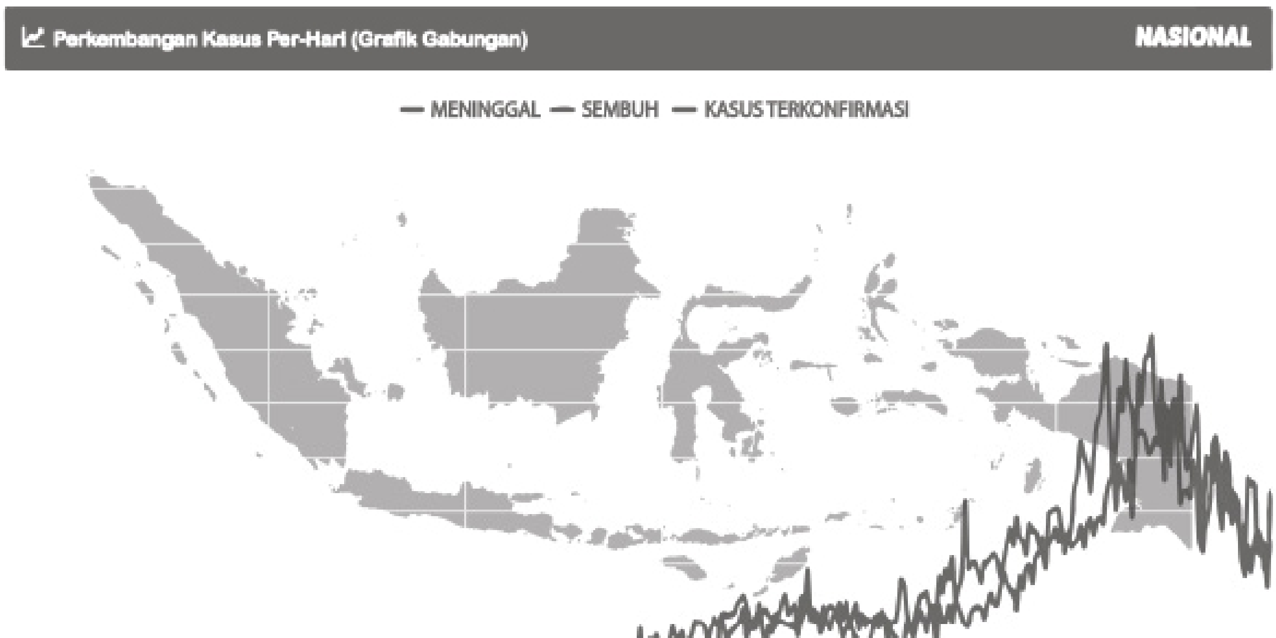
PENGANTAR STATISTIKA MATEMATIKA 1

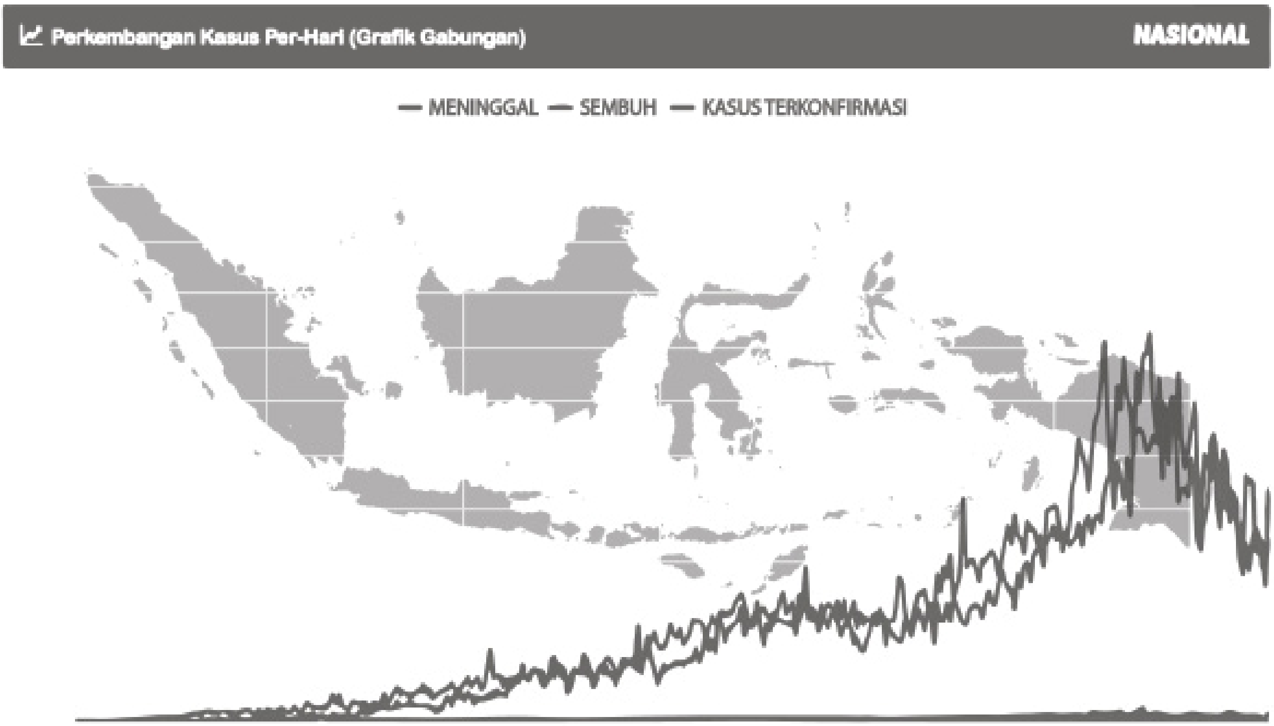


Tentang Penulis

Penulis lahir di Pati, 17 Juli 1969. Pendidikan dasarnya diselesaikan di Pati (SD,SMPN 2 PATI, SMA N 1 Pati). Gelar sarjana diperoleh dari Prodi Matematika UGM, demikian juga gelar masternya. Adapun gelar Ph.D diperoleh dari UMT (Universitas Malaysia Terengganu)

Penulis meniti karier sebagai dosen sejak tahun 2000 di Prodi Matematika UAD. Pernah menjabat Kaprodi dan Wakil Dekan, kini ia menjadi Kepala Laboratorium Matematika serta pembina kegiatan mahasiswa di Pusat Studi Data Sain.

PENGANTAR STATISTIKA MATEMATIKA 1



H. Sugiyarto, S.Si., M.Si., Ph.D.

MAGNUM
PUSTAKA UTAMA

PENGANTAR STATISTIKA MATEMATIKA 1

Penulis	: H. Sugiyarto, M.Si., Ph.D.
Layout dan Desain Cover	: Rizal Redita Putra
	Galang Surya Putra
	M. Yahya Firza Afitian
	Imas Abu Yazid

Cetakan I Juni 2021

Diterbitkan oleh:

Magnum Pustaka Utama

Jl. Parangtritis KM 4. RT 03 No. 83 D,

Salakan, Bangunharjo, Sewon, Bantul, DI Yogyakarta

Telp. 0878-3981-4456, 0821-3540-1919

Email: penerbit.magnum@gmail.com

Homepage: www.penerbitmagnum.com

ISBN: 978-623-6911-19-8

Buku ini Penulis persembahkan untuk

Almarhumah Ibunda Hj. Siti Aminah

Almarhum Ayahanda Surono

Almarhum Adinda Pramono

Almarhum Adinda Supardi Yusuf

(Al Fatehah untuk mereka Semoga Allah SWT Ampuni segala dosa dan khilaf mereka dan Allah SWT tempatkan di SurgaNYA)

Kata Pengantar

Bismillahirrahmanirrahiim

Puji syukur Alhamdulillah penyusun panjatkan kepada Allah SWT atas berkat rah-mat dan hidayah-Nya sehingga penyusun dapat menyelesaikan buku dengan judul "Pengantar Statistika Matematika 1". Buku ini digunakan sebagai salah satu pegan-gan untuk mata kuliah Statistika Matematika 1.

Buku ini terdiri dari 8 bab yaitu :

1. Probabilitas dari Kejadian
2. Probabilitas Bersyarat dan Teorema Bayes
3. Variabel Acak dan Fungsi Distribusi
4. Momen dari Variabel Acak dan Pertidaksamaan Chebychev
5. Distribusi Probabillitas Diskrit
6. Distribusi Probabilitas Kontinu
7. Dua Variabel Acak
8. Hasil Kali Momen dari Variabel Acak Bivariat

Penyusun menyadari bahwa buku ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan buku ini. Akhir kata, penyusun berharap semoga buku ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan khususnya pada bidang Matematika.

Yogyakarta, 2021

Penyusun

Daftar Isi

DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

DUA VARIABEL ACAK

HASIL KALI MOMEN VARIABEL ACAK BIVARIAT

BAB I

PROBABILITAS

1.1 Pendahuluan

Probabilitas sering disebut sebagai peluang atau kebolehjadian, yaitu kejadian yang didefinisikan sebagai kemungkinan terjadinya suatu kejadian. Konsep ini telah dirumuskan dengan lebih ketat dalam matematika, dan kemudian digunakan secara lebih luas tidak hanya dalam matematika atau statistika, tetapi juga keuangan, sains dan filsafat. Teori probabilitas adalah bidang matematika yang menangani fenomena acak secara kuantitatif

Probabilitas adalah ukuran kemungkinan suatu kejadian (event) untuk terjadi dalam suatu percobaan atau eksperimen yang dilaksanakan dalam kondisi tertentu. Setiap kemungkinan yang dihasilkan dari percobaan disebut hasil (outcome). Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut ruang sampel (sample space).

Dalam buku ini, kita akan mempelajari secara matematis satu interpretasi probabilitas. Bahkan, kita akan mempelajari teori probabilitas berdasarkan teori yang dikembangkan oleh Kolmogorov. Ada banyak aplikasi teori probabilitas. Kita mempelajari teori probabilitas karena kita ingin mempelajari statistika matematika. Statistika berkaitan dengan pengembangan metode dan aplikasi mereka untuk mengumpulkan, menganalisis, dan menginterpretasikan data kuantitatif sedemikian rupa sehingga keandalan kesimpulan berdasarkan data dapat dievaluasi secara objektif melalui pernyataan probabilitas. Teori probabilitas digunakan untuk mengevaluasi keandalan kesimpulan dan kesimpulan berdasarkan data. Dengan demikian, teori probabilitas sangat penting untuk statistik matematika.

Untuk kejadian A dari ruang sampel S, probabilitas A dihitung dengan:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

di mana $N(A)$ menunjukan jumlah elemen A dan $N(S)$ menunjukkan jumlah elemen dalam ruang sampel S. Pada bagian selanjutnya, kita mengembangkan berbagai teknik penghitungan. Cabang matematika yang berkaitan dengan berbagai teknik penghitungan.

1.2 Teknik Penghitungan

Terdapat tiga Teknik Penghitungan Dasar yaitu, Aturan Perkalian, Permutasi, dan Kombinasi

1.2.1.
Aturan Perkalian

Jika E_1 adalah percobaan dengan kemungkinan hasilnya adalah n_1 dan E_2 adalah percobaan dengan kemungkinan hasilnya adalah n_2, maka percobaan yang terdiri dari E_1 dan E_2 terdiri dari $n_1 n_2$ kemungkinan hasil

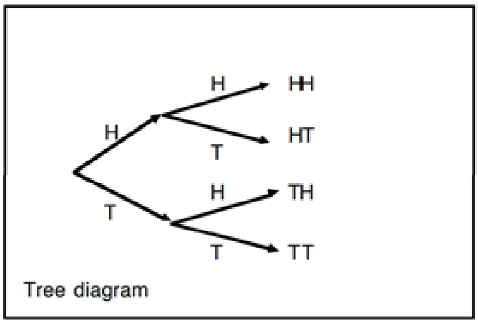
Contoh 1.1.

Temukan jumlah dari kemungkinan hasil dalam urutan dua lemparan koin adil.

Jawab :

Dengan menggunakan aturan perkalian, diperoleh $n_1 = 2$ dan $n_2 = 2$ sehingga jumlah kemungkinan hasilnya $n_1 n_2 = 2 \cdot 2 = 4$

Dengan menggunakan diagram pohon :

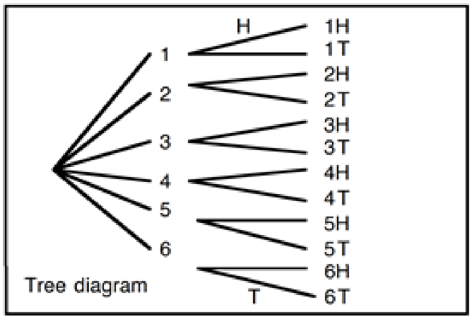


Contoh 1.2.

Temukan jumlah kemungkinan hasil dari bergulirnya dadu dan lemparan koin.

Jawab :

Di sini $n_1 = 6$ dan $n_2 = 2$. Dengan menggunakan aturan perkalian, jumlah hasil yang mungkin adalah 12



Contoh 1.3.

Berapa banyak plat nomor berbeda yang mungkin jika Kota Yogyakarta menggunakan tiga huruf diikuti oleh tiga digit angka.

Jawab:

Diketahui bahwa jumlah huruf $n_1 = n_2 = n_3 = 26\left(jumlah\,huruf\right)$ dan jumlah angka $m_1 = m_2 = m_3 = 10\left(jumlah\,angka\right)$

$$n_1 n_2 n_3 m_1 m_2 m_3 = (17576)(1000)$$

1.2.2. Permutasi

Dalam permutasi, urutan perlu diperhatikan.

Diberikan satu set 4 objek dalam hal ini adalah a, b, c, d. Misalkan kita ingin mengisi 3 posisi dengan objek yang dipilih dari 4 objek tersebut. Kemudian jumlah dari kemungkinan penyusunannya adalah 24.

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acd	bca	cba	dbc
acd	bcd	cbd	dba
adc	bda	cdb	dca
adb	bdc	cda	dcb

Jumlah kemungkinan penyusunan dapat dihitung sebagai berikut :

Karena ada 3 posisi dan 4 objek, posisi pertama dapat diisi dengan 4 cara yang berbeda. Setelah posisi pertama diisi 2 posisi sisanya dapat diisi dari 3 objek sisanya. Posisi kedua dapat diisi dengan 3 cara. Posisi ketiga dapat diisi dengan 2 cara. Kemudian jumlah total cara 3 posisi dapat diisi dari 4 objek yang diberikan oleh

$$(4)(3)(2) = 24$$

Jika posisi r akan diisi dari objek, maka jumlah total cara yang mungkin dapat diisi adalah

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= {}_nP_r$$

Dengan demikian ${}_nP_r$ mewakili jumlah cara posisi r dapat diisi dari n objek.

Definisi 1.1.

Masing-masing susunan ${}_nP_r$ disebut permutasi n objek yang diambil r pada satu waktu.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 1.4.

Berapa banyak permutasi yang ada dari ketiga huruf $a, b, dan\, c$?

Jawab :

$${}_3P_3 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{0!} = 6$$

Contoh 1.5. Temukan jumlah permutasi dari n objek yang berbeda.

Jawab :

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Contoh 1.6. Empat nama ditarik dari 24 anggota klub untuk jabatan Direktur, Wakil Direktur, Bendahara, dan Sekretaris. Berapa banyak cara yang berbeda ini dapat dilakukan?

Jawab :

$${}_{24}P_4 = \frac{24!}{20!} = (24)(23)(22)(21) = 255,024$$

1.2.3. Kombinasi

Dalam permutasi, urutan penyusunan sangat diperhatikan. Tetapi dalam banyak masalah urutan penyusunan tidak diperhatikan dan kepentingan utama hanya pada set objek r.

Misalkan C melambangkan jumlah subset (himpunan bagian) berukuran r yang bisa dipilih dari n objek yang berbeda. Objek r di setiap set dapat diurutkan dengan cara ${}_nP_r$. Dengan demikian kita dapatkan :

$${}_nP_r = c\left({}_rP_r\right)$$

Dari sini, kita mendapatkan

$$C = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Jumlah C dilambangkan dengan $\binom{n}{r}$. Dengan demikian, dapat ditulis sebagai

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Definisi 1.2. Masing-masing subset $\binom{n}{r}$ yang tidak diurutkan disebut kombinasi n objek yang diambil dari r pada satu waktu.

Contoh 1.7. Berapa banyak komite dari dua ahli kimia dan satu fisikawan yang dapat dibentuk dari 4 ahli kimia dan 3 fisikawan?

Jawab :

$$\binom{4}{2}\binom{3}{1} = 6\ .3 = 18$$

Dengan demikian 18 komite yang berbeda dapat dibentuk.

1.2.4.
Teori Binomial

Diketahui bahwa :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$
$$= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}\,y^k$$

Demikian juga

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$
$$= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^{3-k}\,y^k$$

Secara umum, menggunakan argumen induksi, kita dapat menunjukkan bahwa :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Hasil ini disebut Teorema Binomial. Koefisien $\binom{n}{k}$ disebut koefisien binomial. Bukti gabungan dari Teorema Binomial mengikuti. Jika kita menulis $(x+y)^n$ sebagai n kali produk dari faktor $(x+y)$, yaitu

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$

maka koefisien $x^{n-k}y^k$ adalah , itulah jumlah cara di mana kita dapat memilih k faktor yang diberikan y .

Catatan 1.1.

Pada 1665, Newton menemukan Deret Binomial. Seri Binomial diberikan oleh

$$(1+y)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}y + \binom{\alpha}{2}y^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}y^n + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^n$$

dimana α adalah bilangan real dan

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Ini $\binom{\alpha}{k}$ disebut koefisien binomial umum

Teorema 1.1. Misalkan $n \in N$ dan $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. Kemudian

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

.

Bukti :

Dengan verifikasi langsung, kita dapat

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \binom{n}{r}$$

Teorema ini mengatakan bahwa koefisien binomial adalah simetris

Contoh 1.8. Evaluasi $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{n}$

Jawab :

Karena kombinasi dari 3 diambil 1 pada suatu waktu adalah 3, kita dapatkan $\binom{3}{1} = 3.$ Demikian pula, $\binom{3}{0}$ adalah 1. Dengan Teorema 1,

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$$

Dimana

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{0} = 3 + 3 + 1 = 7$$

Teorema 1.2.

Untuk bilangan bulat positif n dan $r = 1, 2, 3, \ldots, n$, kita punya

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Bukti :

$$(1+y)^n = (1+y)(1+y)^{n-1}$$

$$= (1+y)^{n-1} + y(1+y)^{n-1}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} y^r = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} y^r + y \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} y^r .$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} y^r + y \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} y^{r+1}$$

Dengan menyamakan koefisien y^r dari kedua sisi persamaan di atas, kita dapatkan :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Contoh 1.9.

Evaluasi $\binom{23}{10} + \binom{23}{9} + \binom{24}{11}$

Jawab :

$$\binom{23}{10} + \binom{23}{9} + \binom{24}{11} = \binom{24}{10} + \binom{24}{11}$$

$$= \binom{25}{11}$$

$$= \frac{25!}{(14)!(11)!}$$

$$= 4,457,400$$

Contoh 1.10. Menggunakan teorema binomial

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}=0$$

Jawab :

Menggunakan teorema binomial, kita dapatkan

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

untuk semua bilangan real x dimana $x=-1$ maka kita dapatkan

$$0=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r$$

Teorema 1.3. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif. Kemudian

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}=\binom{m+n}{k}$$

Bukti :

$$(1+y)^{m+n}=(1+y)^m(1+y)^n$$

$$\sum_{r=0}^{m+n}\binom{m+n}{r}y^r=\left\{\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}y^r\right\}\left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}y^r\right\}$$

Menyamakan koefisien y^k dari kedua sisi persamaan di atas, kita dapatkan:

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{k-k}$$

Contoh 1.11. Tunjukkan bahwa

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\binom{2n}{n}$$

Jawab :

Misalkan $k=n$ dan $m=n$. Kemudian dari Teorema 3, kita dapatkan

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}=\binom{m+n}{k}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}=\binom{2n}{n}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r}=\binom{2n}{n}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\binom{2n}{n}$$

Teorema 1.4.

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan $k=1,2,3,\ldots,n$. Kemudian

$$\binom{n}{k}=\sum_{m=k-1}^{n-1}\binom{m}{k-1}$$

Bukti :

Untuk menetapkan identitas di atas, kita menggunakan Teorema Binomial bersama dengan hasil aljabar dasar berikut

$$x^n y^n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k\ y^{n-1-k}$$

$$=(x+1)^n 1^n \quad (mengunakan\, teorema\, binomial)$$

$$=(x+1-1)\sum_{m=0}^{n-1}(x+1)^m \quad (menggunakan\, identitas\, di\, atas)$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{j+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k=1}^{n-1}\binom{m}{k-1}x^k$$

dengan menyamakan koefisien x^k , diperoleh

$$\binom{m}{k}=\sum_{m=k-1}^{n-1}\binom{m}{k-1}$$

Ini melengkapi bukti teorema.

Hasil sebagai berikut :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n}\binom{n}{n_1.n_2\ldots}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$$

dikenal sebagai teorema multinomial dan menggeneralisasi teorema binomial.

Jumlahnya diambil oleh semua bilangan bulat positif $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sehingga

$$n_1 + n_2 + \cdot\cdot\cdot + n_m = n$$

dan

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$$

Koefisien ini dikenal sebagai koefisien multinomial.

1.3 Ukuran Probabilitas

Eksperimen acak adalah eksperimen yang hasilnya tidak dapat diprediksi dengan pasti. Namun, dalam banyak kasus pengumpulan setiap kemungkinan hasil dari percobaan acak dapat dicantumkan.

1.3.1. Ruang Sampel

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen disebut ruang sampel, dilambangkan oleh S. Catatan bahwa satu dan hanya satu dari hasil yang mungkin akan terjadi pada percobaan - percobaan yang diberikan. Setiap elemen ruang sampel disebut titik sampel.

Contoh 1.12. Eksperimen terdiri dari pelemparan dua koin, dan kepala yang diamati dari setiap koin. Himpunan hasil yang mungkin didapat, dinyatakan dengan ruang sampel.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

yang hanya memuat semua pasangan yang mungkin terjadi dari simbol (kepala) dan (ekor). Cara alternatif untuk mewakili ruang sampel tersebut adalah dengan membuat daftar semua pasangan urut yang mungkin terjadi dari angka 1 dan 0, $S = \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$.

Contoh 1.13. Berapa ruang sampel untuk percobaan saat kita memilih tikus secara acak dari kandang dan menentukan jenis kelaminnya?

Jawab :

Ruang sampel percobaan ini adalah

$$S = \{M, F\}$$

$$N(S) = 2$$

dimana M menunjukkan tikus jantan dan F menunjukkan tikus betina.

Contoh 1.14. Berapakah ruang sampel untuk percobaan dimana Daerah Istimewa Yogyakarta memilih bilangan bulat tiga digit secara acak untuk lotere hariannya?

Jawab :

Ruang sampel percobaan ini adalah

$$S=\{000,001,002,\ldots\ldots\ldots,998,999\}.$$

Contoh 1.15. Berapa ruang sampel untuk percobaan saat kita melempar sepasang dadu, satu merah dan satu hijau?

Jawab :

Ruang sampel untuk percobaan ini diberikan oleh

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Himpunan dapat ditulis sebagai berikut

$$S=\{(x,y)|1\le x\le 6,1\le y\le 6\}$$

di mana mewakili nomor yang digulirkan pada dadu merah dan menunjukkan nomor digulirkan dari dadu hijau.

1.3.2. Event (Kejadian)

Suatu kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel S. Jika A adalah suatu kejadian, maka A telah terjadi jika berisi hasil yang terjadi. Terlihat bahwa jika A dan B adalah kejadian di ruang sampel S, maka $A\cup B$, A^c, $A\cap B$ ketiganya merupakan anggota S.

Definisi 1.3.

Subset A dari ruang sampel S dikatakan sebagai kejadian jika termasuk dalam kumpulan F himpunan bagian dari S yang memenuhi tiga aturan berikut:

1. $S \in \mathcal{F}$;

2. jika $A \in \mathcal{F}$ maka $A^c \in \mathcal{F}$; dan

3. jika $A_j \in \mathcal{F}$ untuk $j \geq 1$, maka $\bigcup_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$.

Koleksi $\mathcal{F}$ disebut ruang kejadian atau bidang σ. Jika A adalah hasil percobaan, lalu kita katakan kejadian A telah terjadi.

Contoh 1.16. Jelaskan ruang sampel dari pengguliran dadu dan tafsirkan kejadian $\{1,2\}$.

Jawab :

Ruang sampel percobaan ini adalah

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

Kejadian $\{1,2\}$ berarti mendapatkan 1 atau 2.

Contoh 1.17. Pertama, jelaskan ruang sampel dari pelemparan sepasang dadu, kemudian jelaskan kejadian A bahwa jumlah angka yang digulirkan adalah 7.

Jawab :

Ruang sampel percobaan ini adalah

$$S=\{(x,y)|x,y=1,2,3,4,5,6\}$$

Dan

$$A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(4,3),(3,4)\}.$$

Definisi 1.4. Misalkan S menjadi ruang sampel dari percobaan acak. Sebuah ukuran probabilitas $P:F \to [0,1]$ adalah fungsi himpunan yang menentukan bilangan real untuk berbagai kejadian yang memenuhi S.

Aksioma :

$(P1)$ $P(A) \geq 0$ untuk semua kejadian $A \in \mathcal{F}$,

$(P2)$ $P(S)=1$,

$(P3)$ $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Jika $A_1, A_2, A_3, ..., A_k, \ldots$ adalah kejadian yang saling lepas dari S.

Fungsi himpunan apapun dengan tiga properti di atas adalah ukuran peluang untuk S. Untuk ruang sampel S tertentu, memungkinkan terdapat lebih dari satu ukuran peluang. Peluang suatu kejadian A adalah nilai ukuran peluang pada A, yaitu

$$Prob(A) = P(A)$$

Teorema 1.5. Jika $\varnothing$ adalah himpunan kosong (kejadian yang tidak mungkin), maka :

$$P(\varnothing) = 0$$

Bukti :

Misalkan $A_1 = S$ dan $A_i = \varnothing$ untuk $i = 2, 3, \ldots, \infty$. Kemudian

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

dimana $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$. Dengan aksioma 2 dan aksioma 3, kita dapatkan

$$\begin{aligned}
1 &= P(S) \quad (dari\ Aksioma\ 2) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \\
&= P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \\
&= P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing) \\
&= 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing)
\end{aligned}$$

Karena itu

$$\sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing) = 0$$

Karena $P(\varnothing) \geq 0$ dengan aksioma 1, kita punya

$$P(\varnothing) = 0$$

Teorema ini mengatakan bahwa peluang suatu kejadian yang tidak mungkin adalah nol. Perhatikan bahwa jika peluang suatu kejadian adalah nol, maka bukan berarti kejadian tersebut kosong (atau tidak mungkin). Ada percobaan acak dimana terdapat banyak kejadian tak terhingga, masing-masing dengan peluang 0. Demikian pula, jika adalah kejadian dengan peluang 1, maka bukan berarti adalah ruang sampel Faktanya ada percobaan acak dimana seseorang dapat menemukan banyak kejadian tak terhingga masing-masing dengan peluang 1.

1.3.3. Disjoint

Dua kejadian A dan B disebut saling lepas jika $A \cap B = \varnothing$

Teorema 1.6.

Misalkan $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ adalah kumpulan terbatas dari n kejadian sehingga $A_i \cap E_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$. Kemudian

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Bukti :

Bayangkan kumpulan $\{A'_{i=1}\}$ dari himpunan bagian dari ruang sampel S sehingga

$$A'_1 = A_1, A'_2 = A_2, \ldots, A'_n = A_n$$

Dan

$$A'_{n+1} = A_{n+2} = A'_n = A_{n+3} = \ldots = \varnothing$$

Karenanya

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A'_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A'_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A'_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\varnothing)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Ketika $n = 2$, teorema di atas menghasilkan $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ di mana A_1 dan A_2 adalah kejadian saling lepas). Dalam teorema berikut, kita memberikan metode untuk menghitung peluang kejadian A dengan mengetahui peluang kejadian elementer ruang sampel S.

Definisi 1.5.

Suatu kejadian disebut kejadian elementer jika mengandung tepat satu hasil percobaan.

Teorema 1.7.

Jika A adalah kejadian ruang sampel diskrit S, maka peluang A sama dengan jumlah peluang kejadian elementernya.

Bukti :

Setiap himpunan A di S dapat ditulis sebagai gabungan dari himpunan singletonnya. Misalkan $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah kumpulan dari semua himpunan tunggal (atau kejadian dasar) dari A. Kemudian

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$$

Dengan aksioma (P3), kita dapatkan

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(O_i)$$

Contoh 1.18.

Jika koin dilemparkan dua kali, berapa peluang untuk mendapatkan setidaknya satu Gambar?

Jawab :

Ruang sampel percobaan ini adalah

$$S = \{GG, GA, AG, AA\}.$$

Kejadian A diberikan oleh

$$A = \{setidaknya\ satu\ gambar\}$$

$$= \{GG, GA, AG\}.$$

Menurut Teorema 1.7, peluang A adalah jumlah peluang kejadian-kejadian elementernya. Jadi, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} P(A) &= P(HH) + P(HT) + P(TH) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Catatan 1.2. Perhatikan bahwa di sini kita tidak menghitung peluang kejadian dasar dengan mengambil jumlah titik dalam kejadian dasar dan membaginya dengan jumlah total titik dalam ruang sampel. Kita menggunakan keacakan untuk mendapatkan peluang kejadian dasar. Artinya, kita mengasumsikan bahwa setiap hasil memiliki kemungkinan yang sama. Inilah sebabnya mengapa keacakan merupakan bagian integral dari teori peluang.

Corollary 1.1. Jika S adalah ruang sampel berhingga dengan n elemen sampel dan A adalah kejadian di S dengan m elemen, maka peluang A diperoleh dari

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Bukti :

Dengan teorema sebelumnya, kita dapatkan

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{m} O_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} P(O_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} \\ &= \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Contoh 1.19. Sebuah dadu dilempar sedemikian rupa sehingga peluang yang tampak dengan titik-titik j muncul sebanding dengan j dimana $j = 1,2,\ldots,6$. Berapa peluang, dalam satu lemparan dadu, bahwa jumlah titik ganjil akan muncul?

Jawab :

$$\begin{aligned} P(\{j\}) &= j \\ &= kj \end{aligned}$$

Dimana k adalah konstanta proporsionalitas. Selanjutnya, kita tentukan konstanta ini dengan menggunakan aksioma (P2). Menggunakan Teorema 1.5, kita dapatkan

$$\begin{aligned} P(S) &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\ &= k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k \\ &= (1+2+3+4+5+6)k \\ &= \frac{(6)(6+1)}{2}k \\ &= 21k \end{aligned}$$

Menggunakan (P2), kita mendapat

$$21k = 1$$

Jadi $k = \frac{1}{21}$, oleh karena itu kita punya

$$P(\{j\}) = \frac{j}{21}$$

Sekarang, kita ingin menemukan kemungkinan dari titik angka ganjil yang muncul

$$\begin{aligned} P(\textit{titik angka ganjil yang muncul}) &= P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) \\ &= \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} \end{aligned}$$

Catatan 1.3. Ingat bahwa jumlah bilangan bulat n pertama sama dengan $\frac{n}{2}(n+1)$. Yaitu,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Formula ini pertama kali dibuktikan oleh Gauss (1777-1855) ketika ia masih kecil.

Catatan 1.4. Gauss membuktikan bahwa jumlah bilangan bulat positif n pertama adalah $n\frac{(n+1)}{2}$ ketika ia masih sekolah. Kolmogorov, bapak teori probabilitas modern, membuktikan bahwa jumlah bilangan bulat positif n ganjil pertama adalah n^2, ketika ia berusia lima tahun.

1.4 Beberapa Sifat Ukuran Peluang

Teorema 1.8.

Jika A menjadi kejadian di ruang sampel S, maka

$$P\left(A^c\right)=1-P\left(A\right)$$

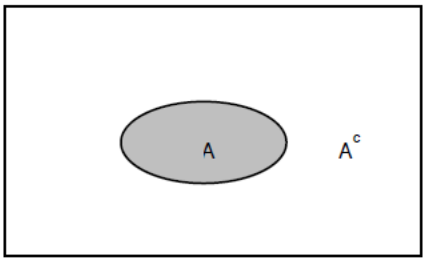
dimana A^c menunjukkan komplemen A sehubungan dengan S.

Bukti :

Misal A adalah subset S. Kemudian $S = A \cup A^c$. A dan A^c saling lepas. Dengan demikian, menggunakan (P3), kita mendapatkan

$$1 = P\left(S\right) = P\left(A \cup A^c\right)$$

$$= P\left(A\right) + P(A^c)$$



Karenanya, kita dapatkan

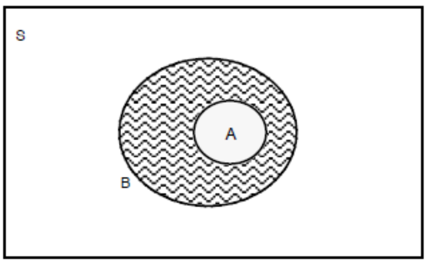
$$P\left(A^c\right)=1-P\left(A\right)$$

Ini melengkapi buktinya.

Teorema 1.9.

Jika $A \subseteq B \subseteq S$, kemudian

$$P\left(A\right) \le P\left(B\right)$$



Bukti :

Perhatikan bahwa $B = A \cup \left(B \setminus A\right)$ dimana $B \setminus A$ menunjukkan semua elemen x yang berada pada B tetapi tidak berada pada A. Selanjutnya, diperoleh $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Oleh karena itu dengan (P3), kita dapatkan

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A))$$
$$= P(A) + P(B \setminus A).$$

Dengan aksioma (P1), kita tahu bahwa $P(B \setminus A) \geq 0$. Jadi, dari penjelasan di atas, kita dapatkan

$$P(B) \geq P(A)$$

dan buktinya lengkap.

Teorema 1.10.

Jika A adalah kejadian apapun di S, maka

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Bukti :

Mengikuti dari aksioma $(P1)$ dan $(P2)$ dan Teorema 1.8.

Teorema 1.11.

Jika A dan B adalah dua kejadian, kemudian

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

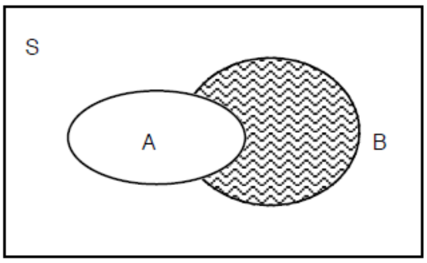
Bukti :

Mudah untuk membuktikan

$$A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$$

Dan

$$A \cap (A^C \cap B) = \varnothing.$$

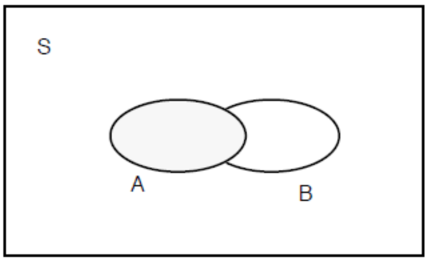


Oleh karena itu dengan $(P3)$, kita dapatkan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) \qquad (1.1)$$

Tetapi himpunan B juga dapat ditulis

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$



Oleh karena itu, dengan $(P3)$, kita dapatkan

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \qquad (1.2)$$

Eliminasi $P(A^C \cap B)$ dari (1.1) dan (1.2), kita mendapatkan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dan bukti teorema sekarang sudah lengkap.

Teorema di atas memberi tahu kita bagaimana cara menghitung probabilitas bahwa setidaknya satu dari A dan A terjadi.

Contoh 1.20. Jika $P(A) = 0.25$ dan $P(B) = 0.8,$ lalu tunjukkan bahwa

$$0.05 \le P(A \cap B) \le 0.25.$$

Jawab :

Saat $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B,$ dengan Teorema 1.8, kita dapatkan $P(A \cap B) \le P(A)$ dan $P(A \cap B) \le P(B).$

Karenanya

$$P(A \cap B) \le \min\{P(A), P(B)\}.$$

Ini menunjukkan bahwa

$$P(A \cap B) \le 0.25 \qquad (1.3)$$

Saat $A \cup B \subseteq S,$ dengan Teorema 1.8, kita dapatkan

$$P(A \cup B) \leq P(S)$$

Artinya, dengan teorema 1.10

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(S)$$

Oleh karena itu, kita memperoleh

$$0.8 + 0.25 - P(A \cap B) \leq 1$$

Dan ini mendapatkan

$$0.8 + 0.25 - 1 \leq P(A \cap B).$$

Dari ini, kita dapatkan

$$0.05 \leq P(A \cap B) \qquad (1.4)$$

Dari (1.3) dan (1.4), kita dapatkan

$$0,05 \leq P(A \cap B) \leq 0.25.$$

Contoh 1.21. Misal A dan B merupakan kejadian di ruang sampel S, seperti

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) \text{ dan } P(A^C \cap B^C) = \frac{1}{3}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$A \cup B^C = A \cup (A^C \cap B^C)$$

Karenanya,

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(A^c \cap B^c)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{6}$$

Teorema 1.12. Jika A_1 dan A_2 adalah dua kejadian $A_1 \subseteq A_2$, kemudian

$$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

Bukti :

Kejadian A_2 bisa ditulis sebagai berikut

$$A_2 = A_1 \cup \left(A_2 \mid A_1\right)$$

dimana himpunan A_1 dan $A_2 \mid A_1$ merupakan disjoint. Karenanya

$$P\left(A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2 \mid A_1\right)$$

yang mana

$$P\left(A_2 \mid A_1\right) = P\left(A_2\right) - P\left(A_1\right)$$

Dari kalkulus kita tahu bahwa fungsi yang sebenarnya $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ (himpunan bilangan real) kontinu di R jika dan hanya jika, untuk setiap urutan konvergen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $in\mathsf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) - f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Teorema 1.13. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ adalah urutan kejadian di ruang sampel S, seperti

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots,$ maka

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$$

Begitu pula, jika $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ adalah urutan kejadian di ruang sampel S, seperti

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_n \ldots$ kemudian

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right)$$

Bukti :

Diberikan urutan kejadian yang meningkat

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$$

Kita definisikan kumpulan kejadian yang disjoint adalah sebagai berikut :

$$E_1 = A_1$$

$$E_n = A_n \setminus A_{n-1} \qquad \forall \geq 2.$$

Kemudian $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah sebuah kumpulan kejadian disjoint adalah seperti berikut:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Selanjutnya

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[P(A_1) + \sum_{n=2}^{m} \left[P(A_n) - P(A_{n-1}) \right] \right]$$

$$= \lim_{m\to\infty} P(A_m)$$

$$= \lim_{m\to\infty} P(A_n)$$

Bagian kedua dari teorema dapat dibuktikan serupa.

Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Dan

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

Oleh karena itu, hasil teorema di atas dapat ditulis sebagai

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dan

$$P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

dan Teorema 1.12 disebut teorema kontinuitas untuk ukuran probabilitas.

Latihan Soal

1. Jika Anggiboy secara acak memilih dua televisi secara berurutan dari pengiriman 240 televisi, 15 di antaranya rusak, berapa probabilitas Anggiboy memilih keduanya rusak?
   Jawab :

$$N(A) = \text{Memilih 2 televisi dari 15 televisi rusak} = \binom{15}{2}$$

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)!2!} = \frac{15\times14\times13!}{13!\ \ 2!} = \frac{210}{2} = 105$$

$$N(S) = \text{Memilih 2 televisi dari 240 televisi} = \binom{240}{2}$$

$$\binom{240}{2} = \frac{240!}{(240-2)!2!} = \frac{240\times239\times238!}{238!2!} = \frac{57360}{2} = 28680$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{240}{2}} = \frac{105}{28680} = \frac{7}{1912}$$

2. Jajak pendapat dari 500 orang menentukan bahwa 382 menyukai es krim dan 362 menyukai kue. Berapa banyak yang menyukai keduanya jika masing-masing menyukai setidaknya salah satu dari keduanya?

   Petunjuk : gunakan $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
   Jawab :

   Suka es krim $= N(A) = 382$

   Suka kue $= N(B) = 362$

   $P(A\cup B) = 500$

   Sehingga :

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$500 = 382+362-P(A\cap B)$$

$$P(A \cap B) = 744 - 500$$
$$= 244$$

Jadi banyak orang yang menyukai keduanya 244 orang.

3. Dosen Departemen Matematika Universitas Ahmad Dahlan terdiri dari 8 profesor, 6 profesor asosiasi, 13 asisten profesor. Berapa banyak semua kemungkinan sampel ukuran 4, dipilih tanpa penggantian, akankah setiap jenis profesor terwakili?
Jawab :

Kemungkinan I memilih 2 profesor, 1 profesor asosiasi, 1 asisten = $\binom{8}{2}\binom{6}{1}\binom{13}{1} = 2184$

Kemungkinan II memilih 1 profesor, 2 profesor asosiasi, 1 asisten = $\binom{8}{1}\binom{6}{2}\binom{13}{1} = 1560$

Kemungkinan III memilih 1 profesor, 1 profesor asosiasi, 2 asisten = $\binom{8}{1}\binom{6}{1}\binom{13}{2} = 3744$

Jadi kemungkinan sampel ukuran 4 tanpa penggantian, setiap jenis professor diwakili adalah : $2184 + 1560 + 3744 = 7488$

4. Sepasang dadu yang terdiri dari dadu enam sisi dan dadu empat sisi dilemparkan dan jumlahnya ditentukan. Misalkan A adalah kejadian dimana muncul mata dadu berjumlah 5 dan B adalah kejadian bahwa jumlah 5 atau jumlah 9 dilempar.
Tentukan :

a. $P(A)$
b. $P(B)$
c. $P(A \cap B)$

Jawab :

Dadu $1 = N(S_1) = \{1,2,3,4,5,6\} = 6$

Dadu $2 = N(S_1) = \{1,2,3,4\} = 4$

$N(S) = 6 \times 4 = 24$

$N(A) =$ muncul dadu berjumlah $5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = 4$

$N(B)=$ muncul dadu jumlah 5 atau $9=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,4),(6,3)\}=6$

$N(A\cap B)\ =\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}=4$

sehungga :

a. $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(S)}=\dfrac{4}{24}$

b. $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(S)}=\dfrac{6}{24}$

c. $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(S)}=\dfrac{4}{24}$

5. Dekan Fakultas Sains akan menemui dua mahasiswa di Kampus 4, salah satunya mahasiswa datang dengan Sepeda Motor dari Kampus 1 dan yang lainnya tiba dari Kampus 2 kira-kira pada waktu yang sama. Misalkan A dan B adalah kejadian dimana masing-masing Sepeda Motor datang tepat waktu. Jika $P(A)=0,93, P(B)=0,89$ dan $P(A\cap B)=0,87$, kemudian temukan probabilitas bahwa setidaknya satu sepeda motor tepat waktu.

   Jawab :

   $P(A)=0,93$

   $P(B)=0,89$

   $P(A\cap B)=0,87$

   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

   $=0,93+0,89-0,87$

   $=0,95$

   Jadi probabilitas setidaknya satu kereta api tepat waktu adalah 0,95.

6. Anggiboy, Galang, dan Rizal, secara berurutan melempar dadu. Yang pertama kali melempar angka genap menang dan permainan berakhir. Berapa probabilitas Anggiboy akan memenangkan permainan?

   Jawab :

   Asumsikan bahwa kemungkinan Anggiboy menang adalah p

   Jika Anggiboy tidak menjadi pemenang dalam lemparan pertama, kemudian Galang mendapat

kemungkinan p untuk menang.
Jika Anggiboy dan Galang gagal, maka kemungkinan Rizal menang lagi-lagi adalah p.

Jadi Anggiboy mendapat kemungkinan p, Galang mendapat kemungkinan $\frac{p}{2}$ dan kemungkinan Galang adalah $\frac{p}{4}$ untuk menang.

$$p+\frac{p}{2}+\frac{p}{4}=\frac{4p}{4}+\frac{2p}{4}+\frac{p}{4}=\frac{7p}{4}$$

$$\frac{7p}{4}=1$$

$$7p=4$$

$$p=\frac{4}{7}$$

7. Misalkan A dan B adalah kejadian sedemikian rupa $P(A)=\frac{1}{2}=P(B)$ dan $P\left(A^c\cap B^c\right)=\frac{1}{3}$. Temukan probabilitas dari kejadian $A^c\cup B^c$
Jawab :

$$P(A)=\frac{1}{2}\,maka\,P\left(A^c\right)=1-P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}\,maka\,P\left(B^c\right)=1-P(B)=\frac{1}{2}$$

$$P\left(A^c\cap B^c\right)=\frac{1}{3}$$

Dengan menggunakan formula $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

maka $P\left(A^c\cup B^c\right)=P\left(A^c\right)+P\left(B^c\right)-P\left(A^c\cap B^c\right)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$=1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}$$

8. Misalkan sebuah kotak berisi 4 bola biru, 5 bola putih, 6 bola merah dan 7 bola hijau. Berapa banyak kemungkin dari sampel ukuran 5, dipilih tanpa penggantian, akankah setiap warna

terwakili?

Jawab :

Kemungkinan

I. 2 bola biru, 1 bola putih, 1 bola merah, 1 bola hijau $=\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{1}=1260$

II. 1 bola biru, 2 bola putih, 1 bola merah, 1 bola hijau $=\binom{4}{1}\binom{5}{2}\binom{6}{1}\binom{7}{1}=1680$

III. 1 bola biru, 1 bola putih, 2 bola merah, 1 bola hijau $=\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{2}\binom{7}{1}=2100$

IV. 1 bola biru, 1 bola putih, 1 bola merah, 2 bola hijau $=\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{2}=2520$

Jadi kemungkinan sampel ukuran 5, dipilih tanpa penggantian, setiap warna diwakili

$=1260+1680+2100+2520=7560$

9. Tunjukkan dengan teorema Binomial bahwa :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n.2^{n-1}$$

Jawab :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

$$n.(x+1)^{n-1} = \frac{d}{dx}(x+1)^{n}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} x^{k}\binom{n}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}\binom{n}{k}$$

Untuk $x=1$ maka :

$$n.(x+1)^{n-1} = n(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.n$$

10. Fungsi terdiri dari domain A, kodomain bersama B, dan aturan f. Aturan f diberikan ke setiap nomor di domain A satu dan hanya satu huruf di kodomain B. Jika $A=\{1,2,3\}$ dan $B=\{x,y,z,w\}$, kemudian temukan semua perbedaan fungsi yang dapat dibentuk dari himpunan A kedalam himpunan B.
    Jawab :

    $$N(B)^{N(A)} = 4^3 = 64$$

    Jadi, ada 64 fungsi berbeda yang dapat dibentuk dari himpunan A menjadi himpunan B.

11. Misalkan S menjadi ruang sampel yang dapat dihitung. Misalkan $(O_i)_{i=1}^{\infty}$ menjadi kumpulan semua kejadian elementer di S. Berapakah nilai konstanta c tersebut bahwa $P(O_i)=c\frac{1}{3}$ akan menjadi ukuran probabilitas di S?
    Jawab :

    $$\sum_{i=1}^{\infty} P(O_i)=1$$

    $$\sum_{i=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{3}\right)^i=1$$

    $$c\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i=1$$

    $$c\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

    $$\frac{c}{2}=1$$

    $$c=2$$

    Jadi, $P(O_i)$ menjadi ukuran probabilitas di S dan $(O_i)_{i=1}^{\infty}$ adalah semua elemen di S

12. Sebuah kotak berisi 5 bola hijau, 3 bola hitam, dan 7 bola merah. 2 bola dipilih secara acak tanpa pengembalian dari kotak. Berapa kemungkinan kedua bola memiliki warna yang sama?

    Jawab :

    Kemungkinan :

    I. 2 bola hijau, 0 bola hitam, 0 bola merah = $\binom{5}{2}.1.1$ = 10

II. 0 bola hijau, 2 bola hitam, 0 bola merah = $1.\binom{3}{2}.1 = 3$

III. 0 bola hijau, 0 bola hitam, 2 bola merah = $1.1.\binom{7}{2} = 21$

$$N(A) = 10 + 3 + 21 = 34$$

$$N(S) = \binom{15}{2} = 105$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{34}{105} = 0,3238$$

13. Temukan ruang sampel percobaan acak yang terdiri dari pelemparan koin hingga gambar pertama diperoleh. Apakah ruang sampel ini diskrit?

Jawab :

$N(S) = \{G, A\}$ sebanyak pelemparan koin = $2n\{n \in R\}$

S memiliki jumlah elemen yang dapat dihitung.

14. Temukan ruang sampel percobaan acak yang terdiri dari pelemparan koin berkali-kali tak terhingga. Apakah ruang sampel ini diskrit?

Jawab :

$N(S) = \{1,2,3,4,5,6\}$ karena dilempar berulang kali maka sebanyak $6n\{n \in R\}$

karena sebanyak tak hingga, dan tak hingga bukan anggota himpunan bilangan real, maka : S memiliki jumlah elemen yang dapat tidak dapat dihitung.

15. Lima dadu yang adil dilemparkan. Berapa probabilitas bahwa "full house" dilempar (yaitu, dimana dua dadu menunjukkan satu angka dan tiga dadu lainnya menunjukkan angka kedua).

