q yang diperoleh pada tahap pertama. Untuk mendapatkan kecepatan dan efisiensi diperlukan suatu algoritma yang dapat menentukan estimator orde p dan q , parameter model SARMA dan variansi σ^2 secara bersamaan. Untuk keperluan itu, diusulkan algoritma Simulated Annealing (SA).

6.4 ALGORITMA SA

Algoritma SA ([10]) diperoleh dengan menambahkan barisan temperatur T_1, \dots, T_m dalam metode MCMC di atas. Selanjutnya algoritma SA akan memproduksi suatu rantai Markov $M(T_1), \dots, M(T_m)$ yang tidak lagi homogen. Dengan suatu hipotesis tertentu pada T_1, \dots, T_m ([11]) maka $M(T_m)$ akan konvergen menuju suatu nilai yang memaksimumkan distribusi posteriori $\pi(H_1, H_2 | s)$.

6.5 KESIMPULAN

Uraian di atas, merupakan kajian teori tentang algoritma SA untuk pengidentifikasi orde p dan q , penaksiran vektor koefisien $\phi^{(p)}$ dan $\theta^{(q)}$, dan penaksiran variansi σ^2 dari model SARMA.

BAB 7

SEGMENTASI MODEL SYNTETIC APERTURE RADAR

7.1 RUMUSAN MASALAH

Misalkan N adalah banyak piksel yang terdapat dalam suatu garis dari citra *Synthetic Aperture Radar* dan T adalah periode sampling. Persamaan garis tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ([15]) :

$$y_n = r_n z_n \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (7.1)$$

dengan y_n , r_n , dan z_n adalah masing-masing intensitas citra *Synthetic Aperture Radar* hasil pengukuran, intensitas citra *Synthetic Aperture Radar*, dan galat multiplikatif. Dalam berbagai citra *Synthetic Aperture Radar*, termasuk citra pertanian, sifat-sifat dari r_n dan z_n dapat didefinisikan sebagai berikut ([16]) :

- (a) Intensitas *Synthetic Aperture Radar* r_n merupakan fungsi tangga. Persamaannya dapat ditulis sebagai :

$$r_n = h_K \quad n \in \{n_K + 1, \dots, n_{K+1}\} \quad (7.2)$$

dengan $K = 0, 1, \dots, K_{\text{maks}}$. Di sini, n_K adalah posisi terjadinya perubahan ketinggian anak tangga ke K (dengan kesepakatan $n_0 = 1$ dan $n_{K+1} = N$) dan h_K adalah ketinggian anak tangga ke k , dan K adalah jumlah anak tangga.

- (b) Galat multiplikatif z_n dimisalkan berbentuk variabel acak yang mengikuti distribusi gamma dengan mean L dan variansi $1/L$, ditulis $z_n \sim G(L, L)$,

$$f(z_n) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} z_n^{L-1} \exp[-Lz_n] \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (7.3)$$

Besaran L menyatakan jumlah pengukuran yang dilakukan dan harga L diketahui.

Berdasarkan data y_n ($n = 1, 2, \dots, N$), selanjutnya kita akan berusaha untuk menaksir harga

$$K, n^{(K)} = (n_1, n_2, \dots, n_{K+1}) \text{ dan } h^{(K)} = (h_0, h_1, \dots, h_K).$$

Untuk melakukan itu, kita akan menggunakan pendekatan Bayesian, yang akan diuraikan dalam bagian berikut ini.

7.2 PENDEKATAN BAYESIAN

Pendekatan Bayesian merupakan suatu metode untuk menaksir harga parameter $\theta = (K, n^{(K)}, h^{(K)})$ yang dilakukan berdasarkan pada informasi yang diperoleh dari data y_n (dinyatakan dalam distribusi peluang $f(y|\theta)$) dan informasi mengenai parameter θ (dinyatakan dalam distribusi prior $\pi(\theta)$).

Oleh karena galat $z_n \sim G(L, L)$, maka distribusi peluang untuk y_n , $f(y_n|\theta)$, dapat ditulis sebagai :

$$f(y|\theta) \propto \prod_{i=0}^K h_i^{L\tau(n_i, n_{i+1})} \exp\left[-\frac{L\omega(y, n_i, n_{i+1})}{h_i}\right] \tag{7.4}$$

dengan $\tau(a,b)=b-a$, $\omega(y, a, b) = \sum_{n=a+1}^b y_n$, dan simbol “ \propto ” berarti “sebanding pada”.