Jawab :

Diketahui :

$n_s = 5$ dadu

$A_1 = 2$ dadu muncul mata dadu yang sama

$A_2 = 3$ dadu muncul mata dadu yang sama

Ditanyakan : P ?

$$P(A_1)=\frac{d_1}{n_1}\ .\ \frac{d_2}{n_2}=\frac{1}{6}\ .\ \frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$P(A_2)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

$$P=P(A_1)\ .P(A_2)$$

$$P=\frac{1}{36}\ .\frac{1}{125}=\frac{1}{4500}$$

16. Jika sepasang koin yang adil dilemparkan berulang kali, berapa probabilitas bahwa gambar ketiga terjadi pada lemparan ke-n?

Jawab :

$$P(G)=P(A)=\frac{1}{2}$$

Jika koin dilempar 1 kali maka kemungkinan muncul :

$$3G=P(3G)=0$$

Jika koin dilempar 2 kali maka kemungkinan muncul :

$$3G=P(3G)=0$$

Jika koin dilempar 3 kali maka kemungkinan muncul :

$$3G=P(3G)=\ \frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

Jika koin dilempar 4 kali maka kemungkinan muncul :

$$3G=P(3G)=\ (n-1)\ \square\ \frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}\ =(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^3=(n-1)\frac{1}{8}$$

Jika koin dilempar 5 kali maka kemungkinan muncul :

$$3G=P(3G)=(n-2)\ \square\ \frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}=(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^3=(n-2)\frac{1}{8}$$

Jika koin dilempar 6 kali maka kemungkinan muncul :

$$3G=P(3G)=\left(\frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}\ \square\ \frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2.3}=\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

Dan seterusnya …

Sehingga pada pelemparan ke n kemungkinan muncul :

$$3G = P(3G) = (n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

17. Dalam liga softball setiap tim terdiri dari 5 wanita dan 5 pria. Dalam menentukan urutan pemukul untuk 10 pemain, seorang wanita harus memukul terlebih dahulu, dan pemukul berturut-turut harus dari lawan jenis. Berapa banyak urutan pemukul yang mungkin untuk sebuah tim?

    Jawab :

    Tim terdiri dari 5 pria (P) dan 5 wanita (W)
    Seorang wanita memukul terlebuh dahulu $= WPWPWPWPWP$
    Wanita = 5! cara
    Pria = 5! Cara
    Maka urutan banting yang mungkin = 5! . 5! = $(5!)^2$ = 14.400 banyak urutan.

18. Sebuah guci berisi 3 bola merah, 2 bola hijau dan 1 bola kuning. Tiga bola dipilih secara acak dan tanpa pengembalian dari guci. Berapa probabilitas bahwa setidaknya 1 warna tidak diambil?

    Jawab :

    Kemungkinan :

    a. Terdapat 2 bola merah, 1 bola hijau, dan 0 bola kuning
    b. Terdapat 1 bola merah, 2 bola hijau, dan 0 bola kuning
    c. Terdapat 2 bola merah, 0 bola hijau, dan 1 bola kuning
    d. Terdapat 0 bola merah, 2 bola hijau, dan 1 bola kuning

    Penyelesaian :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

$$N(S) = \binom{6}{3}$$

$$= 20$$

a. 2 merah, 1 hijau, 0 kuning = $\binom{3}{2} . \binom{2}{1} . \binom{1}{0} = 6$ maka $P(A) = \frac{6}{20}$

b. 1 merah, 2 hijau, 0 kuning = $\binom{3}{1}.\binom{2}{2}.\binom{1}{0} = 3$ maka $P(A) = \frac{3}{20}$

c. 2 merah, 0 hijau, 1 kuning = $\binom{3}{2}.\binom{2}{0}.\binom{1}{1} = 3$ maka $P(A) = \frac{3}{20}$

d. 0 merah, 2 hijau, 1 kuning = $\binom{3}{0}.\binom{2}{2}.\binom{1}{1} = 1$ maka $P(A) = \frac{1}{20}$

Jadi probabilitas bahwa setidaknya 1 warna tidak diambil adalah :

$$P(A) = \frac{6}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{13}{20}$$

19. Sebuah kotak berisi 4 lembar uang $\$10$, 6 lembar uang $\$5$ dan 2 lembar uang $\$1$. 2 lembar uang diambil secara acak dari kotak tanpa pengembalian. Berapa probabilitas bahwa kedua uang kertas yang terambil memiliki denominasi yang sama?

Jawab :

Kemungkinan :

a. 2 lembar $\$10 = \binom{4}{2} = 6$

b. 2 lembar $\$5 = \binom{6}{2} = 15$

c. 2 lembar $\$1 = \binom{2}{2} = 1$

Jadi

$$N(A) = 6 + 15 + 1 = 22$$

$$N(S) = \binom{12}{2} = 66$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$$

20. Dua orang bergiliran melakukan pelemparan dadu yang adil. Orang X melempar pertama, lalu orang Y, lalu X, dan seterusnya. Pemenangnya adalah yang pertama mendapatkan angka 6. Berapa probabilitas orang X menang?

Jawab :

Probabilitas X menang $=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2.\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4.\frac{1}{6}+\ldots$

Maka terbentuk deret geometri

$$\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2.\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4.\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^0+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{6}.\frac{1}{1-\frac{25}{36}}$$

$$=\frac{1}{6}.\frac{36}{11}$$

$$=\frac{6}{11}$$

21. Eva menanam 10 bunga mawar berturut-turut. Delapan dari bunga-bunga itu berwarna putih dan dua berwarna merah, dan dia menanamnya secara acak. Berapa probabilitas Eva akan secara berurutan menanam tujuh atau lebih mawar putih?

Jawab :

Jumlah kemungkinan total = $N(S)=\frac{10!}{8!2!}=45$,

Jumlah kemungkinan cara Eva akan secara berurutan menanam tujuh atau lebih semak putih maka akan terdapat kasus :

a. Tepat tujuh rumpun mawar putih secara berurutan, dan

b. Tepat delapan rumpun mawar putih secara berurutan.

Misal :

Mawar merah $=R$

Mawar putih $=W$

$$Kasus(i):\{RWWWWWWWRW\},\{WRRWWWWWWW\},\{WWWWWWWRRW\},$$

$$\{RWRWWWWWWW\},\{WRWWWWWWWR\},\{WWWWWWWRWR\}$$

$$Kasus(ii):\{RRWWWWWWWW\},\{RWWWWWWWWR\},\{WWWWWWWWRR\}$$

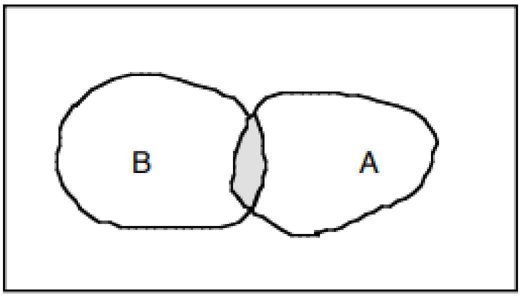
Jadi totalnya ada 9 kemungkinan. Oleh karena itu, kemungkinannya adalah = $\frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

BAB II

PROBABILITAS BERSYARAT DAN TEOREMA BAYES

2.1 Probabilitas Bersyarat

Probabilitas bersyarat adalah peluang kejadian A bila diketahui bahwa suatu kejadian B telah terjadi. Pertama, kita berikan argumen heuristik untuk definisi probabilitas bersyarat dan kemudian berdasarkan argumen heuristik, kita definisikan sebagai probabilitas bersyarat. Diberikan eksperimen acak yang ruang sampelnya S. Misalkan $B \subset S$. Dalam banyak situasi, kita hanya mementingkan hasil yang merupakan elemen B. Ini berarti bahwa kita menganggap B sebagai ruang sampel baru.



Misalkan S adalah ruang sampel berhingga yang tidak kosong dan B adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari S. Diberikan ruang sampel diskrit baru B, bagaimana kita mendefinisikan probabilitas kejadian A? Secara intuitif, kita harus mendefinisikan probabilitas A sehubungan dengan ruang sampel baru B sebagai

$$\boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{\textit{banyaknya elemen di } A \cap B}{\textit{jumlah elemen } B}}$$

Probabilitas bersyarat dari sampel A ke B dinotasikan sebagai berikut :

$$P(A \mid B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Saat $N(S) \neq 0$. Di sini $N(S)$ menunjukkan jumlah elemen di S

Jadi, jika ruang sampel terbatas maka definisi probabilitas kejadian A di atas mengingat bahwa kejadian B telah terjadi secara intuitif. Sekarang kita definisikan probabilitas bersyarat untuk setiap ruang sampel (diskrit atau kontinu) sebagai berikut.

Definisi 2.1.

Misalkan S menjadi ruang sampel yang terkait dengan eksperimen acak. Probabilitas bersyarat dari suatu kejadian A, mengingat bahwa kejadian B tersebut telah terjadi, didefinisikan oleh :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$$

Ukuran probabilitas bersyarat $P(A \mid B)$ ini memenuhi ketiga aksioma dari ukuran probabilitas. Yaitu :

(CP1) $P(A \mid B) \geq 0$ untuk semua kejadian A

(CP2) $P(B \mid B) = 1$

(CP3) Jika $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ adalah peristiwa yang saling lepas, maka :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \mid B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \mid B)$$

Jadi, ini adalah ukuran probabilitas sehubungan dengan ruang sampel baru B.

Contoh 2.1.

Laci berisi 4 kaus kaki hitam, 6 kaus kaki warna cokelat, dan 8 kaus kaki warna putih. Dua kaus kaki dipilih secara acak dari laci.

a) Berapa probabilitas bahwa kedua kaus kaki memiliki warna yang sama?

b) Berapa probabilitas kedua kaus kaki berwarna putih jika warnanya sama?

Jawab :

Diketahui :

$$S = \{(x, y) | x, y \in Hitam, Cokelat, Putih\}$$

$$N(S) = \binom{18}{2} = 153$$

a) Berapa probabilitasnya bahwa kedua kaus kaki memiliki warna yang sama?

$$N(A) = \binom{4}{2} + \binom{6}{2} + \binom{8}{2}$$

$$= 6 + 15 + 28$$

$$= 49$$

Maka, probabilitas A :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

$$= \frac{49}{153}$$

b) Berapakah probabilitas kedua kaus kaki berwarna putih jika diketahui warnanya sama?

$$N(B) = \binom{8}{2}$$

Karenanya

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)}$$

$$= \frac{\binom{8}{2}}{\binom{18}{2}}$$

$$= \frac{28}{153}$$

Perhatikan bahwa $B \subset A$, oleh karena itu :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(A)}$$

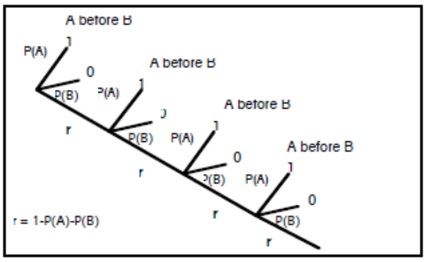
$$= \left(\frac{28}{153}\right)\left(\frac{153}{49}\right)$$

$$= \frac{28}{49}$$

$$= \frac{4}{7}$$

Misalkan A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas dalam ruang

sampel S. Kita akan mencari rumus untuk menghitung probabilitas bahwa kejadian A terjadi sebelum kejadian B dalam percobaan berurutan. Misalkan $P(A)$ dan $P(B)$ adalah probabilitas dimana A dan B terjadi. Maka probabilitas baik A atau B tidak terjadi adalah $r = 1 - P(A) - P(B)$. Mari kita tunjukkan probabilitas ini dengan r, yaitu $r = 1 - P(A) - P(B)$.
Dalam percobaan pertama, baik A terjadi, atau B terjadi, atau A maupun B tidak terjadi. Pada percobaan pertama jika A terjadi, maka probabilitas A muncul sebelum B adalah 1. Jika B muncul pada percobaan pertama, maka probabilitas A muncul sebelum B adalah 0. Jika A atau B tidak muncul dalam percobaan pertama, lihat hasil dari percobaan kedua. Pada percobaan kedua jika A terjadi, maka probabilitas A terjadi sebelum B adalah 1. Jika B terjadi pada percobaan kedua, maka probabilitas A terjadi sebelum B adalah 0. Jika A atau B tidak terjadi dalam percobaan kedua, kita melihat pada hasil percobaan ketiga, dan seterusnya. Argumen ini dapat diringkas dalam diagram berikut.



Oleh karena itu probabilitas bahwa kejadian A terjadi sebelum kejadian B diberikan oleh :

$$P(A\,sebelum\,B) = P(A) + rP(A) + r^2P(A) + \ldots + r^nP(A) + \ldots$$

$$= P(A)\left[1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots\right]$$

$$= P(A)\frac{1}{1-r}$$

$$= P(A)\frac{1}{1-\left[1-P(A)-P(B)\right]}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

Kejadian A sebelum B juga dapat diartikan sebagai kejadian bersyarat. Di interpretasi ini kejadian A sebelum B berarti terjadinya kejadian A tersebut mengingat bahwa $A \cup B$ telah terjadi. Sehingga kita dapatkan :

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

Contoh 2.2. Sepasang dadu empat sisi dilempar dan jumlahnya ditentukan. Berapa probabilitas bahwa mata dadu berjumlah 3 dilempar sebelum mata dadu berjumlah 5 dilempar dalam urutan lemparan dadu?

Jawab :

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{Bmatrix}$$

Misalkan A menunjukkan kejadian mata dadu berjumlah 3 dan B menunjukkan kejadian mata dadu berjumlah 5. Probabilitas bahwa mata dadu berjumlah 3 dilempar sebelum mata dadu berjumlah 5 dilempar dapat dianggap sebagai probabilitas bersyarat dari dadu berjumlah 3, mengingat bahwa mata dadu berjumlah 3 atau 5 telah terjadi. Artinya, $P(A|A \cup B)$. Maka :

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

$$= \frac{N(A)}{N(A) + N(B)}$$

$$= \frac{2}{2+4}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Contoh 2.3. Jika Firza mengambil dua set televisi berturut-turut secara acak dari pengiriman 240 set televisi yang 15 rusak, berapa kemungkinan bahwa Firza mengambil keduanya rusak?

Jawab :

Misalkan A menunjukkan kejadian terambilnya televisi pertama rusak dan B menunjukkan kejadian terambilnya televisi kedua rusak. Maka, $A \cap B$ akan menunjukkan kejadian terambil keduanya rusak. Maka :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$$= \left(\frac{15}{240}\right)\left(\frac{14}{239}\right)$$

$$= \frac{7}{1912}$$

Dalam **Contoh 2.3**, kita berasumsi bahwa pengambilan sampel tanpa pengembalian.

Definisi 2.2. Jika suatu objek dipilih lalu dikembalikan sebelum objek berikutnya dipilih, ini dikenal sebagai pengambilan sampel dengan pengembalian. Jika tidak, itu disebut pengambilan tanpa pengembalian.

Contoh 2.4. Sekotak sekering memuat 20 sekering, dimana 5 di antaranya rusak. Jika 3 dari sekering dipilih secara acak dan dipindahkan dari kotak secara berturut-turut tanpa pengembalian, berapa probabilitas ketiga sekering rusak?

Jawab :

Misalkan A adalah kejadian bahwa pengambilan sekering pertama rusak.

Misalkan B adalah kejadian bahwa pengambilan sekering kedua rusak.

Misalkan C adalah kejadian bahwa pengmabilan sekering ketiga rusak.

Probabilitas ketiga sekering yang dipilih rusak adalah $P(A \cap B \cap C)$. Karenanya

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

$$= \left(\frac{5}{20}\right)\left(\frac{4}{19}\right)\left(\frac{3}{18}\right)$$

$$= \frac{1}{114}$$

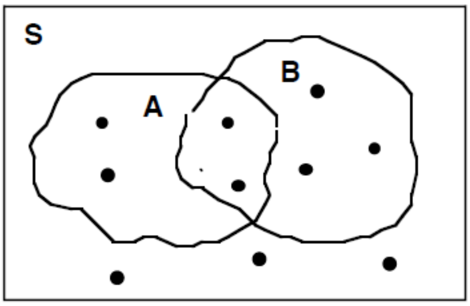
Definisi 2.3.

Dua kejadian A dan B dari ruang sampel S disebut independen jika dan hanya jika,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Contoh 2.5.

Diagram berikut menunjukkan dua kejadian A dan B di ruang sampel S. Apakah kejadian A dan B independen?



Jawab :

Ada 10 titik di S dan kejadian A berisi 4 titik. Jadi probabilitas A, adalah $P(A) = \frac{4}{10}$. Demikian pula, kejadian B berisi 5 titik. Oleh karena itu $P(B) = \frac{5}{10}$. Probabilitas bersyarat A diberikan B adalah

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{2}{5}$$

Ini menunjukkan bahwa $P(A|B) = P(A)$. Oleh karena itu A dan B independen.

Teorema 2.1.

Misalkan $A, B \subseteq S$. Jika A dan B adalah independen dan $P(A) > 0$, Maka,

$$P(A|B) = P(A) \quad dan \quad P(B|A) = P(B).$$

Bukti :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)}$$

$$= P(A)$$

Teorema 2.2. Jika A dan B adalah kejadian independen. Maka A^c dan B adalah Independen. Demikian pula A dan B^c adalah Independen.

Bukti :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$= P(A^c | B) \cdot P(B)$$

$$= [1\text{-P}(\text{A} | \text{B})] \cdot \text{P}(\text{B})$$

$$= P(B) - P(A|B) \cdot P(B)$$

$$= P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(B) \cdot [1 - P(A)]$$

$$= P(B) \cdot P(A^c)$$

Kejadian A^c dan B adalah independen. Demikian pula, itu dapat ditunjukan bahwa A dan B^c adalah independen dan itu telah terbukti.

Catatan 2.1. Konsep Independen itu fundamental. Faktanya, ini adalah konsep yang membenarkan perkembangan matematis dari probabilitas sebagai disiplin ilmu yang terpisah dari teori pengukuran. Mark Kac mengatakan, "Kejadian Independen bukanlah konsep matematika murni.". Namun, itu dapat dibuat masuk akal bahwa itu harus ditafsirkan oleh aturan perkalian probabilitas dan ini mengarah pada definisi matematika tentang Independen.

Contoh 2.6. Lemparkan sebuah koin dan kemudian lemparkan sebuah dadu secara Independen. Berapa probabilitas muncul gambar pada koin dan muncul 2 atau 3 pada dadu?

Jawab :

Misalkan A menunjukan pengamatan kejadian dari gambar pada koin dan misalkan B merupakan pengamatan kejadian 2 atau 3 pada dadu, sehingga

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

Contoh 2.7. Guci berisi 3 bola merah, 2 bola putih dan 4 bola kuning. Sebuah pengambilan sampel sebanyak 3 ditarik dari sebuah guci. Jika bola ditarik dengan pengembalian sehingga satu hasil tidak mengubah probabilitas lainnya, lalu berapa probabilitas pengambilan sampel yang mewakili bola dari setiap warna? temukan juga probabilitas pengambilan sampel yang memiliki 2 bola kuning dan 1 bola merah atau 1 bola merah dan 2 bola putih?

Jawab :

$$P(M \cap P \cap K) = \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{243}$$

Dan

$$P((K \cap K \cap M) \cup (M \cap P \cap P)) = \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{20}{243}$$

Jika bola ditarik tanpa pengembalian, maka

$$P(M \cap P \cap K) = \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{21}$$

Dan

$$(K \cap K \cap M) \cup (M \cap P \cap P) = \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{7}{84}$$

Ada kecenderungan untuk menyamakan konsep “saling eksklusif” dan “Independen”. Ini adalah kekeliruan. Dua kejadian A dan B saling eksklusif jika $A \cap B = \varnothing$ dan itu disebut mungkin jika $P(A) \neq 0 \neq P(B)$.

Teorema 2.3. Dua kemungkinan kejadian yang saling eksklusif adalah selalu bergantung (ini tidak Independen).

Bukti :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(\varnothing) = P(A) \cdot P(B)$$

$$0 = P(A) \cdot P(B)$$

Jadi, pembuktian teorema 2.2 terbukti karena kita mendapatkan $P(A) = 0$ atau $P(B) = 0$ ini adalah kontradiksi dengan fakta bahwa A dan B peristiwa yang mungkin terjadi.

Teorema 2.4. Dua kemungkinan kejadian independen adalah tidak saling ekslusif

Bukti :

Misalkan A dan B adalah dua kejadian Independen dan misalkan A dan B adalah saling lepas. Maka,

$$\begin{aligned} P(A) \cdot P(B) &= (A \cap B) \\ &= P(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, kita mendapatkan $P(A) = 0$ atau $P(B) = 0$ ini adalah kontradiksi dengan fakta bahwa A dan B adalah kejadian yang mungkin terjadi. Probabilitas kejadian A dan B menunjukkan eksklusif jika A dan B tidak Independen; dan Jika A dan B Independen maka A dan B tidak eksklusif.

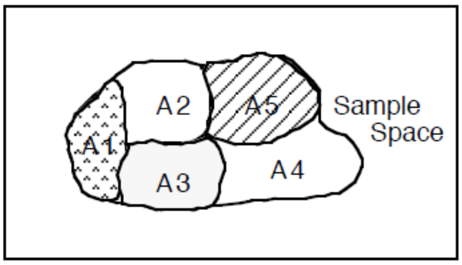
2.2 Teorema Bayes

Ada banyak situasi di mana hasil akhir dari sebuah eksperimen tergantung pada apa yang terjadi diberbagai tahap peralihan. Masalah ini diselesaikan dengan Teorema Bayes.

Definisi 2.4. Misalkan S adalah Himpunan dan $P\{A_i\}_{i=1}^{m}$ menjadi subset dari S. Kumpulan P disebut partisi dari S jika :

$$(\mathrm{a})\ \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

$$(b)\ A_i \cap A_j = \varnothing\ , \qquad untuk\, i \neq j$$



Teorema 2.5.

Jika kejadian $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ merupakan sebuah partisi dari ruang sampel S dan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, maka untuk setiap kejadian A di S adalah

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(B_i) \cdot P(A / B_i)$$

Bukti :

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} (A \cap B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(B_i) * P(A / B_i)$$

Teorema 2.6.

Jika kejadian $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ merupakan sebuah partisi dari ruang sampel S dan $P(B_i) = 0$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, maka untuk setiap kejadian A di S sedemikian sehingga $P(A) \neq 0$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)} \quad , \; k = 1, 2, \ldots, m$$

Bukti :

Dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat kita mendapatkan :

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$$

Dengan menggunakan teorema 1, kita dapatkan

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

Teorema ini disebut Teorema Bayes. Probabilitas $P(B_k)$ disebut probabilitas sebelumnya. $P(B_k \mid A)$ disebut probabilitas selanjutnya.

Contoh 2.8. Dua kotak berisikan kelereng diletakkan di atas meja. Kotak itu diberi label B_1 dan B_2. Kotak B_1 berisikan 7 kelereng hijau dan 4 kelereng putih. Kotak B_2 berisikan 3 kelereng hijau dan 10 kelereng kuning. Kotak itu disusun sehingga probabilitas pemilihan kotak B_1 adalah $\frac{1}{3}$ dan kotak B_2 adalah $\frac{2}{3}$ Anggiboy ditutup matanya dan diminta untuk memilih kelereng. Dia akan mendapatkan hadiah TV berwarna jika bisa memilih kelereng hijau.

a) Apakah Anggiboy akan memenangkan TV berwarna?Jika Anggiboy

b) memenangkan TV berwarna berapa probabilitas kelereng hijau yang dipilih dari kotak pertama?

Jawab :

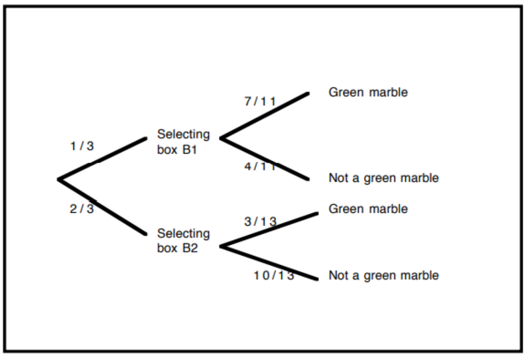
Misalkan A merupakan kejadian dari pengambilan kelereng hijau.

Probabilitas sebelumnya adalah $P(B_1) = \frac{1}{3}$ dan $P(B_2) = \frac{2}{3}$.

a) Probabilitas bahwa Anggiboy akan memenangkan TV adalah

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) \\
&= \left(P(A \mid B_1)P(B_1)\right) + \left(P(A \mid B_2)P(B_2)\right) \\
&= \left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{7}{33} + \frac{2}{13} \\
&= \frac{91+66}{429} \\
&= \frac{157}{429}
\end{aligned}$$

b) Mengingat Anggiboy memenangkan TV, probabilitas kelereng hijau yang dipilih dari kotak B_1



$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2)}$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}$$

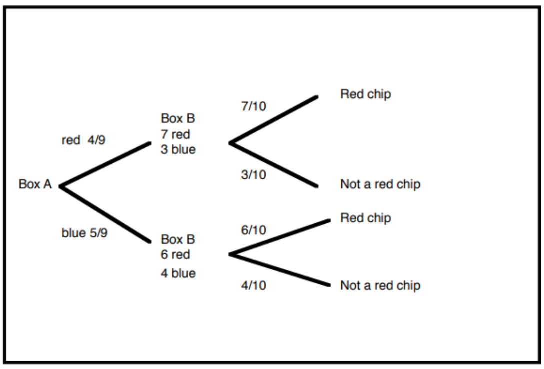
$$= \frac{91}{157}$$

Catatan bahwa $P(A \mid B_1)$ adalah probabilitas memilih kelereng hijau dari kotak pertama dan $P(B_1 \mid A)$ adalah probabilitas terpilihnya kelereng hijau dari kotak pertama.

Contoh 2.9. Misalkan kotak A berisi 4 chip merah dan 5 chip biru dan kotak B berisi 6 chip merah dan 3 chip biru. Sebuah chip dipilih secara acak dari kotak A dan ditempatkan di kotak B. Terakhir, sebuah chip dipilih secara acak dari kotak B. Berapa probabilitas chip biru dipindahkan dari kotak A ke kotak B mengingat chip yang yang dipilih dari kotak B berwarna merah ?

Jawab :

Diketahui : $P(M_A) = \frac{4}{9}$ dan $P(B_A) = \frac{5}{9}$.



Jika, chip merah dipindahkan dari kotak A ke kotak B, kemudian kotak B mempunyai 7 chip merah dan 3 chip biru jadi probabilitasnya adalah $P(M_B) = \frac{7}{10}$. Begitu pula chip biru yang dipindahkan dari kotak A ke kotak B maka probabilitasnya adalah $P(B_B) = \frac{6}{10}$.

Kita asumsikan E adalah kejadian chip biru yang dipindahkan dari kotak A ke kotak B maka :

$$P(E \mid M) = \frac{\left(P(M \mid E) \cdot P(E)\right)}{P(M)}$$

$$= \frac{\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)}{\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)}$$

$$= \frac{15}{29}$$

Contoh 2.10. 60% pengemudi baru telah mengenyam pendidikan mengemudi. Selama tahun pertama mereka, pengemudi yang tidak mendapat pendidikan sekitar 8% mengalami kecelakaan, dan yang mendapatkan pendidikan mengemudi sekitar 5% mengalami kecelakaan. Berapa probabilitas pengemudi baru yang tidak mengalami kecelakaan pada tahun pertama?

Jawab :

Misalkan :

$A =$ Memiliki pendidikan mengemudi

$B =$ Pengemudi baru yang mengalami kecelakaan

Maka :

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(B^c \mid A) \cdot P(A)}{P(B^c \mid A) \cdot P(A) + P(B^c \mid A^c) \cdot P(A^c)}$$

$$= \frac{\left[1 - P(B \mid A)\right] P(A)}{\left[1 - P(B \mid A)\right] \cdot P(A) + \left[1 - P(B \mid A^c)\right] \cdot \left[1 - P(A)\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{95}{100}\right)}{\left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{92}{100}\right)+\left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{95}{100}\right)}$$

$$= 0,6077$$

Contoh 2.11. Setengah persen dari populasi pengidap AIDS. Ada sebuah tes untuk mendeteksi AIDS. Hasil tes yang positif seharusnya berarti Anda mengidap AIDS tapi tesnya belum sempurna. Untuk penderita AIDS tes ini meleset, diagnosis 2% dari beberapa waktu lalu. Dan bagi orang-orang yang tidak mengidap AIDS salah dalam tes nya yang diperkirakan 3% dari mereka mengidap AIDS.

a) Berapa probabilitas bahwa seseorang yang dipilih secara acak akan dites positif?

b) Berapa probabilitas bahwa anda mengidap AIDS dari hasil tes anda positif?

Jawab :

Misalkan A menunjukan bahwa kejadian seseorang yang mengidap AIDS dan B menunjukan hasil yang positif.

a) Probabilitas seseorang yang dipilih secara acak akan mendapatkan hasil positif adalah diberikan oleh

$$P(B) = (0,005)(0,98) + (0,955)(0,03)$$

$$= 0,0049 + 0,0298$$

$$= 0,035$$

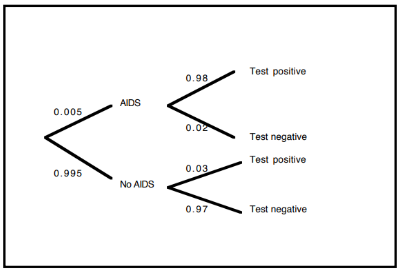
b) Kemungkinan Anda mengidap AIDS karena tes Anda kembali positif diberikan oleh

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{(0,005)(0,98)}{(0,005)(0,98)+(0,955)(0,03)}$$

$$= \frac{0,0049}{0,035}$$

$$= 0,14$$



Catatan 2.2. Contoh diatas membuktikan bahwa Teorema Bayes sangatlah penting. Mengapa? Karena pada tahap pertama tidak memperoleh hasil dikarenakan pada tahap ini kita hanya melakukan prediksi apakah Anda mengidap AIDS atau tidak, sedangkan tahap yang kedua kita melakukan uji dengan menggunakan hasil pada tahap pertama dan akhirnya memperoleh hasil yang diinginkan. Inilah mengapa probabilitas bersyarat sangat berguna.

<u>Latihan Soal</u>

1. Misalkan $P(A)=0.4$ dan $P(A\cup B)=0.6$. Berapakah nilai $P(B)$ jika A dan B Independen

   Jawab :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0,6=0,4+P(B)-0,4P(B)$$

$$P(B)(1-0,4)=0,6-0,4$$

$$0,6\ P(B)=0,2$$

$$=\frac{0,2}{0,6}$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$=0,333$$

2. Sebuah dadu dilempar sedemikian rupa sehingga probabilitas sisi dengan titik j muncul sebanding dengan j untuk $j=1,2,3,4,5,6$. Dalam 6 lemparan Independen dari dadu ini, berapa probabilitas setiap sisi muncul tepat satu kali?

   Jawab :

Jumlah lemparan dadu independen adalah : 6

Kemungkinan jumlah total adalah: $1+2+3+4+5+6=21$

Kemungkinan hasil adalah

X	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Sekarang, kita perlu mendapatkan satu dari setiap hasil sekali, probabilitas untuk melakukan itu dalam urutan tertentu adalah, $\left(\frac{1}{21}\right)\left(\frac{2}{21}\right)\left(\frac{3}{21}\right)\left(\frac{4}{21}\right)\left(\frac{5}{21}\right)\left(\frac{6}{21}\right)$

enam hasil tersebut dapat terjadi di salah satu dari 6!

hitung kemungkinan munculnya setiap sisi tepat satu kali

$$P(setiap\,sisi\,muncul\,tepat\,satu) = 6!\times\left(\frac{1}{21}\right)\left(\frac{2}{21}\right)\left(\frac{3}{21}\right)\left(\frac{4}{21}\right)\left(\frac{5}{21}\right)\left(\frac{6}{21}\right)$$

$$=\frac{6!\times 6!}{(21)^6}$$

$$=\frac{(6!)^2}{(21)^6}$$

3. Seorang insinyur sistem tertarik untuk menilai keandalan roket terdiri dari tiga tahap. Saat lepas landas, mesin roket tahap pertama harus mengangkat roket dari tanah. Jika mesin itu berhasil melakukannya, mesin tahap kedua sekarang harus mengangkat roket ke orbit. Saat mesin pada tahap 1 dan 2 telah bekerja dengan sukses, mesin tahap ketiga digunakan untuk menyelesaikan misi roket. Keandalan roket tersebut diukur dengan kemungkinan penyelesaian misi. Jika probabilitas keberhasilan kinerja mesin tahap 1, 2 dan 3 masing-masing adalah 0,99, 0,97 dan 0,98, temukan keandalan roket.

   Jawab :

$$Probabilitas\,keberhasilan = P(tahap\,1)\times P(tahap\,2)\times P(tahap\,3)$$

$$=0,99\times 0,97\times 0,98$$

$$=0,941$$

4. Kembar identik berasal dari telur yang sama dan karenanya memiliki jenis kelamin yang sama. Kembar bersaudara memiliki kemungkinan 50% - 50% untuk menjadi sesama jenis. Di antara

probabilitas yang kembar dari himpunan bersaudara adalah $\frac{1}{3}$ dan sebuah himpunan identik adalah $\frac{2}{3}$. Jika himpunan berikutnya kembar berjenis kelamin sama, berapa kemungkinan mereka identik?

Jawab:

Misalkan

$$P(A) = P(identik)$$

$$P(B) = P(Sesama\,Jenis)$$

$$P(C) = P(persaudaraan)$$

$$P(A\,|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B\,|A) = 1$$

$$P(B|C) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(B\,|A) \times P(A) + P(B\,|C) \times P(C)$$

$$= 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$P(A\,|B) = \frac{P(B\,|A) \times P(A)}{P(B)}$$

$$=\frac{1\times\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}$$

$$=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

5. Dalam pelemparan sepasang dadu yang adil, berapakah probabilitas muncul jumlah 7 dilempar sebelum jumlah 8 dilempar?

   Jawab :

   Misalkan A adalah kejadian yang muncul jumlah 8 ketika sepasang dadu yang adil dilempar

   $$A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

   $$P(A)=\frac{5}{36}$$

   Misalkan B adalah kejadian yang muncul jumlah 7 ketika sepasang dadu yang adil dilempar

   $$B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

   $$P(B)=\frac{6}{36}$$

   Misalkan C adalah kejadian yang muncul jumlah 2 sampai 12 selain jumlah 7 dan 8 muncul

   $$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{5}{36}-\frac{6}{36}=\frac{25}{36}$$

   Probabilitas bahwa jumlah 7 dilempar sebelum jumlah 8 dilempar

   $$P(B)+P(C)\,\square P(B)+\left(P(C)\right)^2\,\square P(B)=\frac{6}{36}+\left(\frac{25}{36}\right)\frac{6}{36}+\left(\frac{25}{36}\right)^2\frac{6}{36}$$

   $$=\frac{6}{36}\times\frac{1}{1-\frac{25}{36}}$$

   $$=\frac{6}{36}\times\frac{36}{11}$$

$$= \frac{6}{11}$$

6. Misalkan A dan B adalah kejadian Independen dengan $P(A) = P(B)\,dan\,P(A \cup B) = 0,5$. Berapa probabilitas kejadian A?

   Jawab :

   $$P(A \cup B) = 0,5$$

   $$P(A) = P(B) = misalkan\ p$$

   Karena kejadian saling lepas

   $$P(A \cap B) = P(A)\ \square P(B)$$

   $$P(A \cap B) = p\ \square p = p^2$$

   Juga diketahui bahwa

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5$$

   $$P(A \cup B) = p + p - p^2 = 0,5$$

   $$2p - p^2 = 0,5$$

   $$p^2 - 2p + 0,5 = 0$$

   Kemungkinan nilai p adalah

   $$p_{1,2} = 2 \pm \frac{\sqrt{4 - 4.1.0,5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

   $$p_1 = \frac{2 + 1,4142}{2} = \frac{3,4142}{2} = 1,7071$$

   $$p_2 = \frac{2 - 1,4142}{2} = \frac{0,5857}{2} = 0,2929$$

   Karena p tidak boleh lebih besar dari 1 maka nilai $p = 0,2929$

7. Sebuah guci berisi 6 bola merah dan 3 bola biru. Satu bola dipilih di acak dan diganti dengan bola warna lain. Bola kedua kemudian terpilih. Berapa probabilitas bersyarat bahwa bola pertama yang dipilih berwarna merah, mengingat bola kedua berwarna merah?

   Jawab :

$$P(M_2) = P(M_2|M_1) \times P(M_1) + P(M_2|B_1) \times P(B_1)$$

$$= \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)$$

$$= \frac{30}{81} + \frac{21}{81}$$

$$= \frac{51}{81}$$

$$P(M_1 \,|M_2) = \frac{P(M_2|M_1) \times P(M_1)}{P(M_2)}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)}{\frac{51}{81}}$$

$$= \frac{30}{81} \times \frac{81}{51}$$

$$= \frac{30}{51} = \frac{10}{17}$$

8. Sebuah keluarga memiliki lima anak. Dengan asumsi bahwa kemungkinan seorang gadis setiap kelahiran adalah 0,5 dan lima kelahiran itu independen, berapakah kemungkinan keluarga memiliki setidaknya satu anak perempuan, mengingat bahwa mereka memiliki setidaknya satu anak laki-laki?

   Jawab :

   Misalkan x menjadi nomor dari anak perempuan dan y menjadi nomor dari anak laki-laki

$$P(x \geq 1 | y \geq 1) = 1 - P(x = 0 | y \geq 1)$$

$$= 1 - \frac{P(x = 0 | y \geq 1) P(y \geq 1)}{P(y \geq 1)}$$

$$= 1 - \frac{P(x = 0 \cap y \geq 1)}{1 - P(y = 0)}$$

   $P(y = 0)$ dapat ditafsirkan seperti itu dari lima anak ada pula anak laki-laki dan dapat ditemukan dengan menggunakan

$$_5C_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32}$$

$P(x = 0 \cap y \geq 1)$ dapat ditafsirkan sebagai lima anak dengan tidak ada anak perempuan dan anak laki-laki lebih dari 1, tetapi karena ada lima anak dan perempuan adalah 0 maka laki-laki harus 5, sehingga dapat ditemukan sebagai berikut

$$_5C_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32}$$

$$_5C_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{1}{32}$$

Dapat kita lihat dari kedua penyelesaian di atas menghasilkan hasil yang sama, sehingga

$$P(x \geq 1 | y \geq 1) = 1 - \frac{\frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{32}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{32}}{\frac{32-1}{32}}$$

$$= 1 - \frac{1}{31}$$

$$= \frac{31-1}{31}$$

$$= \frac{30}{31}$$

9. Sebuah guci berisi 4 bola bernomor 0 sampai 3. Satu bola dipilih di acak dan dikeluarkan dari guci dan tidak dikembalikan. Semua bola dengan angka bukan nol nomor yang kurang dari bola yang dipilih juga dikeluarkan dari guci. Kemudian bola kedua dipilih secara acak dari yang tersisa di guci. Berapakah probabilitas bahwa bola kedua yang dipilih diberi nomor 3?

   Jawab :

   Kasus I : Jika bola pertama 0 dan bola kedua adalah 3.

   Kemungkinannya adalah: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

   Kasus II : Jika bola pertama bernilai 1 dan bola kedua bernilai 3.

   Kemungkinannya adalah: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

   Kasus III: Jika bola pertama bernilai 2 dan bola kedua bernilai 3.

Kemungkinannya adalah: $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Kasus IV: Jika bola pertama adalah 3 maka tidak ada bola nomor 3.

Kemungkinannya adalah: $\frac{1}{4}\times 0=0$

Jadi, jumlah total caranya adalah: $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{2+2+3}{24}=\frac{7}{24}$

10. Ejaan bahasa Inggris dan Amerika masing-masing adalah rigour dan rigor. Seorang pria tinggal di hotel A1 Rashid menulis kata ini, dan sebuah surat diambil secara acak dari ejaannya ditemukan menjadi vokal. Jika 40 persen pria berbahasa Inggris di hotel ada orang Inggris dan 60 persen orang Amerika, berapa probabilitasnya bahwa penulisnya adalah orang Inggris?

Jawab :

$$P(Inggris)=\frac{40}{100}=\frac{4}{10}$$

$$P(Amerika)=\frac{60}{100}=\frac{6}{10}$$

$$P(Vokal\,|\,Inggris)=P(Vokal\;dari\;Rigour)=\frac{3}{6}$$

$$P(Vokal\,|\,Amerika)=P(Vokal\;dari\;Rigour)=\frac{2}{5}$$

Karenanya dengan teorema Bayes:

$$P(Inggris\,|\,Vokal)=\frac{P(I)P(V\,|\,I)}{P(I)P(V\,|\,I)+P(A)P(V\,|\,A)}$$

$$=\frac{\frac{4}{10}\times\frac{3}{6}}{\left(\frac{4}{10}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{6}{10}\times\frac{2}{5}\right)}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{25}{11}$$

$$=\frac{5}{11}$$

$$=0,4545$$

11. Tes diagnostik untuk penyakit tertentu dikatakan 90% akurat dalam hal itu, jika seseorang mengidap penyakit, tes akan mendeteksi dengan probabilitas 0,9. Jika seseorang tidak memiliki penyakit, tes akan melaporkan bahwa dia tidak memilikinya dengan probabilitas 0,9. Hanya 1% populasi yang terjangkit penyakit pada pertanyaan ini. Jika tes diagnostik melaporkan bahwa seseorang dipilih secara acak dari populasi memiliki penyakit, berapa probabilitas bersyarat bahwa orang, sebenarnya, memiliki penyakit itu?

    Jawab :

    Misalkan

    D : memiliki penyakit

    A : tes menunjukkan penyakit

    $$P\left(A|D\right)=0,9$$

    $$P\left(A|D^{'}\right)=0,9$$

    $$P\left(D\right)=0,01$$

    $$P\left(D'\right)=0,99$$

    $$P\left(D|A\right)=\frac{P\left(A|D\right)P\left(D\right)}{P\left(A|D\right)P\left(D\right)+P\left(A|D^{'}\right)P\left(D'\right)}$$

    $$=\frac{0,9\times 0,01}{0,9\times 0,01+0,9\times 0,99}$$

    $$=\frac{1}{12}$$

    Jadi, probabilitas bersyarat bahwa seseorang yang sebenarnya memiliki penyakit adalah $\frac{1}{12}$

12. Sebuah toko kelontong kecil memiliki 10 karton susu, 2 di antaranya asam. Jika Anda akan membeli karton susu ke-6 yang dijual hari itu secara acak, temukan kemungkinan memilih sekotak susu asam.

    Jawab :

    Kita memiliki jumlah karton dari susu di tokoh adalah 10.

    Di dalam 2 karton itu ada susu asam.

    Kita ingin probabilitas bahwa karton susu ke-6 itu asam.

    Bahwa sampai yang ke-5 mendapatkan susu tidak asam dan yang ke-6 mendapatkan susu asam.

    Terdapat $10-2=8$ karton susu yang tidak asam.

Terdapat dua pilihan yaitu :

a. Satu karton susu ada yang asam saat pilihan ke-6

b. Dua karton susu ada yang asam saat pilihan ke-6

Oleh karena itu, probabilitas yang diminta adalah

$$P(\text{pilihan ke}-6\text{ karton itu asam}) = \left(\frac{\binom{8}{4}\binom{2}{1}}{\binom{10}{5}}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{\binom{8}{5}\binom{2}{0}}{\binom{10}{5}}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{140}{252}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{56}{252}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{252}{1260}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$= 0,2$$

Jadi, probabilitas memilih sekotak susu asam adalah 0,2

13. Misalkan Q dan S adalah kejadian independen sehingga probabilitasnya setidaknya salah satu dari mereka terjadi adalah $\frac{1}{3}$ dan probabilitas Q terjadi tetapi S terjadi tidak terjadi adalah $\frac{1}{9}$. Berapa probabilitas S?

Jawab :

Misalkan probabilitas sebagai kejadian S pada x

Misalkan probabilitas sebagai kejadian Q pada y sehingga,

probabilitas (S tidak terjadi) = $1-x$

probabilitas (Q tidak terjadi) = $1-y$

Probabilitas (tidak ada yang mengirim Q terjadi) $=(1-x)(1-y)$

P (setidaknya satu kali terjadi) = $1-P$ (tidak ada yang mengirim Q terjadi)

Diberikan, P (setidaknya satu kejadian) $=\frac{1}{3}$

P (q terjadi tetapi S tidak terjadi) = $\frac{1}{9}$ (diberikan)

Maka, kita mendapatkan 2 persamaan

$1-(1-x)(1-y)=\frac{1}{3}$ ………………...A

$Y(1-x)=\frac{1}{9}$ ....B

Sederhanakan persamaan A sehingga

$$1-(1-y-x+xy)=\frac{1}{3}$$

$$Y+x-3y=\frac{1}{3}$$

$$3y+3x-3xy=1 \text{ ....C}$$

Sekarang, kita sederhanakan persamaan B

$$y-xy=\frac{1}{9}$$

$$9y-9xy=1 \text{ ....D}$$

eliminasi persamaan C dan D

$$9y-9xy=1$$

$$9y-9xy+9x=3$$

$$-9x=-2$$

$$x=\frac{2}{9}$$

Letakan $x=\frac{2}{9}$ ke persamaan D. sehingga

$$9y-9(2|9)y=1$$

$$9y-2y=1$$

$$7y=1$$

$$y=\frac{1}{7}$$

Sehingga kita dapat $P(S)=\frac{2}{9}P(Q)=\frac{1}{7}$

Probabilitas S adalah $\frac{2}{9}$

14. Sebuah kotak berisi 2 bola hijau dan 3 bola putih. Bola dipilih secara acak dari kotak. Jika bola berwarna hijau, satu kartu diambil dari setumpuk 52 kartu. Jika bola berwarna putih, kartu ditarik dari tumpukan kartu yang hanya terdiri dari 16 gambar.

    a. Berapa probabilitas mengambil gambar raja?

    b. Berapakah kemungkinan bola putih dipilih mengingat bahwa raja ditarik?

    Jawab :

    a. Probabilitas mengambil gambar raja

$$P(hijau) = \frac{2}{5}$$

$$P(raja) = \frac{4}{52}$$

$$P(hijau\, dan\, raja) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{52}$$

Demikian pula untuk

$$P(putih) = \frac{3}{5}$$

$$P(raja) = \frac{4}{16}(karena\, akan\, diambil\, dari\, 16\, kartu)$$

$$P(putih\, dan\, raja) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{16} = \frac{3}{20}$$

$$\begin{aligned} P((hijau\, dan\, raja)\, atau\, (putih\, dan\, raja)) &= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{52}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{16}\right) \\ &= \frac{2}{65} + \frac{3}{20} \\ &= \frac{47}{260} \end{aligned}$$

b. kemungkinan bola putih dipilih mengingat bahwa raja ditarik

$$P(A \mid B) = \frac{P(putih\, dan\, raja)}{P((hijau\, dan\, raja)\, atau\, (putih\, dan\, raja))}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{4}{16}}{\left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{52}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{16}\right)}$$

$$= \frac{3}{20} \times \frac{260}{47}$$

$$= \frac{39}{47}$$

15. Lima guci masing-masing diberi nomor 3, 4, 5, 6 dan 7. Di dalam setiap guci n^2 dolar di mana n adalah nomor di guci. Eksperimen berikut adalah dilakukan : Sebuah guci dipilih secara acak. Jika bilangannya adalah bilangan prima maka pelaku eksperimen menerima jumlah tersebut di dalam guci dan percobaan selesai. Jika itu nomor bukan bilangan prima, guci kedua dipilih dari yang tersisa empat dan pelaku eksperimen menerima jumlah total dalam dua wadah yang dipilih. Berapa probabilitas eksperimen itu berakhir dengan tepat dua puluh lima dolar?

    Jawab :

    3, 5 dan 7 adalah bilangan prima.

    Ada dua kemungkinan hasil yang eksperimennya mendapatkan tepat dua puluh lima dolar:

    a. Memilih guci $5(5 \times 5 = 25)$

    $$P(A) = \frac{1}{5}$$

    b. Memilih guci 4 lalu guci $3([4x4]+[3x3]=25)$

    $$P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

    Probabilitas eksperimen mendapatkan \$ 25 adalah:

    $$P(x=25) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

    $$P(x=25) = 0,25 = 25\% = \frac{1}{4}$$

16. Sebuah toples kue berisi 3 kelereng merah dan 1 kelereng putih. Kotak sepatu memiliki 1 kelereng merah dan 1 kelereng putih. 3 kelereng dipilih secara acak tanpa pengembalian dari toples kue dan ditempatkan di kotak sepatu. Kemudian 2 kelereng dipilih secara acak dan tanpa pengembalian dari kotak sepatu. Berapa kemungkinan bahwa kedua kelereng yang dipilih dari kotak sepatu berwarna merah?

    Jawab :

    Misalkan :

E_1 adalah ketiga kelereng itu berwarna merah, menyisakan satu kelereng putih

E_2 adalah dua kelereng berwarna merah dan satu kelereng berwarna putih, menyisakan satu kelereng merah

Semuanya memiliki kemungkinan yang sama untuk pergi

$$P(E_1)=\frac{1}{4}$$

$$P(E_2)=\frac{3}{4}$$

Misalkan W adalah acara memilih dua kelereng merah dari kotak sepatu

$$P(W)=P\left(\frac{W}{E_1}\times P(E_1)\right)+P\left(\frac{W}{E_2}\times P(E_2)\right)$$

$$=\left(\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{3}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{10}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{15}{40}$$

$$=\frac{3}{8}$$

17. Sebuah guci berisi n bola hitam dan n bola putih. Tiga bola dipilih dari guci secara acak dan tanpa pengembalian. Berapakah nilai n jika probabilitasnya adalah $\frac{1}{12}$ bahwa ketiga bola itu putih?