Untuk keperluan penggunaan pendekatan Bayesian, kita harus menentukan distribusi prior untuk parameter θ . Distribusi prior untuk parameter θ diambil sebagai berikut. Misalkan K_{maks} adalah jumlah anak tangga maksimum, maka K diasumsikan mengikuti distribusi Binomial dengan paramter K_{maks} dan λ , ditulis sebagai $B(K_{maks}, \lambda)$.

$$\pi(K|K_{maks}, \lambda) \propto \lambda^K (1-\lambda)^{K_{maks}-K} \quad K = 0, 1, \dots, K_{maks}. \tag{7.5}$$

Untuk harga K yang diberikan, kita mengasumsikan bahwa $n^{(K)}$ mengikuti distribusi dibawah ini :

$$\pi(n^{(K)}|K) \propto \prod_{i=0}^K (n_{i+1} - n_i - 1) \tag{7.6}$$

dan $h^{(K)}$ mengikuti distribusi gamma invers dengan parameter α dan β , ditulis sebagai $IG(\alpha, \beta)$.

$$\pi(h^{(K)}|K, \alpha, \beta) \propto \prod_{i=0}^K h_i^{\alpha-1} \exp\left[-\frac{\beta}{h_i}\right] \tag{7.7}$$

Persoalan yang timbul, di antaranya munculnya hiperparameter $\phi=(\theta, \lambda, \beta)$ dalam distribusi-distribusi prior di atas. Untuk memudahkan persoalan, dalam ([19]) harga ϕ dianggap diketahui. Dalam tulisan ini, seperti yang dilakukan dalam ([15]) kita akan memandang hiperparameter ϕ sebagai suatu variabel acak

dengan distribusi tertentu, yaitu λ mengikuti distribusi seragam pada interval $(0,1)$, ditulis $U(0,1)$, dan β mengikuti distribusi Jeffrey, ditulis sebagai $J(0,\infty)$. Sedangkan harga α diambil relatif kecil seperti dalam ([17]).

Dengan menggunakan teorema Bayes, maka distribusi posterior untuk θ , ditulis dengan $\pi(\theta, \varphi | y)$, dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari distribusi peluang untuk y_i dan distribusi prior untuk (θ, λ, β) .

$$\pi(\theta, \varphi | y) \propto f(y | \theta) \times \pi(\theta | \varphi) \times \pi(\varphi) \quad (7.8)$$

Kemudian taksiran dari parameter θ akan dilakukan berdasarkan distribusi posteriorinya. Misalnya, penaksir parameter θ yang membuat nilai distribusi posterior $\pi(\theta | y)$ maksimum. Sayang sekali bahwa bentuk dari distribusi posterior $\pi(\theta | y)$ sangat kompleks, sehingga mustahil untuk menaksir harga parameter θ . Untuk mengatasinya, kita akan mengadopsi metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC), khususnya metode Reversible Jump MCMC ([3]). Lebih khusus lagi versi Simulated Annealing (SA) dari Reversible Jump MCMC.

7.3 METODE SA

Secara umum, metode MCMC merupakan suatu metode sampling, yaitu dengan cara membuat rantai Markov homogen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ yang memenuhi sifat aperiodik dan irreduktibel ([9]) sedemikian hingga $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ dapat dipertimbangkan sebagai variabel acak yang mengikuti distribusi $\pi(\theta | y)$. Dengan demikian $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ dapat digunakan sebagai sarana untuk menaksir parameter θ .

Di lain pihak dengan menambahkan barisan temperatur T_1, T_2, \dots, T_m dalam metode MCMC di atas, maka metode SA ([10]) akan memproduksi suatu rantai Markov $\theta(T_1), \theta(T_2), \dots, \theta(T_m)$ yang tidak lagi homogen. Dengan suatu hipotesis tertentu pada T_1, T_2, \dots, T_m ([11]) maka $\theta(T_m)$ akan konvergen menuju suatu nilai yang memaksimumkan distribusi posteriori $\pi(\theta | y)$.

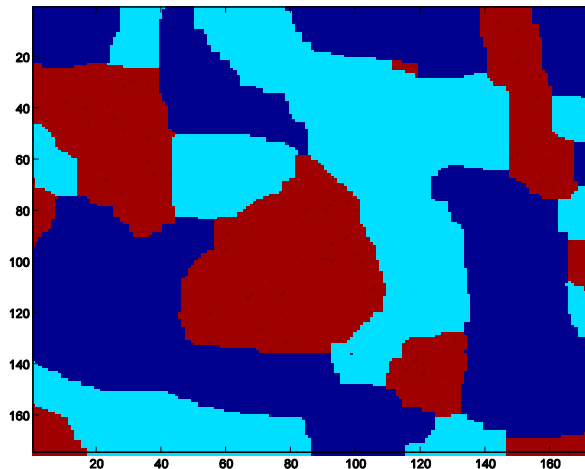
Sebagai ilustrasi, selanjutnya kita akan mengaplikasikan metode ini untuk menaksir kontur dari citra *Synthetic Aperture*