Jawab :

$$P(semua\,3\,putih)=\frac{jumlah\,cara\,memilih\,3\,putih\,secara\,berurutan}{jumlah\,cara\,memilih\,3\,bola\,satu\,demi\,satu}$$

$$=\left(\frac{{}_nC_1}{{}_{2n}C_1}\right)\left(\frac{{}_{n-1}C_1}{{}_{2n-1}C_1}\right)\left(\frac{{}_{n-2}C_1}{{}_{2n-2}C_1}\right)$$

$$=\frac{{}_nC_3}{{}_{2n}C_3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

$$n = 5$$

18. Sebuah guci berisi 10 bola yang diberi nomor 1 sampai 10. Lima bola ditarik secara acak dan tanpa pengembalian. Misalkan A adalah kejadian yang “Tepat dua bola bernomor ganjil ditarik dan terjadi pada undian bernomor ganjil guci. ” Berapa probabilitas kejadian A?

    Jawab :

    Kasus 1 :

    undian 1: ganjil

    undian 2: genap

    undian 3: ganjil

    undian 4: genap

    undian 5: genap

    jadi probabilitas 2 nomer ganjil terambil di undian pertama dan ketiga

    $$\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{126}$$

    Kasus 2.

    undian 1 : ganjil

    undian 2 : genap

    undian 3 : genap

    undian 4 : genap

    undian 5 : ganjil

    jadi probabilitas 2 nomer ganjil terambil di undian pertama dan kelima

    $$\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{126}$$

    Kasus 3.

    undian 1 : genap

    undian 2 : genap

    undian 3 : ganjil

    undian 4 : genap

undian 5 : ganjil

jadi probabilitas 2 nomer ganjil terambil di undian ketiga dan kelima

$$\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{126}$$

Jadi probabilitas dari kejadian A adalah $\frac{5}{126}+\frac{5}{126}+\frac{5}{126}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}$

19. Anggiboy memiliki lima amplop bernomor 3, 4, 5, 6, 7 semuanya disembunyikan di dalam sebuah kotak. Anggiboy memilih sebuah amplop, jika amplop tersebut bilangan prima maka Anggiboy mendapatkan kuadrat dari bilangan itu dalam dolar. Jika tidak (tanpa pengembalian), Anggiboy memilih amplop lain dan kemudian mendapatkan jumlah kuadrat dari dua amplop yang Anggiboy ambil (dalam dolar). Berapakah probabilitas bahwa Anggiboy akan mendapatkan \$ 25?

Jawab :

Jika amplop pertama Anggiboy adalah 3, 5, atau 7 (bilangan prima dalam daftar), Anggiboy mendapatkan kuadrat dari angka itu.

Jadi hanya satu dari tiga kasus yaitu 5, Anggiboy mendapatkan \$ 25.

Jika amplop pertama Anggiboy adalah 4 atau 6, Anggiboy memilih amplop lain.

Tetapi jika amplop pertama Anggiboy adalah 6, Anggiboy pasti akan mendapatkan lebih dari \$ 25.

Satu-satunya cara Anggiboy bisa mendapatkan \$ 25 dengan proses ini adalah jika Anggiboy memilih 4 pertama, dan 3 pada pilihan kedua Anggiboy.

Jadi, Anggiboy memiliki peluang $\frac{1}{5}$ untuk memilih 5, dan probabilitas $\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$ untuk memilih 4 dan kemudian 3, hanya dua cara untuk mendapatkan tepat \$25. Jumlah dari probabilitas ini adalah

$$\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)$$

Jika pertanyaannya sebenarnya tentang peluang Anggiboy mendapatkan setidaknya \$25, maka jawabannya akan berbeda, karena Anggiboy akan melakukannya kecuali pilihan pertama Anggiboy adalah 3.

Jadi, peluang Anggiboy mendapatkan setidaknya \$25 adalah $\frac{4}{5}$.

BAB III

VARIABEL ACAK DAN FUNGSI DISTRIBUSI

3.1 Pendahuluan

Dalam banyak eksperimen acak, elemen ruang sampel belum tentu angka. Misalnya, dalam eksperimen lemparan koin ruang sampel terdiri dari

$$S = \{Gambar, Angka\}$$

Definisi 3.1. Diberikan eksperimen acak yang ruang sampelnya adalah S. Sebuah variabel acak X adalah fungsi dari ruang sampel S dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ sehingga untuk setiap interval $I \in \mathbb{R}$, himpunan $\{s \in S \mid X(s) \in I\}$ adalah kejadian di S.

Dalam eksperimen variabel acak X tertentu akan menjadi beberapa fungsi yang menetapkan bilangan real $X(s)$ untuk setiap hasil yang mungkin dalam ruang sampel. Diberikan eksperimen acak, terdapat banyak variabel acak. Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa diberikan dua (terbatas) himpunan A dan B, jumlah dari fungsi yang berbeda adalah $|B|^{|A|}$. Di sini $|A|$ berarti kardinalitas himpunan A.

Definisi 3.2. Himpunan $\{x \in \mathbb{R} | x = X(s), s \in S\}$ disebut ruang dari variabel acak X

Ruang variabel acak X akan ditandai oleh R_X. Ruang dari variabel acak X sebenarnya adalah kisaran dari fungsi $X : S \to \mathbb{R}$.

Contoh 3.1. Diberikan sebuah eksperimen pada pelemparan sebuah koin. Susun variabel acak X dari eksperimen ini. Berapa ruang sampel dari variabel X ?

Jawab :

Diberikan ruang sampel dari eksperimen

$$S = \{Gambar, Angka\}.$$

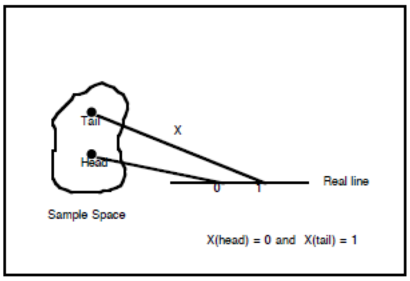
Misalkan :

$$X(Gambar) = 0$$

$$X(Angka) = 1$$

Maka X adalah pemetaan yang valid dan dengan demikian menurut definisi kita tentang variabel acak, itu adalah sebuah variabel acak untuk percobaan melempar koin. Ruang acak ini variabel adalah

$$R_X = \{0,1\}$$



Contoh 3.2. Diberikan eksperimen di mana koin di tos sebanyak sepuluh kali.

a. Berapa ruang sampelnya?

b. Berapa banyak elemen dalam hal ini ruang sampel?

c. Tentukan variabel acak untuk ruang sampel ini lalu temukan ruang variabel acak.

Jawab :

a. Ruang sampel eksperimen ini diberikan oleh :

$$S = \{s \mid s\, adalah\, urutan\, 10\, gambar\, atau\, angka\}.$$

Kardinalitas dari S adalah

$$|S| = 2^{10}$$

b. Misalkan $X : S \to \mathbb{R}$ menjadi fungsi dari ruang sampel S ke dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$X = jumlah\, gambar\, dalam\, urutan\, S.$$

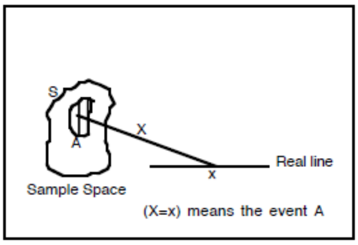
Maka X adalah variabel acak. Variabel acak ini, misalnya, memetakan urutan $GGAAAGAAGG$ ke bilangan real 5, yaitu

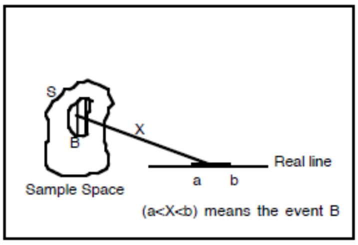
$$X(GGAAAGAAGG) = 5$$

c. Ruang variabel acak ini adalah

$$R_X = \{0,1,2, ...,10\}$$

Sekarang, kita memperkenalkan beberapa notasi. Dengan $(X = x)$ kita artikan kejadian $\{s \in S \mid X(s) = x\}$. Demikian pula, $(a < X < b)$ berarti kejadian $\{s \in S \mid a < X < b\}$ dari ruang sampel S. Ini diilustrasikan dalam diagram berikut.





Definisi 3.3. Jika ruang sampel variabel acak X dapat dihitung, maka X disebut variabel acak diskrit.

Definisi 3.4. Jika ruang sampel variabel acak X tidak dapat dihitung, maka X disebut variabel acak kontinu.

Dalam kasus variabel acak kontinu, ruang adalah interval atau gabungan interval. Variabel acak dicirikan melalui fungsi kepadatan probabilitas. Pertama, kita perhatikan kasus diskrit dan kemudian kita memeriksa kasus berkelanjutan.

3.2 Fungsi Distribusi Variabel Acak Diskrit

Definisi 3.5. Misalkan R_X adalah ruang sampel variabel acak X. Dengan demikian fungsi $f : R_X \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = P(X = x)$ disebut fungsi kepadatan probabilitas (PDF) dari X.

Contoh 3.3. Dalam kelas statistik terdapat 50 mahasiswa, 11 mahasiswa baru, 19 mahasiswa tingkat dua, 14 mahasiswa junior dan 6 mahsiswa senior. Satu mahasiswa dipilih secara acak.

a) Apa saja anggota ruang sampel eksperimen ini?

b) Apakah ruang sampel ini memuat variabel acak X dan kemudian carilah ruang sampelnya.

c) Carilah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak X !

Jawab :

a) Misalkan

$MB =$ Mahasiswa baru $\qquad Jr =$ Mahasiswa Junior

$M_2 =$ Mahasiswa Tingkat Dua $\qquad Sr =$ Mahasiswa Senior

Maka anggota ruang sampelnya :

$$N(S) = \{MB, M_2, Jr, Sr\}$$

b) Tentukan fungsi $X : S \rightarrow R$ sebagai berikut :

$$X(MB) = 1,\ X(M_2) = 2$$

$$X(Jr) = 3,\ X(Sr) = 4$$

Maka : $R_X = \{1,2,3,4\}$

c) Fungsi kepadatan probabilitas X diberikan oleh

$$f(1) = P(X=1) = \frac{11}{50}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{19}{50}$$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{14}{50}$$

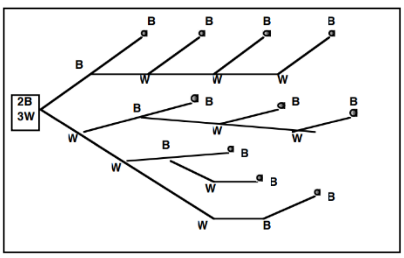
$$f(4) = P(X=4) = \frac{6}{50}$$

Contoh 3.4. Sebuah kotak berisi 5 bola warna, 2 hitam dan 3 putih. Bola diambil berturut-turut tanpa pengembalian. Jika variabel acak X adalah jumlah hasil pengambilan hingga bola hitam terakhir diperoleh, tentukan fungsi kepadatan probabilitas untuk variabel acak X.

Jawab :

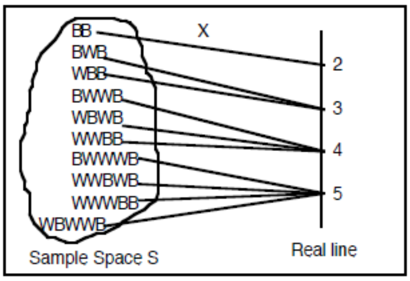
Misalkan : $B =$ bola hitam

$W =$ bola putih



$$S = \begin{Bmatrix} BB, BWB, WBB, BWWB, WBWB, WWBB, \\ BWWWB, WWBWB, WWWBB, WBWWB \end{Bmatrix}$$

Maka $|S| = 10$ dan ruang variabel acak X adalah $\{2,3,4,5\}$.



Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas X diberikan oleh

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{10} \quad f(3) = P(X = 3) = \frac{2}{10}$$

$$f(4) = P(X = 4) = \frac{3}{10} \quad f(5) = P(X = 5) = \frac{4}{10}$$

Sehingga

$$f(x) = \frac{x-1}{10}, x = 2,3,4,5.$$

Contoh 3.5. Sepasang dadu enam sisi angka dan empat sisi angka dilempar dan jumlahnya ditentukan. Misalkan variabel acak X menunjukkan jumlah dari pelemparan dadu tersebut, Maka tentukan ruang sampel, variabel acak R_X, dan fungsi kepadatan probabilitas X.

Jawab :

Ruang sampel eksperimen acak ini diberikan oleh

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \end{Bmatrix}$$

Variabel acak $R_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas X adalah

$$f(2)=P(X=2)=\frac{1}{24}, \quad f(3)=P(X=3)=\frac{2}{24}$$

$$f(4)=P(X=4)=\frac{3}{24}, \quad f(5)=P(X=5)=\frac{4}{24}$$

$$f(6)=P(X=6)=\frac{4}{24}, \quad f(7)=P(X=7)=\frac{4}{24}$$

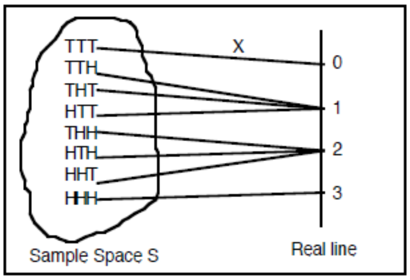
$$f(8)=P(X=8)=\frac{3}{24}, \quad f(9)=P(X=9)=\frac{2}{24}$$

$$f(10)=P(X=10)=\frac{1}{24}$$

Contoh 3.6. Sebuah koin di tos 3 kali. Misalkan variabel acak X menunjukkan jumlah gambar dalam 3 lemparan koin. Tentukan ruang sampel, variabel acak R_X, dan fungsi kepadatan probabilitas X.

Jawab :

$$S=\{AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG\}$$



Variabel acak $R_X=\{0,1,2,3\}$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas X adalah :

$$f(0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$$

$$f(1)=P(X=1)=\frac{3}{8}$$

$$f(2)=P(X=2)=\frac{3}{8}$$

$$f(3)=P(X=3)=\frac{1}{8}$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \qquad x = 0,1,2,3$$

Fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$ dari variabel acak X sepenuhnya mencirikannya. Beberapa sifat dasar dari fungsi kepadatan probabilitas diskrit dirangkum di bawah ini.

Teorema 3.1.

Jika X adalah variabel acak diskrit dengan ruang R_X dan fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$, maka :

a. $f(x) \geq 0 \quad \forall \ R_X$

b. $\sum_{x \in R_X} f(x) = 1$

Contoh 3.7.

Jika probabilitas variabel acak X dengan ruang $R_X = \{1,2,3, \ldots,12\}$ diberikan oleh

$$f(x) = k(2x - 1)$$

berapakah nilai konstanta k?

Jawab :

$$1 = \sum_{x \in R_x} f(x)$$

$$= \sum_{x \in R_x} k(2x-1)$$

$$= \sum_{x \in R_x}^{12} k(2x-1)$$

$$= k\left[2\sum_{x=1}^{12}(x-12)\right]$$

$$= k\left[2\frac{(12)(13)}{2} - 12\right]$$

$$= k144$$

$$k = \frac{1}{144}$$

Definisi 3.6.

Fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dari variabel acak X didefinisikan

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Untuk setiap bilangan real x.

Teorema 3.2.

Jika X adalah variabel acak dengan ruang sampel R_X, maka :

$$F(x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad untuk\; x \in R_X$$

Contoh 3.8. Jika fungsi kepadatan probabilitas variabel acak X diberikan oleh

$$\frac{1}{144}(2x-1) \text{ untuk } x = 1, 2, 3, \ldots, 12$$

kemudian cari fungsi distribusi kumulatif dari X.

Jawab :

Ruang dari variabel acak X diberikan oleh

$$R_X = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$$

$$F(1) = \sum_{t \leq 1} f(t) = f(1) = \frac{1}{144}(2(1)-1) = \frac{1}{144}$$

$$F(2) = \sum_{t \leq 3} f(t) = f(1) + f(2)$$

$$= \frac{1}{144} + \left(\frac{1}{144}(2(2)-1)\right)$$

$$= \frac{1}{144} + \frac{3}{133}$$

$$= \frac{4}{144}$$

$$F(3) = \sum_{t \leq 3} f(t) = f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= \frac{1}{144} + \frac{3}{144} + \frac{1}{144}(2(3)-1)$$

$$= \frac{4}{144} + \frac{5}{144}$$

$$=\frac{9}{144}$$

Lakukan sebanyak $n=12$ dengan cara yang sama sehingga akan menghasilkan

$$F(12)=\sum_{t\le 12} f(t)=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(12)=1$$

$F(x)$ merupakan akumulasi dari $f(t)$ sampai dengan $t\le x$.

Teorema 3.3.

Misalkan X adalah variabel acak dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$. Kemudian fungsi distribusi kumulatif memenuhi hal-hal berikut:

a) $F(-\infty)=0$

b) $F(\infty)=1$

c) $F(x)$ merupakan fungsi peningkat, yaitu jika $x<y$, maka $F(x)\le F(y)$ untuk semua x,y

Teorema 3.4.

Jika ruang R_X dari variabel acak X diberikan oleh

$$R_X=\{x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n\}$$

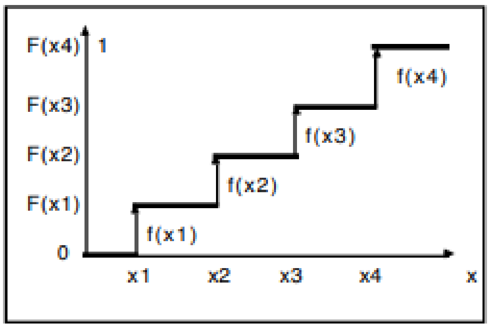
Kemudian

$$f(x_1)=F(x_1)$$

$$f(x_2)=F(x_2)-F(x_1)$$

$$f(x_3)=F(x_3)-F(x_2)$$

$$f(x_n)=F(x_n)-F(x_{n-1})$$



Teorema 3.2 menjelaskan kepada kita bagaimana mencari fungsi distribusi kumulatif dari fungsi kepadatan probabilitas, sedangkan Teorema 3.4 memberi tahu kita cara mencari fungsi kepadatan probabilitas berdasarkan fungsi distribusi kumulatif.

Contoh 3.9. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak dengan fungsi distribusi kumulatif

$$F(x)=\begin{cases} 0.00 & jika \quad x<-1 \\ 0.25 & jika \quad -1\le x<1 \\ 0.50 & jika \quad 1\le x<3 \\ 0.75 & jika \quad 3\le x<5 \\ 1.00 & jika \quad x\ge 5 \end{cases}$$

Tentukan (a) $P(X\le 3)$

(b) $P(X=3)$

(c) $P(X<3)$

Jawab :

Ruang dari variabel acak ini diberikan oleh

$$R_X=\{-1,1,3,5\}$$

Dengan teorema sebelumnya, fungsi kepadatan probabilitas X diberikan oleh

$$f(-1)=0,25$$

$$f(1)=0,50-0,25=0,25$$

$$f(3)=0,75-0,50=0,25$$

$$f(5)=1,00-0,75=0,25$$

Maka, $P(X\le 3)=F(3)=0.75$. Probabilitas $P(X=3)$ dapat dihitung dari

$$P(X=3)=F(5)-F(3)=1-0,75=0,25$$

Sehingga : $P(X<3)=P(X\le 1)=F(1)=0,5$

Kami menutup bagian ini dengan contoh yang menunjukkan bahwa tidak ada korespondensi satu-satu antara variabel acak dan fungsi distribusinya. Perhatikan percobaan melempar koin dengan ruang sampel yang terdiri dari sebuah gambar dan angka, yaitu $S=\{gambar, angka\}$. Menentukan dua variabel acak X_1 dan X_2 dari S adalah sebagai berikut :

$$X_1(gambar)=0 \quad \text{dan} \quad X_1(angka)=1$$

Dan

$$X_2(gambar)=1 \quad \text{dan} \quad X_2(angka)=0.$$

Sangat mudah untuk menghitung bahwa kedua variabel acak ini memiliki distribusi yang sama fungsi, yaitu

$$FX_i(x)=\begin{cases} 0 & untuk \quad x<0 \\ \frac{1}{2} & untuk \quad 0\le x<1 \\ 1 & untuk \quad 1\le x \end{cases}$$

untuk $i=1,2$. Oleh karena itu tidak ada korespondensi satu-satu antara acak variabel dan fungsi distribusinya.

3.3 Fungsi Distribusi Variabel Acak Kontinu

Definisi 3.7

Misalkan X adalah variabel acak kontinu yang ruangnya adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Fungsi bernilai real nonnegatif $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dikatakan fungsi kepadatan probabiliats untuk variabel acak kontinu X jika memenuhi:

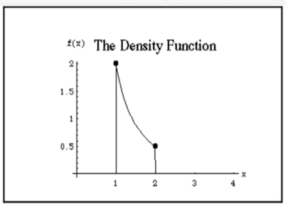
a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

b) $P(A)=\int_A f(x)\,dx$

Contoh 3.10.

Apakah fungsi bernilai real $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ditentukan oleh fungsi dibawah ini dan fungsi kepadatan probabilitas untuk beberapa variabel acak X ?

$$f(x)=\begin{cases} 2x^{-2} & jika\, 1<x<2 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$



Jawab :

Kita tunjukkan bahwa f adalah nonnegatif dan daerah di bawah $f(x)$ adalah kesatuan. Karena domain f adalah interval $(0,1)$, jelas bahwa f adalah tidak negatif. Selanjutnya, kita menghitung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} 2x^{-2}\,dx$$

$$= -2\left[\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= -2\left[\frac{1}{2} - 1\right]$$

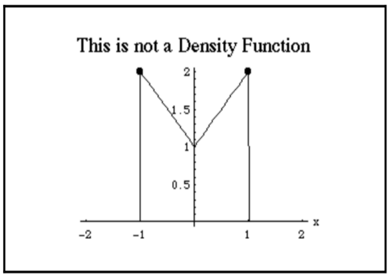
$$= 1$$

Jadi, f merupakan fungsi kepadatan probabilitas

Contoh 3.11. Fungsi bernilai real jika $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ ditentukan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1+|x| & jika -1 < x < 1 \\ \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan variabel X tersebut ?



Jawab :

Sangat mudah untuk menghitung bahwa f nonnegatif yaitu $f(x) \geq 0$, karena $f(x) = 1 + |x|$. Selanjutnya kita tunjukkan bahwa daerah di bawah f bukanlah satu kesatuan. Untuk ini kita menghitung

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(1+|x|\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (1-x)\,dx + \int_{0}^{1} (1+x)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{0} + \left[x + \frac{1}{2}x^2 \right]_{0}^{1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= 3$$

Jadi, fungsi f bukanlah fungsi kepadatan probabilitas dari beberapa variabel acak X.

Contoh 3.12. Berapakah nilai dari konstanta c, jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah

$$f(x) = \frac{c}{1 + (x-\theta)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

Dimana θ adalah parameter real, berapa fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak X ??

Jawab :

Karena f nonnegatif, kita melihat bahwa $c \geq 0$. Untuk mencari nilai c, kami menggunakan fakta bahwa untuk PDF, luasnya adalah satu kesatuan, yaitu,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1 + (x-\theta)^2}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1 + z^2}\,dz$$

$$= c\left[tan^{-1} z \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= c\left[tan^{-1}(\infty) - tan^{-1}(-\infty) \right]$$

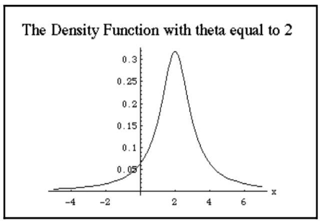
$$= c\left[\frac{1}{2}ð + \frac{1}{2}\pi \right]$$

$$= c\pi$$

$$c = \frac{1}{\pi}$$

Jadi, $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left[1+(x-\theta)^2\right]}$, $-\infty < x < \infty$

Fungsi kepadatan ini dinamakan fungsi distribusi *Cauchy* dengan parameter θ. Jika variabel acak X mempunyai PDF ini kemudian dinamakan variabel acak *Cauchy* dan itu menandakan bahwa $X \sim CAU(\theta)$. Jika di gambarkan menggunakan grafik, fungsi ini maksimum di $x = \theta$, misal $\theta = 2$ maka grafiknya :



Contoh 3.13. Berapakah nilai dari konstanta c, nilai asli dari fungsi $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ diberikan bahwa :

$$f(x) = \begin{cases} c & jika\, a \le x \le b \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Dimana a dan b adalah konstanta real, berapakah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak X ??

Jawab :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b c\,dx$$

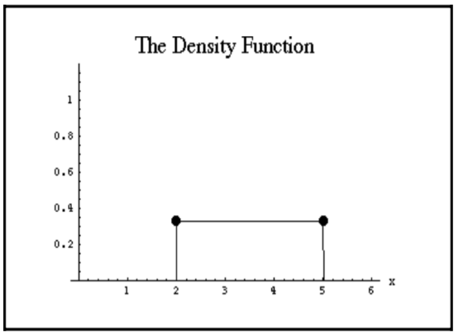
$$= c[x]_a^b$$

$$= c[b-a]$$

$$c = \frac{1}{b-a}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & jika\, a \le x \le b \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Fungsi kepadatan probabilitas diatas dinamakan distribusi seragam pada interval $[a,b]$. Jika variabel acak X mempunyai PDF dinamakan variabel acak seragam dan menandakan bahwa $X \sim UNIF(a,b)$. Jika digambarkan pada grafik maka fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak pada interval $[2,5]$.

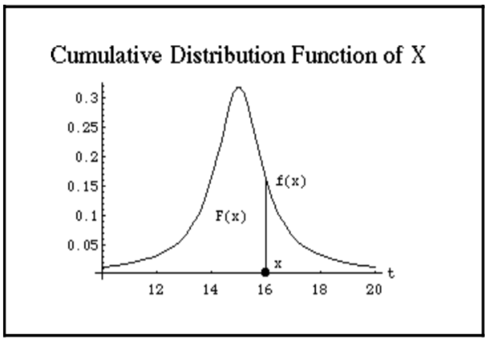


Definisi 3.8.

Perhatikan bahwa $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak X kontinu. Fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dari X di definisikan sebagai :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Distribusi fungsi kumulatif $F(x)$ menggambarkan area dibawah $f(x)$ pada interval $[-\infty, x]$



Seperti kasus diskrit, CDF adalah fungsi naik dari x, dan mengambil nilai 0 di tak hingga negatif dan 1 dari tak hingga positif.

Teorema 3.5.

Jika $F(x)$ adalah distribusi fungsi kumulatif dari sebuah variabel acak X kontinu, probabilitas fungsi kepadatan $f(x)$ dari turunan X maka :

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Bukti :

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{f(x)\,dx}{dx}$$

$$= f(x)$$

Contoh 3.14. Berapakah fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak Cauchy dengan parameter θ ??

Jawab : CDF dari X diberikan oleh

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\left[1+(t-\theta)^2\right]}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x-\theta} \frac{1}{\pi\left[1+z^2\right]}\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi} tan^{-1}(x-\theta) + \frac{1}{2}$$

Contoh 3.15. Berapakah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak CDF

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}\ , -\infty < x < \infty$$

Jawab : PDF dari variabel acak diberikan oleh

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(1+e^{-x}\right)^{-1}$$

$$= (-1)\left(1+e^{-x}\right)^{-2} \frac{d}{dx}\left(1+e^{-x}\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

Selanjutnya, kita bahas secara singkat masalah dari menemukan probabilitas ketika CDF diberikan. Kita merangkum hasilnya dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.6.

Misalkan X adalah variabel acak kontinu CDF $F(x)$, maka :

a) $P(X < x) = F(x)$

b) $P(X > x) = 1 - F(x)$

c) $P(X = x) = 0$

d) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

3.4 Percentil untuk Variabel Acak Kontinu

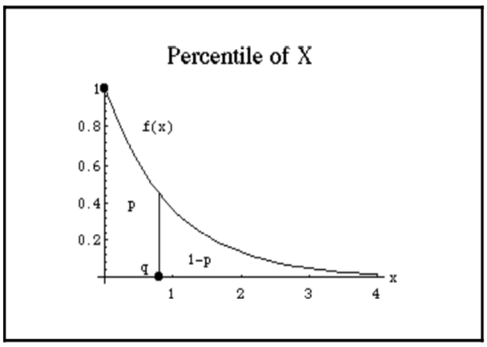
Di bagian ini, kita membahas berbagai persentil dari variabel acak kontinu. Jika variabel acak diskrit, maka untuk membahas persentil, kita harus mengetahui urutan sampel statistik.

Definisi 3.9.

Misalkan p adalah angka diantara 0 dan 1. Sebuah persentil ke $100p$ dari distribusi variabel acak X adalah semua bilangan real q.

$$P(X \le q) \le p \quad dan \quad P(X > q) \le 1 - p$$

Persentil ke $100p$ adalah ukuran area untuk distribusi probabilitas dalam arti q membagi distribusi kepadatan probabilitas menjadi dua bagian, satu memiliki kepadatan probabilitas p dan lainnya memiliki kepadatan probabilitas $1-p$ (lihat diagram di bawah).



Contoh 3.16. Jika variabel acak X mempunyai fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & untuk\ x < 2 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Maka berapa persentil ke 75 dari X ??

Diketahui : $100p = 75 \rightarrow p = 0,75$

Jawab : Dengan menggunakan definisi persentil, kita dapatkan

$$p = \int_{-\infty}^{q} f(x)$$

$$0,75 = \int_{-\infty}^{q} e^{x-2}\,dx$$

$$= \left[e^{x-2}\right]_{-\infty}^{q}$$

$$= e^{q-2}$$

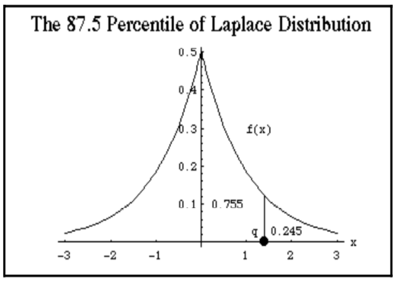
$$q = 2 + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Contoh 3.17. Diketahui distribusi dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad , -\infty < x < \infty$$

Berapa persentil 87,5 ?

Jawab :



Ingat fungsi kepadatan simetrik dengan sumbu y, maka $f(x) = f(-x)$,

Sebab :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Sekarang kita menghitung persentil ke 87,5 dari distribusi di atas

$$p_{87,5} = \int_{-\infty}^{q} f\left(x\right)dx$$

$$\frac{87,5}{100} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx + \int_{0}^{q} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}dx + \int_{0}^{q} \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{0}^{q} \frac{1}{2}e^{-x}dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-q}$$

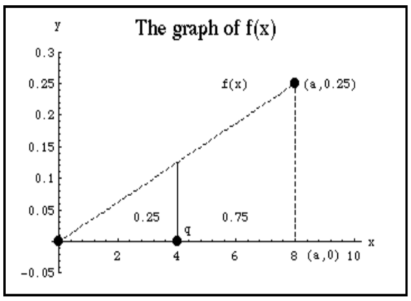
$$0,125 = \frac{1}{2}e^{-q}$$

$$q = -ln\left(\frac{25}{100}\right)$$

$$= \ln 4$$

Oleh karena itu persentil ke 87,5 dari distribusinya adalah $\ln 4$

Contoh 3.18. Misalkan variabel acak kontinu X memiliki fungsi kepadatan $f\left(x\right)$ seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini:



Berapa persentil ke-25 dari distribusi X ?

Jawab :

Karena garis melewati titik-titik $\left(0,0\right)$ dan $\left(a,\frac{1}{4}\right)$, fungsi $f\left(x\right)$ sama dengan

$$f\left(x\right) = \frac{1}{4a}x$$

Karena $f\left(x\right)$ adalah fungsi kepadatan, luas di bawah $f\left(x\right)$ haruslah menjadi satu kesatuan. Karenanya

$$1 = \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{1}{4a} x\,dx$$

$$= \frac{1}{8a} a^2$$

$$= \frac{a}{8}$$

$$a = 8$$

Maka fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah

$$f(x) = \frac{1}{4a} x$$

$$= \frac{1}{32} x$$

Sekarang kita cari persentil ke 25

$$\frac{25}{100} = \int_0^q f(x)\,dx$$

$$= \int_0^q \frac{1}{32} x\,dx$$

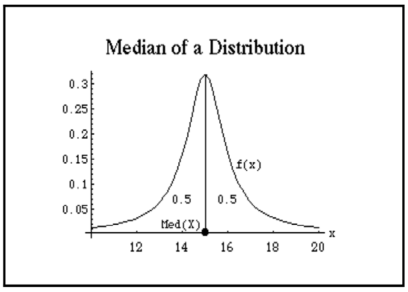
$$= \frac{1}{64} q^2$$

Jadi $q = \sqrt{16}$, yaitu persentil ke-25 dari distribusi di atas adalah 4.

Definisi 3.10. Persentil ke-25 dan ke-75 dari distribusi apa pun adalah disebut kuartil pertama dan ketiga.

Definisi 3.11. Persentil ke-50 dari distribusi apapun disebut median dari distribusi.

Median membagi distribusi kepadatan probabilitas menjadi dua bagian yang sama (lihat gambar berikut).



Jika fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$ simetris terhadap sumbu y, maka median selalu 0.

Contoh 3.19. Variabel acak disebut normal jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

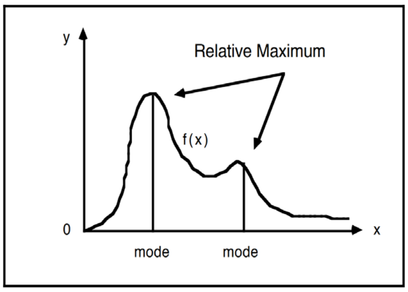
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Berapa median dari X?

Jawab :

Perhatikan bahwa $f(x) = f(-x)$, maka fungsi kepadatan probabilitasnya simetris dengan sumbu y. Jadi median dari X adalah 0.

Definisi 3.12. Mode distribusi variabel acak kontinu X adalah nilai x dimana fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$ mencapai relatif maksimum (lihat diagram).



Mode distribusi dari variabel acak X adalah salah satu nilainya yang paling memungkinkan. Variabel acak dapat memiliki lebih dari satu mode.

Contoh 3.20. Misalkan X adalah variabel acak uniform/seragam pada interval $[0,1]$, yaitu $X \sim UNIF(0,1)$. Berapa banyak mode yang dimiliki X?

Jawab :

Karena $X \sim UNIF(0,1)$, fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah

$$f(x) = \begin{cases} 1 & jika\, 0 \le x \le 1 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Karenanya turunan dari $f(x)$ adalah

$$f'(x) = 0 \qquad x \in (0,1)$$

Oleh karena itu X memiliki banyak mode yang tak terhingga.

Contoh 3.21. Misalkan X adalah variabel acak Cauchy dengan parameter $\theta = 0$, yaitu $X \sim CAU(0)$. Berapakah mode dari X ?

Jawab :

Karena $X \sim CAU(0)$, fungsi kepadatan probabilitas dari $f(x)$ adalah

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

Karenanya,

$$f'(x) = \frac{-2x}{\pi(1+x^2)^2}$$

Turunan ini adalah ke 0, sehingga kita mendapatkan $x = 0$. Jadi mode X adalah 0.

Contoh 3.22. Misalkan X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-bx} & untuk\, x \ge 0 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

dimana $b > 0$. Berapa mode X ?

Jawab :

$$0 = \frac{df}{dx}$$

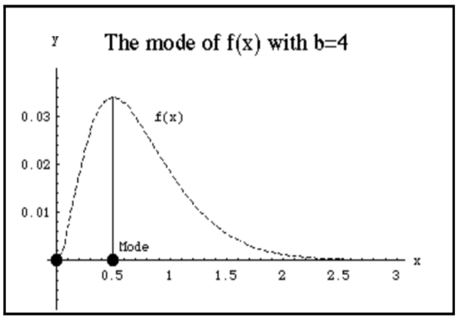
$$= 2xe^{-bx} - x^2 be^{-bx}$$

$$(2 - bx)x = 0$$

Sehingga

$$x = 0 \quad atau \quad x = \frac{2}{b}$$

Jadi mode X adalah $\frac{2}{b}$. Grafik $f(x)$ untuk $b = 4$ ditunjukkan di bawah ini.



Contoh 3.23. Variabel acak kontinu memiliki fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & untuk\, 0 \le x \le \theta \\ \\ 0 & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

untuk $\theta > 0$. Berapakah rasio mode dengan median untuk distribusi ini?

Jawab :

Untuk $\theta > 0$, fungsi kepadatan $f(x)$ adalah fungsi penambah. Jadi, $f(x)$ memiliki maksimum di titik ujung kanan dari interval $[0, \theta]$. Karenanya mode distribusi ini adalah θ. Selanjutnya kita menghitung median dari distribusi ini.

$$\frac{1}{2} = \int_0^q f(x)\,dx$$

$$= \int_0^q \frac{3x^2}{\theta^3}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{\theta^3}\right]_0^q$$

$$= \left[\frac{q^3}{\theta^3}\right]$$

Dengan demikian rasio mode distribusi ini ke median adalah

$$\frac{mode}{median} = \frac{\theta}{2^{-\frac{1}{3}}\theta} = \sqrt[3]{2}$$

Contoh 3.24. Variabel acak kontinu memiliki fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & untuk\ 0 \le x \le \theta \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

untuk $\theta > 0$. Berapakah probabilitas X lebih kecil dari rasio mode ke median distribusi ini?

Jawab :

Pada contoh sebelumnya, kita telah menunjukkan bahwa rasio mode ke median distribusi ini diberikan oleh

$$a := \frac{mode}{median} = \sqrt[3]{2}$$

Oleh karena itu probabilitas X kurang dari rasio mode ke median distribusi ini

$$P(X < a) = \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{3x^2}{\theta^3}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{\theta^3}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{\theta^3}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{\theta^3}$$

$$= \frac{2}{\theta^3}$$

Latihan Soal

1. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x)=\begin{cases} k.x, & untuk\ 0\le x\le\sqrt{\dfrac{2}{k}} \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya. \end{cases}$$

Jika mode distribusi ini pada $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, lalu berapakah median dari X ?

Jawab :

$$1=\int_0^{\sqrt{\frac{2}{k}}} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{2}{k}}} k\,x\,dx$$

$$=\left[\frac{k\,x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{k}}}$$

Diketahui $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ maka $1=\dfrac{k\ .\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}{2}$

$$1=\frac{k\ .\ \frac{2}{16}}{2}$$

$$1=\frac{\frac{2k}{16}}{2}$$

$$1=\frac{2k}{32}$$

$$2k=32$$

$$k=16$$

Sehingga:

$$f(x)=k.x$$

$$f(x) = 16x \qquad 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \int 16x\,dx$$

$$8x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Jadi mediannya adalah $\frac{1}{4}$

2. Variabel acak X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} cx^{k+1}(1-x)^k, \; untuk\, 0 < x < 1 \\ \\ 0 \qquad\qquad untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

di mana $c > 0\, dan 1 < k < 2$. Berapakah mode X ?

Jawab :

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{d\left(cx^{k+1}(1-x)^k\right)}{dx} = 0$$

Misal :

$$u = cx^{k+1} \qquad\qquad v = (1-x)^k$$

$$u' = (k+1)cx^k \qquad v' = k(1-x)^{k-1}(-1) = -k(1-x)^{k-1}$$

Sehingga

$$u'v + uv' = 0$$

$$(k+1)cx^k(1-x)^k - cx^{k+1}k(1-x)^{k-1} = 0$$

$$(k+1)cx^{k}(1-x)^{k}-\frac{cx^{k+1}k(1-x)^{k}}{(1-x)}=0$$

$$\frac{(1-x)(k+1)cx^{k}(1-x)^{k}-cx^{k}xk(1-x)^{k}}{(1-x)}=0$$

$$\frac{cx^{k}(1-x)^{k}\left[(k+1)(1-x)-kx\right]}{(1-x)}=0$$

$$cx^{k}(1-x)^{k}\left[(k+1)(1-x)-kx\right]=0$$

$$k-kx-x+1-kx=0$$

$$k-2k-x+1=0$$

$$k+1=2kx-x$$

$$k+1=(2k+1)x$$

$$x=\frac{k+1}{2k+1}$$

$$Jadi\,diperoleh\,modus\,x=\frac{k+1}{2k+1}$$

3. Variabel acak X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x)=\begin{cases}(k+1).x^{2}, & untuk\,0<x<1\\ 0, & untuk\,yang\,lainnya\end{cases}$$

di mana k adalah konstanta. Berapa median dari X ?

Jawab :

$$1=\int_{0}^{1}(k+1)x^{2}dx$$

$$=\left[\frac{k+1}{3}x^{3}\right]_{0}^{1}$$

$$1=\frac{k+1}{3}$$

$$k+1=3$$

$$k = 3 - 1$$

$$k = 2$$

Jadi,

$$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{q} 3x^2$$

$$\frac{1}{2} = \left[x^3\right]_{-\infty}^{q}$$

$$\frac{1}{2} = q^3$$

$$q = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

4. Berapakah median dan modus untuk fungsi kepadatan

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, \qquad -\infty < x < \infty ?$$

Jawab :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{a-\infty} (\arctan(x)]_{a}^{b}$$

$$= \frac{1}{\pi} (\arctan b + \arctan \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{\arctan b}{\pi}$$

$$0 = \arctan b$$

$b = 0$, maka median $X = 0$

Selanjutnya untuk mencari modusnya adalah

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\right)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(\pi\left(1+x^2)^{-1}\right)}{dx} = 0$$

$$\frac{-2x}{\pi(1+x^2)^2} = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

Jadi diperoleh nilai median $X = 0$ dan modus $X = 0$

5. Berapa persentil ke 10 dari variabel acak X yang fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}.e^{-\frac{x}{\theta}}, & untuk\ \ x \geq 0, \theta > 0 \\ \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Jawab :

PDF dari X, dimana

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad jika \quad x \geq 0$$

CDF dari X, yaitu

$$Fx(X) = P(X \leq x)$$

$$= \int_0^x f(x) dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \left[\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{-\left(\frac{1}{\theta}\right)} \right]_0^x$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

Misalkan x adalah nilai persentil ke-10, diberikan $F(x) = 0.10$

$$1 - e^{-\frac{x}{\theta}} = 0.10$$

$$e^{-\frac{x}{\theta}} = 1 - 0.10$$

$$\log e^{-\frac{x}{\theta}} = \log(0.90)$$

$$-\frac{x}{\theta} = \log(0.90)$$

$$x = -\theta \log(0.90)$$

6. Berapa median dari variabel acak X yang fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & \textit{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Jawab :

$$f(x) = \int_0^p \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^p e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2(e^{-\frac{p}{2}} - \left(-e^0\right) \right))$$

$$= \left(-e^{-\frac{p}{2}} + e^0 \right)$$

$$= -e^{-\frac{p}{2}} + 1$$

$$e^{-\frac{p}{2}} = 1$$

$$\ln e^{-\frac{p}{2}} = \ln 1$$

$$-\frac{p}{2} = \ln 1$$

$$p = -2\ \ln 1$$

Jadi median $-2\ \ln 1$

7. Variabel acak kontinu X memiliki kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{8}, & untuk\ \ 0 \le x \le 2 \\ 0, & untuk\ \ yang\ \ lainnya \end{cases}$$

Berapa probabilitas X lebih besar dari persentil ke-75nya?

Jawab :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{8}, & untuk\ \ 0 \le x \le 2 \\ 0, & untuk\ \ yang\ \ lainnya \end{cases}$$

Persentil ke-75 adalah bilangan m sehingga $P(x \le m) = 0,75$ Kita akan temukan $P(x > m)$

$$P(x > m) = 1 - P(x \le m)$$

$$= 1 - 0,75$$

$$= 0,25$$

8. Berapa fungsi kepadatan probabilitas variabel acak X jika fungsi distribusi kumulatifnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 0,0 & jika\ \ x < 3 \\ 0,5 & jika\, 2 \le x < 3 \\ 0,7 & jika\, 3 \le x < \pi \\ 1,0 & jika\, x \ge \pi\ ? \end{cases}$$

Jawab :

Jarak variabel acaknya

$$R_X = \{2, 3, \pi\}$$

Maka PDF nya adalah

(1) $f(x_1) = F(x_1)$

$f(2) = 0,5$

(2) $f(x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

$f(3) = 0,7 - 0,5 = 0,2$

(3) $f(x_3) = F(x_3) - F(x_2)$

$f(\pi) = 1,0 - 0,7 = 0,3$

9. Misalkan distribusi X untuk $x > 0$ menjadi

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k e^{-x}}{k!}$$

Berapakah fungsi kepadatan X untuk $x > 0$?

Jawab :

CDF untuk X adalah

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k e^{-x}}{k!} \quad , x > 0$$

Jadi PDF untuk X adalah

$$F(x) = \frac{d}{dx}\left\{1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k e^{-x}}{k!}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{1 - \left(\frac{x^k e^{-x}}{0!} + \frac{x^k e^{-x}}{1!} + \frac{x^k e^{-x}}{2!} + \frac{x^k e^{-x}}{3!}\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{1 - \left(e^{-x} + xe^{-x} + \frac{x^2 e^{-x}}{2} + \frac{x^3 e^{-x}}{6}\right)\right\}$$

$$= -\left\{-e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} + \frac{2xe^{-x} - x^2 e^{-x}}{2} + \frac{3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}}{6}\right\}$$

$$= -\left\{-xe^{-x} \pm xe^{-x} - \frac{x^2 e^{-x}}{2} + \frac{x^2 e^{-x}}{2} - \frac{x^3 e^{-x}}{6}\right\}$$

$$= \frac{x^3 e^{-x}}{6} \quad ,x > 0$$

Jadi PDF untuk X adalah

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} x^3 e^{-x}, & untuk\ x > 0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

10. Misalkan X adalah variabel acak kumulatif dengan fungsi kepadatan

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & untuk\ x > 0 \\ 0, & untuk\ x \leq 0 \end{cases}$$

Berapa fungsi $P\left(0 \leq e^{x} \leq 4\right)$?

Jawab :

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 - -e^{-x} = f(x)$$

$$e^{-x} = f(x)$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x} \Big]_0^4$$

$$= -\frac{1}{e^x} \Big]_0^4$$

$$= -\frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{3}{4}$$

11. Misalkan X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-10x}, & untuk\ x \geq 0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

dimana $a > 0$. Berapakah probabilitas X lebih besar atau sama dengan mode X ?

Jawab :

$$\int f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^\infty ax^2 e^{-10x}\,dx = 1$$

$$a\int_0^\infty x^2 e^{-10x}\,dx = 1$$

lalu menggunakan integral $\int fg' = fg' - \int f'g$

jika $f = x^2$ dan $g = e^{-10x}$

$f' = 2x$ dan $g' = -\dfrac{e^{-10x}}{10}$

$$a\int_0^\infty x^2 e^{-10x}\,dx = a\left[-\frac{x^2 e^{-10x}}{10} - 2xe^{-10x}\right]_0^\infty$$

$$= a\left[-\frac{x^2 e^{-10x}}{10} - 2xe^{-10x}\right]_0^\infty$$

sehingga

$$f = 2g' = e^{-10x} \qquad \text{dan} \qquad F' = 1g = -\frac{e^{-10x}}{10}$$

Maka :

$$\frac{1}{5}\left[-\frac{e^{-10x}}{10} - \int \frac{e^{-10x}}{10}\,dx\right] = \frac{xe^{-10x}}{50} + \frac{e^{-10X}}{500}$$

$$a\left[-\frac{x^2 e^{-10x}}{10} - \frac{xe^{-10x}}{50} - \frac{e^{-10x}}{500}\right]_0^\infty = 1$$

$$\left[-\frac{50x^2 e^{-10x} - 10xe^{-10x} - e^{-10x}}{500}\right]_0^\infty = 1$$

$$a\left[-\frac{e^{-10x}\left(50x^2 + 10x + 1\right)}{500}\right]_0^\infty = 1 \ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$\frac{a}{500} = 1$$

$$\therefore a = 500$$

Untuk mencari modus dari $f\left(x\right)=500x^2e^{-10x}$

$$\frac{d\left(fx\right)}{dx}=500\left[2x^{e^{-10x}}+\left(-10\right)^{e^{-10x}}x^2\right]$$

Dengan $\frac{d\left(fx\right)}{dx}=0$ diperoleh

$$1000e^{-10x}-5000e^{-10x}x=0$$

$$x=\frac{1}{5}$$

$$=0,2$$

$\therefore$ Jadi, didapatkan modusnya 0,2

probabilitas $\left(x\geq modus\right)$

$$P\left(x\geq 0,2\right)=\int_0^{0,2}500x^2e^{-10x}$$

$$=500\left[-\frac{e^{-10x}\left(50x^2+10x+1\right)}{500}\right]_0^{0,2}$$

$$=-\left[e^{-2}\left[50x\left(0,2\right)^2+10x\left(0,2\right)+1)\right]-\left[e^{-0}\left(50x\left(O\right)+10x\left(0\right)+1\right)\right]$$

$$=\left[e^{-2}\left(2+2+1\right)-1\right]$$

$$=-\left[5e^{-5}-1\right]=\left[1-5e^{-5}\right]$$

$$=0,32332358 \quad \approx 0,323$$

12. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi kepadatan

$$f\left(x\right)=\begin{cases} kx & untuk \quad 0\leq x\leq\sqrt{\frac{2}{k}} \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Jika mode distribusi ini berada pada $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ berapakah probabilitas dari X kurang dari median X?