Radar buatan. Pada citra buatan ini, kita akan menggunakan metode / algoritma SA untuk menaksir harga K dan n_K pada tiap garis baik secara vertikal maupun horizontal. Misalkan jika citra tersebut berukuran $N \times N$, maka kita akan menggunakan algoritma SA sebanyak $2N$, yaitu N kali untuk garis horizontal dan ditambah N kali untuk garis vertical. Selanjutnya, penaksir untuk kontur didapatkan dengan cara menggabungkan penaksir untuk kontur yang diperoleh secara horizontal dengan penaksir yang didapatkan secara vertikal.

7.4 APLIKASI

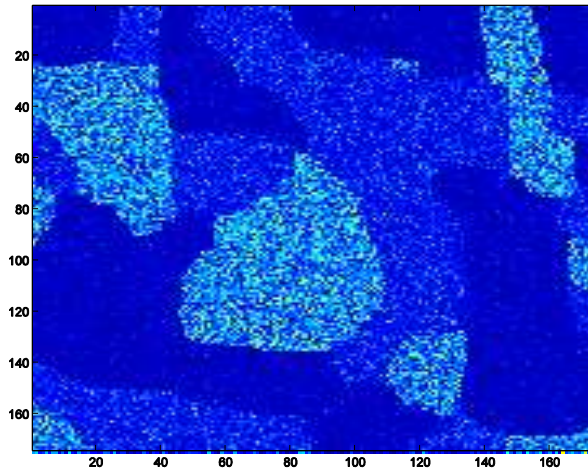
Citra Synthetic Aperture Radar Buatan

Gambar 7.1 merupakan citra *Synthetic Aperture Radar* yang dibuat menurut persamaan (7.1) di atas, dengan jumlah piksel $N = 250$ dan banyak pengukuran / pengambilan citra $L = 5$. Gambar 7.1 menyatakan citra *Synthetic Aperture Radar* yang sebenarnya



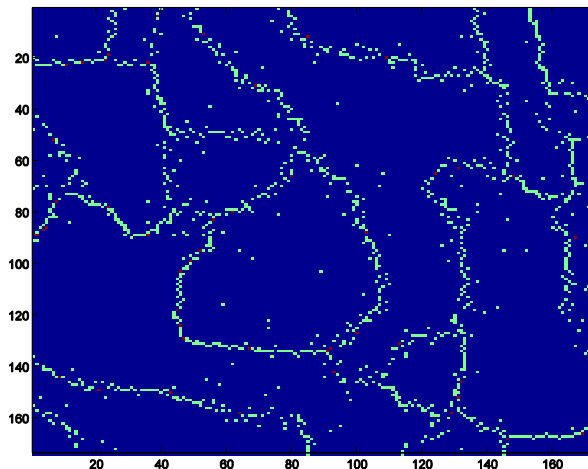
Gambar 7.1. Citra *Synthetic Aperture Radar* asli

Sedangkan citra *Synthetic Aperture Radar* beserta galatnya ditunjukkan dalam Gambar 7.2 di bawah ini. Di lapangan, Gambar 7.2 ini merupakan citra yang diperoleh dari suatu pengukuran / pengamatan.



Gambar 7.2. Citra *Synthetic Aperture Radar* hasil pengamatan

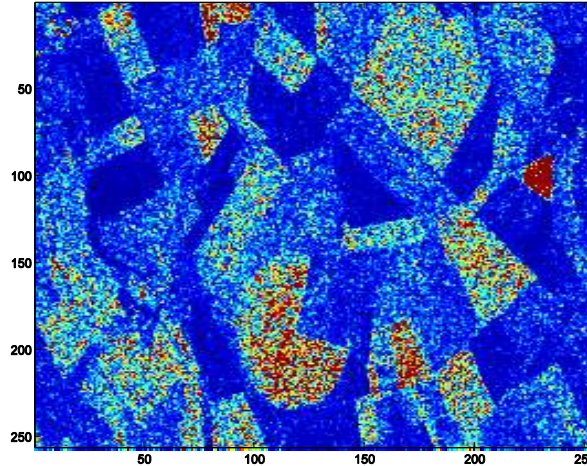
Selanjutnya, berdasarkan data dalam Gambar 7.2, kontur dari citra tersebut akan ditentukan atau lebih tepat akan ditaksir dengan menggunakan algoritma SA. Untuk keperluan itu, algoritma SA diimplementasikan pada setiap garis dari citra itu baik secara horisontal maupun vertikal. Pada setiap implementasi, sebanyak 1400 rantai markov telah dihasilkan oleh algoritma SA, dengan nilai awal temperatur $T_0 = 10$ kemudian temperature diturunkan dengan factor 0,995 hingga mencapai temperature akhir $T_{1400} = 0,01$. Penaksir kontur yang dihasilkan oleh algoritma SA disajikan dalam Gambar 7.3 berikut.



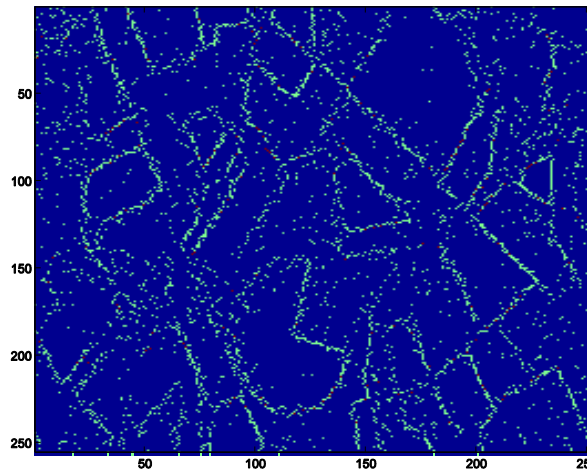
Gambar 7.3. Kontur yang dihasilkan algoritma SA
Algoritma ditulis dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB.

Citra *Synthetic Aperture Radar* Riil

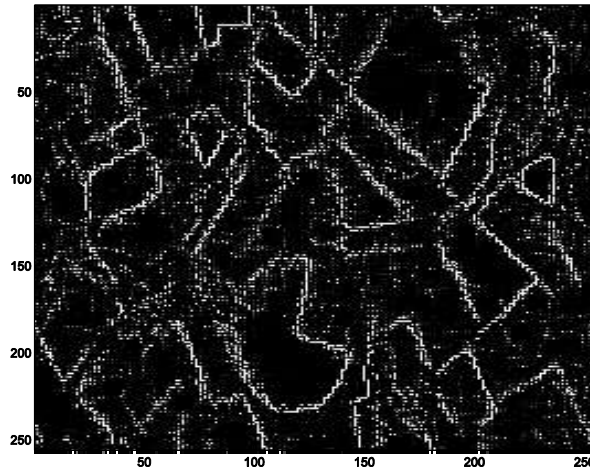
Sekarang, kita menggunakan algoritma SA untuk menaksir kontur suatu citra *Synthetic Aperture Radar* riil ([18]). Citra yang digunakan berukuran 256 x 256. Pengukuran dilakukan sebanyak 3 kali sehingga $L = 3$.



Gambar 7.4. Citra Pertanian di Bourges Perancis
Setelah algoritma SA diimplementasi pada setiap baris dan kolom citra ini, kita memperoleh taksiran konturnya. Hasilnya disajikan dalam Gambar 7.5.



Gambar 7.5. Kontur yang dihasilkan algoritma SA
Untuk mengkonfirmasi hasil yang diperoleh, kita berikan dalam Gambar 7.6 penaksir kontur yang telah dikerjakan oleh peneliti lain ([15]).



Gambar 7.6. Kontur yang dihasilkan oleh peneliti lain ([15])

7.5 KESIMPULAN

Dalam bab ini, kita telah menyajikan metode baru untuk menaksir kontur citra *Synthetic Aperture Radar* dengan menggunakan metode Bayesian. Strategi dilakukan berdasarkan pada algoritma SA. Rantai markov yang dibuat oleh algoritma SA konvergen menuju harga parameter yang memaksimumkan distribusi posteriori.

Berdasarkan hasil simulasi pada citra *Synthetic Aperture Radar* buatan dan citra *Synthetic Aperture Radar* riil, algoritma SA dapat bekerja dengan baik untuk menaksir kontur citra *Synthetic Aperture Radar*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Teller, A.H. and Teller, E. (1953) *Equations of state calculations by fast computing machines*, Journal Chemical Physics, Vol 21, 1087-1091.
- [2] Hastings, W.K. (1970) *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*, Biometrika, Vol. 57, 97-109.
- [3] Green, P.J. (1995) *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination*, Biometrika, Vol. 82, 711-732.
- [4] Geman, S. and Geman, D. (1984) Stochastic Relation, Gibbs Distribution and the Bayesian Restoration of Image, IEEE Transaction on pattern analysis and machine intelligence, 6, page 721-741.
- [5] Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C. (1994) *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Prentice Hall, New Jersey.
- [6] Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1991) *Times Series : Theory and Methods*, Springer, New York.
- [7] Shaarawy, S. and Broemeling, L. (1984) *Bayesian inferences and forecasts with moving averages processes*. Commun. Statist. – Theory Meth., 13(15), 1871-1888.
- [8] Barndorff-Nielsen, O. and Schou, G. (1973) *On the parametrization of autoregressive models by partial autocorrelation*, J. Multivar. Anal., Vol. 3, 408-419.
- [9] Robert, C.P., (1996) *Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov*, Economica