Jawab :

Cari mediannya

$$\frac{1}{2} = \int_0^t kx \ dx$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(kx^2\right]_0^t$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(kt^2\right)$$

$$1 = \frac{\sqrt{2}}{4}t^2$$

$$4 = \sqrt{2}\ t^2$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = t^2$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{2} = t^2$$

$$t = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

Cari nilai k dari modus

$$0 = \frac{df\left(x\right)}{dx} = k$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$P\left(x < t\right) = \int_0^{\sqrt{2\sqrt{2}}} kx\, dx$$

$$= \frac{1}{2}kx^2\Big]_0^{\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}.2\sqrt{2} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Variabel acak X memiliki fungsi kepadatan

$$f\left(x\right) = \begin{cases} (k+1)x^2 & untuk\ \ 0 < x < 1 \\ 0 & untuk\ \ yang\ \ lainnya \end{cases}$$

dimana k adalah konstanta. Berapa probabilitas X antara yang pertama dan kuartil ketiga?

Jawab :

- Mencari Q1

$$\int_0^{Q1} f\left(x\right)dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{Q1} \left(k+1\right)x^2\, dx = \frac{1}{4}$$

$$\left(k+1\right)\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{Q1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(k+1\right)\frac{Q1^3}{3} = \frac{1}{4}$$

$$Q_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{4(k+1)}}$$

$$= \left(\frac{3}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

- Mencari Q3

$$\int_0^{Q3} (fx)\,dx = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{Q3} (k+1)x^2 dx = \frac{3}{4}$$

$$(k+1)\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{Q3} = \frac{3}{4}$$

$$(k+1)\frac{Q3^3}{3} = \frac{3}{4}$$

$$Q_3 = \left(\frac{9}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Probabilitas dari Q1 dan Q3 adalah

$$\int_{\left(\frac{3}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{9}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}}} (k+1)x^2 dx = (k+1)\frac{x^3}{3}\Bigg|_{\left(\frac{3}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{9}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{(K+1)}{3} = \left(\frac{9}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}3} - \left(\frac{3}{4(k+1)}\right)^{\frac{1}{3}3}$$

$$\frac{(K+1)}{3} = \left(\frac{9}{4(k+1)}\right) - \left(\frac{3}{4(k+1)}\right)$$

$$= \frac{(K+1)}{3}\left[\frac{6}{4(k+1)}\right]$$

$$= \frac{6}{12}$$

$$= \frac{1}{2}$$

13. Misalkan X adalah variabel acak yang memiliki fungsi distribusi kumulatif kontinu $F(x)$. Berapa fungsi distribusi kumulatif $Y = max(0, -X)$?

Jawab :

Misalkan Dengan fungsi distribusi kumulatif kontinu $F(x)$. Diberikan $Y = max(0, -X)$ Maka fungsi distribusi kumulatif dari Y adalah

$$F_Y(Y \le y) = F_Y(Max(0, -X) \le y)$$

$$= F_Y(0 \le -X \le y)$$

Untuk $y < 0 \Rightarrow \{0 \le -X \le y\} = \varnothing$

Sehingga

$$F_Y(Y \le y) = 0$$

Untuk $y \ge 0 \Rightarrow F_Y(Y \le y)$

$$F_X(-X \le y) = F_X(X \ge -y)$$

$$= 1 - F_X(X \le -y)$$

$$= 1 - F_X(-y)$$

Sehingga fungsi distribusi kumulatif $Y = max\ (0, -X)$ adalah

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - F_x(-y), & y \ge 0 \end{cases}$$

14. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x) = \frac{2}{3^x} \qquad dimana\, x = 1, 2, 3, \ldots$$

Apakah probabilitas X adalah genap?

Jawab :

Misalkan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$F(x) = \frac{2}{3^x} \qquad untuk\ x = 1,2,3,\ldots.$$

Probabilitas bahwa X genap

$$= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \ldots$$

Ini adalah Deret Geometris, Menggunakan rumus penjumlahan deret geometris:

$$\frac{a}{1-r}$$

Dimana a adalah istilah pertama, r adalah rasio umum,

$$Disini\ a = \frac{2}{9} \Rightarrow r = \frac{\frac{2}{3^4}}{\frac{2}{3^2}} = \frac{1}{9}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

15. Sebuah guci berisi 5 bola bernomor 1 sampai 5. Dua bola dipilih secara acak tanpa dikembalikan ke guci. Jika variabel acak X menunjukkan jumlah angka pada 2 bola, lalu berapakah ruang sampel dan kepadatan probabilitas dari X ?

    Jawab :

    Diketahui : 5 bola dengan nomor 1 sampai 5

    Dipilih 2 bola secara acak tanpa diganti

    Variabel acak X menunjukkan angka pada 2 bola

Ditanyakan : ruang sampel dan kepadatan probabilitas X ?

$$5\,bola = (1,2,3,4,5)$$

Diambil 2 tanpa pengembalian

$$N(A) = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),$$
$$(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

$$N(A) = 20$$

kita tau bahwa X menunjukkan angka pada 2 bola, maka:

X	$P(X)$
3	$\frac{2}{20}$
4	$\frac{2}{20}$
5	$\frac{4}{20}$
6	$\frac{4}{20}$
7	$\frac{4}{20}$
8	$\frac{2}{20}$
9	$\frac{2}{20}$
Total	1

Lalu,

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{2}{20} & dimana\, x = 3,4,8,9 \\ \dfrac{4}{20} & dimana\, x = 5,6,7 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

16. Sepasang dadu bersisi enam dilempar dan jumlahnya ditentukan. Jika variabel acak X menunjukkan jumlah angka yang muncul, lalu berapakah ruang sampel dan kepadatan probabilitas X?

    Jawab:

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

$x=2 \rightarrow (1,1)$

$x=3 \rightarrow (1,2),(2,1)$

$x=4 \rightarrow (1,3),(2,2),(3,1)$

$x=5 \rightarrow (1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$

$x=6 \rightarrow (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$

$x=7 \rightarrow (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$

$x=8 \rightarrow (2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$

$x=9 \rightarrow (3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$

$x=10 \rightarrow (4,6),(5,5),(6,4)$

$x=11 \rightarrow (5,6),(6,5)$

$x=12 \rightarrow (6,6)$

$$R_X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Fungsi kepadatan probabilitas X

$$F(2)=P(x=2)=\frac{1}{36}$$

$$F(3)=P(x=3)=\frac{2}{36}$$

$$F(4)=P(x=4)=\frac{3}{36}$$

$$F(5)=P(x=5)=\frac{4}{36}$$

$$F(6)=P(x=6)=\frac{5}{36}$$

$$F(7)=P(x=7)=\frac{6}{36}$$

$$F(8)=P(x=8)=\frac{5}{36}$$

$$F(9)=P(x=9)=\frac{4}{36}$$

$$F(10)=P(x=10)=\frac{3}{36}$$

$$F(11)=P(x=11)=\frac{2}{36}$$

$$F(12)=P(x=12)=\frac{1}{36}$$

17. Lima kode digit dipilih secara acak dari himpunan $\{0,1,2,...,9\}$ dengan penggantinya. Jika variabel acak X menunjukkan jumlah nol dalam kode yang dipilih secara acak, lalu berapakah ruang sampel dan kepadatan probabilitas dari X ?

Jawab:

$x = no\ untuk\ nol$

$5\ digit\ kode\ :$…..

Untuk mengisi 5 digit tersebut dengan nilai $\{0,1,2,...,9\}$

Banyaknya cara $=10\ .10\ .10\ .10\ .10=10^5$

$$R_X=\{0,1,2,3,4,5\}$$

Jadi PDF untuk X adalah

$$f(0)=P(X=0)=\frac{9\times9\times9\times9\times9}{10^5}=0,59049$$

$$f(1)=P(X=1)=\frac{\begin{pmatrix}5\\C_2\end{pmatrix}\times9\times9\times9\times9\times1}{10^5}=0,32805$$

$$f(2)=P(X=2)=\frac{\begin{pmatrix}5\\C_2\end{pmatrix}\times 9\times 9\times 9\times 1\times 1}{10^5}=0,0729$$

$$f(3)=P(X=3)=\frac{\begin{pmatrix}5\\C_2\end{pmatrix}\times 9\times 9\times 1\times 1\times 1}{10^5}=0,0081$$

$$f(4)=P(X=4)=\frac{\begin{pmatrix}5\\C_2\end{pmatrix}\times 9\times 1\times 1\times 1\times 1}{10^5}=0,00045$$

$$f(5)=P(X=5)=\frac{\begin{pmatrix}5\\C_2\end{pmatrix}\times 1\times 1\times 1\times 1\times 1}{10^5}=0,00001$$

18. Sebuah guci berisi 10 koin dan 4 di antaranya palsu. Koin dikeluarkan dari guci, satu per satu, sampai semua koin palsu ditemukan. Jika variabel acak X menunjukkan jumlah koin yang dihilangkan untuk menemukan koin palsu pertama, lalu berapakah ruang sampel dan fungsi kepadatan probabilitas dari X ?

    Jawab :

    $$Rx=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

    $$f(1)=P(x=1)=\frac{4}{10}=0,4$$

    $$f(2)=P(x=2)=\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{24}{90}=0,2666$$

    $$f(3)=P(x=3)=\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)=\frac{120}{720}=0,1666$$

    $$f(4)=P(x=4)=\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{4}{7}\right)=\frac{480}{5040}=0,0952$$

    $$f(5)=P(x=5)=\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{1440}{30240}=0,0476$$

    $$f(6)=P(x=6)=\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{2880}{151200}=0,0190$$

$$f(7)=P(x=7)=\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{4}\right)=\frac{2880}{604800}=0,0047$$

19. Misalkan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x)=\frac{2c}{3^x} \qquad \textit{dimana}\; x=1,2,3,\ldots,\infty.$$

untuk beberapa konstan c. Berapakah nilai c? Berapa probabilitas X, apakah itu genap?

Jawab :

Diberikan $f(x)=\frac{2c}{3^x}$ *untuk* $x=1,2,3,\ldots,\infty$ dengan c adalah konstan "x" menjadi variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas, dimana kita menemukan nilai dari c dan probabilitas dari "x".

(i) $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{\infty} \frac{2c}{3^x}\,dx=1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\infty\right]=1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\infty\right]=1 \qquad \text{........................... (1)}$$

(ii) Kita tahu bahwa

$$\left[a+a\gamma+a\gamma^2+a\gamma^3+\ldots+\infty=\frac{a}{a-\gamma}\right] \qquad \text{............................(2)}$$

dengan a adalah syarat pertama dan γ adalah perbandingan umum

Bandingkan persamaan pertama dengan persamaan kedua, dimana $a=\frac{1}{3}$ dan $\gamma=\frac{1}{3}$

Substitusikan nilai tersebut ke persamaan (2) sehingga,

$$2c\left\{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right\}=1$$

$$\Rightarrow 2c\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow c=1$$

(iii) Untuk x dimana $x=2,4,6,\ldots,\infty$

$$P(x=2)=\frac{2}{3^2}\,, \qquad P(x=4)=\frac{2}{3^4}\,,\ldots$$

$$P(x=sama)=2\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\infty\right]$$

Persamaan pertama = $\frac{1}{a}$, perbandingan umum = $\frac{1}{a}$

$$\therefore P(x=sama) = 2\left[\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}\right]=\frac{1}{4}$$

20. Jika variabel acak X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x)=\begin{cases} cx & untuk \quad 0\le x\le 2 \\ \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

lalu berapakah nilai c untuk $f(x)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas? Berapakah fungsi distribusi kumulatif dari X. Gunakan $F(x)$ untuk menghitung $P(1\le X\le 2)$

Jawab :

$$\int_0^2 cx\ dx=1$$

$$\left[\frac{c}{2}x^2\right]_0^2=1$$

$$\frac{4c}{2}=\frac{1}{1}$$

$$4c=2$$

$$c = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = P(1 \le x \le 2)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2} x \ dx = \left[\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} x^2 \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} 22 \right) - \left(\frac{1}{4} 12 \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

21. Lamanya waktu yang dibutuhkan siswa untuk menyelesaikan ujian selama 1 jam adalah variabel acak dengan PDF yang diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x & \text{untuk} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

lalu berapa probabilitas seorang siswa menyelesaikannya dalam waktu kurang dari setengah jam?

Jawab :

$$f(x) = cx^2 + x; 0 \le x \le 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 cx^2 + x \, dx = 1$$

$$\left[c \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$\frac{c}{3}+\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{c}{3}=\frac{1}{2}$$

$$c=\frac{3}{2}$$

$$P\left(0\le x\le 0,5\right)=\int_{0}^{0,5}cx^{2}+x\,dx$$

$$=\int_{0}^{0,5}\frac{3}{2}x^{2}+x\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{2}}{2}\right]_{0}^{0,5}$$

$$=\left[\frac{x^{3}}{2}+\frac{x^{2}}{2}\right]_{0}^{0,5}$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{16}$$

22. Berapa probabilitas, ketika ditutup matanya, mengenai lingkaran yang tertulis di dinding persegi

Jawab :

Luas lingkaran $=\pi r^{2}$

Luas persegi $=sxs=s^{2}$

$$Probabilitas=\frac{luas\,lingkaran}{luas\ persegi}=\frac{\pi r^{2}}{s^{2}}$$

Misalkan jari-jari lingkaran = r maka $s=2r$

$$probabilitas=\frac{\pi r^{2}}{s^{2}}$$

$$= \frac{\pi r^2}{(2r)^2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{4r^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{3,14}{4}$$

$$= 0,785$$

23. Misalkan $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas kontinu. Tunjukkan itu, untuk setiap $-\infty < \mu < \infty$ dan $\sigma > 0$ fungsi $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ juga kemungkinan fungsi kepadatan.

    Jawab :

    Misalkan $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas kontinu

    $$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \textit{adalah fungsi kepadatan probabilitas parsial} (pdp)$$

    $$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0, \forall -\infty < x < \infty$$

    $$-\infty < \mu < \infty$$

    $$\sigma > 0$$

    $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx$$

    Subtitusi

    $$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

    $$dy = \frac{dx}{\sigma}$$

    $$\frac{dx}{dy} = \sigma$$

    $$-\infty < x < \infty \Rightarrow -\infty < y < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} f_x(y)\sigma\, dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(y)\, dy = 1$$

24. Misalkan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$ dan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$. Benar atau salah?
    a) $f(x)$ tidak boleh lebih besar dari 1.
    b) $F(x)$ tidak boleh lebih besar dari 1.
    c) $f(x)$ tidak bisa berkurang.
    d) $F(x)$ tidak bisa berkurang.
    e) $f(x)$ tidak boleh negatif.
    f) $F(x)$ tidak boleh negatif.
    g) Area di bawah f harus 1
    h) Area di bawah F harus 1
    i) f tidak bisa lompat.
    j) F tidak bisa melompat

    Jawab :

    a) Benar, karena $f(x) \geq 0,$ untuk semua x.

       Maka $\sum f(x) = 1,\ \ f(x)$ tidak mungkin lebih dari 1.

    b) Benar, karena $F_X(x) = P(X \leq x)$, dengan kepadatan probabilitas.

       Maka, $F_X(x)$ tidak bisa lebih besar dari 1.

       Jadi $0 \leq (X \leq x) \leq 1$.

    c) Salah, karena $f'(x) < 0$ hanya untuk satu kasus.

       Dimana $f(x)$ conduction.

       Jadi $f(x)$ tidak bisa densitas.

    d) Salah, karena dari probabilitas $F(x),\ \ F(x)$ adalah bukan fungsi density.

       Maka $F(x)$ bukan density.

e) Benar, karena $f(x)$ tidak bisa negatif.

f) Benar, karena dari pernyataan (b), $F(x)$ tidak bisa negatif.

g) Benar, karena $\sum_x f(x) = 1$, dimana $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Jadi, batasan bawah f harus 1

h) Salah

i) Benar

j) Benar

BAB IV

MOMEN VARIABEL ACAK DAN PERTIDAKSAMAAN CHEBYCHEV

4.1 Momen Variabel Acak

Dalam bab ini, kita jelaskan konsep berbagai momen dari variabel acak. Selanjutnya, kita membahas nilai Ekspektasi dan Varians Variabel Acak secara rinci. Kita akan mengakhiri bab ini dengan membahas Pertidaksamaan Chebychev.

Definisi 4.1. Momen ke-n mengenai asal mula variabel acak X, sebagaimana dilambangkan dengan $E\left(X^n\right)$, didefinisikan sebagai

$$E\left(X^n\right)=\begin{cases}\sum_{x\in Rx} x^n f\left(x\right) & \textit{jika X diskrit}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f\left(x\right)dx & \textit{jika X kontinu}\end{cases}$$

Untuk $n=0,1,2,3,\ldots$

Jika $n=1$, maka $E\left(X\right)$ disebut momen pertama mengenai titik asal. Jika $n=2$, maka $E\left(X^2\right)$ disebut momen kedua X mengenai titik asal. Secara umum, momen-momen ini mungkin ada atau mungkin tidak ada untuk variabel acak tertentu. Jika untuk variabel acak, momen tertentu tidak ada, maka kita katakan bahwa variabel acak tidak memiliki momen itu. Selanjutnya kita harus mendefinisikan dua karakteristik penting dari variabel acak, yaitu nilai ekspetasi dan varians. Terkadang dapat ditulis $E\left(X^n\right)$ maupun sebagai $E\left[X^n\right]$.

4.2 Nilai Harapan dari Variabel Acak

Variabel acak X dicirikan dengan fungsi kepadatan probabilitasnya, yang mendefinisikan kemungkinan relatif untuk mengasumsikan satu nilai di atas yang lain. Dalam Bab 3, kita telah melihat bahwa diberikan fungsi kepadatan probabilitas f dari variabel acak X, kita dapat membangun fungsi distribusi F darinya melalui penjumlahan atau integrasi. Sebaliknya, fungsi kepadatan $f\left(x\right)$ dapat diperoleh sebagai nilai marginal atau turunan dari $F\left(x\right)$. Kepadatan fungsi dapat digunakan untuk menyimpulkan sejumlah karakteristik yang mendasari variabel acak. Dua hal yang terpenting adalah ukuran letak dan penyebaran. Pada bagian ini, kita memperlakukan ukuran letak dan penyebaran ukuran lainnya di bagian selanjutnya.

Definisi 4.2.

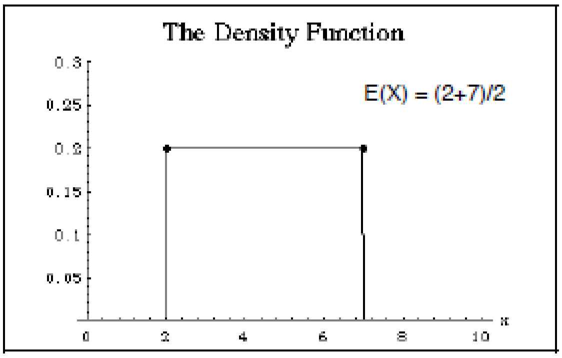
Misalkan X adalah variabel acak dengan ruang R_X dan probabilitas fungsi kepadatan $f(x)$. Rata-rata μ_X dari variabel acak X didefinisikan sebagai

$$\mu_X = \begin{cases} \sum_{x \in Rx} x\, f(x) & \textit{jika X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & \textit{jika X kontinu} \end{cases}$$

Mean dari variabel acak adalah gabungan dari nilai-nilainya yang diberi bobot oleh probabilitas yang sesuai. Mean adalah ukuran tendensi sentral: nilai yang diambil "rata-rata" oleh variabel acak. Maksudnya juga disebut nilai yang diharapkan dari variabel acak X dan dilambangkan dengan $E(X)$. Simbol E itu disebut operator ekspektasi. Nilai ekspektasi dari suatu variabel acak mungkin ada atau mungkin tidak ada.

Contoh 4.1.

Jika X adalah variabel acak seragam pada interval $(2,7)$, maka berapa mean dari x?



Jawab :

Fungsi kepadatan X adalah

$$\mu_X = \begin{cases} \frac{1}{5} & \textit{jika } 2 < x < 7 \\ 0 & \textit{untuk yang lain} \end{cases}$$

Jadi mean atau nilai ekspektasi dari X adalah

$$\mu_X = E(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{2}^{7} x \frac{1}{5}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{10} x^2 \right]_2^7$$

$$= \frac{1}{10}(49-4)$$

$$= \frac{45}{10}$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$= \frac{2+7}{2}$$

Secara umum jika $X \sim UNIF(a,b)$, maka $E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$

Contoh 4.2. Jika X adalah variabel acak Cauchy dengan parameter θ, berarti $X \sim CAU(\theta)$, lalu berapa nilai ekspektasi dari X ?

Jawab :

Kita ingin mencari nilai harapan dari X jika ada. Nilai harapan dari X akan ada jika integral $\int_n |x f(x)| dx$ konvergen mutlak (absolute), yaitu

$$\int_n |x f(x)| dx < \infty$$

Jika integral ini menyimpang, maka nilai harapan dari X tidak ada. Karenanya, mari kita cari tahu jika $\int_n |x f(x)| dx$ konvergen atau tidak.

$$\int_n |x f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| x \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2} \right| dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| (z+\theta) \frac{1}{\pi(1+z^2)} \right| dz$$

$$= \theta + 2\int_0^{\infty} z \frac{1}{\pi(1+z^2)} dx$$

$$= \theta + \left[\frac{1}{\pi} \ln(1+z^2) \right]_0^{\infty}$$

$$= \theta + \frac{1}{\pi} \lim_{b \to \infty} \ln\left(1 + b^2\right)$$

$$= \theta + \infty$$

$$= \infty$$

Karena, integral di atas tidak ada, nilai harapan untuk Cauchy distribusi juga tidak ada.

Catatan 4.1. Memang dapat ditunjukkan bahwa variabel acak X dengan Distribusi Cauchy, $E\left(X^n\right)$, tidak ada untuk bilangan asli n. Jadi, Variabel acak Cauchy tidak memiliki momen sama sekali.

Contoh 4.3. Jika fungsi kepadatan probabilitas variabel acak X adalah

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & jika\, x = 1, 2, 3, 4, \ldots, \infty \\ 0 & untuk\ yang\, lain \end{cases}$$

lalu berapa nilai ekspektasi dari X?

Jawab :

Nilai ekspektasi dari X adalah

$$E(X) = \sum_{x \in Rx} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p$$

$$= p \frac{d}{dp} \left\{ \int \left[\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p \right] dp \right\}$$

$$= -p \frac{d}{dp} \left\{ \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x \right\}$$

$$= -p \frac{d}{dp} \left\{ (1-p) \frac{1}{1-(1-p)} \right\}$$

$$= -p \frac{d}{dp} \left\{ \frac{1}{p} \right\}$$

$$= p \left(\frac{1}{p} \right)^2$$

$$= \frac{1}{p}$$

Karenanya nilai yang diharapkan dari X adalah kebalikan dari parameter p.

Definisi 4.3.

Jika variabel acak X yang fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}\, p & jika\, x = 1,2,3,4,\ldots,\infty \\ 0 & untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

disebut variabel acak geometri dan dilambangkan dengan $X \sim GEO(p)$.

Contoh 4.4.

Sepasang suami istri memutuskan untuk memiliki 3 anak. Jika dari 3 anak tersebut tidak ada seorang gadis, mereka akan mencoba lagi; dan jika mereka masih belum mendapatkan seorang gadis, mereka akan mencobanya sekali lagi. Jika variabel acak X menunjukkan jumlah anak pasangan tersebut akan mengikuti skema ini, lalu berapa nilai yang diharapkan dari X?

Jawab :

Karena pasangan dapat memiliki 3 atau 4 atau 5 anak, maka ruang sampel variabel acak X adalah

$$R_X = \{3,4,5\}$$

Fungsi kepadatan probabilitas X diberikan oleh

$$\begin{aligned} f(3) &= P(X=3) \\ &= P(setidaknya\ satu\ P) \\ &= 1 - P(tidak\ ada\ P) \\ &= 1 - P(3\,L\ dalam\ 3\ percobaan) \\ &= 1 - \left(P(1\,L\ disetiap\ percobaan)\right)^3 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$$= \frac{7}{8}$$

$$f(4) = P(X = 4)$$

$$= P(3\,L\,dan\,1\,P\,dalam\ percobaan\ terakhir)$$

$$= \left(P(1\,L\,setiap\ percobaan)\right)^3 \times$$

$$P(1\,P\,di\ percobaan\ terakhir)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$f(5) = P(X = 5)$$

$$= P(4\,L\,dan\,1\,P\,di\ percobaan\ terakhir) +$$

$$P(5\,L\,dalam\,5\ percobaan)$$

$$= P(1\,L\,disetiap\ percobaan)^4 \times$$

$$P(1\,P\,di\ percobaan\ terakhir) +$$

$$P(1\,L\,disetiap\ percobaan)^5$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \frac{1}{16}$$

Oleh karena itu, nilai harapan dari variabel acak adalah

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=3}^{5} xf(x)$$

$$= 3f(3) + 4f(4) + 5f(5)$$

$$= 3\frac{14}{16} + 4\frac{1}{16} + 5\frac{1}{16}$$

$$= \frac{42+4+5}{16}$$

$$= \frac{51}{16}$$

$$= 3\frac{3}{16}$$

Catatan 4.2. Kita menafsirkan ini secara fisik sebagai makna bahwa jika banyak pasangan memiliki anak menurut skema ini, kemungkinan rata-rata ukuran keluarga akan mendekati $3\frac{3}{16}$ anak-anak.

Contoh 4.5. Sebanyak 8 set TV termasuk 3 yang rusak. Jika 4 set dipilih secara acak untuk dikirim ke hotel, berapa banyak set TV rusak yang dapat mereka harap kan?

Jawab :

Misalkan X adalah variabel acak yang merepresentasikan jumlah TV yang rusak dalam sebuah pengiriman 4. Maka ruang sampel X adalah

$$R_x = \{0,1,2,3\}$$

Kemudian fungsi kepadatan probabilitas X diberikan oleh

$$f(x) = P(X = x)$$

$$= P(x\, 4TV\ rusak\ dalam\ pengiriman)$$

$$= \frac{\binom{3}{x}\binom{5}{4-x}}{\binom{8}{4}} \qquad x = 0,1,2,3.$$

Oleh karena itu, kita dapatkan

$$f(0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{5}{70}$$

$$f(1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70}$$

$$f(2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70}$$

$$f(3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{5}{70}$$

Oleh karena itu, nilai yang diharapkan dari X diberikan oleh

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, f(x)$$

$$= \sum_{0}^{3} x\, f(x)$$

$$= f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

$$= \frac{30}{70} + 2\frac{30}{70} + 3\frac{5}{70}$$

$$= \frac{30 + 60 + 15}{70}$$

$$= \frac{105}{70}$$

$$= 1.5$$

Catatan 4.3. Karena mereka tidak mungkin mendapatkan 1,5 TV yang rusak, perlu dicatat bahwa istilah "berharap" tidak digunakan dalam arti sehari-hari. Memang, itu harus diartikan sebagai rata-rata yang berkaitan dengan pengiriman berulang yang dilakukan dalam kondisi tertentu. Sekarang kita membuktikan hasil tentang operator nilai harapan E.

Teorema 4.1. Misalkan X adalah variabel acak dengan PDF $f(x)$. Jika a dan b adalah dua bilangan real, maka

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Bukti :

Kita akan membuktikan hanya untuk kasus berkelanjutan.

$$E(aX+b)=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}ax\,f(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}b\,f(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx+b$$

$$=a\,E(X)+b$$

Untuk membuktikan kasus diskrit, gantikan integral dengan penjumlahan. Ini melengkapi buktinya.

4.3 Varians Variabel Acak

Definisi 4.4. Misalkan X adalah variabel acak dengan mean μ_X. Varians X, dilambangkan dengan $Var(X)$, didefinisikan sebagai

$$Var(X)=E\left(\left[X-\mu x\right]^2\right)$$

Ini juga dilambangkan dengan σ_X^2. Akar kuadrat positif dari varians disebut simpangan baku dari variabel acak X. Seperti varians, simpangan baku juga mengukur sebaran. Teorema berikut memberi tahu kita cara menghitung varians dengan cara alternatif.

Teorema 4.2. Jika X adalah variabel acak dengan mean μ_X dan varians σ_X^2, kemudian

$$\sigma_X^2 = E\left(X^2\right) - \left(\mu_X\right)^2$$

Bukti :

$$\sigma_X^2 = E\left(\left[X - \mu_X\right]^2\right)$$

$$= E\left(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - 2\mu_X E\left(X\right) + \left(2\mu_X\right)^2$$

$$= E\left(X^2\right) - 2\mu_X \mu_X + \left(\mu_X\right)^2$$

$$= E\left(X^2\right) - \left(\mu_X\right)^2$$

Teorema 4.3. Jika X adalah variabel acak dengan mean μ_X dan varians σ_X^2, kemudian

$$Var\left(aX + b\right) = a^2 Var\left(X\right),$$

Dimana $a\, dan\, b$ adalah konstanta real yang berubah-ubah.

Bukti :

$$Var\left(aX + b\right) = E\left(\left[\left(aX + b\right) - \mu_{aX+b}\right]^2\right)$$

$$= E\left(\left[aX + b - E\left(aX + b\right)\right]^2\right)$$

$$= E\left(\left[a\left(X + b\right) - a\mu_{X+} - b\right)\right]^2\right)$$

$$= E\left(a^2\left[X - \mu_X\right]^2\right)$$

$$= a^2 E\left(\left[X - \mu_X\right]\right)^2$$

$$= a^2 Var\left(X\right).$$

Contoh 4.6. Misalkan X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{k^2} & \textit{untuk}\; 0 \le x \le k \\ 0 & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Untuk nilai k apakah varians X sama dengan 2?

Jawab :

Nilai yang diharapkan dari X adalah

$$E(X) = \int_0^k x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^k x \frac{2x}{k^2} dx$$

$$= \frac{2}{3}k.$$

$$E(X^2) = \int_0^k x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^k x^2 \frac{2x}{k^2} dx$$

$$= \frac{2}{4}k^2$$

Oleh karena itu, varians diberikan oleh

$$Var(X) = E(X^2) - (\mu_X)^2$$

$$= \frac{2}{4}k^2 - \frac{4}{9}k^2$$

$$= \frac{1}{18}k^2.$$

Karena varians ini diberikan menjadi 2, kita dapatkan

$$\frac{1}{18}k^2 = 2$$

Dan ini berarti $k = \pm 6$. Tapi k diberikan untuk lebih besar dari 0, karenanya k harus sama dengan 6.

■ **Contoh 4.7.** Jika fungsi kepadatan probabilitas variabel acak adalah

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & untuk\ \ |x|<1 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Lalu berapa varians dari X?

Jawab :

Karena $Var(X) = E(X^2) - \mu|_x^2$, kita perlu menemukan momen pertama dan kedua dari X. Momen pertama X diberikan oleh

$$\mu_X = E(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(1-|x|\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x(1+x)\, dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x+x^2\right) dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= 0$$

Momen kedua $E(X^2)$ dari X diberikan oleh

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 \left(1-|x|\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2 (1+x)\, dx + \int_{0}^{1} x^2 (1-x)\, dx$$

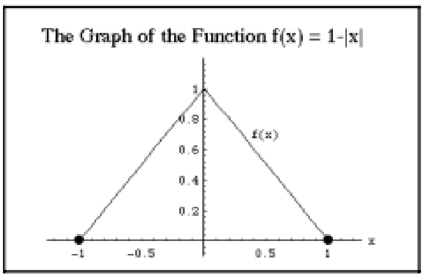
$$= \int_{-1}^{0} \left(x^2+x^3\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x^2-x^3\right) dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Jadi, varians X diberikan oleh

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 x = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$



Contoh 4.8. Misalkan variabel acak X memiliki mean μ dan varians $\sigma^2 > 0$. Berapakah nilai dari bilangan a dan b yang dimiliki $a + bX$ memiliki mean 0 dan varians 1?

Jawab :

Mean dari variabel random adalah 0. Jadi

$$0 = E(a + bX)$$

$$= a + bE(X)$$

$$= a + b\mu$$

Jadi $a = -b\mu$. Demikian pula, varian dari $a + bX$ adalah 1. Yaitu

$$1 = Var(a + bX)$$

$$= b^2 \, Var(X)$$

$$= b^2 \sigma^2.$$

Karenanya

$$b = \frac{1}{\sigma} \text{ dan } a = -\frac{\mu}{\sigma}$$

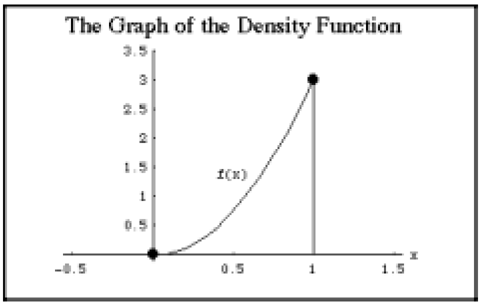
Atau

$$b = -\frac{1}{\sigma} \text{ dan } a = \frac{\mu}{\sigma}$$

Contoh 4.9. Misalkan X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & untuk\, 0 < x < 1 \\ 0 & untuk\, lainnya \end{cases}$$

Berapa daerah yang diharapkan dari segitiga siku-siku acak sama kaki dengan hipotenusa X?



Jawab :

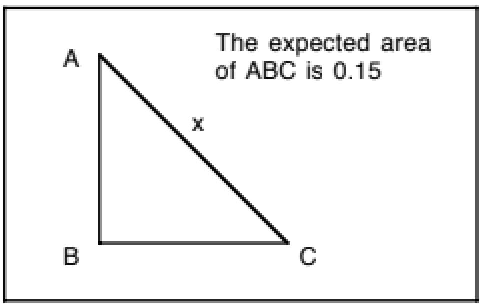
Misalkan ABC menunjukkan segitiga siku-siku sama kaki acak ini. Misalkan $AC = x$. Kemudian

$$AB = BC = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$Daerah\, dari\, ABC = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{4}$$

Daerah yang diharapkan dari segitiga acak ini diberikan oleh

$$E(daerah\, acak\, ABC) = \int_0^1 \frac{x^2}{4} 3x^2\, dx = \frac{3}{20}.$$



Untuk contoh selanjutnya, kita membutuhkan hasil berikut ini. Untuk $-1 < x < 1$, misalkan

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ax^k = \frac{a}{1-x}$$

Kemudian

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a\,k\,x^{k-1} = \frac{a}{(1-x)^2}$$

Dan

$$g''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} ak(k-1)x^{k-2} = \frac{2a}{(1-x)^3}.$$

Contoh 4.10. Jika fungsi kepadatan probabilitas variabel acak X adalah

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}\,p, \ jika\, x = 1,2,3,4,\ldots,\infty \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad untuk\, lainnya \end{cases}$$

lalu berapa varians dari X?

Jawab :

Kita ingin mencari varians dari X. Tetapi varians dari X sudah ditentukan sebagai

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$$

Kita menulis varians dengan cara di atas karena $E(X^2)$ tidak memiliki bentuk penyelesaian tertutup. Namun, penyelesaian bentuk tertutup dari $E(X(X-1))$ dapat ditemukan. Dari Contoh 4.3, kita tahu bahwa $E(X) = \frac{1}{p}$. Karenanya, kita sekarang fokus pada penemuan momen faktorial kedua dari X, yaitu $E(X(X-1))$.

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)(1-p)^{x-1}\,p$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)(1-p)(1-p)^{x-2}\,p$$

$$= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3}$$

$$= \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Karenanya

$$Var(X) = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

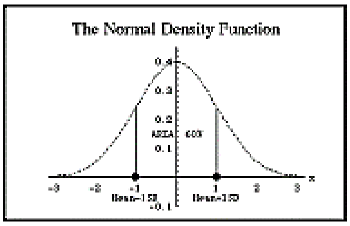
4.4 Pertidaksamaan Chebychev

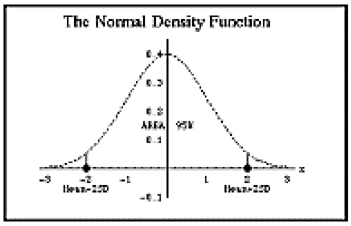
Standar Deviasi (yang merupakan akar kuadrat positif dari varians) mengukur penyebaran distribusi variabel acak. Penyebaran diukur berdasarkan luas daerah antara dua nilai. Daerah di bawah pdf di antara dua nilai adalah probabilitas X antara dua nilai. Jika standar deviasi σ terukur penyebaran, maka σ harus mengontrol daerah antara dua nilai.

Diketahui bahwa jika fungsi kepadatan probabilitas adalah standar, itu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

kemudian mean $\mu = 0$ dan standar deviasi $\sigma = 1$, dan daerah di antara nilai $\mu - \sigma$ dan $\mu + \sigma$ adalah 68%.





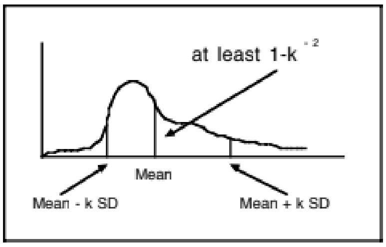
Begitu pula daerah antara nilai $\mu - 2\sigma$ dan $\mu + 2\sigma$ adalah 95%. Standar deviasi mengontrol daerah antara nilai $\mu - k\sigma$ dan $\mu + k\sigma$ untuk beberapa k jika distribusinya normal standar. Jika kita tidak tahu fungsi kepadatan probabilitas variabel acak, dapatkah kita menemukan perkiraan dari daerah antara nilai $\mu - k\sigma$ dan $\mu + k\sigma$ untuk beberapa k yang diberikan? Masalah ini diselesaikan oleh Chebychev, seorang matematikawan Rusia terkenal. Dia membuktikan bahwa daerah di bawah $f(x)$ pada interval $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ paling sedikit $1 - k^{-2}$. Ini sama dengan mengatakan probabilitas bahwa variabel acak dalam k standar deviasi dari mean setidaknya $1 - k^{-2}$.

Teorema 4.4.
(Chebycev Inequality)

Misalkan X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x)$. Jika μ dan $\sigma > 0$ adalah mean dan standar deviasi X, lalu

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

untuk setiap bilangan real positif bukan nol konstanta k.



Bukti :

Kita berasumsi bahwa variabel acak X adalah kontinu. Jika X tidak kontinu kita mengganti integral dengan penjumlahan dalam bukti berikut. Dari definisi varians, kita memiliki :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)\, dx + \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$
$$+ \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

Karena, $\int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$ adalah positif, kita dapatkan dari atas

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)\, dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx. \qquad (4.1)$$

Jika $x \in (-\infty, \mu - k\sigma)$, kemudian

$$x \leq \mu - k\sigma$$

Karenanya

$$k\sigma \leq \mu - x$$

Untuk

$$k^2\sigma^2 \leq (\mu - x)^2$$

Ini adalah $(\mu - x)^2 \geq k^2\sigma^2$. Begitu pula, jika $x \in (\mu + k\sigma, \infty)$ kemudian

$$x \geq \mu + k\sigma$$

Karena itu

$$k^2\sigma^2 \le (\mu - x)^2.$$

Jadi jika $x \notin (\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$, kemudian

$$(\mu - x)^2 \ge k^2\sigma^2.$$

Menggunakan (4.2) dan (4.1), kita dapatkan

$$\sigma^2 \ge k^2\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \right]$$

Karenanya

$$\frac{1}{k^2} \ge \left[\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx \right]$$

Karena itu

$$\frac{1}{k^2} \ge P(X \le \mu - k\sigma) + P(X \ge \mu + k\sigma)$$

Jadi

$$\frac{1}{k^2} \ge P(|X - \mu| \ge k\sigma)$$

Yang mana

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

Ini melengkapi bukti teorema ini.

Rumus integrasi berikut

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

akan digunakan di contoh berikutnya. Dalam rumus ini m dan n mewakili dua bilangan bulat positif.

Contoh 4.11. Misalkan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak X menjadi

$$f(x) = \begin{cases} 630x^4(1-x)^4 & jika\, 0 < x < 1 \\ 0 & untuk\, lainnya \end{cases}$$

Berapa nilai yang tepat dari $P(|X - \mu| \le 2\sigma)$? Berapa nilai perkiraan dari $P(|X - \mu| \le 2\sigma)$ ketika salah satu menggunakan pertidaksamaan Chebychev?

Jawab :

Pertama, kita temukan mean dan varians dari distribusi di atas. Rata-rata X diberikan oleh

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^1 630x^5(1-x)^4\,dx \\
&= 630\frac{5!+4!}{(5+4+1)!} \\
&= 630\frac{5!+4!}{(10)!} \\
&= 630\frac{2880}{3628800} \\
&= \frac{630}{1260} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Demikian pula, varians X dapat dihitung dari

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - \mu_X^2 \\
&= \int_0^1 630\,x^6(1-x)^4\,dx - \frac{1}{4} \\
&= 630\frac{6!4!}{(6+4+1)!} - \frac{1}{4} \\
&= 630\frac{6!4!}{11!} - \frac{1}{4} \\
&= 630\frac{6}{22} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{12}{44} - \frac{11}{44} \\
&= \frac{1}{44}.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, deviasi standar X adalah

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{44}} = 0.15$$

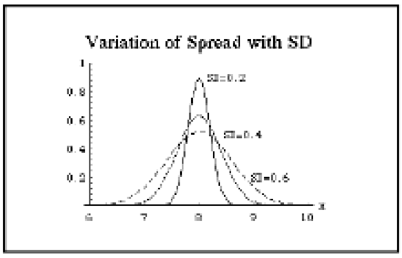
Jika

$$\begin{aligned} P\left(|X-\mu| \le 2\sigma\right) &= P(|X-0.5| \le 0.3 \\ &= P\left(-0.3 \le X-0.5 \le 0.3\right) \\ &= P\left(0.2 \le X \le 0.8\right) \\ &= \int_{0.2}^{0.8} 630\,x^4\left(1-x\right)^4 dx \\ &= 0.96 \end{aligned}$$

Jika kita menggunakan pertidaksamaan Chebychev, maka kita mendapatkan perkiraan dari nilai pasti yang kita miliki. Nilai perkiraan ini adalah

$$P\left(|X-\mu| \le 2\sigma\right) \ge 1 - \frac{1}{4} = 0,75$$

Oleh karena itu, pertidaksamaan Chebyshev memberi tahu kita bahwa jika kita tidak mengetahui distribusi X, maka $P\left(|X-\mu| \le 2\sigma\right)$ adalah setidaknya $0,75$



Menurunkan standar deviasi, dan semakin kecil penyebaran distribusinya. Jika standar deviasi nol, maka distribusi tidak menyebar, artinya distribusi terpusat pada satu titik. Dalam literatur, distribusi seperti itu disebut distribusi yang menurun. Gambar di atas menunjukkan bagaimana penyebaran menurun dengan penurunan standar deviasi.

4.5 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen adalah fungsi bernilai real dimana dapat menghasilkan semua momen dari variabel acak yang diberikan. Dalam banyak kasus, masalah tersebut lebih mudah untuk menghitung berbagai momen dengan menggunakan fungsi pembangkit momen.

Definisi 4.5. Misalkan X adalah variabel acak yang fungsi kepadatan probabilitasnya adalah $f(x)$. Fungsi bernilai real $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ditentukan oleh

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

disebut fungsi pembangkit momen dari X jika nilai yang diharapkan ini ada untuk semua interval $-h < t < h$ untuk beberapa $h > 0$

Secara umum tidak setiap variabel random memiliki fungsi pembangkit momen. Namun jika fungsi pembangkit momen dari variabel random ada, maka itu unik. Di akhir bagian ini, kita akan memberikan contoh variabel acak yang tidak memiliki fungsi pembangkit momen. Dengan menggunakan definisi nilai yang diharapkan dari variabel acak, kita mendapatkan representasi eksplisit untuk sebagai

$$M(t) = \begin{cases} \sum_{x \in Rx} e^{tx} f(x) & \textit{jika x adalah diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \textit{jika x adalah } \text{continu} \end{cases}$$

Contoh 4.12. Misalkan X adalah variabel acak yang fungsi pembangkit momennya $M(t)$ dan n berupa bilangan asli. Berapakah turunan ke-n dari $M(t)$ pada $t = 0$?

Jawab :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) &= \frac{d}{dt} E\left(e^{tX}\right) \\ &= E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\right) \\ &= E\left(Xe^{tX}\right) \end{aligned}$$

Demikian pula,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} M(t) &= \frac{d^2}{dt^2} E\left(e^{tX}\right) \\ &= E\left(\frac{d^2}{dt^2} e^{tX}\right) \\ &= E\left(X^2 e^{tX}\right) \end{aligned}$$

Maka, secara umum kita dapatkan

$$\frac{d^n}{dt^n}M(t)=\frac{d^n}{dt^n}E\left(e^{tX}\right)$$

$$=E\left(\frac{d^n}{dt^n}e^{tX}\right)$$

$$=E\left(X^n e^{tX}\right)$$

Jika kita menentukan $t=0$ dalam turunan ke-n, kita dapatkan

$$\frac{d^n}{dt^n}M(t)|_{t=0}=E\left(X^n e^{tX}\right)|_{t=0}=E\left(X^n\right)$$

Maka turunan ke-n dari fungsi pembangkit momen X dievaluasi pada $t=0$ adalah ke-n momen X tentang titik asal. Contoh ini memberitahu kita jika kita mengetahui fungsi pembangkit momen dari variabel acak, kemudian kita dapat menghasilkan semua momen X dengan mengambil turunan dari fungsi pembangkit momen dan kemudian mengevaluasinya di nol.

Contoh 4.13. Berapakah fungsi pembangkit momen dari variabel acak X yang fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & untuk\ x>0 \\ 0 & untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Berapakah mean dan varians dari X?

Jawab :

Fungsi pembangkit momen X adalah

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)$$

$$=\int_0^\infty e^{tX}f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty e^{tX}e^{-x}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-(1-t)x}dx$$

$$=\frac{1}{1-t}\left[-e^{-(1-t)x}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{1-t}\qquad jika\,1-t>0$$

Nilai yang diharapkan dari X dapat dihitung dari $M(t)$ sebagai

$$E(X) = \frac{d}{dt} M(t) \bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} (1-t)^{-1} \bigg|_{t=0}$$

$$= (1-t)^{-2} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^2} \bigg|_{t=0}$$

$$= 1$$

Demikian pula

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M(t) \bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} (1-t)^{-1} \bigg|_{t=0}$$

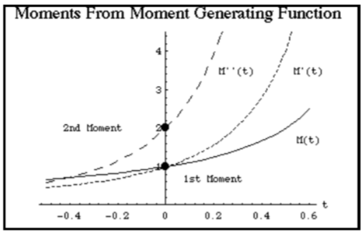
$$= 2(1-t)^{-3} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{2}{(1-t)^3} \bigg|_{t=0}$$

$$= 2$$

Oleh karena itu, varians X adalah

$$Var(X) = E(X^2) - (\mu)^2 = 2 - 1 = 1$$



Contoh 4.14. Misalkan X memiliki fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{x} & untuk\ x=0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Berapa fungsi pembangkit momen dari variabel acak X ?

Jawab :

$$M(t)=E\left(e^{tx}\right)$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)^{x}$$

$$=\left(\frac{1}{9}\right)\sum_{x=0}^{\infty}\left(e^{t}\frac{8}{9}\right)^{x}$$

$$=\left(\frac{1}{9}\right)\frac{1}{1-e^{t}\frac{8}{9}} \quad jika\, e^{t}\frac{9}{8}<1$$

$$=\frac{1}{9-8e^{t}} \quad jika\ t<\ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

Contoh 4.15. Misalkan X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan

$$f(x)=\begin{cases}be^{-bx} & untuk\ x>0 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

dimana $b>0$. Jika $M(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari X, maka berapakah $M(-6b)$?

Jawab :

$$M(t)=E\left(e^{t\,\mathrm{X}}\right)$$

$$=\int_{0}^{\infty} be^{tx}e^{-bx}\,dx$$

$$=b\int_{0}^{\infty} e^{-(b-t)x}\,dx$$

$$= \frac{b}{b-t}\left[-e^{-(b-t)x}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{b}{b-t} \qquad \text{jika } b-t > 0$$

Oleh karena itu $M(-6b) = \frac{b}{7b} = \frac{1}{7}$

Contoh 4.16. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi pembangkit momen $M(t) = (1-t)^{-2}$ untuk $t < 1$. Berapakah momen ketiga dari X?

Jawab :

Untuk menghitung momen ketiga $E(X^3)$ dari X, kita perlu menghitung turunan ketiga dari $M(t)$ pada $t=0$.

$$M(t) = (1-t)^{-2}$$

$$M'(t) = 2(1-t)^{-3}$$

$$M''(t) = 6(1-t)^{-4}$$

$$M'''(t) = 24(1-t)^{-5}$$

Jadi momen ketiga X diberikan oleh

$$E(X^3) = \frac{24}{(1-0)^5} = 24$$

Teorema 4.5. Misal $M(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari variabel acak X. Jika

$$M(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \qquad (4.3)$$

adalah ekspansi deret Taylor dari $M(t)$, maka

$$E(X^n) = (n!)a_n$$

untuk semua bilangan asli n.