Daftar Pustaka

- [10] Kirpatrick, S. (1984) *Optimization by Simulated Annealing : Quantitative Studies* Journal of Statistical Physics, 16, 975-986.
- [11] Winkler, G. (1995) *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods : A Mathematical Introduction*, New York, Springer Verlag.
- [12] Hayati, N. (2006) Identifikasi Orde dan Estimasi Koefisien Model Runtun Waktu AR, Skripsi, FMIPA UAD, Yogyakarta
- [13] Nugrahani, T. (2006) Perkiraan Jumlah *Passenger Service Charge* Domestik Dengan Metode Peramalan Analisa Runtun Waktu Pada PT Angkasa Pura I Bandar Udara Internasional Adisutjipto Yogyakarta, Laporan Kerja Praktek, FMIPA UAD, Yogyakarta.
- [14] Bhansali, R.J., (1983) *The inverse partial correlation function of a time series and its applications*, J. Multivar. Anal., Vol. 13, 310-327.
- [15] Tourneret, J.Y., Suparman and Doisy, M. (2003) *Hierarchical Bayesian Segmentation of Signals Corrupted by Multiplicative Noise*. IEEE, Vol. VI, pp. 165-168.
- [16] Olivier, C.J. and Quegan, S. (1998) *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Artech House.
- [17] Gilks, W.R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.J. (1996) *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall.
- [18] Hervet, E., Fjortpft, R, Marthon P., and Lopes, A. (1998) Comparison of Wavelet-Based and Statistical speckle filters. Proc. European Symposium on Remote Sensing, SAR Image Analysis, Modeling, and techniques III, Vol SPIE 349, Barcelona Spain.

- [19] Suparman, Doisy, M. and Tourneret, J.Y. (2002) *Chanepoint Detection using Reversible Jump MCMC Methods*. Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Orlando Florida, 1569-1572.

BIOGRAFI SINGKAT

Dr. Suparman, M.Si., DEA dilahirkan di Bantul Daerah Istimewa Yogyakarta. Saat ini menjabat Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Teknologi Yogyakarta. Menyelesaikan studi sarjananya di Universitas Lampung. Memperoleh gelar Master of Science dari Universitas Gadjah Mada dan gelas DEA dari Universitas Toulouse 3, Perancis. Menamatkan program doktoralnya juga di Universitas Toulouse 3, Perancis. Saat ini, selain bekerja sebagai pengajar di Universitas Teknologi Yogyakarta, tercatat pula sebagai pengajar tidak tetap di Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta.

Dr. Suparman, M.Si., DEA

Buku ini disusun berdasarkan penelitian dan pengajaran yang penulis lakukan selama lima tahun. Di samping itu, penulis juga telah mengkaji berbagai literatur dan hasil penelitian. Buku ini ditulis sebagai buku referensi untuk para peneliti, para pengajar di Perguruan Tinggi dan para mahasiswa dalam memahami Metode Simulated Annealing. Dalam buku ini disertakan beberapa aplikasinya sehingga membuat buku ini cocok juga untuk para praktisi yang ingin memahami Metode Simulated Annealing dan permasalahan yang bisa diselesaikan dengan metode ini.

Dalam buku ini dibahas berbagai hal, yaitu : 1) Simulated Annealing; 2) Estimasi Model Runtun Waktu Autoregresif; 3) Estimasi Model Runtun Waktu Subset Autoregresif; 4) Estimasi Model Runtun Waktu Moving Average; 5) Estimasi Model Runtun Waktu Subset Moving Average; 6) Estimasi Model Subset Autoregresif Moving Average; dan 7) Segmentasi Model Synthetic Aperture Radar.

PENGANTAR SIMULATED ANNEALING DAN APLIKASINYA



FST UTY Press
Yogyakarta

Jl. Ringroad Utara, Jombor
Sleman

ISBN: 978-979-1334-30-3



9 789791 334303