Bukti :

Misalkan $M(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari variabel acak X. Ekspansi deret Taylor dari $M(t)$ sekitar 0 diberikan oleh

$$M(t) = \mathrm{M}(0) + \frac{M'(0)}{1!}\,\mathrm{t} + \frac{M''(0)}{2!}\,\mathrm{t}^2 + \frac{M'''(0)}{3!}\,\mathrm{t}^3 + \ldots + \frac{M^n(0)}{\mathrm{n}!}\,\mathrm{t}^n + \ldots$$

Karena $E\left(X^n\right) = M^{(n)}(0)$ untuk n ≥ 1 dan $M(0) = 1$, kita punya

$$M(t) = 1 + \frac{E(X)}{1!}t + \frac{E\left(X^2\right)}{2!}t^2 + \frac{E\left(X^3\right)}{3!}t^3 + \ldots + \frac{E\left(X^n\right)}{n!}t^n + \ldots \quad (4.4)$$

Dari (4.3) dan (4.4), menyamakan koefisien pangkat sejenis dari t, kita memperoleh

$$a_n = \frac{E\left(X^n\right)}{n!}$$

yang mana

$$E\left(X^n\right) = (n!)\,a_n$$

Contoh 4.17. Berapakah momen ke-479 dari X, jika fungsi pembangkit momen X adalah $\frac{1}{1+t}$?

Jawab :

Ekspansi deret Taylor dari $M(t) = \frac{1}{1+t}$ dapat diperoleh dengan mengguna kan pembagian panjang (teknik yang telah kita pelajari di sekolah menengah).

$$M(t) = \frac{1}{1+t}$$

$$= \frac{1}{1-(-t)}$$

$$= 1 + (-t) + (-t)^2 + (-t)^3 + \ldots + (-t)^n + \ldots$$

$$= 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \ldots + (-t)^n\,t^n + \ldots$$

Oleh karena itu $a_n = (-1)^n$ dan dari sini kita memperoleh $a_{479} = -1$. Dengan Teorema 4.5,

$$E\left(X^{479}\right)=\left(479!\right)a_{479}=-479!$$

Contoh 4.18. Jika momen pembangkit dari variabel acak X adalah

$$M\left(t\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{(tj-1)}}{j!},$$

lalu berapakah probabilitas kejadian $X=2$?

Jawab :

Dengan melihat fungsi pembangkit momen X yang diberikan, mudah untuk dicatat bahwa X adalah variabel acak diskrit dengan ruang sampel $R_X=\{0,1,2,\cdot\cdot\cdot,\infty\}$. Oleh karena itu menurut definisi, fungsi pembangkit momen X adalah

$$M\left(t\right)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{tj}f\left(j\right) \qquad (4.5)$$

Tapi kita diberikan

$$\begin{aligned} M\left(t\right)&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{(tj-1)}}{j!} \\ &=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{j!}e^{tj} \end{aligned}$$

Dari (4.5) dan di atas, menyamakan koefisien e^{tj}, kita dapatkan

$$f\left(j\right)=\frac{e^{-1}}{j!} \qquad \text{untuk j}=1,2,3,...,\infty$$

Jadi, probabilitas peristiwa $X=2$ diberikan oleh

$$P\left(X=2\right)=f\left(2\right)=\frac{e^{-1}}{2!}=\frac{1}{2e}$$

Contoh 4.19. Misalkan X adalah variabel acak dengan

$$E\left(X^n\right)=0,8 \qquad untuk\ n=1,2,3,...,\infty$$

Berapakah fungsi pembangkit momen dan fungsi kepadatan probabilitas dari X?

Jawab :

$$M(t) = M(0) + \sum_{n=1}^{\infty} M^{(n)}(0)\left(\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= M(0) + \sum_{n=1}^{\infty} E(X^n)\left(\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= 1 + 0{,}8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= 0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= 0{,}2 + 0{,}8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= 0{,}2\ \mathrm{e}^{0\mathrm{t}} + 0{,}8e^{1t}$$

Oleh karena itu, kita mendapatkan

$$f(0) = P(X = 0) = 0.2\ dan\ f(1) = P(X = 1) = 0.8$$

Maka fungsi pembangkit momen X adalah

$$M(t) = 0{,}2 + 0{,}8^{et},$$

dan fungsi kepadatan probabilitas X adalah

$$f(x) = \begin{cases} |x - 0{,}2| & untuk\ x = 0{,}1 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Contoh 4.20. Jika fungsi pembangkit momen variabel acak X diberikan oleh

$$M(t) = \frac{5}{15}e^{t} + \frac{4}{15}e^{2t} + \frac{3}{15}e^{3t} + \frac{2}{15}e^{4t} + \frac{1}{15}e^{5t}$$

Lalu berapa fungsi kepadatan probabilitas X? berapa ruang variabel acak X?

Jawab :

Fungsi pembangkit momen X diberikan

$$M(t) = \frac{5}{15}e^{t} + \frac{4}{15}e^{2t} + \frac{3}{15}e^{3t} + \frac{2}{15}e^{4t} + \frac{1}{15}e^{5t}$$

Hal ini menunjukkan bahwa X adalah variabel acak diskrit. Karena X adalah variabel acak diskrit, menurut definisi fungsi pembangkit momen, kita lihat bahwa

$$M(t) = \sum_{x \in R_x} e^{tx} f(x)$$

$$= e^{t x_1} f(x_1) + e^{t x_2} f(x_2) + e^{t x_3} f(x_3) +$$
$$e^{t x_4} f(x_4) + e^{t x_5} f(x_5)$$

Oleh karena itu kita memiliki

$$f(x_1) = f(1) = \frac{5}{15}$$

$$f(x_2) = f(2) = \frac{4}{15}$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{3}{15}$$

$$f(x_4) = f(4) = \frac{2}{15}$$

$$f(x_5) = f(5) = \frac{1}{15}$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas X diberikan oleh

$$f(x) = \frac{6-x}{15} \qquad untuk \qquad x = 1,2,3,4,5$$

dan ruang dari variabel acak X adalah

$$R_x = \{1,2,3,4,5\}$$

Contoh 4.21. Jika fungsi kepadatan probabilitas acak diskrit variabel X adalah

$$f(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2} \qquad untuk \qquad x = 1,2,3,\ldots,\infty$$

lalu berapa fungsi pembangkit momen dari X ?

Jawab :

Jika fungsi pembangkit momen X ada, maka

$$M(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} f(x)$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi x}\right)^2$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{e^{tx}6}{\pi^2 x^2}\right)$$

$$=\frac{6}{\pi^2}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{tx}}{x^2}$$

Sekarang kita tunjukkan bahwa deret tak hingga di atas menyimpang jika t termasuk dalam interval $(-h,h)$ untuk setiap $h>0$. Untuk membuktikan bahwa deret ini divergen, kita lakukan tes rasio.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{t(n+1)}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{e^{tn}}\right)$$

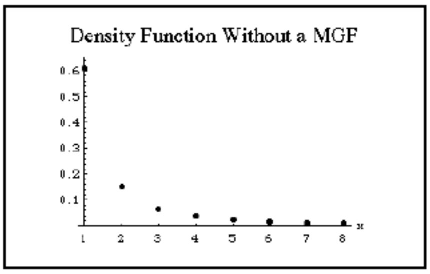
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{tn}e^t}{(n+1)^2}\frac{n^2}{e^{tn}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(e^t\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)$$

$$=e^t$$

Untuk setiap $h>0$, karena e^t tidak selalu kurang dari 1 untuk semua t dalam interval $(-h,h)$, kita menyimpulkan bahwa deret tak hingga di atas menyimpang dan karenanya untuk variabel acak X ini fungsi pembangkit momen tidak ada.

`



Perhatikan bahwa untuk variabel acak di atas, $E\left[X^n\right]$ tidak ada untuk sembarang bilangan asli n. Oleh karena itu variabel acak diskrit X dalam Contoh 4.21 tidak ada momen. Demikian pula, variabel acak kontinu X yang fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & untuk\ 1 \le x \le \infty \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

tidak memiliki fungsi pembangkit momen dan tidak ada momen.

Dalam teorema berikut kita meringkas beberapa sifat penting dari fungsi pembangkit momen dari variabel acak.

Teorema 4.6. Misalkan X adalah variabel acak dengan momen yang menghasilkan fungsi $M_X(t)$. Jika a dan b adalah dua konstanta real, maka

$$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t) \qquad (4.6)$$

$$M_{bX}(t) = M_X(bt) \qquad (4.7)$$

$$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{a}{b}t} M_X\left(\frac{t}{b}\right) \qquad (4.8)$$

Bukti :

Pertama, kita buktikan (4.6).

$$\begin{aligned} M_{X+a}(t) &= E\left(E^{t(X+a)}\right) \\ &= E\left(e^{tX+ta}\right) \\ &= E\left(e^{tX} e^{ta}\right) \\ &= e^{ta} E\left(e^{tX}\right) \\ &= e^{ta} M_X(t) \end{aligned}$$

Demikian kita buktikan (4.7).

$$\begin{aligned} M_{bX}(t) &= E\left(e^{t(bX)}\right) \\ &= E\left(e^{(tb)X}\right) \\ &= M_X(tb) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (4.6) dan (4.7), kita dengan mudah mendapatkan (4.8).

$$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = M_{\frac{X}{b}+\frac{a}{b}}(t)$$

$$= e^{\frac{a}{b}t} M_{\frac{X}{b}}(t)$$

$$= e^{\frac{a}{b}t} M_X\left(\frac{t}{b}\right)$$

Definisi 4.6. Momen faktorial ke-n dari variabel acak X adalah

$$E\left(X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)\right).$$

Definisi 4.7. Fungsi pembangkit momen faktorial (FMGF) dari X adalah dilambangkan dengan $G(t)$ dan didefinisikan sebagai

$$G(t) = E\left(t^X\right)$$

Tidaklah sulit untuk membangun hubungan antara fungsi pembangkit momen (MGF) dan fungsi pembangkit momen faktorial (FMGF). Hubungan di antara mereka adalah sebagai berikut:

$$G(t) = E\left(t^X\right) = E\left(e^{\ln t^X}\right) = E\left(e^{X \ln t}\right) = M(\ln t)$$

Jadi, jika kita mengetahui MGF variabel acak, FMGF-nya dapat ditentukan dan sebaliknya.

Definisi 4.8. Misalkan X adalah variabel acak. Fungsi karakteristik $\varphi(t)$ dari X didefinisikan sebagai

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

$$= E\left(\cos(tX) + i\sin(tX)\right)$$

$$= E\left(\cos(tX)\right) + i\,E\left(\sin(tX)\right)$$

Fungsi kepadatan probabilitas dapat dipulihkan dari karakteristik berfungsi dengan menggunakan rumus berikut

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi(t)\,dt$$

Berbeda dengan fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik variabel acak selalu ada. Misalnya, variabel acak Cauchy X dengan kepadatan probabilitas $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ tidak memiliki fungsi pembangkit momen. Namun, fungsi karakteristiknya adalah

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\pi(1+x^2)} dx$$

$$= e^{-|t|}$$

Untuk mengevaluasi integral di atas dibutuhkan teori residu dari analisis kompleks.

Fungsi karakteristik ϕ(t) memenuhi sifat himpunan yang sama dengan fungsi pembangkit momen seperti yang diberikan dalam Teorema 4.6.

Dengan mengikuti integral berikut,

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx = m! \qquad \textit{Jika m adalah bilangan bulat positif}$$

Dan

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

diperlukan beberapa masalah dalam Latihan Review bab ini. Ini rumus akan dibahas dalam Bab 6 sementara kita menjelaskan sifat dan kegunaan distribusi gamma.

Kita mengakhiri bab ini dengan komentar berikut tentang seri Taylor. Deret Taylor ditemukan meniru ekspansi desimal dari real angka. Sebagai contoh

$$125 = 1(10)^2 + 2(10)^1 + 5(10)^0$$

adalah perluasan dari angka 125 sehubungan dengan basis 10. Demikian pula,

$$125 = 1(9)^2 + 4(9)^1 + 8(9)^0$$

adalah ekspansi dari bilangan 125 di basis 9 dan itu adalah 148. Sejak diberi

Fungsi $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dan $x \in \mathrm{R}, f(x)$ adalah bilangan real dan dapat diekspansi sehubungan dengan basis x. Ekspansi dari $f(x)$ terhadap basis x akan memiliki bentuk

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

Yang mana

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

Jika kita mengetahui koefisien a_k untuk $k=0,1,2,3,\ldots,$ maka kita akan mendapatkan ekspansi $f(x)$ di basis x. Taylor menemukan fakta luar biasa bahwa koefisien a_k dapat dihitung jika $f(x)$ cukup terdiferensiasi. Dia membuktikannya bahwa untuk $k=1,2,3,\ldots$

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad \textit{Dengan } f^{(0)}=f(0)$$

Latihan Soal

1. Dalam penarikan undian, bilangan bulat lima digit dipilih secara acak. Jika seorang pemain bertaruh 1 dolar pada nomor tertentu, hadiahnya (jika nomor itu dipilih) adalah $ 500 dikurangi $ 1 yang dibayarkan untuk tiket. Misalkan X sama dengan hadiah taruhan. Temukan nilai ekspektasi dari X.

   Jawab :

   Jumlah angka 5 digit $=10^5=100.000$

   Nilai yang diharapkan dari $X = jumlah(probabilitas \times hasil)$

   $$=500\times\frac{1}{100.000}-1$$

   $$=0,005-1$$

   $$=-0,995$$

2. Sebuah variabel acak diskrit X memiliki kepadatan fungsi yang besar

   $$f(x)=\begin{cases} c(8-x) & untuk\ x=1,2,3,4,5 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

   (a) Tentukan konstanta *c*.

   (b) Temukan $P(X>2)$.

   (c) Tentukan nilai ekspektasi $E(X)$ untuk variabel acak X.

   Jawab :

(a) Konstanta c

$$\sum_{a}^{x_i} f(x_i) = 1$$

$$c(8-0)+c(8-1)+c(8-2)+c(8-3)+c(8-4)+c(8-5)=1$$

$$c(8+7+6+5+4+3)=1$$

$$c(33)=1$$

$$c=\frac{1}{33}$$

(b) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)$

$$=1-F_x(2)$$

$$=1-\left(\frac{8}{33}+\frac{7}{33}+\frac{6}{33}\right)$$

$$=1-\frac{21}{33}$$

$$=\frac{12}{33}$$

(c) $E(X)=\sum_{x=0}^{5} x\,f(x)$

$$=0.\frac{8}{33}+1.\frac{7}{33}+2.\frac{6}{33}+3.\frac{5}{33}+4.\frac{4}{33}+5.\frac{3}{15}$$

$$=0+\frac{7}{33}+\frac{12}{33}+\frac{15}{33}+\frac{16}{33}+\frac{15}{33}$$

$$=\frac{65}{33}$$

3. Variabel acak X mempunyai sebuah fungsi distributif kumulatif

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & jika\, 0<x\le 1\\ x-\frac{1}{2}, & jika\, 1<x\le \frac{3}{2}\end{cases}$$

(a) Grafik $F(x)$.

(b) Grafik $f(x)$.

(c) Temukan $P(X\le 0,5)$.

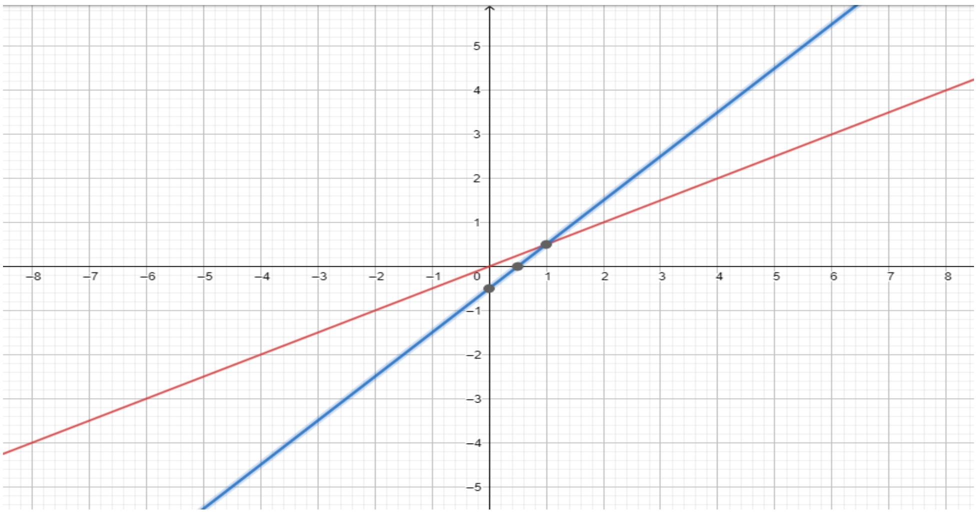
(d) Temukan $P(X\ge 0,5)$.

(e) Temukan $P(X\le 1.25)$.

(f) Temukan $P(X=1.25)$.

Jawab :

(a) grafik $F(x)$



(b) grafik $f(x)$

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

- untuk $x<0$

  $$f(x)=0$$

- untuk $0<x\le 1$

  $$f(x)=\frac{dF\left(\frac{1}{2}x\right)}{dx}=\frac{1}{2}$$

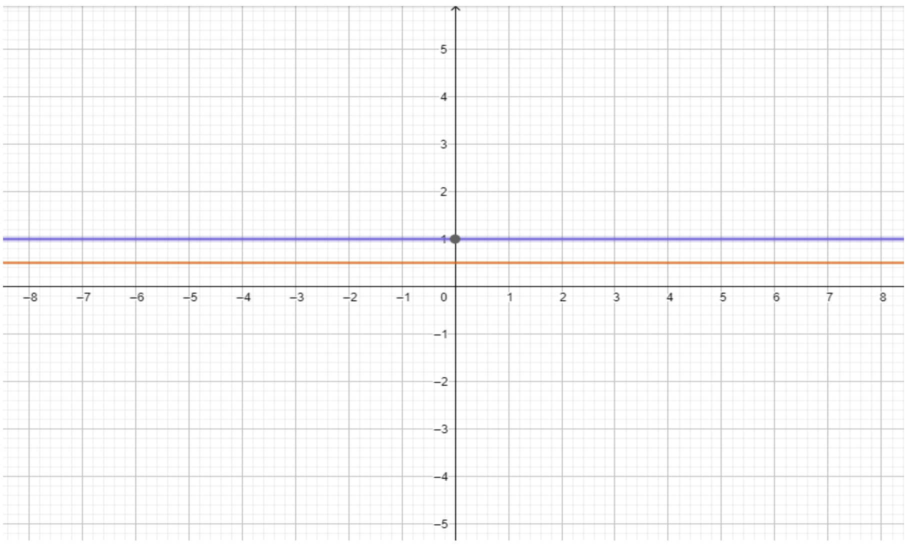
- untuk $1 < x \le \frac{3}{2}$

$$f(x) = \frac{dF\left(x - \frac{1}{2}\right)}{dx} = 1$$

- untuk $x > \frac{3}{2}$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases}$$



(c) $P(X \le 0,5)$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(d) $P(X \ge 0,5)$

$$P(X \ge 0,5) = 1 - P(X \le 0,5)$$

$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(e) $P\left(X \leq 1.25\right)$

$$F\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

(f) $P\left(X = 1.25\right)$

$$F\left(\frac{5}{4}\right)=0$$

4. Misalkan X menjadi variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{8}x, & untuk\ x=1,2,5\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

(a) Tentukan nilai ekspektasi dari X.

(b) Tentukan varians X.

(c) Temukan nilai ekspektasi dari $2X+3$.

(d) Tentukan varians dari $2X+3$.

(e) Tentukan nilai ekspektasi dari $3X-5X^2+1$.

Jawab :

(a) Ekspektasi

$$E\left(X\right)=\sum_{x=1,2,5} x\,f\left(x\right)=\left(1\times\frac{1}{8}\right)+\left(2\times\frac{1}{8}\times 2\right)+\left(5\times\frac{1}{8}\times 5\right)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{4}{8}+\frac{25}{8}$$

$$=\frac{30}{8}$$

$$=\frac{15}{4}$$

$$=3,75$$

(b) Varians

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1,2,5} x^2 f(x) = \left(1^2 \times \frac{1}{8} \times 1\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{8} \times 2\right) + \left(5^2 \times \frac{1}{8} \times 5\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{125}{8}$$

$$= \frac{134}{8}$$

$$= 16,75$$

$$Var(X) = 16,75 - 3,75^2$$

$$= 16,75 - 14,0625$$

$$= 2,6875$$

(c) Ekspektasi $2X + 3$

$$E(2X+3) = 2E(X) + 3$$

$$= 2(3,75) + 3$$

$$= 7,5 + 3$$

$$= 10,5$$

(d) Varians $2X + 3$

$$Var(2X+3) = Var(2X)$$

$$= 4Var(X)$$

$$= 4 \times 2,6875$$

$$= 10,75$$

(e) Ekspektasi $3X-5X^2+1$

$$E\left(3X-5X^2+1\right)=3E\left(X\right)-5E\left(X^2\right)+1$$

$$=3\left(3,75\right)-5\left(16,75\right)+1$$

$$=11,25-83,75+1$$

$$=-71,5$$

5. Jari-jari terukur dari sebuah lingkaran, R, memiliki fungsi kepadatan probabilitas

$$f\left(r\right)=\begin{cases}6r\left(1-r\right), & untuk\, 0<r<1\\ 0, & untuk\, lainnya\end{cases}$$

(a) Tentukan nilai ekspektasi dari radius.

(b) Tentukan ekspektasi dari keliling.

(c) Tentukan ekspektasi luas.

Jawab :

(a) Nilai ekspektasi dari radius

$$f\left(r\right)=6r\left(1-r\right) \qquad untuk\, 0<r<1$$

$$E\left(r\right)=\int_{-\infty}^{\infty} r\, f\left(x\right)\ dr$$

$$=\int_0^1 r\,6r\left(1-r\right)\ dr$$

$$=\int_0^1 6r^2 dr-\int_0^1 6r^3 dr$$

$$=6\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1-6\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

$$=6\left\{\left[\frac{1}{3}-0\right]-\left[\frac{1}{4}-0\right]\right\}$$

$$=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=6\times\frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Jadi, nilai ekspektasi dari radius adalah $\frac{1}{2}$

(b) Keliling yang diharapkan

$$c = 2\pi r$$

$$= 2 \times 3.14 \times \frac{1}{2}$$

$$= 3.14$$

$$= \pi$$

Jadi, keliling yang diharapkan adalah π

(c) Luas yang diharapkan

$$A = \pi r^2$$

$$= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi$$

Jadi, luas yang diharapkan adalah $\frac{1}{4\pi}$

6. Misalkan X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \theta x + \frac{3}{2}\theta^{\frac{3}{2}}x^2 & ,untuk\ 0 < x < \frac{1}{\sqrt{\theta}} \\ 0 \quad , & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

dimana $\theta > 0$. Berapakah nilai ekspektasi dari *X?*

Jawab :

$$\mu = E(x)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\theta}}} x\big(f(x)\big)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\theta}}} \theta x^2 dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\theta}}} \frac{3\theta^{\frac{3}{2}} x^3}{2} dx$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{\theta}} + \frac{3}{8\sqrt{\theta}}$$

$$= \frac{8\sqrt{\theta} + 9\sqrt{\theta}}{24\left(\sqrt{\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{17\sqrt{\theta}}{24\left(\sqrt{\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{17}{24\sqrt{\theta}}$$

$$= \frac{17}{24} . \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

7. Misalkan X adalah variabel acak dengan mean μ dan variansi $\sigma^2 > 0$. Berapa nilai a, dimana $a > 0$ adalah minimal $E\left(\left[aX - \frac{1}{2}\right]^2\right)$?

   Jawab :

   X adalah variabel acak

   varians $\sigma^2 > 0$

   $a > 0$ adalah minimal $E\left(\left[aX - \frac{1}{2}\right]\right)$

$$E\left(\left[aX - \frac{1}{a}\right]^2\right) = E\left[\left[aX\right]^2 - 2Xa \times \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left[aX\right]^2 - 2X + \frac{1}{a^2}\right]$$

$$= E\left[a^2 X^2 - 2E\left(X\right) + \frac{1}{a^2}\right]$$

$$= a^2 E\left(X^2\right) - 2E\left(X\right) + \frac{1}{a^2}$$

$$= a^2\left[Var(X) + \left[E(X)\right]^2\right] - 2E(X) + \frac{1}{a^2}$$

$$= a^2\sigma^2 + a^2\mu^2 - 2\mu + \frac{1}{a^2}$$

$$= a^2\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + \frac{1}{a^2} - a\mu$$

$$\frac{\partial E\left[\left(aX - \frac{1}{a}\right)^2\right]}{\partial a} = 2a\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + 2a^{-3} = 0$$

$$= 2a\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \frac{2}{a^3} = 0$$

$$2\left(\sigma^2 + \mu^2\right) = \frac{2}{a^4}$$

$$a^4 = \frac{2}{2\left(\sigma + \mu^2\right)}$$

$$a^4 = \frac{1}{(\sigma^2 + \mu)}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{1}{\sigma^2 + \mu^2}}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{1}{E\left(X^2\right)}}$$

Jadi, untuk nilai *a,* dimana $a > 0$ adalah minimal $E\left(\left[aX - \frac{1}{2}\right]^2\right)$ adalah $a = \sqrt[4]{\frac{1}{E\left(X^2\right)}}$

8. Sebuah persegi panjang harus dibangun dengan dimensi X kali $2X$, dimana X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & untuk\, 0 < x < 2 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapa ekspektasi luas persegi panjang?

Jawab :

Misalkan bahwa

$$Lebar = x$$

$$Panjang = 2x$$

$$Luas = Panjang \times Lebar$$

$$= 2x \times x$$

$$= 2x^2$$

$$Luas\ Persegi\ Panjang\ yang\ diharapkan = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 2x^2\,dx$$

$$= 2\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{(2)^3}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

Jadi, Luas persegi panjang yang diharapkan adalah $\frac{8}{3}$

9. Sebuah kotak harus dibuat sedemikian rupa sehingga tingginya 10 inci dan alasnya X inci kali X inci. Jika X memiliki distribusi uniform pada interval $[2,8]$, lalu berapa volume kotak yang diharapkan dalam inci kubik?

   Jawab :

$$f(x) = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6}, \quad 2 < x < 8$$

$$E(V) = E\left(10X^2\right) = 10\,E\left(X^2\right) = 10\int_2^8 x^2 . \frac{1}{6}$$

$$= \left[\frac{10}{6} x \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_2^8$$

$$= \frac{10}{18} \left(8^3 - 2^3 \right).$$

$$= \frac{10}{18} \left(512 - 8 \right)$$

$$= \frac{10}{18} \left(504 \right)$$

$$= 280$$

10. Jika X dalah variabel acak dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} 1.4e^{-2x} + 0.9e^{-3x}, & \textit{untuk } x > 0 \\ 0, & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}.$$

lalu berapa nilai ekspektasi dari X ?

Jawab :

$$E(x) = \int_0^\infty x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x \left(1.4 e^{-2x} + 0.9 e^{-3x} \right) dx$$

$$= \int_0^\infty x \cdot 1.4 e^{-2x} dx + \int_0^\infty x \cdot 0.9 e^{-3x} dx$$

$$= 1.4 \left[\left(x \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} \right)_0^\infty - \int 1 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx \right] + 0.9 \left[\left(x \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} \right)_0^\infty - \int 1 \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} dx \right]$$

$$= 1.4 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right)_0^\infty \right] + 0.9 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{e^{-3x}}{-3} \right)_0^\infty \right]$$

$$= 1.4 \left[\frac{1}{4} (1 - 0) \right] + 0.9 \left[\frac{1}{9} (1 - 0) \right]$$

$$= \frac{1.4}{4} + \frac{0.9}{9}$$

$$= 0.35 + 0.1$$

$$= 0.45$$

11. Sepasang koin ditos. Jika gambar muncul, 1 dadu dilemparkan. Jika angka muncul, 2 dadu dilempar. Misalkan X menjadi total pada dadu pertama atau dadu kedua. Berapa nilai yang diharapkan dari X ?

    Jawab :

    Misalkan A menunjukkan munculnya kepala dan B menunjuukan munculnya ekor, maka

    Misalkan X menjadi total pada dadu

    Jika kepala muncul = 1 dadu dilempar

    Probabilitas = $\frac{1}{6}$

    $$E(X|A) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

    $$Jadi, E(X) = i = \sum_{i=0}^{k} x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n$$

    $$E(X|A) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$

    $$E(X|A) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$

    $$E(X|A) = \frac{21}{6}$$

    Jika ekor muncul = 2 dadu dilempar

    Probabilitas = $\frac{1}{6}$

    $$E(X|B) = \left[\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}\right] + \left[\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}\right]$$

    $$= \frac{21}{6} + \frac{21}{6}$$

    $$= \frac{42}{6}$$

    Nilai yang diharapkan dari $X = E(X|A)\frac{1}{2} + E(X|B)\frac{1}{2}$, dimana $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

$$E(X)=\frac{21}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{42}{6}\times\frac{1}{2}$$

$$E(X)=\frac{63}{12}$$

$$E(X)=5,25$$

Jadi Nilai yang diharapkan dari X adalah 5,25

12. Jika kecepatan dari molekul gas yang memiliki kepadatan probabilitas (Maxwell's law)

$$f(v)=\begin{cases} av^2e^{-h^2v^2}, & untuk\ v\geq 0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

lalu berapa ekspektasi dan varians kecepatan molekul dan juga besarnya a untuk beberapa diberikan h ?

Jawab :

$$f(v)=\begin{cases} av^2e^{-h^2v^2}, & untuk\ v\geq 0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

$$E(v)=\int_0^\infty v \cdot av^2e^{-h^2v^2}dv$$

Maka

$$v^2h^2=y\Rightarrow v^2=\frac{y}{h^2}$$

$$\Rightarrow 2vh^2dv=dy\Rightarrow v\,dv=\frac{dy}{2h^2}$$

$$\therefore E(v)=\int_0^\infty a \cdot \frac{y}{h^2}e^{-y}\frac{1}{2h^2}dy$$

$$=\frac{a}{2h^4}\int_0^\infty ye^{-y}dy$$

$$=\frac{a}{2h^4}$$

$$E\left(v^2\right)=\int_0^\infty a \,\square\, v^2 \,\square\, v^2 e^{-h^2v^2}dv$$

$$=\int_0^\infty a \,\square\, v^4 \,\square\, e^{-h^2v^2}dv$$

Sama seperti sebelumnya $v^2h^2 = y$

$$v^2=\frac{y}{h^2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{y}}{h}$$

$$v^4=\frac{y^2}{h^4}\Rightarrow dv=\frac{dz}{2h^2\frac{\sqrt{y}}{h}}$$

$$\therefore E\left(v^2\right)=a\int_0^\infty \frac{y^2}{h^4} \,\square\, e^{-y} \,\square\, \frac{1}{2h\sqrt{y}}dy$$

$$=\frac{a}{2h^5}\int_0^\infty y^{\frac{3}{2}}e^{-y}dy$$

$$=\frac{a}{2h^5}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{a}{2h^5}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{3a\sqrt{\pi}}{8h^5}$$

Variansi,

$$Var\left(v\right)=E\left(v^2\right)-E^2\left(v\right)$$

$$=\frac{3a\sqrt{\pi}}{8h^5}-\frac{a^2}{4h^8}$$

$$=\frac{a}{4h^5}\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{2}-\frac{a}{h^3}\right)$$

Kemudian,

$$\int_0^\infty av^2e^{-h^2v^2}dv$$

$$h^2v^2 = y$$

$$v^2 = \frac{y}{h^2}$$

$$v = \frac{\sqrt{y}}{h} \Rightarrow dv = \frac{dz}{2\frac{\sqrt{y}}{h} \cdot h^2}$$

$$\therefore a\int_0^\infty \frac{v}{h^2} e^{-y} \times \frac{1}{2\sqrt{y}h} dy = \frac{a}{2h^3}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-y} dz$$

$$= \frac{a}{2h^3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{a}{2h^3} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{a\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2h^3}$$

Sekarang kita tahu bahwa $1 = \int_0^\infty av^2 e^{-h^2v^2} dv$

$$\therefore \frac{a\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2h^3} = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}$$

13. Sepasang suami istri memutuskan untuk memiliki anak sampai mereka mendapatkan seorang anak perempuan, tetapi mereka setuju untuk berhenti dengan maksimal 3 anak meskipun mereka belum mendapatkan seorang anak perempuan. Jika X dan Y masing-masing menunjukkan jumlah anak dan jumlah anak perempuan, lalu berapa $E(X)$ dan $E(Y)$?

    Jawab :

    $$(x=1) = P(anak\ pertama\ perempuan) = \frac{1}{2}$$

    $$(x=2) = P(anak\ pertama\ laki-laki) \times (anak\ kedua\ perempuan)$$

$$(x=3)=P(anak\ pertama\ laki-laki)\times(anak\ kedua\ laki-laki)$$

$$P(anak\ pertama\ laki-laki)\times(anak\ ke\ dua\ laki-laki)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{7}{4}$$

$$P(Y=0)=P(ketiga\ anak\ laki-laki)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{8}$$

$$P(Y=1)=7\times\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$E(Y)=0\left(\frac{1}{8}\right)+2\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$$

14. Jika fungsi pembangkit momen untuk variabel acak X adalah $M_X(t)=\frac{1}{1+t}$, berapa momen ketiga dari X tentang titik x = 2?

Jawab :

Diketahui $M_x(t)=\frac{1}{1+t}$ dengan x = 2

Momen Generating Function (MGF) yang kita punya adalah

$$M_x(t)=E\left[e^{tx}\right]$$

$$M_x^{'}(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}$$

dengan $t = 0$

$$E(X) = M_x'(0) = -1$$

$$M_x''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

dengan $t = 0$

$$E(X^2) = M_x''(0) = 2$$

$$M_x'''(t) = -\frac{6}{(1+t)^4}$$

dengan $t = 0$

$$E(X^3) = M_x''(0) = -6$$

$$\therefore E((x-2)^2) = E(X^3) - 8 - 6E(X^2) + 12E(X)$$

$$= -6 - 8 - 6(2) + 12(-1)$$

$$= -6 - 8 - 12 - 12$$

$$= -38$$

15. Jika mean dan varians dari suatu distribusi tertentu adalah 2 dan 8, berapa tiga suku pertama dalam ekspansi deret dari fungsi pembangkit momen?

    Jawab :

    Diketahui bahwa $E(X) = 2$ dan

    $$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8$$

    $$E(X^2) - 2^2 = 8$$

    $$E(X^2) = 8 + 4 = 12$$

    seperti yang kita ketahui bahwa

    $$MGF = 1 + \frac{E(X)t}{1!} + \frac{E(X^2)t}{2!} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{2t}{1!} + \frac{12t^2}{2!} + \ldots$$

$$= 1 + 2t + 6t^2 + \ldots$$

16. Misalkan X menjadi variabel acak dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & \text{untuk } x > 0 \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Dimana $a > 0$. Jika $M(t)$ menunjukkan fungsi pembangkit momen X, berapa $M(-3a)$?

Jawab :

$$M(t) = E\left[e^{tx}\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{tx}.f(x)\,dx$$

$$= a\int_0^\infty e^{tx}.e^{-ax}\,dx$$

$$= a\int_0^\infty e^{-(a-t)x}\,dx$$

$$= a\left[\frac{e^{-(a-t)x}}{-(a-t)}\right]_0^\infty$$

$$= a\left[0 - \left(-\frac{1}{a-t}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{a-t}, \text{ untuk } t < a$$

$$M(-3a) = \frac{a}{a-(-3a)}$$

$$= \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore M(-3a) = \frac{1}{4}$$

17. Misalkan variabel acak X memiliki pembangkit momen

$$M(t)=\frac{1}{(1-\beta t)^{k}},\quad \text{untuk } t<\frac{1}{\beta}$$

Berapa momen ke-n dari X ?

Jawab :

$$M(t)=\frac{1}{(1-\beta t)^{k}}$$

$$M'(t)=\frac{-k.(-\beta)}{(1-\beta t)^{k+1}}$$

$$M''(t)=\frac{k(k+1)\beta^{2}}{(1-\beta t)^{k+2}}$$

$$M'''(t)=\frac{k(k+1)(k+2)\beta^{3}}{(1-\beta t)^{k+3}}$$

$$M^{n}(t)=\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)\beta^{n}}{(1-\beta t)^{k+n}}$$

$$n^{th}\text{ momen}=M^{n}(0)=k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)\beta^{n}$$

$$=\frac{(k+n-1)!}{(k-1)!}\beta^{n}$$

$$=\beta^{n}\prod_{i=1}^{n-1}(k+i)$$

18. Dua bola dijatuhkan sedemikian rupa sehingga setiap bola memiliki kemungkinan yang sama untuk jatuh ke salah satu dari empat lubang. Kedua bola bisa jatuh ke lubang yang sama. Misalkan X menunjukkan jumlah lubang kosong di akhir percobaan. Berapa fungsi pembangkit momen X ?

Jawab :

Jumlah bola = 2

Jumlah lubang = 4

Misalkan lubang tersebut diberi nomor $\{1,2,3,4\}$ dan kedua bola kita misalkan $\{i,j\}$.

Jika bola pertama i masuk ke lubang 3 dan bola kedua j masuk ke lubang 4, lalu kita tandai dengan "ij" yaitu "3 4" $\Leftrightarrow$ bola pertama telah jatuh ke lubang 3 dan bola kedua jatuh ke lubang 4.

Sehingga ruang sampel dari percobaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} N(S) = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\} \end{aligned}$$

terdapat 16 anggota.

- kejadian pertama apabila $\{(i, j) : i = j\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ beranggotakan 4 sehingga,

$$\frac{N(A)}{N(S)} = \frac{4}{16}$$

- kejadian kedua apabila :

  beranggotakan 12 sehingga

$$\frac{N(A)}{N(S)} = \frac{12}{16}$$

Jadi, fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left(e^{tx}\right) \\ &= e^{2t} \times \frac{12}{16} + e^{3t} \times \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4}\left(3e^{2t} + e^{3t}\right), t \in \mathrm{R} \end{aligned}$$

19. Jika fungsi pembangkit momen X adalah $M(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ *untuk* $t < 1$, lalu, berapa momen ke empat dari X ?

Jawab :

$$M(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$M'(t) = \frac{1}{(1-t)^4} = \frac{2}{(1-t)^3}$$

$$M^4(t) = \frac{120}{(1-t)^6}$$

20. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi pembangkit momen

$$M(t) = \frac{e^{3t}}{1-t^2}, \qquad -1 < t < 1$$

Berapa rata-rata dan variansi dari X, berturut-turut?

Jawab :

$$M(t) = \frac{e^{3t}}{1-t^2}$$

$$M'(t) = \frac{(1-t^2)e^{3t}.3 - e^{3t}(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{3e^{3t} - 3e^{3t}t^2 + 2t\,e^{3t}}{(1-t^2)^2}$$

$$M'(0) = \frac{3-0+0}{1} = 3$$

$$E(X) = 3$$

$$M''(t) = \frac{e^{3t}(9t^4 - 12t^3 - 12t^2 + 12t + 11)}{(1-t^2)^3}$$

$$M''(0) = \frac{e^0(11)}{1} = 11$$

$$E(X^2) = 11$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 11 - 3^2 \\ &= 11 - 9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore E(X) = 3$ dan $Var(X) = 2$

21. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi pembangkit momen

$$M(t) = e^{3t+t^2}$$

Berapa momen kedua dari X dimana $x = 0$?

Jawab :

$$E(X^2) = M''(t = 0)$$

$$M'(t) = e^{3t+t^2}(3+2t)$$

$$M''(t) = e^{3t+t^2}(3+2t)^2 + e^{3t+t^2}(2)$$

$$M''(0) = e^0(3) + e^0(2)$$

$$= 9 + 2$$

$$= 11$$

$$\therefore E(X^2) = 11$$

22. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi kepadatan kumulatif $F(x)$. Tunjukkan bahwa nilai ekspektasi dari variabel acak $(X-c)^2$ minimum jika c sama dengan nilai ekspektasi dari X.

Jawab :

$$(X-c)^2 = X^2 + c^2 - 2Xc$$

$$E\left[(X-c)^2\right] = E\left[X^2\right] + E\left[c^2\right] - 2E[Xc]$$

$$= E\left[X^2\right] + c^2 - 2\ .c\ .E[X]$$

2 merupakan nilai maksimum

$$\frac{\partial E\left[X^2\right]}{\partial c} + \frac{\partial c^2}{\partial c} - \frac{\partial\left(2cE[X]\right)}{\partial c} = 0$$

$$0 + 2c - 2E[X] = 0$$

$$c = E[X]$$

23. Misalkan variabel acak kontinu X memiliki fungsi kepadatan kumulatif $F(x)$. Tunjukkan bahwa nilai yang diharapkan dari variabel acak $|X-c|$ adalah minimum jika c sama dengan median dari X (itu adalah, $F(c)=0,5$).

    Jawab :

    Kita tau bahwa $F(x)=P(X\le x)$

    Kita ingin meminimalkan $E|X-c|$

    $$E|X-c|=\int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)dx+\int_{c}^{\infty}(c-x)f(x)dx$$

    $$[-\infty<x<c,\ |X-c|=(c-x)\ dan\ c<x<\infty,\ |X-c|=(c-x)]$$

    (menggunakan aturan deferensiasi leibniz)

    $$\frac{\partial}{\partial c}E|X-c|=(c-c)f(x)-0+\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+0-(c-c)f(x)dx-\int_{c}^{\infty}f(x)dx$$

    $$\left[ax,\frac{\partial}{\partial x}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt=f(b(x))\frac{\partial}{\partial x}b(x)-f(a(x))\frac{\partial}{\partial x}a(x)\right]$$

    $$=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx-\int_{c}^{\infty}f(x)dx$$

    $$\frac{\partial^2}{\partial c^2}E|X-c|=f(c)-(-f(x))=2f(c)$$

    $$\frac{\partial}{\partial c}E|X-c|=0\rightarrow\int_{-\infty}^{c}f(x)dx-\int_{c}^{\infty}f(x)dx=0$$

    $$\rightarrow P[X\le c]=1-P[X\le c]\rightarrow\ P[X\le c]=0.5$$

    $$\rightarrow\ F(c)=0.5\ \rightarrow\ c=median\,dari\,X$$

    $$dan\frac{\partial^2}{\partial c^2}E|X-c|>0\ ,\ c=median\,dari\,X$$

    Jadi, terbukti bahwa nilai yang diharapkan dari variabel acak $|X-c|$ minimum jika c sama dengan median dari X

24. Misalkan variabel acak X memiliki fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad -\infty<x<\infty$$

Berapa nilai ekspektasi dan varians X ?

Jawab :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{2}e^{x}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{x}{2}e^{-x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(xe^{x}-e^{x})_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}(-xe^{-x}-e^{-x})_{0}^{\infty}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=0$$

$$\therefore E(X)=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2}{2}e^{x}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{2}e^{-x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2e^{x}-2xe^{x}+2e^{x})_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}(-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x})_{0}^{\infty}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=2$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$=2-0^2$$

$$\therefore Var(X)=2$$

Jadi $E(X)=0$ dan $Var=2$

25. Jika $M_X(t) = k(2+3e^t)^4$, berapakah nilai k?

    Jawab :

    Fungsi Pembangkit Momen distribusi Binomial

    $$M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$$

    $$= (q+pe^t)^n$$

    dimana $q+p=1$

    kita punya $k(2+3e^t)^4 = \left(2k^{\frac{1}{4}} + 3k^{\frac{1}{4}}e^t\right)^4$

    $$2k^{\frac{1}{4}} + 3k^{\frac{1}{4}} = 1$$

    $$k^{\frac{1}{4}}(2+3) = 1$$

    $$5k^{\frac{1}{4}} = 1$$

    $$k^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

    $$(k^{\frac{1}{4}})^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

    $$k = \frac{1}{625}$$

26. Diberikan fungsi pembangkit momen X sebagai berikut

    $$M(t) = 1+t+4t^2+10t^3+14t^4+\ldots$$

    Berapa momen ketiga dari X dimana itu adalah rata-rata?

    Jawab :

    Diberikan fungsi pembangkit momen dari X adalah $M(t) = 1+t+4t^2+10t^3+14t^4+\ldots$

    Sekarang, kita dapat menemukan momen ke-3 dari X yaitu μ_3.

    Kita tahu bahwa fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = 1 + t\mu_1^{'} + \frac{t^2}{2!}\mu_2^{'} + \frac{t^3}{3!}\mu_3^{'} + \ldots + \frac{t^r}{r!}\mu_r^{'} + \ldots$$

dimana $\mu_r^{'}$ merupakan momen ke r

dari X asli. Ini merupakan koefisien dari $\frac{t^r}{r!}$ dalam $M_X(t)$ diberikan $\mu_r^{'}$ (asli)

- kita punya $M_X(t) = 1 + t + 4t^2 + 10t^3 + 14t^4 + \ldots$
- $\mu_1^{'} =$ koefisien dari t dimana $M_X(t) = 1$

$\mu_1^{'} =$ koefisien dari $\frac{t^2}{2!}$ dimana $M_X(t) = 2!\ .4\ .\frac{t^2}{2!} = 8$

$\mu_1^{'} =$ koefisien dari $\frac{t^3}{3!}$ dimana $M_X(t) = 3!\ .\frac{10t^3}{3!} = 3 \times 2 \times 1 \times 10 = 60$

Sekarang kita tahu bahwa momen ke-3 dari X adalah

$$\mu_3 = \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'}\mu_1^{'} + 2\mu_1^{'3}$$

$$= 60 - 3(8)(1) + 2(1)^3$$

$$= 60 - 24 + 2$$

$$= 60 - 22$$

$$\mu_3 = 38$$

27. Satu set pengukuran X memiliki rata-rata 7 dan standar deviasi $0,2$. Untuk menyederhanakan, transformasi linear $YaX + b$ harus diterapkan untuk membuat mean dan varians sama dengan 1. Berapakah nilai konstanta a dan b?

Jawab :

$$Y = aX + b$$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$0 = a \times 7 + b$$

$$7a + b = 1 \qquad \ldots(1)$$

$$Var(Y) = a \times Var(X)$$

$1 = a(0,2)$

$a = \frac{1}{0,2}$

$= 5$

memasukkannya ke dalam persamaan (1)

$7 \times 5 + b = 1$

$35 + b = 1$

$b = 1 - 35$

$b = -34$

jadi $a = 5$ dan $b = -34$

28. Sepasang koin akan dilemparkan 3 kali. Pemain menerima 10 dolar jika ketiganya muncul dan membayar 3 dolar jika ada satu atau tidak ada gambar. Tidak ada keuntungan atau kerugian yang terjadi sebaliknya. Jika Y adalah keuntungan pemain, berapa nilai yang diharapkan Y ?

    Jawab :

    Misalkan X adalah jumlah gambar yang muncul. Maka $X \sim BIN(3, 0.5)$

    $P[X = 3] = \binom{3}{3} 0.5^3 = 0.125$

    $P[X = 0 \, atau \, X = 1] = P[X = 0] + P[X = 1] = \binom{3}{0} 0.5^3 + \binom{3}{1} 0.5^3 = 0.5$

    Jadi, $P[X = 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 3] = 1 - 0.625 = 0.375$

    Misalkan Y menjadi keuntungan. Maka $Y = 0$ jika $X = 2$

    $= 10 \; jika \; X = 3$

    $= -3 \; jika \; X = 0 \, atau \, 1$

    Jadi, $E[Y] = (0 \times P[X = 2]) + (10 \times P[X = 3]) + (-3 \times P[X = 0 \, atau \, 1])$

    $= 0 + 1.25 - 1.5$

    $= -0.25$

29. Jika X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & untuk\ x>0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Lalu berapa nilai ekspektasi dari variabel acak $Y=e^{\frac{3}{4}X}+6$?

Jawab :

$$E(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

Diketahui bahwa $E(aX+b)=a\,E(X)+b$

$$E\left(e^{\frac{3}{4}X}+6\right)=\int_0^\infty\left(e^{\frac{3}{4}x}+6\right)e^{-x}dx$$

$$=\int_0^\infty\left(e^{\frac{3}{4}x-x}+6e^{-x}\right)dx$$

$$=\int_0^\infty\left(e^{-\frac{1}{4}x}+6e^{-x}\right)dx$$

$$=\left(-\frac{e^{-\frac{1}{4}x}}{\frac{1}{4}}-6e^{-x}\right)\Bigg|_0^\infty$$

$$=(-0-0+4+6)$$

$$=10$$

$$E\left(e^{\frac{3}{4}X}+6\right)=\begin{cases} 10, & untuk\ x>0 \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

30. Jika fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak X dimana

$$f(x)=\begin{cases} (1-p)^{x-1}\,p, & jika\ x=1,2,3,\ldots,\infty \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

Lalu berapa nilai ekspektasi dari variabel acak X^{-1} ?

Jawab :

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x \ f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \ p$$

$$= p\frac{d}{dp}\left\{\int\left[\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}\right]dp\right\}$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left\{\left[\sum_{x=1}^{\infty}\int x(1-p)^{x-1}\right]dp\right\}$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left\{\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}\right\}$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left\{(1-p)\frac{1}{1-(1-p)}\right\}$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left\{\frac{1}{p}\right\}$$

$$= p\left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \frac{1}{p}$$

Karena $E(X) = \frac{1}{p}$, *Jadi* $E\left(X^{-1}\right) = p$

BAB V

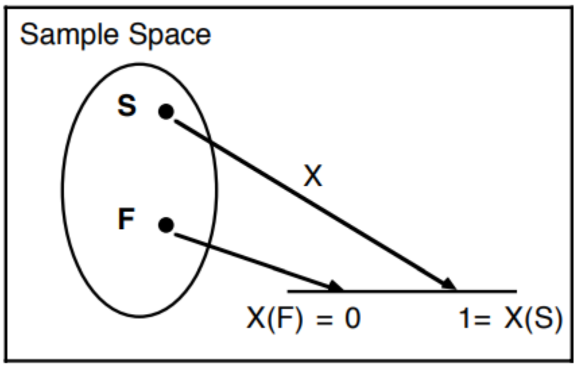
DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Diberikan percobaan acak, kita dapat menemukan himpunan dari semua kemungkinan hasil yang dikenal sebagai ruang sampel. Objek di ruang sampel tidak hanya angka. Jadi, kita menggunakan gagasan variabel acak untuk mengukur elemen kualitatif ruang sampel. Variabel acak dicirikan baik dengan fungsi kepadatan probabilitas atau fungsi distribusi kumulatifnya. Karakteristik lain dari variabel acak adalah mean, varians dan fungsi pembangkit momen.

5.1 Distribusi Bernoulli

Percobaan Bernoulli adalah eksperimen acak yang di dalamnya terdapat dua kemungkinan hasil yaitu 'kegagalan' (F) dan 'sukses' (S). Kita dapat mendefinisikan variabel acak dari ruang sampel $\{S,F\}$ ke dalam himpunan

bilangan real sebagai berikut : $X(F)=0 \qquad X(S)=1$



Fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak ini adalah

$$f(0)=P(X=0)=1-p$$

$$f(1)=P(X=1)=p,$$

di mana p menunjukkan kemungkinan sukses. Karenanya

$$f(x)=p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x=0,1$$

Definisi 5.1.

Variabel acak X disebut variabel acak Bernoulli jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \qquad x = 0,1$$

dimana p adalah kemungkinan sukses.

Kita menunjukkan variabel acak Bernoulli dengan menulis $X \sim BER(p)$.

Contoh 5.1.

Berapa probabilitas mendapatkan angka tidak kurang dari 5 dalam lemparan dadu enam sisi?

Jawab :

Enam kemungkinan angka $\{1,2,3,4,5,6\}$, kita kelompokkan menjadi dua himpunan, yaitu $\{1,2,3,4\}$ dan $\{5,6\}$. Angka berapapun di $\{1,2,3,4\}$ adalah kegagalan dan angka apa pun dalam $\{5,6\}$ berarti sukses. Jadi, ini adalah Distribusi Bernoulli dengan

$$P(X=0) = P(kegagalan) = \frac{4}{6} dan\, P(X=1) = P(sukses) = \frac{2}{6}$$

Oleh karena itu, probabilitas mendapatkan angka tidak kurang dari 5 dalam satu lemparan dadu bersisi enam sama dengan $\frac{2}{6}$

Teorema 5.1.

Jika X adalah variabel random Bernoulli dengan parameter p, maka mean, varians dan fungsi pembangkit momen masing-masing diberikan oleh

$$\mu_X = p$$

$$\sigma_X^2 = p(1-p)$$

$$M_X(t) = (1-p) + pe^t.$$

Bukti :

Rata-rata variabel acak Bernoulli adalah

$$\mu_X = \sum_{x=0}^{1} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x\, p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= 0\, p^0 (1-p)^{1-0} + 1\, p^1 (1-p)^{1-1}$$

$$= 0 + p$$

$$= p$$

Demikian pula, varians X diberikan oleh

$$\sigma_X^2 = \sum_{x=0}^{1} (x-\mu_X)^2 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} (x-p)^2 p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= (0-p)^2 p^0 (1-p)^{1-0} + (1-p)^2 p^1 (1-p)^{1-1}$$

$$= p^2 (1-p) + p(1-p)^2$$

$$= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p).$$

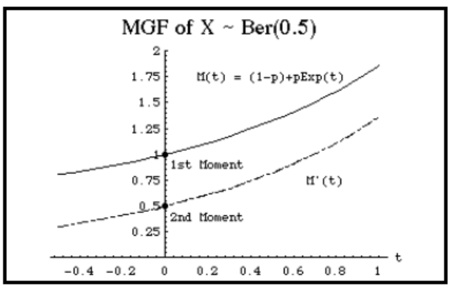
Selanjutnya, kita temukan fungsi pembangkit momen dari variabel acak Bernoulli

$$M(t) = E\,(e^{tX})$$

$$= \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= (1-P) + e^t p$$

Fungsi Pembangkit Momen X dan semua momen X ditunjukkan di bawah untuk $p = 0,5$. Perhatikan bahwa untuk distribusi Bernoulli semua momen sekitar nol adalah sama dan sama dengan p.



5.2 Distribusi Binomial

Distribusi binomial adalah distribusi probabilitas diskrit dengan jumlah keberhasilan dalam n percobaan sukses atau gagal yang saling bebas, dimana setiap hasil eksperimen memiliki probabilitas p. Variabel acak X disebut variabel acak binomial jika mewakili jumlah total keberhasilan dalam percobaan Bernoulli independen. Sekarang kita menentukan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak binomial. Ingatlah bahwa fungsi kepadatan probabilitas X didefinisikan sebagai

$$f(x)=P(X=x).$$

Jadi, untuk mencari fungsi kepadatan probabilitas X kita harus mencari probabilitasnya dari x sukses di n percobaan independen.

Jika kita memiliki x sukses di n percobaan, maka probabilitas setiap n urutan dengan x keberhasilan dan $n-x$ kegagalan

$$P^x(1-p)^{n-x}$$

Namun, ada $\binom{n}{x}$ urutan dengan x sukses dan $n-x$ kegagalan dalam n percobaan.

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas X adalah

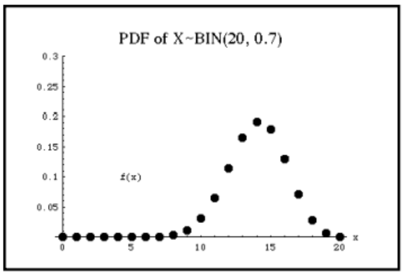
$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x=0,1,\dots,n$$

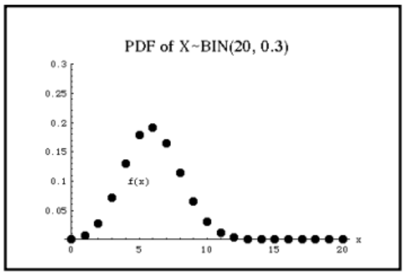
Definisi 5.2. Variabel acak X disebut variabel acak binomial dengan parameter p dan n jika fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,\dots,n$$

dimana $0<p<1$ adalah kemungkinan sukses.

Kita akan menyatakan bahwa variabel acak binomial dengan parameter p dan n sebagai $X \sim BIN(n,p)$.





Contoh 5.2. Fungsi bernilai real $f(x)$ diberikan oleh

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,\ldots,n$$

di mana n dan p adalah parameter, berapakah fungsi kepadatan probabilitasnya?

Jawab :

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita harus memeriksa bahwa $f(x)$ adalah nonnegatif dan $\sum_{x=0}^{n} f(x)$ adalah 1. Mudah untuk menghitung bahwa $f(x)\geq 0$. Kita tunjukkan bahwa jumlahnya adalah sama dengan satu.

$$\sum_{x=0}^{n} f(x)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=(p+1-p)^n$$

$$=1$$

Oleh karena itu $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas.

Contoh 5.3. Pada tes lima pertanyaan pilihan ganda ada lima kemungkinan jawaban, yang mana salah satunya benar. Jika seorang siswa menebak secara acak dan independen, berapa probabilitas dia benar hanya pada pertanyaan 1 dan 4?

Jawab :

Probabilitas keberhasilannya adalah $p=\frac{1}{5}$, dan dengan demikian $1-p=\frac{4}{5}$.

Oleh karena itu, probabilitas bahwa dia benar pada pertanyaan 1 dan 4 adalah

$$P(benar\ pada\ soal\ 1\ dan\ 4)=p^2(1-p)^3$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$= \frac{64}{5^5}$$

$$= 0,02048$$

Contoh 5.4. Pada tes lima pertanyaan pilihan ganda ada lima kemungkinan jawaban, yang mana salah satunya benar. Jika siswa menebak secara acak dan independen, Berapakah probabilitas bahwa dia benar hanya untuk dua pertanyaan?

Jawab :

Probabilitas keberhasilannya adalah $p = \frac{1}{5}$, dan dengan demikian $1 - p = \frac{4}{5}$.

Kemungkinan bahwa dia benar pada dua pertanyaan tersebut adalah

$$P(\textit{benar untuk dua pertanyaan}) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^2$$

$$= 10\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{640}{5^5}$$

$$= 0,2048$$

Contoh 5.5. Berapa probabilitas untuk mendapatkan dua angka enam dan tiga bukan enam dalam 5 pelemparan dadu independen yang adil?

Jawab :

Misalkan variabel acak X menunjukkan jumlah enam dalam 5 pelemparan dadu independen yang adil. Maka X adalah variabel acak binomial dengan probabilitas keberhasilan p dan $n = 5$. Probabilitas mendapatkan enam adalah $p = \frac{1}{6}$

$$P(X=2) = f(2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$= 10\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{125}{216}\right)$$

$$=\frac{1250}{7776}$$

$$=0,160751$$

Contoh 5.6. Berapa probabilitas dari pelemparan paling banyak dua angka enam dalam 5 pelemparan dadu independen yang adil?

Jawab :

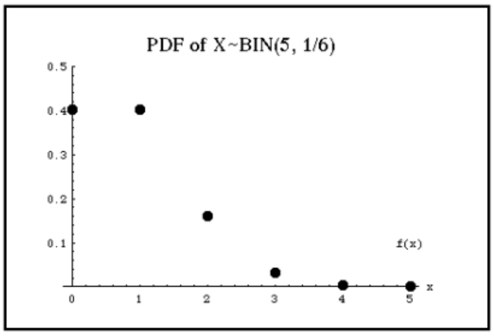
Misalkan variabel acak X menunjukkan angka enam dalam 5 pelemparan dadu independen yang adil. Maka X adalah variabel acak binomial dengan probabilitas sukses p dan $n=5$. Probabilitas mendapatkan enam adalah $p=\frac{1}{6}$. Oleh karena itu, probabilitas dari pelemparan paling banyak dua angka enam adalah

$$P(X\le 2)=F(2)=f(0)+f(1)+f(2)$$

$$=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4+\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$=\sum_{k=0}^{2}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

$$=\frac{1}{2}(0,9421+0,9734)=0,9577(\text{dari tabel binomial})$$



Teorema 5.2. Jika X adalah variabel acak binomial dengan parameter p dan n, maka mean, varians dan fungsi pembangkit momen masing-masing diberikan oleh

$$\mu_X = np$$

$$\sigma_X^2 = np(1-p)$$

$$M_X(t) = \left[(1-p) + pe^t\right]^n$$

Bukti :

Pertama, Tentukan fungsi pembangkit momen $M(t)$ dari X kemudian mencari mean dan varians dari $M(t)$.

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

Selanjutnya untuk mencari μ_X kita perlu turunkan $M(t)$, maka diperoleh

$$M'(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

untuk $t = 0$ diperoleh

$$\mu_x = M'(0) = np$$

Demikian pula

$$M''(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t + n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2} \left(pe^t\right)^2$$

Untuk itu

$$E\left(X^2\right) = M''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

Sehingga

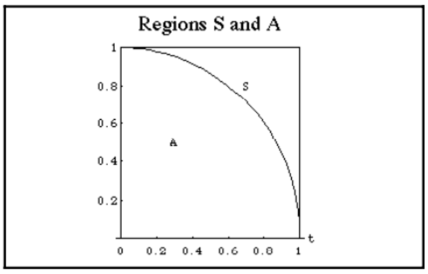
$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu_x^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

Contoh 5.7. Misalkan 2000 titik dipilih secara independen dan acak dari satuan bujur sangkar $S=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 1\}$. Misalkan X sama dengan jumlah titik yang termasuk dalam $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$. Bagaimana X didistribusikan? Berapakah mean, varians dan standar deviasi X?

Jawab :

Jika satu poin berada di A, maka itu sukses. Jika suatu titik termasuk dalam komplemen A, maka itu adalah kegagalan. Kemungkinan sukses adalah

$$p=\frac{\text{area dari } A}{\text{area dari } S}=\frac{1}{4}\pi$$



Karena variabel acak mewakili jumlah keberhasilan dalam 2000 percobaan independen, maka variabel acak X adalah binomial dengan parameter $p=\frac{\pi}{4}$ dan $n=2000$, itu adalah $X\sim BIN\left(2000,\frac{\pi}{4}\right)$. Dari teorema 5.2 maka diperoleh nilai mean adalah

$$\mu_X=2000\frac{\pi}{4}=1570,8.$$

Untuk nilai varians diperoleh

$$\sigma_x^2=2000\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4}=337,1$$

Standar deviasi dari X adalah

$$\sigma_x=\sqrt{337,1}=18,36.$$

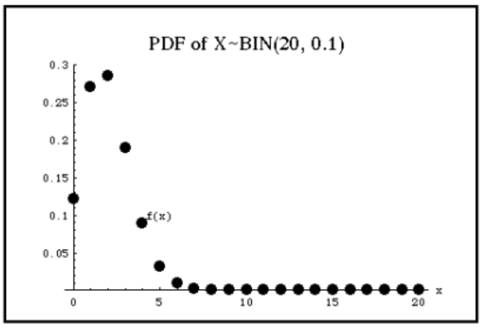
Contoh 5.8. Misalkan probabilitas berat lahir (dalam gram) bayi di Amerika kurang dari 2547 gram menjadi 0,1. Jika X sama dengan jumlah bayi yang beratnya kurang dari 2547 gram saat lahir di antara 20 bayi yang dipilih secara acak, maka berapa $P(X\le 3)$?

Jawab :

Jika berat bayi kurang dari 2547, maka itu sukses; jika tidak maka gagal. Jadi X adalah variabel acak binomial dengan probabilitas keberhasilan p dan $n=20$. Diketahui bahwa $p=0,1$. Karenanya

$$P(X \le 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{20-k}$$

$$= 0,867 \left(\text{dari tabel}\right)$$



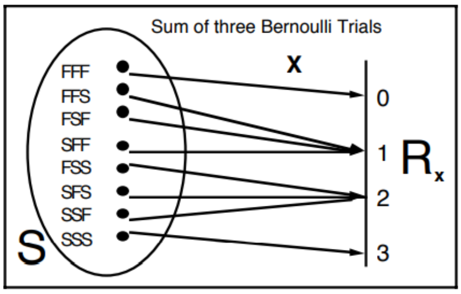
Contoh 5.9. Misalkan X_1, X_2, X_3 adalah tiga variabel acak Bernoulli independen dengan probabilitas keberhasilan yang sama p Berapakah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak $X = X_1 + X_2 + X_3$?

Jawab :

Ruang sampel dari tiga uji coba Bernoulli independen tersebut

$$S = \{FFF, FFS, FSF, SFF, FSS, SFS, SSF, SSS\}.$$

Variabel acak $X = X_1 + X_2 + X_3$ mewakili jumlah keberhasilan di setiap elemen S. Diagram berikut menggambarkan hal ini.



Misalkan p menjadi kemungkinan sukses.

$$f(0) = P(X=0) = P(FFF) = (1-p)^3$$

$$f(1) = P(X=1) = P(FFS) + P(FSF) + P(SFF) = 3p(1-p)^2$$

$$f(2) = P(X=2) = P(FSS) + P(SFS) + P(SSF) = 3p^2(1-p)$$

$$f(3) = P(X=3) = P(SSS) = P^3$$

Karenanya

$$f(x)=\binom{3}{x}p^x(1-p)^{3-x},\ x=0,1,2,3$$

Jadi

$$X\sim BIN(3,p).$$

Secara umum, jika $X_i \sim BER(p)$, kemudian $\sum_{i=1}^{n}X_i \sim BIN(n,p)$ dan karenanya

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=np$$

Dan

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=np(1-p)$$

Distribusi binomial dapat muncul setiap kali kita memilih sampel acak dari n unit dengan penggantian. Setiap unit dalam populasi diklasifikasikan ke dalam salah satu dari dua kategori menurut apakah ia memiliki atau tidak memiliki sifat tertentu.

5.3 Distribusi Geometri

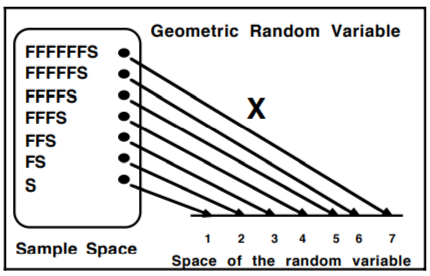
Jika X mewakili jumlah total keberhasilan dalam n percobaan Bernoulli independen, maka variabel acak

$$X\sim BIN(n,p)$$

di mana p adalah probabilitas keberhasilan percobaan Bernoulli tunggal dan fungsi kepadatan probabilitas X diberikan oleh

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},x=0,1,2,\ldots n.$$

Misalkan X menunjukkan jumlah percobaan di mana keberhasilan pertama terjadi.



probabilitas bahwa keberhasilan pertama terjadi pada percobaan ke x diberikan oleh

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}\, p$$

fungsi kepadatan probabilitas X adalah

$$f(x) = (1-p)^{x-1}\, p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots \infty,$$

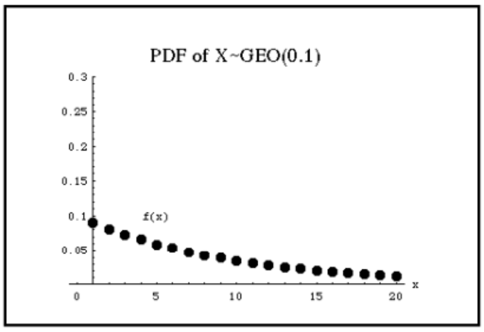
di mana p menunjukkan probabilitas keberhasilan dalam satu percobaan Bernoulli.

Definisi 5.3.

Variabel acak X memiliki distribusi geometri jika fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = (1-p)^{x-1}\, p \qquad x = 1,2,3, \ldots, \infty,$$

di mana p menunjukkan probabilitas keberhasilan dalam satu percobaan Bernoulli.



Jika X memiliki distribusi geometri, kita menyatakannya sebagai $X \sim GEO(p)$.

Contoh 5.10.

Fungsi bernilai real $f(x)$ ditentukan oleh

$$f(x) = (1-p)^{x-1}\, p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

di mana $0 < p < 1$ adalah parameter, fungsi kepadatan probabilitasnya adalah?

Jawab :

Selidiki bahwa $f(x) \geq 0$ dengan menunjukkan bahwa jumlahnya adalah satu.

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1}\, p$$

$$= p\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{y}\ ,\ \ dimana\ y = x-1$$

$$= p\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$=1$$

Oleh karena itu $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas.

Contoh 5.11. Probabilitas mesin menghasilkan item yang rusak adalah 0.02. Setiap item diperiksa saat diproduksi. Dengan asumsi bahwa ini adalah percobaan independen, berapakah probabilitas bahwa setidaknya 100 item harus diperiksa untuk menemukan satu item yang rusak?

Jawab :

Misalkan X menunjukkan nomor percobaan di mana item pertama yang rusak diamati. Kita akan mencari

$$P(X \geq 100) = \sum_{x=100}^{\infty} f(x)$$

$$= (1-p)^{99}\sum_{y-0}^{\infty}(1-p)^{y}\ p$$

$$= (1-p)^{99}$$

$$= (0,98)^{99}$$

$$= 0,1353$$

Karenanya probabilitas bahwa setidaknya 100 item harus diperiksa untuk menemukan satu item yang rusak adalah 0.1353.

Contoh 5.12. Seorang penjudi bermain roulette di Monte Carlo dan terus berjudi, bertaruh dengan jumlah yang sama setiap kali di "Merah", sampai dia menang untuk pertama kalinya. Jika probabilitas "Merah" adalah $\frac{18}{38}$ dan penjudi hanya memiliki cukup uang untuk 5 percobaan,

a) Berapa kemungkinan dia akan menang sebelum dia menghabiskan dananya;

b) Berapa kemungkinan dia menang pada percobaan kedua?

Jawab :

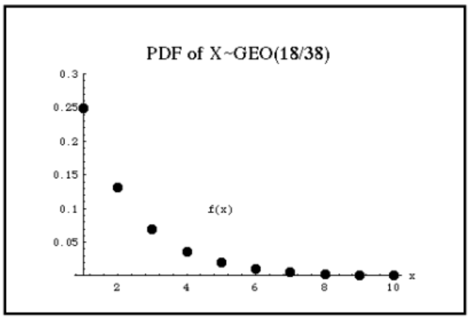
$$p = P(Merah) = \frac{18}{38}$$

a) Oleh karena itu, kemungkinan bahwa dia akan menang sebelum menghabiskan dananya diberikan oleh

$$\begin{aligned} P(X \le 5) &= 1 - P(X \ge 6) \\ &= 1 - (1-p)^5 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{18}{38}\right)^5 \\ &= 1 - (0.5263)^5 \\ &= 1 - 0.044 \\ &= 0.956. \end{aligned}$$

b) Demikian pula, probabilitas bahwa dia menang pada percobaan kedua diberikan oleh

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= f(2) \\ &= (1-p)^{2-1} p \\ &= \left(1 - \frac{18}{38}\right)\left(\frac{18}{38}\right) \\ &= \frac{360}{1444} \\ &= 0.2493. \end{aligned}$$



Teorema berikut memberi kita mean, varians, dan fungsi pembangkit momen dari variabel acak dengan distribusi geometri.

Teorema 5.3.

Jika X adalah variabel acak geometri dengan parameter p, maka mean, varians, dan fungsi pembangkit momen masing-masing diberikan oleh

$$\mu_X = \frac{1}{p}$$

$$\sigma_X^2 = 1 - \frac{p}{p^2}$$

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\text{ , } jika\ t < -\ln(1-p).$$

Bukti :

Dengan menghitung fungsi pembangkit momen dari X maka diperoleh mean dan varians dari X.

$$M(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}(1-p)^{x-1} p$$

$$= p\sum_{y=0}^{\infty} e^{t(y+1)}(1-p)^y \text{ ,} dimana\ y = x-1$$

$$= pe^t \sum_{y=0}^{\infty}\left(e^t(1-p)\right)^y$$

$$= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\text{, } jika\ t < -\ln(1-p)$$

Membedakan $M(t)$ terhadap t, kita memperoleh

$$M'(t) = \frac{\left(1-(1-p)e^t\right)pe^t + pe^t(1-p)e^t}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

$$= \frac{Pe^t\left[1-(1-p)e^t + (1-p)e^t\right]}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

$$= \frac{pe^t}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$\mu_X = E(X) = M'(0) = \frac{1}{p}$$

Demikian pula, turunan kedua $M(t)$ dapat diperoleh dari turunan pertama sebagai

$$M''(t)=\frac{\left[1-(1-p)e^t\right]^2 pe^t+pe^t\,2\left[1-(1-p)e^t\right](1-p)e^t}{\left[1-(1-p)e^t\right]^4}$$

$$M''(0)=\frac{p^3+2p^2(1-p)}{p^4}$$

$$=\frac{2-p}{p^2}$$

Sehingga diperoleh untuk varians dari X adalah

$$\sigma_X^2=M''(0)-\left(M'(0)\right)^2$$

$$=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}$$

$$=\frac{1-p}{p^2}$$

Teorema 5.4.

Variabel acak X adalah geometri jika dan hanya jika memenuhi sifat kekurangan memori, yaitu

$$P(X>m+n\,/\,X>n)=P(X>m)$$

untuk semua bilangan asli n dan m.

Bukti :

Sangat mudah untuk memeriksa bahwa distribusi geometri memenuhi sifat kekurangan memori

$$P(X>m+n\,/\,X>n)=P(X>m)$$

yaitu

$$P(X>m+n\,dan\,X>n)=P(X>m)P(X>n). \qquad (5.1)$$

Jika X adalah geometri, yaitu $X\sim(1-p)^{x-1}p$, maka

$$P(X > n+m) = \sum_{x=n+m+1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p$$

$$= (1-p)^{n+m}$$

$$= (1-p)^{n} (1-p)^{m}$$

$$= P(X > n) P(X > m).$$

Oleh karena itu, distribusi geometri memiliki kekurangan sifat memori. Misalkan X adalah variabel acak yang memenuhi kekurangan sifat memori, yaitu

$$P(X > m+n \, dan \, X > n) = P(X > m) P(X > n).$$

Kita ingin menunjukkan bahwa X geometri. Definisi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oleh

$$g(n) = P(X > n) \qquad (5.2)$$

Menggunakan $(5.2) di (5.1)$, kita mendapatkan

$$g(m+n) = g(m) g(n) \qquad \forall m, n \in N. \qquad (5.3)$$

Karena $P(X > m+n \, dan \, X > n) = P(X > m+n)$.

Misalkan $m = 1 dalam (5.3)$,

kita hitung bahwa

$$g(n+1) = g(n) g(1)$$

$$= g(n-1) g(1)^2$$

$$= g(n-2) g(1)^3$$

$$= \ldots$$

$$= g(n-(n-1)) g(1)^n$$

$$= g(1)^{n+1}$$

$$= a^{n+1},$$

di mana a adalah konstanta sembarang. Oleh karena itu $g(n) = a^n$. Dari (5.2), kita mendapatkan

$$1 - F(n) = P(X > n) = a^n$$

dan dengan demikian

$$F(n) = 1 - a^n$$

Karena $F(n)$ adalah fungsi distribusi

$$1 = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - a^n\right)$$

Dari penjelasan di atas, kita menyimpulkan bahwa $0 < a < 1$. Kita mengganti nama konstanta a sebagai $(1-p)$. Jadi,

$$F(n) = 1 - (1-p)^n.$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas X adalah

$$f(1) = F(1) = p$$

$$f(2) = F(2) - F(1) = 1 - (1-p)^2 - 1 + (1-p) = (1-p)p$$

$$f(3) = F(3) - F(2) = 1 - (1-p)^3 - 1 + (1-p)^2 = (1-p)^2 p$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$f(x) = F(X) - F(x-1) = (1-p)^{x-1} p$$

Jadi X geometri dengan parameter p. Ini melengkapi buktinya.

Perbedaan antara distribusi binomial dan geometri adalah sebagai berikut. Dalam distribusi binomial jumlah uji coba sudah ditentukan sebelumnya, sedangkan dalam geometri adalah variabel acak.

5.4 Distribusi Binomial Negatif

Misalkan X menunjukkan jumlah percobaan di mana keberhasilan ke r terjadi. Di sini r adalah bilangan bulat positif lebih besar dari atau sama dengan satu. Ini sama dengan mengatakan bahwa variabel acak X menunjukkan jumlah percobaan yang diperlukan untuk mengamati keberhasilan ke r. Misalkan kita ingin menemukan probabilitas bahwa gambar kelima diamati pada pelemparan independen ke-10 dari koin yang tidak bias. Ini adalah kasus menemukan $P(X = 10)$. Mari kita temukan kasus umum $P(X = x)$

$$P(X = x) = P(\textit{first}\, x-1\, \textit{trials contain}\, x-r\, \textit{failures and}\, r-1\, \textit{successes})\square$$
$$P(r^{th}\, \textit{success in}\, x^{th}\, \textit{trial})$$

$$= \binom{x-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{x-r}\ p$$

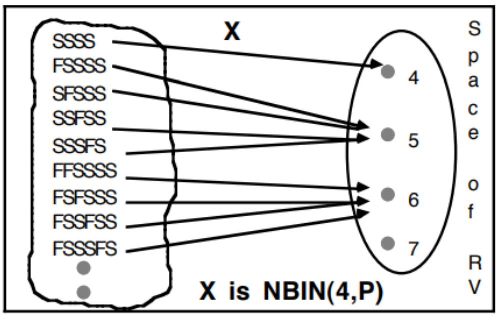
$$= \binom{x-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots, \infty$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas variabel acak X diberikan oleh

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots, \infty$$

Perhatikan bahwa fungsi kepadatan probabilitas ini $f(x)$ juga dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \binom{x+r-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \infty$$

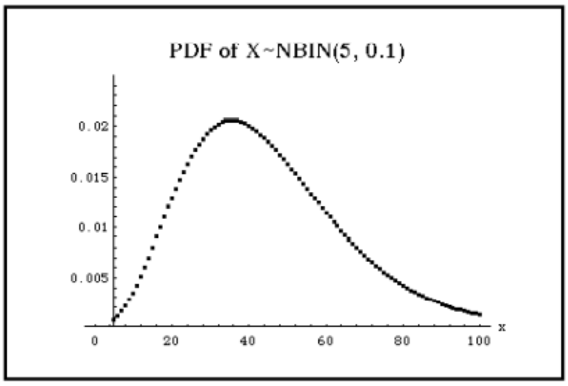


Definisi 5.4. Variabel acak X memiliki distribusi binomial (atau Pascal) negatif jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \binom{x+r-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{x}, \quad x = 0, 1, \ldots., \infty$$

di mana p adalah probabilitas keberhasilan dalam satu percobaan Bernoulli.

Kita menunjukkan variabel acak X yang distribusinya adalah distribusi bi nomial negatif dengan menulis $X \sim NBIN(r, p)$.



Kami membutuhkan hasil perhitungan berikut untuk menunjukkan bahwa fungsi di atas sebenarnya adalah fungsi kepadatan probabilitas. Hasil perhitungaan kita akan menetapkan disebut teorema binomial negatif.

Teorema 5.5. Misalkan r adalah bilangan bulat positif bukan nol.

$$(1-y)^{-r} = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} y^{x-r} \qquad \textit{Dimana } |y|<1$$

Bukti **:**

Menjelaskan

$$h(y) = (1-y)^{-r}$$

Sekarang memperjelas $h(y)$ dengan metode deret Taylor tentang $y=0$, kita dapatkan

$$(1-y)^{-r} = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} y^{k}$$

di mana $h^{(k)}(y)$ adalah turunan ke k dari h. Turunan ke k dari $h(y)$ ini dapat langsung dihitung dan perhitungan langsung menghasilkan

$$h^{(k)}(y) = r(r+1)(r+2)\ldots(r+k-1)(1-y)^{-(r+k)}$$

Oleh karena itu, kita mendapatkan

$$h^{(k)}(0) = r(r+1)(r+2)\ldots(r+k-1) = \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!}$$

Misalkan ini menjadi ekspansi Taylor dari $h(y)$, kita dapatkan

$$(1-y)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!\,k!} y^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{r-1} y^k$$

Misalkan $x = k + r$, kita dapatkan

$$(1-y)^{-r} = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} y^{x-r}$$

Teorema 5.6. Juga dapat dibuktikan dengan menggunakan deret geometri

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} \qquad (5.4)$$

dimana $|y| < 1$. Membedakan k kali kedua sisi dari persamaan (5.4) dan kemudian menyederhanakannya kita dapatkan

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} y^{n-k} = \frac{1}{(1-y)^{k+1}} \qquad (5.5)$$

Misalkan $n = x-1$ dan $k = r-1$ dalam (5.5), kita memiliki hasil yang telah dinyatakan.

Contoh 5.13. Fungsi bernilai real didefinisikan oleh

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots, \infty$$

di mana $0 < p < 1$ adalah parameter, fungsi kepadatan probabilitasnya adalah?

Jawab :

Untuk memeriksa bahwa $f(x) \geq 0$. Kita akan membuktikan bahwa

$$\sum_{x=r}^{\infty} f(x) = 1$$

Maka :

$$\sum_{x=r}^{\infty} f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r (1-(1-p))^{-r}$$

$$= p^r p^{-r}$$

$$= 1$$

Contoh 5.14. Berapa fungsi pembangkit momen dari variabel acak X yang fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots, \infty$$

Jawab :

Fungsi pembangkit momen dari binomial negatif variabel acak ini adalah

$$M(t) = \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r \sum_{x=r}^{\infty} e^{t(x-r)} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r e^{tr} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} e^{t(x-r)} (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r e^{tr} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} \left[e^t (1-p)\right]^{x-r}$$

$$= p^r e^{tr} \left[1-(1-p)e^t\right]^{-r}$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r, \quad jika\ t < -\ln(1-p)$$

Torema 5.7. Jika $X \sim N\,BIN(r, p)$, kemudian

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r, \quad jika\, t < -\ln(1-p)$$

Bukti :

Dengan menunjukkan $M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$ kemudian kita dapat juga mencari ekspektasi dari X dan varians dari X .

Untuk mencari $M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$ adalah

$$M(t) = \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r \sum_{x=r}^{\infty} e^{t(x-r)} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r e^{tr} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} e^{t(x-r)} (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r e^{tr} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} \left[e^t (1-p)\right]^{x-r}$$

$$= p^r e^{tr} \left[1-(1-p)e^t\right]^{-r}$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r, \quad jika\ t < -\ln(1-p)$$

Dengan menurunkan $M(t)$ terhadap t maka diperoleh nilai $E(X)$ yaitu

$$M^{'(t)} = r\left(\frac{pe^t\left(1-(1-p)e^t\right) + pe^t(1-p)e^t}{\left(1-(1-p)e^t\right)^2}\right)$$

$$= r\left(\frac{pe^t\left[\left(1-(1-p)e^t\right) + (1-p)e^t\right]}{\left(1-(1-p)e^t\right)^2}\right)$$

$$= r\left(\frac{pe^t}{\left(1-(1-p)e^t\right)^2}\right)$$

dengan memasukkan $t = 0$ maka diperoleh

$$M'(0) = r\left(\frac{p}{p^2}\right)$$

$$= \frac{r}{p}$$

Untuk mencari nilai varians dari X maka diperoleh

$$M''(t) = r\left(\frac{pe^t\left(1-(1-p)e^t\right)^2 + 2pe^t(1-p)e^t(1-p)e^t}{\left(1-(1-p)e^t\right)^4}\right)$$

Ketika $t = 0$ maka

$$M''(0) = r\left(\frac{p^3 + 2p^2 - 2p^3}{p^4}\right)$$

$$= r\left(\frac{2p^2 - p^3}{p^4}\right)$$

$$= \frac{rp^2(2-p)}{p^2.p^2}$$

$$= r\frac{(2-p)}{p^2}$$

Sehingga diperoleh untuk varians dari X adalah

$$Var(X) = M^{''(0)} - \left(M'(0)\right)^2$$

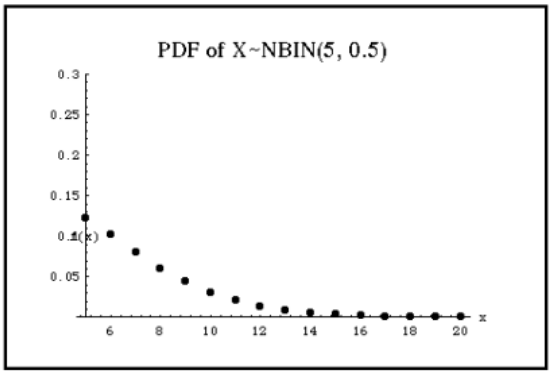
$$= r\frac{(2-p)}{p^2} - \left(\frac{r}{p}\right)^2$$

$$= \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Contoh 5.15. Berapa probabilitas bahwa gambar kelima diamati pada lemparan koin independen ke 10?

Jawab :

Misalkan X menunjukkan jumlah percobaan yang diperlukan untuk mengamati gambar ke 5. Oleh karena itu X memiliki distribusi binomial negatif dengan $r = 5$ dan $p = \frac{1}{2}$. Kita ingin mencari



Dalam distribusi binomial negatif, parameter adalah bilangan bulat positif. Kita dapat menggeneralisasi distribusi binomial negatif untuk memungkinkan nilai non-integer (bukan bilangan bulat) dari parameter-parameter. Untuk melakukan ini, dapat ditulis fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi negatif binomial sebagai berikut

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-p}$$

$$= \frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-1)} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(r)\Gamma(x-r-1)} p^r (1-p)^{x-r} \text{ ,untuk } x = r, r+1, \ldots, \infty$$

Dimana

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

adalah fungsi gamma yang terkenal. Fungsi gamma menggeneralisasi gerak faktorial dan akan dibahas pada bab berikutnya.

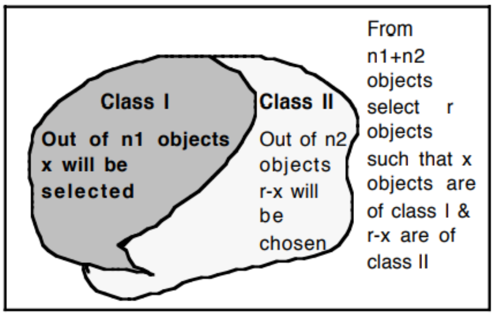
5.5 Distribusi Hipergeometri

Perhatikan kumpulan objek yang dapat diklasifikasikan menjadi dua kelas, misalkan kelas 1 dan kelas 2. Misalkan ada n_1 objek di kelas 1 dan n_2 objek di kelas 2. Kumpulan r objek dipilih dari n objek tersebut secara acak dan tanpa penggantian. Kita tertarik untuk mencari tahu kemungkinan bahwa tepatnya x dari r objek tersebut berasal dari kelas 1.

Jika x dari objek tersebut berasal dari kelas 1, maka $r-x$ objek yang tersisa harus dari kelas 2. Kita dapat memilih objek dari kelas 1 dengan salah satu cara $\binom{n_1}{x}$.Demikian pula, sisa objek $r-x$ dapat dipilih dalam cara $\binom{n_2}{r-x}$. Jadi, banyaknya cara seseorang dapat memilih subset objek dari satu set objek, seperti jumlah objek dari kelas 1 dan $r-x$ jumlah objek dari kelas 2, diberikan oleh $\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{r-x}$ Karenanya,

$$P(X=x)=\frac{\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{r-x}}{\binom{n}{r}}$$

Dimana $x \le r$,$x \le n_1$ dan $r-x \le n_2$



Definisi 5.5.

Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi hipergeometri jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x)=\frac{\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{r-x}}{\binom{n_1+n_2}{r}} \qquad x=0,1,2,\ldots,r$$

Dimana $x \le n_1$ dan $r-x \le n_2$ dengan n_1 dan n_2 dua bilangan bulat positif, distribusi hipergeometri dapat dinotasikan sebagai berikut

$$X \sim HYP(n_1,n_2,r)$$

Contoh 5.16. Misalkan ada 3 item rusak di banyak 50 item. Sampel ukuran 10 diambil secara acak dan tanpa penggantian. Misalkan X mengetahui jumlah item yang rusak dalam sampel. Berapa probabilitas sampel berisi paling banyak satu item yang rusak?

Jawab :

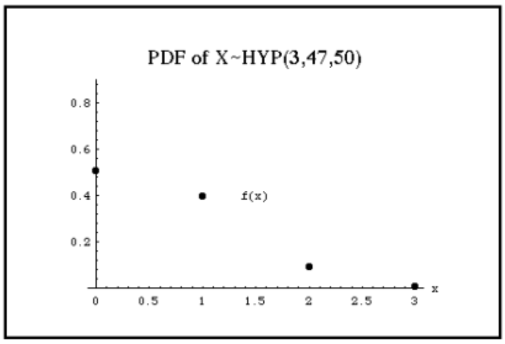
Untuk $X \sim HYP(3,47,10)$. Oleh karena itu, kemungkinan bahwa sampel berisi paling banyak satu item yang rusak adalah

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{10}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{47}{9}}{\binom{50}{10}}$$

$$= 0,504 + 0,4$$

$$= 0,904$$



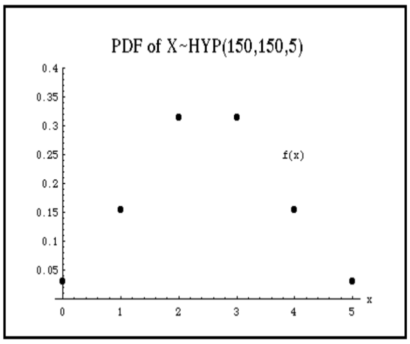
Contoh 5.17. Sampel acak dari 5 mahasiswa diambil tanpa penggantian dari antara 300 mahasiswa, dan masing-masing dari 5 mahasiswa ini ditanya apakah dia telah mengambil mata kuliah Statistika Matematika. Misalkan 50% mahasiswa benar-benar pernah mengambil mata kuliah itu. Berapa probabilitas dua mahasiswa yang diwawancarai telah mengambil mata kuliah tersebut?

Jawab :

Misalkan X menunjukkan jumlah mahasiswa yang diwawancarai yang telah mengambil mata kuliah tersebut. Oleh karena itu, kemungkinan dua siswa yang diwawancarai telah mengambil mata kuliah tersebut

$$P(X=2)=\frac{\binom{150}{2}\binom{150}{3}}{\binom{300}{5}}$$

$$=0,3146$$



Contoh 5.18. Rumah pemasok radio memiliki 200 radio transistor, 3 di antaranya tidak disolder dengan benar dan 197 di antaranya disolder dengan benar. Rumah pemasok secara acak menarik 4 radio tanpa penggantian dan mengirimkannya ke pelanggan. Berapa probabilitas rumah pemasok mengirimkan 2 radio yang disolder dengan tidak benar kepada pelanggannya?

Jawab :

Kemungkinan bahwa rumah pemasok mengirimkan 2 solder yang tidak tepat radio untuk pelanggannya

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{107}{3}}{\binom{200}{4}}$$

$$=0,000895$$

Teorema 5.8. Jika $X \sim HYP(n_1, n_2, r)$, lalu

$$E(X)=r\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

$$Var(X)=r\left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{n_1+n_2-r}{n_1+n_2-1}\right)$$

Bukti :

Misalkan $X \sim HYP(n_1, n_2, r)$. Kita menghitung mean dan varians dari X dengan menghitung momen faktorial pertama dan kedua dari variabel acak X . Pertama, kita menghitung momen faktorial pertama (yang sama dengan nilai harapan) dari X . Nilai harapan dari X diberikan oleh

$$E(X) = \sum_{x=0}^{r} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{r-x}}{\binom{n_1+n_2}{r}}$$

$$= n_1 \sum_{x=1}^{r} \frac{(n_1-1)!}{(x-1)!\ (n_1-x)!} \frac{\binom{n_2}{r-x}}{\binom{n_1+n_2}{r}}$$

$$= n_1 \sum_{x=1}^{r} \frac{\binom{n_1-1}{x-1}\binom{n_2}{r-x}}{\frac{n_1+n_2}{r}\binom{n_1+n_2-1}{r-1}}$$

$$= r\frac{n_1}{n_1+n_2} \sum_{y=0}^{r-1} \frac{\binom{n_1-1}{y}\binom{n_2}{r-1-y}}{\binom{n_1+n_2-1}{r-1}}, \quad \text{dimana } y = x-1$$

$$= r\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

Persamaan terakhir diperoleh saat

$$\sum_{y=0}^{r-1} \frac{\binom{n_1-1}{y}\binom{n_2}{r-1-y}}{\binom{n_1+n_2-1}{r-1}} = 1$$

Demikian pula, kita menemukan momen faktorial kedua dari X menjadi

$$E(X(X-1)) = \frac{r(r-1)n_1(n_1-1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}$$

Oleh karena itu, varians X adalah

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\
&= E\left(X(X-1)\right) + E(X) - E(X)^2 \\
&= \frac{r(r-1)n_1(n_1-1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} + r\frac{n_1}{n_1+n_2} - \left(r\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^2 \\
&= r\left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{n_1+n_2-r}{n_1+n_2-1}\right)
\end{aligned}
$$

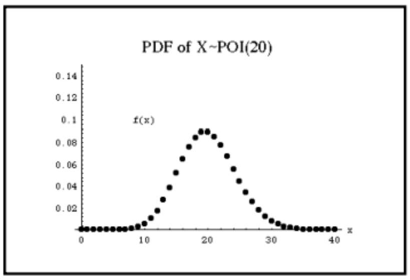
5.6 Distribusi Poisson

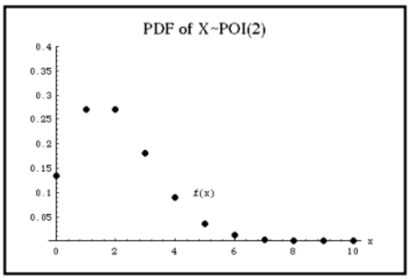
Pada bagian ini, kita mendefinisikan distribusi diskrit yang banyak digunakan untuk memodelkan banyak situasi kehidupan nyata. Pertama, kita mendefinisikan distribusi ini dan kemudian kita menyajikan beberapa sifat pentingnya.

Definisi 5.6. Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi Poisson jika fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots,\infty$$

dimana $0 < \lambda < \infty$ adalah parameter. Kita menunjukkan variabel acak distribusi Poisson dengan $X \sim POI(\lambda)$.





Contoh 5.19. Fungsi bernilai real ditentukan oleh

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots,\infty$$

dimana $0<\lambda<\infty$ adalah parameter, fungsi kepadatan probabilitasnya adalah?

Jawab :

Mudah untuk menentukan $f(x)\geq 0$. Kita tahu bahwa :

$$\sum_{0}^{\infty} f(x)=1$$

yakni

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

Teorema 5.9. Jika $X \sim POI(\lambda)$, maka

$$E(X)=\lambda$$

$$Var(X)=\lambda$$

$$M(t)=e^{\lambda(e^{t}-1)}$$

Bukti :

Pertama, kita temukan fungsi pembangkit momen (MGF) dari X

$$M(t)=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^{t}\lambda)^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

Dengan menurunkan $M'(t)$ maka didapatkan nilai $E(X)$ adalah

$$M'(t) = \lambda e^t e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$E(X) = M'(0) = \lambda$$

Demikian juga

$$M''(t) = \lambda e^t e^{\lambda\left(e^t - 1\right)} + \left(\lambda e^t\right)^2 e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

Ketika $t = 0$ maka

$$M''(0) = E\left(X^2\right) = \lambda^2 + \lambda$$

Sehingga diperoleh varians dari X adalah

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Contoh 5.20. Variabel acak X memiliki distribusi Poisson dengan mean 3. Berapakah probabilitas bahwa X dibatasi oleh 1 dan 3, yaitu, $P(1 \le X \le 3)$?

Jawab :

$$\mu_X = 3 = \lambda$$

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Oleh karena itu

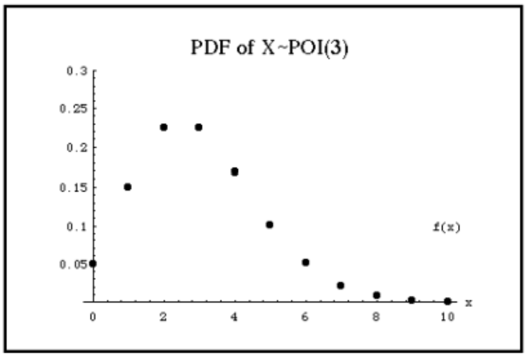
$$f(x) = \frac{3^x e^{-3}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Sehingga

$$P(1 \le X \le 3) = f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3} + \frac{27}{6}e^{-3}$$

$$= 12e^{-3}$$



Contoh 5.21. Jumlah kecelakaan lalu lintas per minggu di suatu Kota memiliki distribusi Poisson dengan mean sama dengan 3. Berapakah probabilitasnya tepatnya 2 kecelakaan terjadi dalam 2 minggu?

Jawab :

Rata-rata kecelakaan lalu lintas adalah 3. Jadi, kecelakaan rata-rata ada di dua minggu adalah

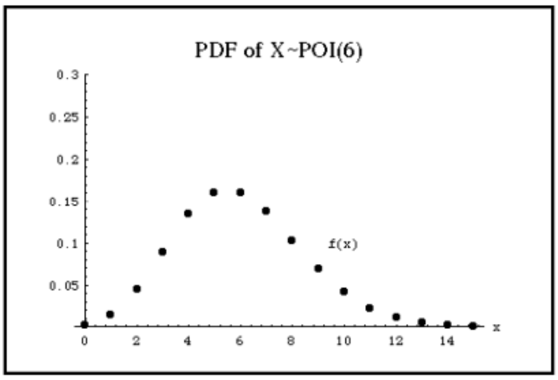
$$\lambda = (3)(2) = 6$$

Saat

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Diperoleh untuk probabilitas tepat 2 kecelakaan adalah

$$f(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = 18e^{-6}$$



Contoh 5.22. Misalkan X memiliki distribusi Poisson dengan parameter λ = 1. Berapakah probabilitas $X \geq 2$ mengingat bahwa $X \leq 4$?

Jawab :

$$P(X \geq 2 \mid X \leq 4) = \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{P(X \leq 4)}$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = \sum_{x=2}^{4} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{x=2}^{4} \frac{1}{x!}$$

$$= \frac{17}{24e}$$

Demikian pula

$$P(X \leq 4) = \frac{1}{e} \sum_{x=0}^{4} \frac{1}{x!}$$

$$= \frac{65}{24e}$$

Oleh karena itu, kita dapatkan

$$P(X \geq 2 \mid X \leq 4) = \frac{17}{65}$$

Contoh 5.23. Jika Fungsi Pembangkit Momen (MGF) dari variabel acak X adalah $M(t) = e^{4.6(e^t - 1)}$ lalu berapakah mean dan varians dari X? berapakah probabilitas bahwa X antara 3 dan 6, yaitu $P\,(3 < X < 6)$?

Jawab :

Karena fungsi pembangkit momen X diberikan oleh

$$M(t) = e^{4.6(e^t - 1)}$$

dapat disimpulkan bahwa $X \sim POI(\lambda)$ dengan $\lambda = 4.6$. Jadi, dengan Teorema 5.8, kita dapatkan

$$E(X) = 4.6 = Var(X)$$

$$P(3 < X < 6) = f(4) + f(5)$$
$$= F(5) - F(3)$$
$$= 0.686 - 0.326$$
$$= 0.36$$

5.7 Distribusi Riemann Zeta

Distribusi zeta digunakan oleh ekonom Italia Vilfredo Pareto (1848-1923) untuk mempelajari distribusi pendapatan keluarga di negara tertentu.

Definisi 5.7. Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi Riemann zeta jika fungsi kepadatan probabilitasnya (PDF) berbentuk

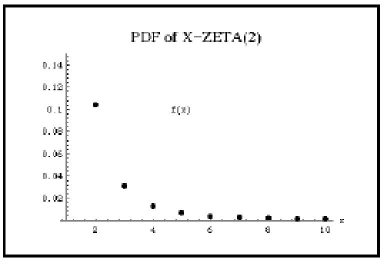
$$f(x) = \frac{1}{\zeta(\alpha+1)} x^{-(\alpha+1)}, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

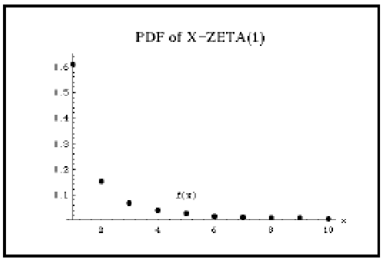
Dimana α > 0 adalah parameter dan

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \ldots + \left(\frac{1}{x}\right)^s + \ldots$$

adalah fungsi Riemann Zeta. Variabel acak yang memiliki Distribusi Riemann zeta dengan parameter α akan dilambangkan dengan $X \sim RIZ(\alpha)$.

Gambar berikut mengilustrasikan distribusi Riemann zeta untuk kasus tersebut $\alpha = 2$ *dan* $\alpha = 1$.





Teorema 5.10. Jika $X \sim RIZ(\alpha)$, maka

$$E(X) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha+1)}$$

$$Var(X) = \frac{\zeta(\alpha+1)\zeta(\alpha+1) - (\zeta(\alpha))^2}{(\zeta(\alpha+1))^2}$$

Catatan 5.1. $jika\, 0 < \alpha \leq 1, maka\, \zeta(\alpha) = \infty.$

$karenannya\; X \sim RIZ(\alpha)\, dan$

$parameter\; \alpha \leq 1, maka\; varians\; X\; tidak\; terbatas$

Daftar Penggunaan Distribusi dalam Penyelesaian Soal Latihan

Jenis Distribusi	Nomor Soal
Distribusi Binomial	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 18, 20, 21, 22, 28
Distribusi Binomial Negatif	10
Distribusi Poisson	12, 17, 24, 25, 26
Distribusi Geometri	9, 16, 23, 27
Distribusi Hipergeometri	15

Latihan Soal

1. Berapakah probabilitas untuk mendapatkan tepat 3 gambar dalam 5 lemparan koin yang adil?

   Jawab : Distribusi Binomial

   $n = 5$

   $p = \frac{1}{2}$

   $X \sim BIN\left(n = 5; p = \frac{1}{2}\right)$

   $P(X = x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-x} ; x = 0, 1, 2, \ldots, 5$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

$$=\frac{5!}{(5-3)!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$=\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$=(10)\left(\frac{1}{32}\right)$$

$$=\frac{10}{32}$$

$$=\frac{5}{16}$$

Jadi probabilitas mendapatkan tepat 3 kepala dalam 5 lemparan koin yang adil adalah $\frac{5}{16}$

2. Pada 6 lemparan koin yang adil secara berturut-turut, berapa probabilitas munculnya 3 gambar dan 3 angka?

Jawab : Distribusi Binomial

$$\textit{Probabilitas dari gambar} = p = \frac{1}{2}$$

$$n=6$$

$$X \sim BIN\left(n=6; p=\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=x)=\binom{6}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-x};x=0,1,2,\ldots,6$$

kemungkinan munculnya tepat 3 gambar

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-3}$$

$$=\frac{6!}{(6-3)!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$= (20)\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{20}{64}$$

$$= \frac{5}{16}$$

$$= 0{,}3125$$

Jadi probabilitas munculnya 3 gambar dan 3 angka adalah $0{,}3125$

3. Berapa probabilitas yang tepat dalam 3 lemparan dari sepasang dadu bersisi enam, tepat satu total 7 dari pelemparan tersebut?

   Jawab : Distribusi Binomial

   Misalkan X adalah variabel acak yang menunjukkan berapa kali total 7 terjadi dalam 3 lemparan sepasang dadu dan mengikuti distribusi binomial dengan parameter $n=3$ dan $p=\frac{1}{6}$

$$X \sim BIN\left(n = 3, p = \frac{1}{6}\right)$$

   Fungsi distribusi probabilitas dari distribusi binomial diberikan

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, untuk\ x = 0,1,2,\ldots$$

   Probabilitas bahwa dalam 3 lemparan dari sepasang dadu bersisi enam, tepat satu total 7 dari pelemparan tersebut adalah :

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1}$$

$$= \left(\frac{3!}{(3-1)!1!}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= (3)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{25}{36}\right)$$

$$= \frac{75}{216}$$

$$= \frac{25}{72}$$

$$= 0,3472$$

Jadi probabilitas bahwa dalam 3 lemparan dari sepasang dadu bersisi enam, tepat satu total 7 dari pelemparan tersebut adalah $= \frac{25}{72}$ *atau* $0,3472$

4. Berapa probabilitas untuk mendapatkan tepat empat angka 6 saat dadu dilemparkan 7 kali?

   Jawab : Distribusi Binomial

$$Probabilitas\,6\,dalam\,satu\,lemparan = \frac{1}{6}$$

$$Probabilitas\,6\,dari\,4\,lemparan = \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$Probabilitas\,tidak\,6\,dalam\,satu\,lemparan = \frac{5}{6}$$

$$Probabilitas\,tidak\,6\,pada\,3\,lemparan = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$Cara\,memilih\,4\,dari\,7 = {}_7C_4$$

$$= \frac{7!}{(7-4)!4!}$$

$$= \frac{7!}{3!4!}$$

$$= (7)(5)$$

$$= 35$$

$$Probabilitas\,tepat\,6\,pada\,4\,lemparan = 35\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$= \frac{4375}{279936}$$

$$= 0,0156$$

Jadi probabilitas tepat empat angka 6 saat dadu digulingkan 7 kali adalah $0,0156$

5. Dalam sebuah keluarga dengan 4 anak, berapakah probabilitas yang akan terjadi tepat dua anak laki-laki?

   Jawab : Distribusi Binomial

$$n = 4$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$X \sim BIN\left(n = 4, p = \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-x}, & untuk\ x = 0,1,2,3,4 \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2}$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= (6)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{6}{16}$$

$$= \frac{3}{8}$$

   Jadi probabilitas yang akan terjadi tepat dua anak laki-laki adalah $\frac{3}{8}$

6. Jika koin yang adil dilemparkan 4 kali, berapa probabilitas untuk mendapatkan setidaknya dua gambar?

   Jawab : Distribusi Binomial

   Mari kita temukan probabilitas kejadian yang berlawanan dan kurangi nilai ini dari 1.

   Kejadian sebaliknya akan mendapatkan 0 angka (jadi semua gambar) atau 1 angka.

$$P(GGGG) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(AGGG) = \frac{4!}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16},$$

kita kalikan dengan $\frac{4!}{3!}$ saat kejadian $AGGG$ dapat terjadi dalam beberapa cara: $AGGG, GAGG, GGAG, atau\, GGGA$.

$$P(T \geq 2) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16}\right)$$

$$= \frac{11}{16}$$

7. Di Yogyakarta kemungkinan badai akan terjadi pada hari apa pun selama musim hujan adalah 0,05. Dengan asumsi independensi, berapa probabilitas bahwa badai pertama terjadi pada tanggal 5 April? (Asumsikan musim hujan dimulai 1 Maret.)

   Jawab : Distribusi Binomial

   Misalkan A adalah kejadian badai yang terjadi pada hari apa saja

   Diberikan $P(A) = 0,05\, dimana\, P(A^c) = 1 - 0,05 = 0,95$

   $$P(Badai\, terjadi\, pada\, 5\, April\, selama\, musim\, semi)$$

   $$P(Tidak\, ada\, badai\, petir\, dari\, 1\, Maret\, hingga\, 4\, April).$$

   $$P(badai\, petir\, pada\, tanggal\, 5\, April)$$

   (kejadian badai tidak tergantung pada setiap hari)

   $$= \left(P(A^c)\right)^{35} \cdot P(A)$$

   $$= (0,95)^{35}(0,05)$$

   $$= 0,0083042 \approx 0,0083$$

8. Sebuah bola diambil dari sebuah guci berisi 3 bola putih dan 3 bola hitam. Setelah bola ditarik, kemudian dikembalikan dan bola lainnya ditarik. Ini terus berlanjut tanpa batas. Berapa probabilitas bahwa dari 4 bola pertama yang ditarik, tepatnya 2 berwarna putih?

   Jawab : Distribusi Binomial

$$P(mengambil\,bola\;putih) = \frac{1}{2}$$

$$P(mengambil\,bola\,hitam) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Probabilitas bahwa dari 4 bola pertama yang ditarik, tepat 2 bola berwarna putih

$$P(X = 2) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= (6)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{3}{8}$$

Jadi probabilitas dari 4 bola pertama yang ditarik, tepatnya 2 berwarna putih adalah $\frac{3}{8}$

9. Berapa probabilitas seseorang untuk melempar koin yang membutuhkan empat pelemparan untuk mendapatkan gambar?

   Jawab : Distribusi Geometri

   $X \rightarrow$ jumlah lemparan yang diperlukan untuk mendapatkan kesuksesan pertama dalam uji coba Bernoulli independen

   Kemudian, $X \sim \text{GEO}(p)$

   dimana $p \rightarrow$ probabilitas keberhasilan dalam percobaan pertama

   Kemudian

   $p[X = n] = p(1-p)^{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$

   Di sini, Kemungkinan mendapatkan gambar dalam lemparan pertama $= \frac{1}{2} = p$

   Kemudian,

$$p[X=4]=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{16}$$

Jadi, $p[4\,lemparan\,diperlukan\,untuk\,mendapatkan\,gambar]=\frac{1}{16}$

10. Asumsikan bahwa mendapatkan minyak di suatu lokasi pengeboran adalah independen dan di wilayah tertentu probabilitas keberhasilan di setiap lokasi adalah 0,3. Misalkan perusahaan pengeboran yakin bahwa perusahaan akan untung jika jumlah sumur yang dibor sampai keberhasilan kedua terjadi kurang dari atau sama dengan 7. Berapa probabilitas perusahaan tersebut untung?

    Jawab : Distribusi Binomial Negatif

    $P=probabilitas\,keberhasilan\,di\,setiap\,lokasi=0,3$

    $\gamma=banyak\,keberhasilan\,yang\,dibutuhkan=2$

    $X=banyak\,uji\,coba\,(\leq 7)$

    $\Rightarrow X\sim NBIN(\gamma=2, P=0,3)$

    $$\Rightarrow P(X=x)=\binom{x-1}{\gamma-1}\mathrm{P}^{\gamma}(1-\mathrm{P})^{x-\gamma},\ x=\gamma,\gamma+1,\gamma+2,\ldots$$

    Misalkan perusahaan pengeboran percaya bahwa perusahaan akan untung jika jumlah sumur yang dibor hingga keberhasilan kedua terjadi kurang dari atau sama dengan 7.

    $\Rightarrow P(X\leq 7),\ x=2,3,4,5,6,7$

    $\Rightarrow P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$

    $$\Rightarrow \begin{array}{l}\binom{2-1}{2-1}0,3^2 0,7^0+\binom{3-1}{2-1}0,3^2 0,7^1+\binom{4-1}{2-1}0,3^2 0,7^2+\binom{5-1}{5-1}0,3^2 0,7^3+\\ \binom{6-1}{2-1}0,3^2 0,7^4+\binom{7-1}{2-1}0,3^2 0,7^5\end{array}$$

    $=0,09+0,126+0,1323+0,1235+0,1080+0,0908$

    $=0,6706$

    $=0,671(jika\,dibuat\,tiga\,angka\,desimal)$

11. Misalkan percobaan terdiri dari melempar koin sampai tiga gambar muncul. Berapa probabilitas bahwa percobaan berakhir setelah tepat enam kali pelemparan dari koin dengan gambar pada lemparan kelima dan juga pada lemparan keenam?

    Jawab : Distribusi Binomial

$$\text{Probabilitas untuk gambar dalam lemparan kelima dan keenam} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\text{Probabilitas hanya untuk 1 gambar dalam 4 lemparan pertama} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{4}{16}$$

$$\text{Probabilitas eksperimen} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{16}$$

    Jadi probabilitas eksperimen berakhir pada $\frac{1}{16}$

12. Pelanggan di Bento Coffe memenangkan hadiah $ 100 jika struk mesin kasir mereka menunjukkan bintang pada masing-masing dari lima hari berturut-turut Senin, Selasa, ...,Jumat dalam satu minggu. Mesin kasir diprogram untuk mencetak bintang 10% struk yang dipilih secara acak. Jika Anggiboy makan di Bento Coffe sekali setiap hari selama empat minggu berturut-turut, dan jika bintang-bintang muncul dengan proses independen, berapa probabilitas bahwa Anggiboy akan menang setidaknya $ 100?

    Jawab: Distribusi Poisson

    Anggiboy makan di Bento Coffe sekali setiap hari selama empat minggu berturut-turut Kemenangan Anggiboy = $ 100

    Dalam satu minggu, probabilitas mendapatkan bintang selama lima hari

    $= p = (10\%)(10\%)(10\%)(10\%)(10\%) = \left(\frac{1}{10}\right)^5$

    Banyaknya minggu $= x = 4$

    $n = 5$ hari × 4 minggu $= 20$

    $\lambda = n \, . \, p$

$$= 20\,x\left(\frac{1}{10}\right)^5$$

$$= 0,0002$$

$$P(4,0,0002) = \frac{(0,0002)^4}{4!}e^{-0,0002}$$

$$= 0,0000399994$$

13. Jika koin yang adil dilemparkan berulang kali, berapa probabilitas gambar yang ketiga muncul pada lemparan ke- n ?

    Jawab : Distribusi Binomial

    gambar ke 3 pada lemparan ke n .

Misalkan sebelum lemparan ke- n kita memiliki 2 gambar dalam lemparan pertama

$$P(gambar\ ke 3\ pada\ lemparan\ ke\ n) = P(2\ gambar\ di\ lemparan\ pertama\,(n-1)) * P(lemparan\ ke\ n)$$

$$= \binom{n-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n^2-3n+2}{2^{n+1}}$$

Jadi probabilitas gambar yang ketiga muncul pada lemparan ke n adalah $\frac{n^2-3n+2}{2^{n+1}}$

14. Misalkan 30 persen dari semua sekering listrik diproduksi oleh perusahaan tertentu, perusahaan gagal memenuhi sekering standar rumah kota. Berapa probabilitasnya bahwa dalam sampel acak dari 10 sekering, tepat 3 akan gagal memenuhi sekering standar kota?

    Jawab : Distribusi Binomial

    $n = 10$

    $p = \frac{3}{10} = 0,3$

$$X \sim BIN(n = 10; p = 0,3)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{x} (0,3)^x (1 - 0,3)^{10-x}; \quad x = 0,1,2,\ldots,10$$

$$= \binom{10}{3} (0,3)^3 (0,7)^{10-3}$$

$$= \frac{10!}{(10-3)!3!} (0,3)^3 (0,7)^7$$

$$= (120)(0,3)^3 (0,7)^7$$

$$= 0,2668$$

Jadi probabilitas tepat 3 dari 10 sampel acak yang akan gagal memenuhi sekering standar rumah adalah $0,2668$

15. Sebuah kotak berisi 10 bohlam lampu. Dari 10 bohlam lampu tersebut 4 buah diantaranya rusak. Jika 3 bohlam lampu dipilih tanpa penggantian dari kotak, berapa probabilitas tepat k dari bohlam dalam sampel rusak?

Jawab : **Distribusi Hypergeometri**

Diketahui $n_1 = 4$

$n_2 = 6$

$r = 3$

Misalkan N adalah variabel acak dari jumlah lampu dalam sampel yang rusak

$$X \sim \mathrm{HYP}(\mathrm{n}_1, n_2, r)$$

$$P(N = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}, \quad 0 \le k \le 3$$

Jadi probabilitas yang tepat k dari bohlam dalam sampel rusak adalah $\dfrac{\binom{4}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}$

16. Misalkan X menunjukkan jumlah lemparan independen dari sebuah dadu yang diperlukan untuk mendapatkan "3" pertama. Berapakah $P(X \geq 6)$?

    Jawab : Distribusi Geometri

    $$p = \frac{1}{6}$$

    $$X \sim GEO(p)$$

    $$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, untuk\, x = 0,1,2,\ldots,6$$

    $$P(X \geq 6) = \sum_{x=0}^{6} p(1-p)^{x-1}$$

    $$= \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{6-1}$$

    $$= \left(\frac{5}{6}\right)^{5}$$

    $$= 0,4019$$

17. Jumlah mobil yang melintasi persimpangan tertentu selama kapanpun panjang interval waktu t menit antara 3:00 P.M. dan 4:00 P.M. mempunyai sebuah Distribusi Poisson dengan mean t. Misalkan W menjadi waktu berlalu setelah 3:00 P.M. sebelum mobil pertama melintasi persimpangan. Berapa probabilitasnya bahwa W kurang dari 2 menit?

    Jawab : Distribusi Poisson

    Untuk sebuah waktu t, jumlah mobil mengikuti distribusi Poisson dengan mean t

    $$P(W < 2)$$

    $$\lambda = 2$$

    $$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-2}2^0}{0!}$$

$$= e^{-2} \approx 0,1353$$

Jadi probabilitasnya bahwa W kurang dari 2 menit adalah $e^{-2} \approx 0,1353$

18. Dalam melemparkan satu dadu secara berulang-ulang, berapa probabilitas mendapatkan dadu yang ketiga muncul angka enam pada lemparan ke- x ?

    Jawab : Distribusi Binomial

    $$p = probabilitas\, muncul\, angka\, 6$$

    $$= \frac{1}{6}$$

    $$k = 3$$

    Dengan menggunakan distribusi Binomial

    $$P(X = n) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{(x-1)-(k-1)}$$

    $$q = 1 - p$$

    $$= 1 - \frac{1}{6}$$

    $$= \frac{5}{6}$$

    $$= \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

    $$= \binom{x-1}{3-1} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{x-3}$$

    $$P(X = n) = \binom{x-1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{x-3}$$

    Jadi probabilitas mendapatkan dadu yang ketiga muncul angka enam pada lemparan ke- x adalah $\binom{x-1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{x-3}$

19. Koin dilemparkan 6 kali. Berapa probabilitas jumlah dari gambar pada 3 lemparan pertama sama dengan jumlah pada 3 lemparan terakhir?

    Jawab : Distribusi Binomial

    Diberikan sebuah koin yang dilemparkan 6 kali.

    Untuk menentukan probabilitas bahwa tidak muncul gambar pada 3 lemparan pertama

$$P(\textit{tidak muncul gambar pada } 3 \textit{ lemparan pertama}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$P(\textit{muncul satu gambar pada } 3 \textit{ lemparan pertama}) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$P(\textit{muncul dua gambar pada } 3 \textit{ lemparan pertama}) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$P(\textit{muncul tiga gambar pada } 3 \textit{ lemparan pertama}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}$$

    Probabilitas bahwa jumlah gambar pada 3 lemparan pertama sama dengan tidak muncul gambar pada 3 lemparan terakhir

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64}$$

$$= \frac{20}{64}$$

$$= \frac{5}{16}$$

$$\therefore Probabilitas = \frac{5}{16}$$

20. Seratus sen dibagikan secara independen dan acak kedalam 30 kotak, berlabel 1, 2, ..., 30. Berapa probabilitasnya tepatnya 3 sen di kotak nomor 1?

Jawab : Distribusi Binomial

$$n = 100$$

$$x = 3$$

$$p = \frac{1}{30}$$

$$q = \frac{29}{30}$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 3) = \binom{100}{3}\left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(\frac{29}{30}\right)^{100-3}$$

$$= \frac{100!}{(100-3)!3!}\left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(\frac{29}{30}\right)^{97}$$

$$= \frac{100!}{97!3!}\left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(\frac{29}{30}\right)^{97}$$

$$= \frac{100!}{97!3!}\left(\frac{29^{97}}{30^{100}}\right)$$

$$= 0,22345$$

Jadi probabilitasnya tepatnya 3 sen di kotak nomor 1 adalah $0,22345$

21. Fungsi kepadatan variabel acak tertentu adalah

$$f(x)=\begin{cases}\binom{22}{4x}(0,2)^{4x}(0,8)^{22-4x}, & untuk\ x=0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\ldots,\frac{22}{4}\\ 0, & untuk\ lainnya\end{cases}$$

Berapa nilai harapan dari X^2?

Jawab : Distribusi Binomial

$$P(X=x)=\binom{22}{4x}(0,2)^{4x}(0,8)^{22-4x},\quad x=0,\frac{1}{4},\ldots,\frac{22}{4}$$

$$P(4X=4x)=\binom{22}{4x}(0,2)^{4x}(0,8)^{22-4x},\quad 4x=0,1,\ldots,22$$

$$P(4X=y)=\binom{22}{y}(0,2)^{y}(0,8)^{22-y},\quad y=0,1,\ldots,22$$

$$4X \sim Binom(n=22,p=0,2)$$

$$\therefore Var(4x)=E\left(4X^2\right)-\left(E(4X)\right)^2$$

$$E(4X)^2=(22)(0,2)(0,8)+\left(22(0,2)\right)^2$$

$$E(4X)=(22)(0,2)$$

$$Var(4X)=(22)(0,2)(0,8)$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{(22)(0,2)(0,8)+\left(22(0,2)\right)^2}{16}$$

$$=1,43$$

Jadi nilai $E\left(X^2\right)=1,43$

22. Jika $M_X(t)=k\left(2+3e^t\right)^{100}$ berapa nilai k? Berapa varians dari variabel acak X?

Jawab : Distribusi Binomial

$$M_X(t)=(1-p+pe^t)^n$$

$$=(q+pe^t)^n$$

dimana $q+p=1$

kita punya $k\left(2+3e^{t}\right)^{100}=\left(2k^{\frac{1}{4}}+3k^{\frac{1}{4}}e^{t}\right)^{100}$

$$2k^{\frac{1}{100}}+3k^{\frac{1}{100}}=1$$

$$k^{\frac{1}{100}}\left(2+3\right)=1$$

$$5k^{\frac{1}{100}}=1$$

$$k^{\frac{1}{100}}=\frac{1}{5}$$

$$(k^{\frac{1}{100}})^{100}=\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$$

$$k=\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$$

$$M_X\left(t\right)=E\left(e^{tx}\right)$$

$$M\left(0\right)=E\left(e^{0x}\right)$$

$$=E\left(1\right)=1$$

$$M_X\left(t\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^{100}\left(2+3e^{t}\right)^{100}$$

$$=\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{t}\right)^{100}$$

$$M'_X\left(t\right)=\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{t}\right)^{100}\right\}$$

$$=100\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{t}\right)^{100-1}\frac{3}{5}e^{t}$$

$$=100\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{t}\right)^{99}\frac{3}{5}e^{t}$$

Untuk $t=0$

$$M'_X(0) = 100\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^0\right)^{99} \frac{3}{5}e^0$$

$$= 100\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^{99} \left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= 100\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= 60$$

$$\therefore E(X) = 60$$

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}\left\{100\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^t\right)^{99} \frac{3}{5}e^t\right\}$$

$$= 100\left\{99\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^t\right)^{99-1} \left(\frac{3}{5}e^t\right)\left(\frac{3}{5}e^t\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^t\right)^{99} \left(\frac{3}{5}e^t\right)\right\}$$

$$= 100\left\{99\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^t\right)^{98} \left(\frac{3}{5}e^t\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^t\right)^{99} \left(\frac{3}{5}e^t\right)\right\}$$

Untuk $t = 0$

$$M''_X(0) = 100\left\{99\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^0\right)^{98} \left(\frac{3}{5}e^0\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^0\right)^{99} \left(\frac{3}{5}e^0\right)\right\}$$

$$= 100\left\{99\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^{98} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^{99} \left(\frac{3}{5}\right)\right\}$$

$$= 100\left\{99\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)\right\}$$

$$= 100\left(\frac{3}{5}\right)\left\{99\left(\frac{3}{5}\right) + 1\right\}$$

$$= 3564 + 60$$

$$= 3624$$

$$\therefore E(X^2) = 3624$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 3624 - (60)^2$$

$$= 24$$

Jadi nilai $k = \left(\frac{1}{5}\right)100$ dan $Var(X) = 24$

23. Jika $M_X(t) = k\left(\frac{e^t}{7-5e^t}\right)^3$ berapa nilai k? Berapa varians dari variabel acak X?

    Jawab : Distribusi Geometri

    Misalkan $X \sim \text{GEO}(p)$

    $P(X = x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots$

    $M_X(t) = \frac{p\ .e^t}{(1-qe^t)}$

    Dari $x_1, x_2, x_3 \sim \text{GEO}(p)$

    Lalu $x = x_1 + x_2 + x_3$ mempunyai fungsi pembangkit momen sebagai berikut

$$M_X(t) = \left(\frac{p\ .e^t}{(1-qe^t)}\right)^3$$

$$q = \frac{5}{7}; p = \frac{2}{7}$$

$$M_X(t) = 2^3\left(\frac{p\ .e^t}{(7-5e^t)}\right)^3$$

Jadi $k = 2^3 = 8$

Dan $Var(X) = 3Var(X_i)$

$$= 3 \times \left(\frac{j - \frac{2}{7}}{\left(\frac{2}{7}\right)^2}\right)$$

$$= 3 \times \frac{5 \times 7}{4}$$

$$= \frac{105}{4}$$

$$= 26,25$$

24. Jika untuk distribusi Poisson $2f(0) + f(2) = 2f(1)$, berapakah mean dari distribusi tersebut?

    Jawab : Distribusi Poisson

    $$2f(0) + f(2) = 2f(1)$$

    $$f(0) = e^{-\lambda}$$

    $$f(1) = e^{-\lambda}\lambda$$

    $$f(2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}$$

    Karenanya $2e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2} = 2e^{-\lambda}\lambda$

    $$\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2} - 2e^{-\lambda}\lambda + 2e^{-\lambda} = 0$$

    $$\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda + 2 = 0$$

    $$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

    $$(\lambda - 2)^2 = 0$$

    $$\lambda = 2$$

    Jadi mean dari distribusi tersebut adalah $\lambda = 2$

25. Jumlah pukulan, X, per pertandingan baseball, memiliki distribusi Poisson. Jika probabilitas permainan tidak terpukul adalah $\frac{1}{3}$, berapa probabilitas memiliki 2 atau lebih banyak pukulan dalam permainan tersebut?

    Jawab : Distribusi Poisson

    Probabilitas permainan tidak terpukul $= P(X = 0) = \frac{e^{-\mu}.\ \mu^0}{0!} = \frac{1}{3}$

    $$e^{-\mu} = \frac{1}{3}$$

mengambil pukulan di kedua sisi $=\mu=ln3$

maka probabilitas 2 atau lebih pukulan $=1-P$ (paling banyak 1 pukulan)

$=1-(P(X=0)+P(X=1)$

$=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{e^{-ln(3)}ln(3)^1}{1!}\right)$

$=\frac{1}{3}(2-\ln(3))$

$=\frac{1}{3}(0,9013877113)$

$=0,3004625704$

$\approx 0,3005\ (dibuat\, 4\, desimal)$

26. Misalkan X memiliki distribusi Poisson dengan standar deviasi 4. Berapakah probabilitas bersyarat bahwa X tepat 1 jika diberikan $X \geq 1$?

Jawab : Distribusi Poisson

$X \sim$ POI dengan parameter λ

Diberikan standar deviasi $(\sigma)=4$

varians dari distribusi Poisson $=4^2=16=\lambda$

Untuk menentukan probabilitas bersyarat, $P(X=1 \mid X \geq 1)$

$$=\frac{P((X=1)\cap(X\geq 1))}{P(X\geq 1)}$$

$$=\frac{P(X=1)}{1-P(X<1)}$$

Fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi Poisson $=P(X\leq x)$

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$P(X<1)=\sum_{x=0}^{1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-16}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-16}16^{0}}{0!} + \frac{e^{-16}16^{1}}{1!}$$

$$= e^{-16} + 16e^{-16}$$

$$= 17e^{-16}$$

Sehingga, $P(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!}$

$$= e^{-16} + 16$$

$$= 16e^{-16}$$

Jadi, $P(X=1|X \geq 1) = \frac{16e^{-16}}{1-17e^{-16}}$

$$= \frac{16}{e^{16}} \cdot \frac{e^{16}}{e^{16}-17}$$

$$= \frac{16}{e^{16}-17}$$

27. Sebuah dadu dilemparkan sedemikian rupa sehingga probabilitas sisi dengan titik j muncul sebanding dengan j_2 untuk $j=1,2,3,4,5,6$. Berapakah probabilitasnya bergulir paling banyak muncul tiga angka 6 dalam lima pelemparan independen dari dadu ini?

    Jawab : Distribusi Geometri

    Jumlah total elemen / di sini kemungkinan gulungan tunggal enam inci

$$= \frac{6^2}{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}$$

$$= \frac{36}{1+4+9+16+25+36}$$

$$= \frac{36}{91}$$

    maka kemungkinan bergulir paling banyak 3 angka enam dalam 5 lemparan bebas

$$\sum_{x=0}^{3}\binom{5}{x}\left(\frac{36}{91}\right)^{x}\left(1-\frac{36}{91}\right)^{5-x}=\left[\binom{5}{0}\left(\frac{36}{91}\right)^{0}\left(1-\frac{36}{91}\right)^{5-0}\right]+\left[\binom{5}{1}\left(\frac{36}{91}\right)^{1}\left(1-\frac{36}{91}\right)^{5-1}\right]$$

$$+\left[\binom{5}{2}\left(\frac{36}{91}\right)^{2}\left(1-\frac{36}{91}\right)^{5-2}\right]+\left[\binom{5}{3}\left(\frac{36}{91}\right)^{3}\left(1-\frac{36}{91}\right)^{5-3}\right]$$

$$=\left[(1)(1)\left(\frac{55}{91}\right)^{5}\right]+\left[(5)\left(\frac{36}{91}\right)\left(\frac{55}{91}\right)^{4}\right]$$

$$+\left[(10)\left(\frac{1296}{8281}\right)\left(\frac{55}{91}\right)^{3}\right]+\left[(10)\left(\frac{46.656}{753.571}\right)\left(\frac{55}{91}\right)^{2}\right]$$

$$=\left[(1)(1)(0,0806)\right]+\left[(5)(0,3956)(0,1334)\right]$$

$$+\left[(10)(0,1565)(0,2207)\right]+\left[(10)(0,0619)(0,3652)\right]$$

$$=0,0806+0,2638652+0,3453955+0,2260588$$

$$=0,913$$

Jadi probabilitasnya bergulir paling banyak tiga enam dalam 5 pemeran independen dari dadu adalah $0,913$

28. Sebuah dadu dilempar sedemikian rupa sehingga probabilitas sisi dengan titik j muncul sebanding dengan j_2 untuk $j=1,2,3,4,5,6$. Berapakah probabilitas mendapatkan aangka enam ketiga pada gulungan ke-7 dari dadu yang dimuat ini?

    Jawab : Distribusi Negatif Binomial

    $$j^{th}\ titik-titik\ yang\ muncul\ sebanding\ dengan\ j^{2}$$

    $$Total\ tidak\ ada\ cara=1^{2}+2^{2}+3^{2}+\ldots+6^{2}$$

    $$=91$$

    $$P\left(mendapatkan\ 6\ titik\right)=\frac{6^{2}}{91}$$

    $$=\frac{36}{91}\ atau\ 0,3956$$

    $$k=3$$

    $$Misalkan\ x=tidak\ ada\ percobaan\ yang\ diminta\ k^{th}\ sukses$$

    $$pmf\ dari\ x\ adalah$$

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

$$P(X = 7) = \binom{7-1}{3-1} (0,3956)^3 (1-0,3956)^{7-3}$$

$$= \binom{6}{2} (0,3956)^3 (0,6044)^4$$

$$= (15)(0,0619)(0,1334)$$

$$= 0,1239$$

Jadi probabilitasnya mendapatkan enam ketiga pada gulungan ke-7 dari dadu yang dimuat adalah $0,1239$

BAB VI

DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

Dalam bab ini, kita mempelajari beberapa fungsi kepadatan probabilitas kontinu. Kita akan mempelajarinya karena distribusi ini muncul dalam banyak aplikasi. Mari kita mulai dengan fungsi kepadatan probabilitas yang paling sederhana.

6.1 Distribusi Uniform (Seragam)

Misalkan variabel acak X menunjukkan hasil ketika sebuah titik dipilih secara acak dari interval $[a,b]$. Kita akan mencari probabilitas kejadian $X \le x$, yaitu dengan menentukan probabilitas bahwa titik yang dipilih dari $[a,b]$ akan kurang dari atau sama dengan x. Untuk menghitung probabilitas ini dibutuhkan ukuran probabilitas μ yang memenuhi tiga aksioma Kolmogorov (yaitu nonnegativitas, normalisasi, dan aditif yang dapat dihitung). Untuk variabel kontinu, kejadiannya adalah interval atau gabungan interval. Panjang interval saat dinormalisasi memenuhi ketiga aksioma dan dengan demikian dapat digunakan sebagai ukuran probabilitas untuk variabel acak satu dimensi.

Karenanya

$$P(X \le x) = \frac{panjang\ dari[a,x]}{panjang\ dari[a,b]}$$

Jadi, fungsi distribusi kumulatif F adalah

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad a \le x \le b,$$

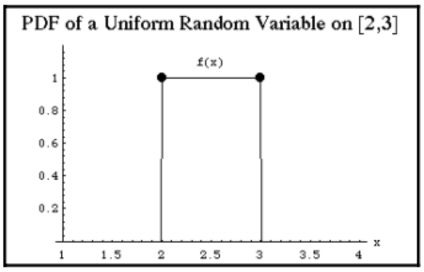
di mana a dan b adalah dua konstanta real dengan $a < b$. Untuk menentukan fungsi kepadatan probabilitas dari fungsi kepadatan kumulatif, maka harus menghitung turunan dari $F(x)$ yakni

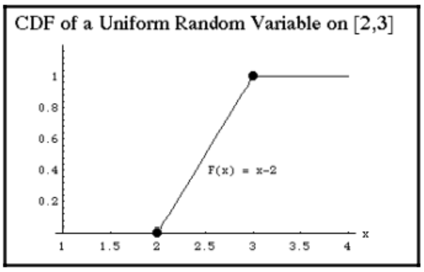
$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le x \le b,$$

Definisi 6.1. Variabel acak X dikatakan uniform/seragam pada interval $[a,b]$ jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \le x \le b$$

dimana a dan b adalah konstanta. Kita menuliskan variabel acak X dengan distribusi seragam pada interval $[a,b]$ yaitu $X \sim UNIF(a,b)$





Distribusi seragam memberikan model probabilitas untuk memilih titik secara acak dari interval [a, b]. Penerapan yang penting dari distribusi seragam terletak pada pembangkit bilangan acak. Teorema berikut memberikan mean, varians dan fungsi pembangkit momen dari variabel acak seragam

Teorema 6.1. Jika X adalah seragam pada interval $[a,b]$ maka mean, varians dan fungsi pembangkitan momen X adalah

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M(t) = \begin{cases} 1 & jika\ t = 0 \\ \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & jika\ t \neq 0 \end{cases}$$

Bukti :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}(b+a)$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2)$$

Maka varians X yaitu

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2) - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{12}\left[4b^2 + 4ba + 4a^2 - 3a^2 - 3b^2 - 6ba\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[b^2 - 2ba + a^2\right]$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Selanjutnya, menghitung fungsi pembangkit momen X dengan mengasumsikan $t \neq 0$, maka

$$M(t) = E(e^{tX})$$

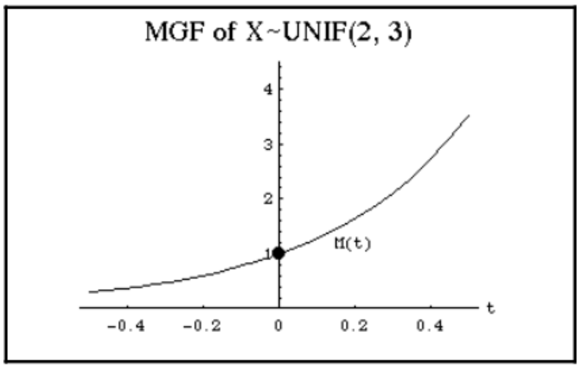
$$= \int_a^b e^{tX} \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tX}}{t} \right]_a^b$$

$$= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

Jika $t = 0$, kita tahu bahwa $M(0) = 1$, maka kita dapatkan

$$M(t)=\begin{cases}1 & jika\ t=0\\ \dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} & jika\ t\neq 0\end{cases}$$



Contoh 6.1. Diberikan $Y \sim UNIF(0,1)$ dan $Y=\frac{1}{4}X^2$. Berapa fungsi kepadatan probabilitas X ?

Jawab :

Kita akan mencari fungsi kepadatan probabilitas X melalui fungsi distribusi kumulatif Y. Fungsi distribusi kumulatif X yaitu

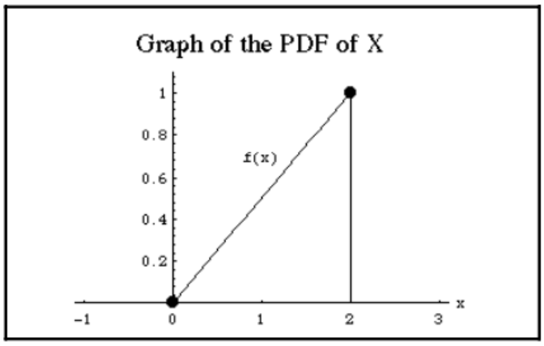
$$\begin{aligned}F(x)&=P(X\le x)\\ &=P\left(X^2\le x^2\right)\\ &=P\left(\frac{1}{4}X^2\le\frac{1}{4}x^2\right)\\ &=P\left(Y\le\frac{x^2}{4}\right)\\ &=\int_0^{\frac{x^2}{4}} f(y)\,dy\\ &=\int_0^{\frac{x^2}{4}} dy\\ &=\frac{x^2}{4}\end{aligned}$$

Kemudian

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{x}{2}$$

Oleh karena itu fungsi kepadatan probabilitas X adalah

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & untuk\, 0\le x\le 2\\ 0 & untuk\; yang\; lainnya\end{cases}$$



Contoh 6.2. Jika X memiliki distribusi uniform pada interval dari 0 sampai 10, lalu berapakah $P\left(X+\dfrac{10}{X}\ge 7\right)$?

Jawab :

Karena $X \sim UNIF(0,10)$, fungsi kepadatan probabilitas X adalah $f(x)=110$ untuk $0\le x\le 10$. Karenanya

$$\begin{aligned}P\left(X+\frac{10}{X}\ge 7\right)&=P\left(X^2+10\ge 7X\right)\\&=P\left(X^2-7X+10\ge 0\right)\\&=P(X-5)(X-2)\ge 0)\\&=P\left(X\le 2\, atau\, X\ge 5\right)\\&=1-P\left(2\le X\le 5\right)\\&=1-\int_2^5 f(x)\,dx\\&=1-\int_2^5\frac{1}{10}\,dx\\&=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

Contoh 6.3. Jika X Uniform/seragam pada interval dari 0 sampai 3, apakah probabilitas persamaan kuadrat $4t^2 + 4tX + X + 2 = 0$ memiliki solusi real?

Jawab :

Karena $X \sim UNIF(0,3)$, fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & 0 \le x \le 3 \\ 0 & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Persamaan kuadrat $4t^2 + 4tX + X + 2 = 0$ memiliki penyelesaian real jika diskriminan persamaan ini positif.

$$16X^2 - 16(X+2) \ge 0,$$

Dimana

$$X^2 - X - 2 \ge 0$$

Dari ini, didapatkan

$$(X-2)(X+1) \ge 0$$

Probabilitas persamaan kuadrat $4t^2 + 4tX + X + 2 = 0$ memiliki akar real yang ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} P\big((X-2)(X+1) \ge 0\big) &= P(X \le -1 \, atau \, X \ge 2) \\ &= P(X \le -1) + P(X \ge 2) \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx \\ &= 0 + \int_{2}^{3} \frac{1}{3}\,dx \\ &= \frac{1}{3} = 0,3333 \end{aligned}$$

Teorema 6.2. Jika X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi distribusi kumulatif yang meningkat $F(x)$, maka variabel acak Y, didefinisikan oleh

$$Y = F(X)$$

Memiliki distribusi seragam pada interval $[0,1]$

Bukti :

Karena F meningkat tajam, inversi $F^{-1}(x)$ dari $F(x)$ ada. Akan ditunjukkan bahwa fungsi kepadatan probabilitas $g(y)$ dari Y adalah $g(y)=1$. Pertama, cari fungsi distribusi kumulatif $G(y)$ dari Y.

$$\begin{aligned}G(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(F(X) \le y) \\ &= P(X \le F^{-1}(y)) \\ &= F(F^{-1}(y)) \\ &= y\end{aligned}$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas Y diberikan oleh

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}y = 1$$

Contoh 6.4. Jika fungsi kepadatan probabilitas X adalah

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Lalu berapakah fungsi kepadatan probabilitas dari $Y = \dfrac{1}{1+e^{-X}}$?

Jawab :

Fungsi distribusi kumulatif Y diberikan oleh

$$\begin{aligned}G(y) &= P(Y \le y) \\ &= P\left(\frac{1}{1+e^{-X}} \le y\right) \\ &= P\left(1+e^{-X} \ge \frac{1}{y}\right) \\ &= \left(e^{-X} \ge \frac{1-y}{y}\right) \\ &= P\left(-X \ge ln\frac{1-y}{y}\right)\end{aligned}$$

$$= P\left(X \le -ln\frac{1-y}{y}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{-ln\frac{1-y}{y}} \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}dx$$

$$= \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_{-\infty}^{-ln\frac{1-y}{y}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1-y}{y}}$$

$$= y$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas Y diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1 & jika\, 0 < y < 1 \\ 0 & untuk\ yang\, lain \end{cases}$$

Contoh 6.5. Sebuah kotak akan dibuat sehingga tingginya 10 inci dan alasnya adalah X inci kali X inci. Jika X memiliki distribusi seragam pada interval $(2,8)$, berapa volume kotak yang diharapkan dalam inci kubik?

Jawab :

Saat $X \sim UNIF(2,8)$,

$$f(x) = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6} \qquad \text{di } (2.8)$$

Volume V dari kotak adalah

$$V = 10X^2$$

Karenanya

$$E(V) = E\left(10X^2\right)$$

$$= 10E\left(X^2\right)$$

$$= 10\int_2^8 x^2 \frac{1}{6}dx$$

$$= \frac{10}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^8$$

$$= \frac{10}{18}\left[8^3 - 2^3\right]$$

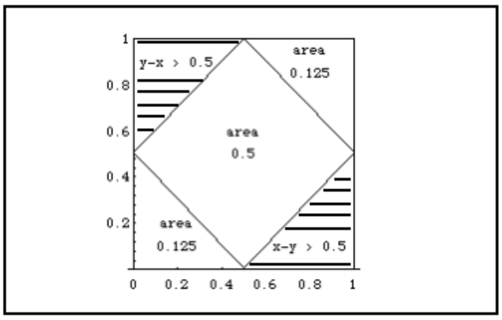
$$= (5)(8)(7)$$

$$= 280 \text{ inchi kubik}$$

Contoh 6.6. Dua angka dipilih secara independen dan acak dari interval $(0,1)$. Berapa probabilitas kedua angka berbeda lebih dari $\frac{1}{2}$?

Jawab :

Lihat gambar di bawah :



Pilih x dari sumbu x antara 0 dan 1, dan pilih y dari sumbu y antara 0 dan 1. Probabilitas kedua bilangan berbeda lebih dari $\frac{1}{2}$ yaitu sama dengan luas daerah yang diarsir.

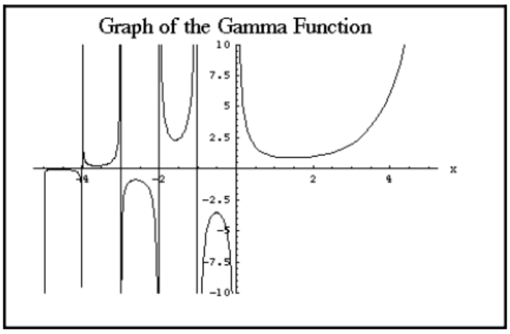
Jadi $P\left(|X-Y| > \frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{4}$

6.2 Distribusi Gamma

Fungsi gamma $\Gamma(z)$ adalah generalisasi dari pengertian faktorial. Fungsi gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

Dimana z adalah bilangan real positif (yaitu, $z > 0$). Kondisi $z > 0$ diasumsikan untuk konvergensi integral. Meskipun integral tidak konvergen untuk $z < 0$, itu dapat ditunjukkan dengan menggunakan definisi alternatif fungsi gamma yang didefinisikan untuk semua $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$.



Integral di sisi kanan persamaan di atas disebut integral kedua Euler.

Lemma 6.1. $$\Gamma(1)=1.$$

Bukti :

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} x^0 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}=1$$

Lemma 6.2. Fungsi gamma $\Gamma(z)$ memenuhi persamaan fungsional. $\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1)$ untuk semua bilangan real $z>1$.

Bukti :

Misalkan z adalah bilangan real sehingga $z>1$, dan hitung

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}dx\\&=\left[-x^{z-1}e^{-x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}(z-1)x^{z-2}e^{-x}dx\\&=(z-1)\int_0^{\infty}x^{z-2}e^{-x}dx\\&=(z-1)\Gamma(z-1)\end{aligned}$$

Ini merupakan bukti lemma untuk semua bilangan real $z>1$, tetapi lemma ini berlaku juga untuk semua bilangan real $z\in \mathbb{R}\backslash\{1,0,-1,-2,-3,\ ...\}$.

Lemma 6.3. $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Bukti :

Kita ingin menunjukkan itu

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

adalah sama dengan $\sqrt{\pi}$. substitusikan $y = \sqrt{x}$, sehingga integral di atas menjadi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,\ \text{dimana}\ y = \sqrt{x}$$

Karenanya

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$$

Dan juga

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv$$

Mengalikan dua persamaan di atas, kita dapatkan

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,du\,dv$$

Sekarang kita mengubah integral menjadi bentuk polar dengan transformasi $u = r\,cos\left(\theta\right)$ dan $v = r\,sin\left(\theta\right)$

$$J\left(r,\theta\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\left(\theta\right) & -r\sin\left(\theta\right) \\ \sin\left(\theta\right) & r\cos\left(\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$= r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)$$

$$= r$$

Oleh karena itu, kita mendapatkan

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2} J\left(r,\theta\right)\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, 2r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, dr^2\right] d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Gamma(1)\, d\theta$$

$$= \pi$$

Sehingga didapatkan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Lemma 6.4 $$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

Bukti :

Dengan Lemma 6.2, didapat

$$\Gamma(z) = (z-1)\ \Gamma(z-1)$$

untuk semua $z \in \mathrm{R} \setminus \{1, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Misalkan $z = \frac{1}{2}$, maka kita mendapatkan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

Dimana

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

Contoh 6.7. Evaluasi $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

Jawab :

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Contoh 6.8. Evaluasi $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$

Jawab :

Diberikan

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$$

Karenanya

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{105}\sqrt{\pi}$$

Contoh 6.9. Evaluasi $\Gamma(7,8)$.

Jawab :

$$\Gamma(7,8)=(6,8)(5,8)(4,8)(3,8)(2,8)(1,8)\Gamma(1,8)$$

$$=(3625,7)\Gamma(1,8)$$

$$=(3625,7)(0,9314)$$

$$=3376,9.$$

Dengan menggunakan tabel gamma untuk menemukan $\Gamma(1,8)$ sehingga didapat 0,9314.

Contoh 6.10. Jika n adalah bilangan asli, maka $\Gamma(n+1)=n\,!$.

Jawab :

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

$$=n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(1)\Gamma(1)$$

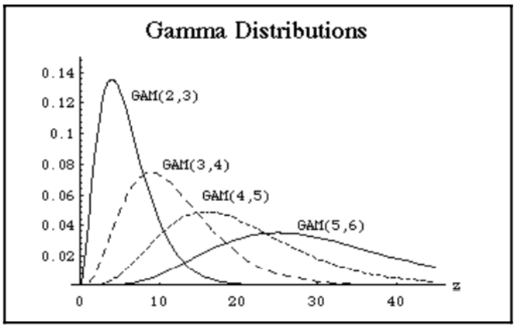
$$= n!$$

Definisi 6.2.

Variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi gamma jika fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\ \theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} & jika\ 0 < x < \infty \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

di mana $\alpha > 0$ dan $\theta > 0$. Akan ditunjukkan variabel acak dengan distribusi gamma sebagai $X \sim GAM(\theta,\alpha)$. Diagram berikut menunjukkan grafik dari kepadatan gamma untuk berbagai nilai nilai parameter θ dan α.



Teorema berikut memberikan nilai ekspetasi, varians, dan fungsi pembangkit momen dari variabel acak gamma.

Teorema 6.3.

Jika $X \sim GAM(\theta,\alpha)$, maka

$$E(X) = \theta\alpha$$

$$Var(X) = \theta^2\alpha$$

$$M(t) = \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^{\alpha}, \quad \text{jika } t < \frac{1}{\theta}$$

Bukti :

Pertama, kita turunkan fungsi pembangkit momen dari X dan kemudian kita hitung mean dan variansnya. Fungsi pembangkit momen

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} e^{tX}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\theta}(1-\theta t)x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \frac{\theta^\alpha}{(1-\theta t)^\alpha}\ y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \qquad y = \frac{1}{\theta}(1-\theta t)x$$

$$= \frac{1}{(1-\theta t)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(1-\theta t)^\alpha},$$

karena integralnya adalah $GAM(1,\alpha)$.

Turunan pertama dari fungsi pembangkit momen adalah

$$M'(t) = \frac{d}{dt}(1-\theta t)^{-\alpha}$$

$$= (-\alpha)(1-\theta t)^{-\alpha-1(-\theta)}$$

$$= \alpha\theta(1-\theta t)^{-(\alpha+1)}$$

Sehingga, kita menemukan nilai yang diharapkan dari X menjadi

$$E(X) = M'(0) = \alpha\theta$$

Demikian pula,

$$M''(t) = \frac{d}{dt}\left(\alpha\theta(1-\theta t)^{-(\alpha+1)}\right)$$

$$= \alpha\theta(\alpha+1)\theta(1-\theta t)^{-(\alpha+2)}$$

$$= \alpha(\alpha+1)\theta^2(1-\theta t)^{-(\alpha+2)}$$

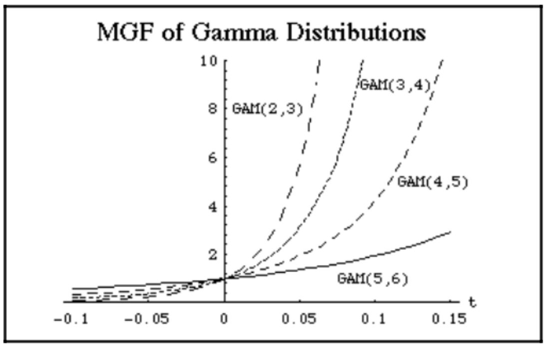
Jadi, varians dari X adalah

$$Var(X) = M''(0) - \left(M'(0)\right)^2$$

$$= \alpha(\alpha+1)\theta^2 - \alpha^2\theta^2$$

$$= \alpha\theta^2$$

Pada gambar di bawah ini, diilustrasikan grafik fungsi pembangkit momen untuk berbagai nilai parameter.



Contoh 6.11. Misalkan X memiliki fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\ \theta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} & jika\ 0 < x < \infty \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Dimana $\alpha > 0$ dan $\theta > 0$. Jika $\alpha = 4$, berapa mean dari $\dfrac{1}{X^3}$?

Jawab :

$$E\left(X^{-3}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x^3} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x^3} \frac{1}{\Gamma(4)\theta^4} x^3 e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{3!\theta^4} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$= \frac{1}{3!\theta^3} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{3!\theta^3}\ karena\ integralnya\ adalah\ GAM(\theta,1)$$

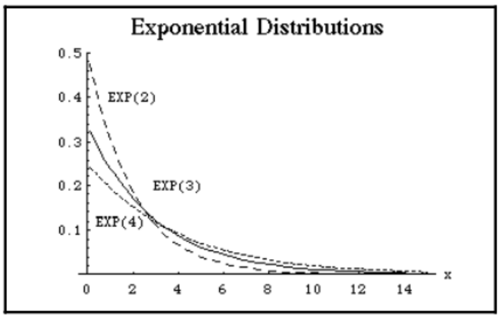
Definisi 6.3.

Variabel acak kontinu dikatakan sebagai variabel acak eksponensial dengan parameter θ jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & jika\, x>0\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya.\end{cases}$$

dimana $\theta>0$. Jika variabel acak X memiliki fungsi kepadatan eksponensial dengan parameter θ, maka kita menuliskannya dengan

$$X \sim EXP(\theta)$$



Distribusi eksponensial adalah kasus khusus dari distribusi gamma. Jika parameter $\alpha=1,$ maka distribusi gamma berkurang menjadi distribusi eksponensial. Oleh karena itu, sebagian besar informasi tentang distribusi eksponensial dapat diperoleh dari distribusi gamma

Contoh 6.12. Berapakah fungsi kepadatan kumulatif dari variabel acak yang memiliki distribusi eksponensial dengan varians 25?

Jawab :

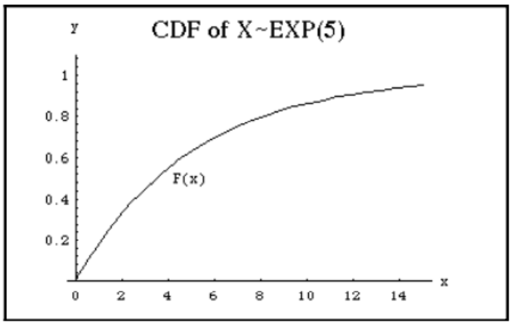
Karena distribusi eksponensial adalah kasus khusus dari distribusi gamma dengan $\alpha=1$, dari Teorema 6.3, kita mendapatkan $Var(X)=\theta^2$. sehingga menjadi 25. Jadi, $\theta^2=25$ atau $\theta=5$. Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas X adalah

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$=\int_0^x \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt$$

$$=\frac{1}{5}\left[-5e^{-\frac{t}{5}}\right]_0^x$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{5}}$$



Contoh 6.13. Jika variabel acak X memiliki distribusi gamma dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\theta = 1$, Berapa probabilitas X berada di antara mean dan mediannya?

Jawab :

Karena $X \sim GAM(1,1)$, fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & jika\, x > 0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnnya. \end{cases}$$

Oleh karena itu, median q dari X dapat dihitung

$$\frac{1}{2} = \int_0^q e^{-x} dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^q$$

$$= 1 - e^{-q}$$

Karenanya

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-q}$$

Sehingga didapat

$$q = ln2$$

Nilai rata-rata X dapat ditemukan dari Teorema 6.3.

$$E(X) = \alpha\theta = 1.$$

Oleh karena itu mean dari X adalah 1 dan median X adalah $\ln 2$. Jadi

$$P(\ln 2 \le X \le 1) = \int_{\ln 2}^{1} e^{-x} dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{\ln 2}^{1}$$

$$= e^{-\ln 2} - \frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

$$= \frac{e-2}{2e}$$

Contoh 6.14. Jika variabel acak X memiliki distribusi gamma dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\theta = 2$, maka berapakah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak $Y = e^X$?

Jawab :

Pertama, kita menghitung fungsi distribusi kumulatif $G(y)$ dari Y.

$$G(y) = P(Y \le y)$$

$$= P\left(e^X \le y\right)$$

$$= P(X \le \ln y)$$

$$= \int_0^{\ln y} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{\ln y}$$

$$= 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln y}}$$

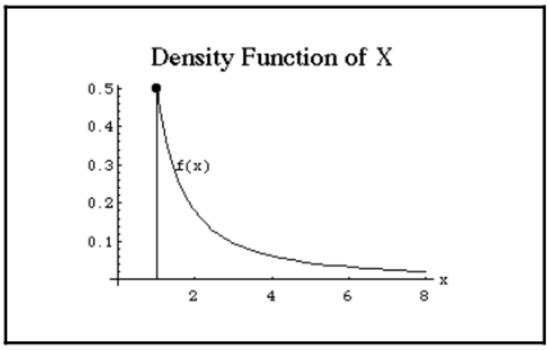
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan probabilitas Y diberikan oleh

$$g(y) = \frac{d}{dy} G(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{2y\sqrt{y}}$$

Jadi, jika $X \sim GAM(1,2)$, maka fungsi kepadatan probabilitas dari e^X adalah

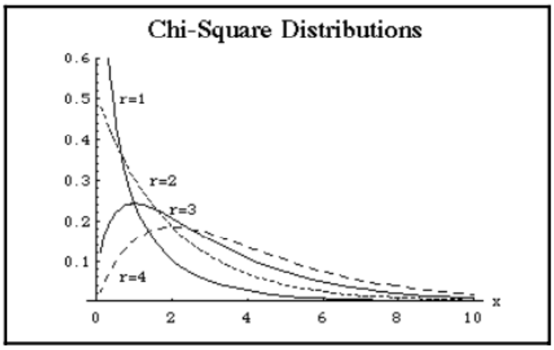
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}, & jika\ 1\le x\le\infty\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$



Definisi 6.4. Variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi chi-square dengan derajat kebebasan r jika fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}}x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & jika\ 0<x<\infty\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

dimana $r>0$.
Jika X memiliki distribusi chi-square, maka dinyatakan dengan $X\sim\chi2(r)$



Distribusi gamma menurun menjadi distribusi chi-square jika $\alpha=\dfrac{r}{2}$ dan $\theta=2$. Jadi, distribusi chi-square adalah kasus khusus dari distribusi gamma. Selanjutnya, jika $r\to\infty$, maka distribusi chi-square cenderung berdistribusi normal. Distribusi chi-square berasal dari karya ahli statistik Inggris Karl Pearson (1857-1936) tetapi pada awalnya ditemukan oleh Jerman. fisikawan F. R. Helmert (1843-1917).

Contoh 6.15. Jika $X \sim GAM(1,1)$, maka berapa fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak $2X$?

Jawab :

Kita akan menggunakan metode pembangkit momen untuk menemukan distribusi dari $2X$. Fungsi pembangkit momen dari variabel acak gamma diberikan oleh (lihat Teorema 6.3)

$$M(t) = (1-\theta t)^{-\alpha} \qquad jika\, t < \frac{1}{\theta}$$

Saat $X \sim GAM(1,1)$, fungsi pembangkit momen X diberikan oleh

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad t < 1.$$

Oleh karena itu, fungsi pembangkit momen $2X$ adalah

$$M_{2X}(t) = M_X(2t)$$

$$= \frac{1}{1-2t}$$

$$= \frac{1}{1-2t^{\frac{2}{2}}}$$

$$= MGF\ dari\ \chi 2(2).$$

Jadi, jika X adalah eksponensial dengan parameter 1, maka $2X$ adalah chi-square dengan 2 derajat kebebasan.

Contoh 6.16. Jika $X \sim \chi^2(5)$, maka berapa probabilitas X berada di antara 1.145 dan 12.83?

Jawab :

Probabilitas X antara 1,145 dan 12,83 dapat dihitung dari berikut ini :

$$P(1{,}145 \le X \le 12{,}83) = P(X \le 12{,}83) - P(X \le 1{,}145)$$

$$= \int_0^{12,83} f(x)\,dx - \int_0^{1,145} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{12,83} \frac{1}{\tau\left(\frac{5}{2}\right) 2^{\frac{5}{2}}} x^{\frac{5}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} - \int_0^{1,145} x^{\frac{5}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=0,975-0,050\left(dari\,tabel\ \chi^2\right)$$

$$=0,925.$$

Integral ini sulit untuk dievaluasi sehingga nilainya diambil dari tabel chi-square.

Contoh 6.17. Jika $X \sim \chi^2(7)$, maka berapa nilai konstanta a dan b sedemikian sehingga $P(a < X < b) = 0,95$?

Jawab :

$$0,95 = P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a),$$

Sehingga didapat

$$P(X < b) = 0,95 + P(X < a).$$

$a = 1.690$, jadi

$$P(X < 1,690) = 0,025.$$

Sehingga didapat

$$P\ (X < b) = 0,95 + 0,025 = 0,975$$

Jadi, dari tabel chi-kuadrat, kita mendapatkan $b = 16,01$.

Definisi 6.5. Variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi $n-Erlang$ jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}\dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & jika\ 0 < x < \infty \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

dimana $\lambda > 0$ adalah parameternya.

Distribusi gamma menurun menjadi distribusi $n-Erlang$ jika $\alpha = n$, dimana n adalah bilangan bulat positif, dan $\theta = \dfrac{1}{\lambda}$. Distribusi gamma dapat digeneralisasikan untuk menyertakan distribusi Weibull. Kita menyebut distribusi umum ini distribusi terpadu. Bentuk distribusinya adalah sebagai berikut:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\theta^{\alpha\psi}\Gamma(\alpha^{\psi}+1)}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x^{-(\alpha\psi-\alpha-1)}}{\theta}}, & jika\ 0<x<\infty\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

di mana $\theta>0,\alpha>0, dan\,\psi\in\{0,1\}$ adalah parameter.

Jika $\psi=0$, distribusi terpadu berkurang

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\theta}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x^{\alpha}}{\theta}} & jika\, 0<x<\infty\\ 0 & untuk\ yang\, lainnya\end{cases}$$

yang dikenal sebagai distribusi Weibull. Untuk $\alpha=1$, distribusi Weibull menjadi distribusi eksponensial. Distribusi Weibull menyediakan model probabilistik untuk panjang umur data komponen atau sistem. Mean dan varians dari distribusi Weibull diberikan oleh

$$E(X)=\theta^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$Var(X)=\theta^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{2}\right\}$$

Dari distribusi Weibull ini, kita bisa mendapatkan distribusi Rayleigh dengan mengambil $\theta=2\sigma^2$ dan $\alpha=2$. Distribusi Rayleigh diberikan oleh

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & jika\, 0<x<\infty\\ 0 & untuk\ yang\, lainnya\end{cases}$$

Jika $\psi=1$, distribusi terpadu menurun menjadi distribusi gamma.

6.3 Distribusi Beta

Distribusi beta adalah salah satu distribusi dasar dalam statistik. Distribusi ini memiliki banyak aplikasi dalam statistik klasik maupun Bayesian. Distribusi beta melibatkan pengertian fungsi beta. Pertama kita menjelaskan pengertian integral beta dan beberapa sifat sederhananya. Misalkan α dan β adalah dua bilangan real positif. Fungsi beta $B(\alpha,\beta)$ didefinisikan sebagai

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

Pertama, dibuktikan teorema yang menetapkan hubungan antara fungsi beta dan fungsi gamma.

Teorema 6.4. Misalkan α dan β adalah dua bilangan real positif. Kemudian

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

dimana

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx$$

adalah fungsi gamma.

Bukti :

Kita membuktikan teorema ini dengan menghitung

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}dy\right)$$

$$=\left(\int_0^\infty u^{2\alpha-2}e^{-u^2}\,2udu\right)\left(\int_0^\infty v^{2\beta-2}e^{-v^2}\,2vdv\right)$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2\alpha-1}v^{2\beta-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty r^{2\alpha+2\beta-2}(cos\theta)^{2\alpha-1}(sin\theta)^{2\beta-1}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=\left(\int_0^\infty (r^2)^{\alpha+\beta-1}e^{-r^2}dr^2\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2\alpha-1}(sin\theta)^{2\beta-1}d\theta\right)$$

$$=\Gamma(\alpha+\beta)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2\alpha-1}(sin\theta)^{2\beta-1}d\theta\right)$$

$$=\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$=\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

Baris kedua pada integral di atas diperoleh dengan mengganti $x=u^2$ dan $y=v^2$. Demikian pula, baris keempat dan ketujuh diperoleh dengan mensubstitusi masing-masing $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$, dan $t=cos^2\theta$. Ini membuktikan teorema tersebut.

Corollary 6.1. Untuk setiap α dan β positif, fungsi beta adalah simetris, maka

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$$

Corollary 6.2. Untuk setiap α dan β positif, fungsi beta dapat ditulis sebagai

$$B(\alpha,\beta)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2\alpha-1}(sin\theta)^{2\beta-1}\,d\theta$$

Corollary berikut diperoleh dengan mensubstitusikan $s=\dfrac{t}{1-t}$ pada definisi dari fungsi beta.

Corollary 6.3. Untuk setiap α dan β positif, fungsi beta dapat dinyatakan sebagai

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha+\beta}}\,ds$$

Corollary 6.4. Untuk setiap pasangan dari bilangan real positif β dan setiap bilangan bulat positif α , fungsi beta menurun menjadi

$$B(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-1+\beta)(\alpha-2+\beta)\ldots(1+\beta)\beta}.$$

Corollary 6.5. Untuk setiap pasangan dari bilangan bulat positif α dan β, fungsi beta memenuhi hubungan rekursif berikut

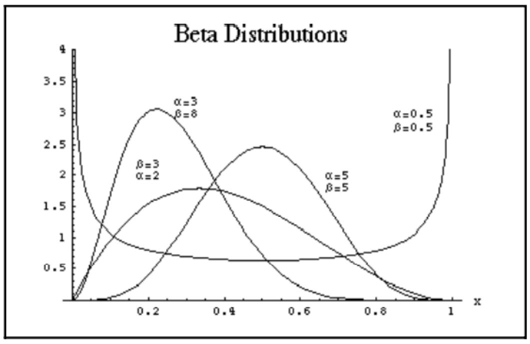
$$B(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}B(\alpha-1,\beta-1)$$

Definisi 6.6. Variabel acak X dikatakan memiliki fungsi kepadatan beta jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & jika\ 0<x<1\\ 0 & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

untuk setiap α dan β positif. Jika X memiliki distribusi beta, maka kita secara simbolis menunjukkan ini dengan menulis $X\sim BETA(\alpha,\beta)$.

Gambar dibawah ini mengilustrasikan grafik distribusi beta untuk berbagai nilai α dan β.



Distribusi beta menurun menjadi distribusi seragam di atas (0, 1) jika $\alpha = 1 = \beta$. Teorema berikut memberikan mean dan varians dari beta distribusi.

Teorema 6.5. Jika $X \sim BETA(\alpha, \beta)$,

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Bukti :

Nilai harapan dari X diberikan oleh

$$E(X) = \int_0^1 x f(x) dx$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Sehingga

$$E\left(X^2\right)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

Karena itu

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-E(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Contoh 6.18. Persentase pengotor setiap kelompok dalam produk bahan kimia tertentu adalah variabel acak X yang terdistribusi beta yang diberikan oleh

$$f(x)=\begin{cases}60x^3(1-x)^2, & untuk\ 0<x<1\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Berapa probabilitas bahwa kelompok yang dipilih secara acak akan memiliki lebih dari 25% kotoran?

Jawab :

Kemungkinan bahwa kelompok yang dipilih secara acak akan memiliki lebih dari 25% kotoran diberikan oleh

$$P(X\geq 0.25)=\int_{0.25}^{1}60x^3(1-x)^2\,dx$$

$$=60\int_{0.25}^{1}(x^3-2x^4+x^5)dx$$

$$=60\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right]_{0.25}^{1}$$

$$=60\frac{657}{40960}=0.9624$$

Contoh 6.19. Proporsi waktu per hari yang dihitung semua kasir di supermarket yang sibuk terdistribusi

$$f(x)=\begin{cases}kx^2(1-x)^9, & untuk\ 0<x<1\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Berapakah nilai konstanta k sehingga $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas yang valid?

Jawab :

Menggunakan definisi dari fungsi beta, kita dapatkan

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^9 \, dx = B(3,10)$$

Oleh karena itu dengan Teorema 6.4, kita dapatkan

$$B(3,10) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(10)}{\Gamma(13)} = \frac{1}{660}.$$

Karenanya k harus sama dengan 660.

Distribusi beta dapat digeneralisasikan ke setiap interval terbatas $[a,b]$. Distribusi umum ini disebut distribusi beta umum. Jika variabel acak X memiliki distribusi beta umum yang kita nyatakan dengan menulis $X \sim GBETA(\alpha,\beta,a,b)$. Kepadatan probabilitas yang digeneralisasi distribusi beta diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \dfrac{(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{(b-a)^{\alpha+\beta-1}}, & \text{untuk } a < x < b \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

dimana $\alpha, \beta, a > 0$.

Jika $X \sim GBETA(\alpha,\beta,a,b)$, maka

$$E(X) = (b-a)\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + a$$

$$Var(X) = (b-a)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Dapat ditunjukkan bahwa jika $X = (b-a)Y + a$ dan $Y \sim BETA(\alpha,\beta)$, maka $X \sim GBETA(\alpha,\beta,a,b)$. Jadi dengan menggunakan Teorema 6.5, kita dapatkan

$$E(X) = E\big((b-a)Y + a\big) = (b-a)E(Y) + a = (b-a)\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + a$$

Dan

$$Var(X) = Var\big((b-a)Y + a)$$

$$= (b-a)^2 Var(Y)$$

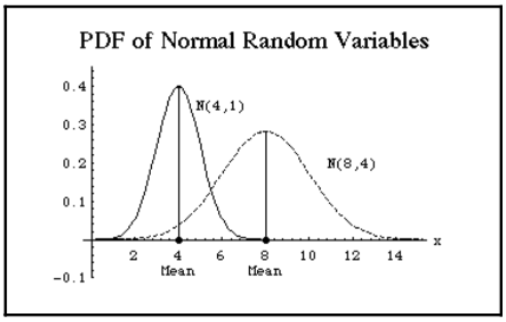
$$= (b-a)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

6.4 Distribusi Normal

Definisi 6.7. Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi normal jika fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

di mana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma^2 < \infty$ adalah parameter yang berubah-ubah. Jika X berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ^2, maka kita tulis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Contoh 6.20. Fungsi bernilai real didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

fungsi kepadatan probabilitas dari beberapa variabel acak X ?

Jawab :

Untuk menjawab pertanyaan ini, kita harus memeriksa bahwa f nonnegatif dan berintegrasi dengan 1. Bagian nonnegatif adalah trivial karena fungsi eksponensial selalu positif. Oleh karena itu menggunakan sifat dari fungsi gamma, kita menunjukkan bahwa f terintegrasi dengan 1 pada $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= 2\int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\sigma}{\sqrt{2z}} dz \text{ dimana } z = \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$$

Teorema berikut memberitahu kita bahwa parameter μ adalah mean dan parameter σ^2 adalah varians dari distribusi normal.

Teorema 6.6.

Jika $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, maka

$$E\left(X\right) = \mu$$

$$Var\left(X\right) = \sigma^2$$

$$M\left(t\right) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Bukti :

Kita membuktikan teorema ini dengan terlebih dahulu menghitung fungsi pembangkit momen dan menemukan mean dan varians X darinya.

$$M\left(t\right) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f\left(x\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 tx)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x - \mu - \sigma^2 t\right)^2} e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} dx$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu-\sigma^2 t\right)^2} dx$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Integral terakhir berintegrasi dengan 1 karena integrand adalah fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak normal yang meannya adalah $\mu + \sigma^2 t$ dan varians σ^2, yaitu $N\left(\mu + \sigma^2 t, \sigma^2\right)$. Akhirnya, dari fungsi pembangkit momen kita menentukan mean dan varians dari distribusi normal.

Contoh 6.21. Jika X adalah variabel acak dengan mean μ dan varians $\sigma^2 > 0$, lalu berapakah mean dan varians dari variabel acak $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$?

Jawab :

Nilai mean dari variabel acak Y adalah

$$E(Y) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma} E(X-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma} E((X)-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)$$

$$= 0$$

Varians Y diberikan oleh

$$Var(X) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma} Var(X)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2$$

$$= 1$$

Oleh karena itu, jika kita mendefinisikan variabel acak baru dengan mengambil variabel acak dan mengurangkan mean dari variabel tersebut dan kemudian membagi hasilnya dengan standar deviasinya, maka variabel acak baru ini akan memiliki mean nol dan satu varians.

Definisi 6.8. Variabel acak normal dikatakan normal standar, jika meannya nol dan variansnya satu. Kita menunjukkan variabel acak normal standar X dengan $X \sim N(0,1)$. Fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi normal standar adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$$

Contoh 6.22. *Jika* $X \sim N(0,1)$, berapakah probabilitas variabel acak X kurang dari atau sama dengan $-1,72$?

Jawab :

$$P(X \leq -1.72) = 1 - P(X \leq 1.72)$$

$$= 1 - 0,9573 \text{ (dari tabel)}$$

$$= 0,0427$$

Contoh 6.23. Jika $Z \sim N(0,1)$, berapakah nilai konstanta c bahwa $P(|Z| \leq c) = 0,95$?

Jawab :

$$0.95 = P(|Z| \leq c)$$

$$= P(-c \leq Z \leq c)$$

$$= P(Z \leq c) - P(Z \leq -c)$$

$$= 2P(Z \leq c) - 1$$

Karenanya

$$P(Z \leq c) = 0.975$$

dan dari sini menggunakan tabel yang kita dapatkan

$$c = 1,96$$

Teorema berikut sangat penting dan memungkinkan kita menemukan probabilitas dengan menggunakan tabel normal standar.

Teorema 6.7. Jika $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, maka variabel random $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$.

Bukti :

Kita akan menunjukkan bahwa Z adalah normal standar dengan mencari fungsi kepadatan probabilitas Z. Kita menghitung kepadatan probabilitas Z dengan metode fungsi distribusi kumulatif.

$$\begin{aligned}
F(z) &= P(Z \le z) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) \\
&= P(X \le \sigma z + \mu) \\
&= \int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dx \text{ dimana } \mathrm{w} = \frac{x-\mu}{\sigma}
\end{aligned}$$

Karenanya

$$f(z) = F'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana menggunakan tabel normal standar untuk menemukan probabilitas untuk variabel acak normal.

Contoh 6.24. Jika $X \sim N(3,16)$, lalu berapakah $P(4 \le X \le 8)$?

Jawab :

$$\begin{aligned}
P(4 \le X \le 8) &= P\left(\frac{4-3}{4} \le \frac{X-3}{4} \le \frac{8-3}{4}\right) \\
&= P\left(\frac{1}{4} \le Z \le \frac{5}{4}\right) \\
&= P(Z \le 1.25) - P(Z \le 0.25)
\end{aligned}$$

$$= 0.8944 - 0.5987$$

$$= 0.2957$$

Contoh 6.25. Jika $X \sim N(25,36)$, maka berapakah nilai konstanta c sedemikian sehingga $P(|X-25| \le c) = 0,9544$?

Jawab :

$$0.9544 = P(|X-25| \le c)$$

$$= P(-c \le X - 25 \le c)$$

$$= P\left(-\frac{c}{6} \le \frac{X-25}{6} \le \frac{c}{6}\right)$$

$$= P\left(-\frac{c}{6} \le Z \le \frac{c}{6}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{c}{6}\right) - P\left(Z \le -\frac{c}{6}\right)$$

$$= 2P\left(Z \le \frac{c}{6}\right) - 1$$

Karenanya

$$P\left(Z \le \frac{c}{6}\right) = 0.9772$$

dan dari sini, menggunakan tabel normal, kita dapatkan

$$\frac{c}{6} = 2 \, atau \, c = 12$$

Teorema berikut dapat dibuktikan mirip dengan Teorema 6.7.

Teorema 6.8. Jika $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, maka variabel random $\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^2 \sim \chi^2(1)$.

Bukti :

Misalkan $W = \left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^2$ dan $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Kita akan menunjukkan bahwa variabel acak W adalah chi-square dengan derajat kebebasannya adalah 1. Ini berarti menunjukkan bahwa fungsi kepadatan probabilitas W menjadi

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{-\frac{1}{2}w}, & jika\, 0 < w < \infty \\ 0, & untuk\, lainnya \end{cases}$$

Kita menghitung fungsi kepadatan probabilitas W dengan metode fungsi distribusi. Misalkan $G(w)$ adalah fungsi distribusi kumulatif W, yaitu

$$G(w) = P(W \leq w)$$

$$= P\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \leq w\right)$$

$$= P\left(-\sqrt{w} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \sqrt{w}\right)$$

$$= P\left(-\sqrt{w} \leq Z \leq \sqrt{w}\right)$$

$$= \int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}} f(z)\, dz$$

dimana $f(z)$ menunjukkan fungsi kepadatan probabilitas dari normal standar variabel acak Z. Jadi, fungsi kepadatan probabilitas dari W diberikan oleh

$$g(w) = \frac{d}{dw} G(w)$$

$$= \frac{d}{dw} \int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}} f(z)\, dz$$

$$= f\left(\sqrt{w}\right) \frac{d\sqrt{w}}{dw} - f\left(-\sqrt{w}\right) \frac{d\left(-\sqrt{w}\right)}{dw}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w} \frac{1}{2\sqrt{w}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w} \frac{1}{2\sqrt{w}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{-\frac{1}{2}w}$$

Jadi, kita telah menunjukkan bahwa W adalah chi-square dengan satu derajat kebebasan dan buktinya sekarang sudah lengkap.

Contoh 6.26. Jika $X \sim N(7,4)$, apa $P\left(15.364 \leq (X-7)^2 \leq 20.095\right)$?

Jawab :

Karena $X \sim N(7,4)$, kita dapatkan $\mu = 7$ dan $\sigma = 2$. Jadi

$$P\left(15.364 \le (X-7)^2 \le 20.095\right) = P\left(\frac{15.364}{4} \le \frac{(X-7)^2}{2} \le \frac{20.095}{4}\right)$$

$$= P\left(3.841 \le Z^2 \le 5.024\right)$$

$$= P\left(0 \le Z^2 \le 5.024\right) - P\left(0 \le Z^2 \le 3.841\right)$$

$$= 0.975 - 0.949$$

$$= 0.026$$

Sebuah generalisasi dari distribusi normal adalah sebagai berikut:

$$g(x) = \frac{\nu\varphi(\nu)}{2\sigma\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} e^{-\left(\frac{\varphi(\nu)}{\sigma}|x-\mu|\right)^{\nu}}$$

Dimana

$$\varphi(\nu) = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}}$$

dan ν dan σ adalah konstanta real positif dan $-\infty < \mu < \infty$ adalah konstanta real. Konstanta μ merepresentasikan mean dan konstanta σ merepresentasikan standar deviasi dari distribusi normal umum. Jika $\nu = 2$, maka distribusi normal umum dikurangi menjadi distribusi normal. Jika $\nu = 1$, kemudian distribusi normal umum direduksi menjadi distribusi Laplace yang fungsi kepadatannya diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$$

dimana $\theta = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}$. Distribusi normal umum sangat berguna dalam sinyal pengolahan dan pemodelan tertentu dari diskrit cosinus transform (DCT) koefisien gambar digital.

6.5 Distribusi Lognormal

Distribusi ini dapat didefinisikan sebagai distribusi variabel acak yang logaritmanya terdistribusi normal. Distribusi lognormal biasa digunakan dalam biologi, astronomi, ekonomi, farmakologi dan teknik. Distribusi ini terkadang dikenal sebagai distribusi Galton-McAlister. Di bidang ekonomi, Distribusi lognormal disebut sebagai distribusi Cobb-Douglas.

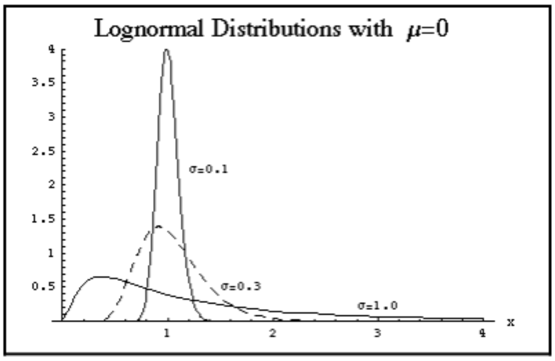
Definisi 6.9.

Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi lognormal jika fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}, & jika\ 0 < x < \infty \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma^2 < \infty$ adalah parameter berubah-ubah.

Jika X memiliki distribusi lognormal dengan parameter μ dan σ^2, lalu kita tuliskan sebagai $X \sim \wedge \backslash(\mu, \sigma 2)$



Contoh 6.27. Jika $X \sim \wedge \backslash(\mu, \sigma^2)$, berapa persentil ke $100p$ dari X?

Jawab :

Misalkan q menjadi persentil ke $100p$ dari X. Kemudian dengan definisi persentil, kita dapatkan

$$p = \int_0^q \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Substitusikan $z = \dfrac{\ln(x) - \mu}{\sigma}$ pada integral di atas, kita mempunyai

$$p = \int_{-\infty}^{\frac{\ln(q)-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{zp} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Dimana $z_p = \dfrac{\ln(q)-\mu}{\sigma}$ adalah ke $100p$ dari variabel acak normal standar. Karenanya persentil ke $100p$ dari X adalah

$$q = e^{\sigma z_p + \mu}$$

dimana z_p adalah persentil ke $100p$ dari variabel acak normal standar Z.

Teorema 6.9.

Jika $X \sim \wedge \backslash\left(\mu,\sigma^2\right)$, kemudian

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$Var(X) = \left[c^{\sigma^2} - 1\right] e^{2\pi + e^2}$$

Bukti :

Misalkan t adalah bilangan bulat positif. Kita menghitung momen ke t dari X.

$$E\left(X^t\right) = \int_0^\infty x^t f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Substitusikan $z = \ln(x)$ pada integral terakhir, kita dapatkan

$$E\left(X^t\right) = \int_{-\infty}^\infty e^{tz} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dz = M_z(t),$$

dimana $M_z(t)$ menunjukkan fungsi pembangkit momen dari variabel acak $Z \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Karena itu,

$$M_z(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Jadi, misalkan $t = 1$, kita dapatkan

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Begitu pula, ambil $t = 2$, kita punya

$$E\left(X^2\right) = e^{2\mu+2\sigma^2}$$

Jadi, kita punya

$$Var\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \left[e^{\sigma^2} - 1\right]e^{2\mu+\sigma^2}$$

Terbukti

Contoh 6.28. Jika $X \sim \wedge \backslash\left(0,4\right)$, lalu berapa probabilitasnya X antara 1 dan 12.1825?

Jawab :

Saat $X \sim \wedge \backslash\left(0,4\right)$, variabel acak $Y = \ln\left(X\right) \sim N\left(0,4\right)$.

Karenanya

$$P\ \ (1 \le X \le 12.1825 = P\left(\ln\left(1\right) \le \ln\left(X\right) \le \ln\left(12.1825\right)\right)$$

$$= P\left(0 \le Y \le 2.50\right)$$

$$= P\left(0 \le Z \le 1.25\right)$$

$$= P\left(Z \le 1.25\right) - P\left(Z \le 0\right)$$

$$= 0.8944 - 0.5000$$

$$= 0.4944$$

Contoh 6.29. Jika jumlah waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan suatu masalah oleh sekelompok siswa mengikuti distribusi lognormal dengan parameter μ dan σ^2, lalu berapa nilai μ sehingga kemungkinan memecahkan masalah dalam 10 menit atau kurang oleh siswa yang dipilih secara acak adalah 95% ketika $\sigma^2 = 4$?

Jawab :

Misalkan variabel acak X menunjukkan jumlah waktu yang dibutuhkan untuk memecahkan masalah. Sehingga $X \sim \wedge \backslash\left(\mu,4\right)$. Kita ingin menemukan μ sehingga $P\left(X \le 10\right) = 0,95$. Karenanya

$$0.95 = P\left(X \le 10\right)$$

$$= P\left(\ln\left(X\right) \le \ln\left(10\right)\right)$$

$$= P\left(\ln\left(X\right) - \mu \le \ln\left(10\right) - \mu\right)$$

$$= P\left(\frac{\ln(X)-\mu}{2} \le \frac{\ln(10)-\mu}{2}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{\ln(10)-\mu}{2}\right)$$

dimana $Z \sim N(0,1)$. Menggunakan tabel untuk distribusi normal standar, kita dapatkan

$$\frac{\ln(10)-\mu}{2} = 1.65$$

Karenanya $\mu = \ln(10) - 2(1.65) = 2.3025 - 3.300 = -0.9975$

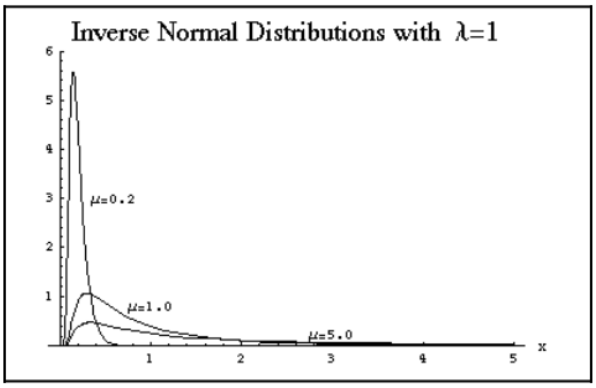
6.6 Distribusi Invers Gaussian

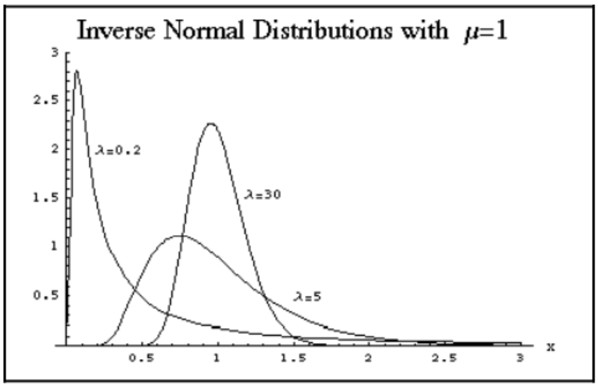
Definisi 6.10. Variabel random X dikatakan mempunyai distribusi invers Gaussian jika fungsi kepadatan probabilitas yang diberikan

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda}{2\pi} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}}}, & jika\ 0 < x < \infty \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

dimana dan $0 < \lambda < \infty$ adalah parameter berubah-ubah.

Jika X memiliki distribusi Invers Gaussian dengan parameter μ dan λ, lalu kita menuliskannya sebagai $X \sim IG(\mu, \lambda)$.





Karakteristik fungsi $\phi(t)\, dari\, X \sim IG(\mu,\lambda)$ adalah

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

$$= e^{\frac{\lambda}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}}\right]}$$

Menggunakan ini, kita memiliki teorema berikut.

Teorema 6.10. Jika $X \sim IG(\mu,\lambda)$, maka

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

Bukti :

Karena $\phi(t) = E\left(e^{it\,X}\right)$, turunan $\phi'(t) = iE\left(Xe^{it\,X}\right)$. Oleh karena itu $\phi'(0) = iE(X)$. Kita mengetahui fungsi karakteristik $\phi(t)$ dari $X \sim IG(\mu,\lambda)$ adalah

$$\phi(t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}}\right]}$$

Membedakan $\phi(t)$ terhadap t, kita memiliki

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\lambda}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}}\right]}\right]$$

$$= e^{\frac{\lambda}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}}\right]} \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}}\right]\right)$$

$$= i\mu e^{\frac{\lambda}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}}\right]}\left(1-\frac{2i\mu^2 t}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Karenanya $\phi'(0) = i\mu$. Oleh karena itu, $E(X) = \mu$. Demikian pula, dapat ditunjukkan bahwa

$$Var(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

Ini melengkapi bukti teorema.

Fungsi distribusi $F(x)$ dari invers Gaussian random variabel X dengan parameter $\mu \, dan \, \lambda$ dihitung oleh Shuster (1968) sebagai

$$F(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\left[\frac{x}{\mu}-1\right]\right) + e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\left[\frac{x}{\mu}-1\right]\right)$$

dimana Φ adalah fungsi distribusi dari fungsi distribusi normal standar.

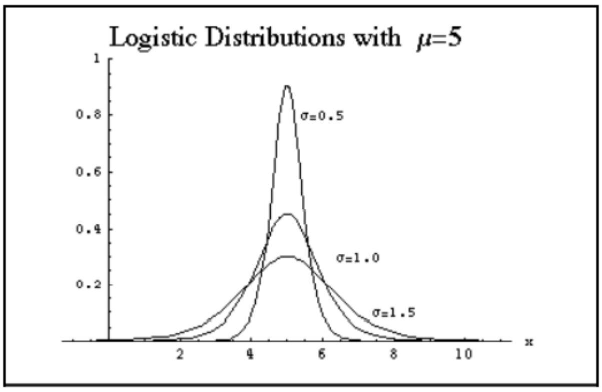
6.7 Distribusi Logistik

Distribusi logistik sering dianggap sebagai alternatif distribusi normal univariat. Distribusi logistik memiliki bentuk yang sangat dekat dengan distribusi normal. Distribusi logistik digunakan dalam pemodelan data demografis.

Definisi 6.11. Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi logistik jika fungsi kepadatan probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \frac{e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}{\left[1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right]^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

di mana $-\infty < \mu < \infty$ dan $\sigma > 0$ adalah parameter.



Jika X memiliki distribusi logistik dengan parameter μ dan σ, maka kita tuliskan sebagai $X \sim LOG(\mu,\sigma)$. Variabel acak X dengan distribusi logistik di atas akan dilambangkan dengan $X \sim LOG(\mu,\sigma)$.

Teorema 6.11. Jika $X \sim LOG(\mu,\lambda)$, maka

$$E(X)=\mu$$

$$Var(X)=\sigma^2$$

$$M(t)=e^{\mu t}\Gamma\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma t\right)\Gamma\left(1-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma t\right), |t|<\frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}}$$

Bukti :

Pertama, kita mendapatkan fungsi pembangkit momen dari X dan kemudian kita menghitung mean dan variansnya. Fungsi pembangkit momennya adalah

$$M(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}}\frac{e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}{\left[1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right]^2}dx$$

$$=e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sw}\frac{e^{-w}}{\left(1+e^{-w}\right)^2}dw,\ dimana\ w=\frac{\pi(x-\mu)}{\sqrt{3}\,\sigma} dan\ s=\frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi}t$$

$$=e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-w}\right)^{-s}\frac{e^{-w}}{\left(1+e^{-w}\right)^2}dw$$

$$= e^{\mu t}\int_0^1 \left(z^{-1}-1\right)^{-s} dz, \qquad dimana\, z = \frac{1}{1+e^{-w}}$$

$$= e^{\mu t}\int_0^1 z^8 \left(1-z\right)^{-8} dz$$

$$= e^{\mu t} B\left(1+s, 1-s\right)$$

$$= e^{\mu t}\frac{\Gamma\left(1+s\right)\Gamma\left(1-s\right)}{\Gamma\left(1+s+1-s\right)}$$

$$= e^{\mu t}\frac{\Gamma\left(1+s\right)\ \Gamma\left(1-s\right)}{\Gamma\left(2\right)}$$

$$= e^{\mu t}\Gamma\left(1+s\right)\ \Gamma\left(1-s\right)$$

$$= e^{\mu t}\Gamma\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma t\right)\Gamma\left(1-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma t\right)$$

$$= e^{\mu t}\left(\frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi}t\right)\text{cosec}\left(\frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi}t\right)$$

Latihan Soal

1. Jika $Y \sim UNIF\left(0,1\right)$, berapa fungsi kepadatan probabilitas dari $X = -ln\, Y$?

   Jawab :

$$f\left(y\right) = \begin{cases} 1, \; untuk\; 0 \le y \le 1 \\ 0, \; untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

$$F\left(Y \le y\right) = \int_0^1 1 \mathrm{d}y = y$$

Untuk $X = -\ln Y$

$$F\left(X \le x\right) = F\left(-\ln(Y) \le x\right)$$

$$= 1 - F\left(Y \le \mathrm{e}^{-X}\right)$$

$$F\left(X \le x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-X}$$

untuk mendapatkan PDF dari X

$$\frac{dF\left(X \le x\right)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$$

$$f\left(x\right) = \mathrm{e}^{-x}$$

X adalah sebuah distribusi eksponensial

Sehingga

$$f_x\left(x\right) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, \; untuk\; x \ge 0 \\ 0, \; untuk\; x < 0 \end{cases}$$

dengan parameter $1\left(\lambda = 1\right),\, jadi\; x \sim EXP\left(1\right)$

2. Diketahui fungsi kepadatan probabilitas X :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} e^{-x} & jika\ x \ge 0 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Miasalkan $Y = 1 - \mathrm{e}^{-X}$

Temukan distribusi dari Y ?

Jawab :

Diketahui $Y = 1 - \mathrm{e}^{-X} \Rightarrow \mathrm{d}Y = \mathrm{e}^{-X}\mathrm{d}x$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{X}$$

$$= \frac{1}{1-Y}$$

$$= \mathrm{e}^{-X}$$

$$= 1 - Y$$

$$\mathrm{e}^{X} = \frac{1}{1-Y}$$

limit dari Y adalah $\left(0,1\right)$

$$f_y\left(Y\right) = f_x\left(x\right)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|$$

$$(1-y)\cdot\frac{1}{1-Y}$$

$$=\begin{cases}1,\ untuk\, 0<Y<1\\ 0,\ untuk\ yang\, lainnya\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y \sim UNIF(0,1)$$

3. Setelah waktu tertentu berat W dari kristal yang terbentuk diberikan kira-kira oleh $W=e^x$ dimana $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Berapa fungsi kepadatan probabilitas dari W untuk $0<w<\infty$?

   Jawab :

$$x=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

bentuk metode transformasi PDF dari $W=f_x(W)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|$

$$w \quad =\mathrm{e}^x$$

$$\ln w \ =x$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}=\frac{1}{w}$$

$$w=\left(\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)(\ln w-\mu)^2}\right)$$

4. Berapa probabilitas bahwa variabel random normal dengan mean 6 dan standar deviasi 3 akan jatuh pada antara 5.7 dan 7.5 ?

   Jawab :

   Diketahui $X \sim Normal$ variabel random dengan mean 6 dan standart deviasi 4

$$\mu=6, \sigma=3\, dan\, Y\sim N(0,1)$$

$$P(5.7\le x\le 7.5)=?$$

$$P(5.7\le x\le 7.5)=p\left(\frac{5.7-6}{3}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{7.5-6}{3}\right)$$

$$=P(-0{,}1\le Y\le 0{,}1)$$

$$= P\left(Y \le 0,5\right) - P\left(Y \ge 0,1\right)$$

$$= P\left(Y \le 0,5\right) - \left[1 - P\left(Y \le 0,1\right)\right]$$

$$= P\left(Y \le 0,5\right) + P\left(Y \le 0,1\right) - 1$$

$$= 0,6915 + 0,5398 - 1$$

$$= 0,2313$$

5. Diketahui X memiliki distribusi dengan persentil ke- 75 sama dengan $\frac{1}{3}$ dan fungsi kepadatan probabilitas

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & untuk\, 0 < 0 < \infty \\ 0\,, & untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

Berapa nilai parameter λ ?

Jawab :

Diketahui : $persentil\; ke - 75\, sama\; dengan\; x = \frac{1}{3}.$ maka,

$$\int_0^{1/3} f\left(x\right) dx = 0,75$$

$$\int_0^{1/3} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = 0,75$$

$$\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^{1/3} = 0,75$$

$$-\left(\mathrm{e}^{-1/3} - e^{0}\right) = 0,75$$

$$-\left(\mathrm{e}^{-1/3} - 1\right) = 0,75$$

$$-\left(\mathrm{e}^{-1/3} + 1\right) = 0,75$$

$$\mathrm{e}^{-1/3} = 1 - 0,75$$

$$\mathrm{e}^{-1/3} = 0,25$$

$$In(\mathrm{e}^{-1/3}) = In\left(0,25\right)$$

$$-\frac{\lambda}{3} = In(0,25)$$

$$\lambda = -3.In(0,25)$$

$$= 4.1589$$

6. Jika distribusi normal dengan mean μ dan varians $\sigma^2 > 0$ memiliki persentil ke-46 sama dengan 20σ, maka berapa μ dalam ketentuan standar deviasi?

   Jawab :

$$P(X < 20\sigma) = 0,46$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 0,46$$

$$P\left(Z < \frac{20\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 0,46$$

$$\frac{20\sigma - \mu}{\sigma} = -0,1$$

$$\mu = 20,1\sigma$$

7. Diketahui X variabel acak dengan fungsi distribusi kumulatif.

$$F(x)\begin{cases} 0, & untuk\ x \le 0 \\ 1-e^{-x}, & untuk\ x > 0 \end{cases}$$

   Berapa $P\left(0 \le e^x \le 4\right)$?

   Jawab :

   Diketahui fungsi distribusi kumulatif

$$F(x)\begin{cases} 0, & untuk\ x \le 0 \\ 1-e^{-x}, & untuk\ x > 0 \end{cases}$$

   Log ditetapkan ke persamaan diatas disemua sisi, maka didapatkan:

$$P\left(\log(0) \le \ln\left(e^x\right) \le \ln(4)\right)$$

$$P(\infty \le x \le \ln 4)$$

$P(\infty \le x \le 1{,}3863)$

Probabilitas x kurang dari 1,3863 dengan menggunakan distribusi kumulatif

$= F(1{,}3863)$

$= 1 - e^{-1{,}3863}$

$= 1 - 0{,}25$

$= 0{,}75$

8. R.A Ficher membuktikan jika $n \ge 30$ dan Y memiliki distribusi chi kuadrat dengan n derajat kebebasan, maka $\sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1}$ memiliki perkiraan distribusi normal standar dibawah pendekatan ini, berapa persentil ke-90 dari Y ketika $n = 41$?

   Jawab :

   Diberikan : ketika $n \ge 30, Y \sim X^2 n$

   Maka $\sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1} \sim N(0,1)$

   - Mencari persentil ke-90 dari Y ketika $n = 41$,

$$P(Y \le P_{90}) = 90\%$$

$$P(Y \le P_{90}) = 0{,}9$$

$$P(\sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1} \le \sqrt{2P_{90}} - \sqrt{2n-1} = 0{,}9$$

$$P\left(2 \le \sqrt{2P_{90}} - \sqrt{2n-1}\right) = 0{,}90$$

$$Z \sim N(0,1)$$

   - Gunakan tabel probabilitas normal standar

$$\sqrt{2P_{90}} - \sqrt{2n-1} = 1{,}2816$$

$$\sqrt{2P_{90}} - \sqrt{2.41-1} = 1{,}2816$$

$$\sqrt{2P_{90}} = 1{,}2816 + \sqrt{81}$$

$$\sqrt{2P_{90}} = 1{,}2816 + 9$$

$$\sqrt{2P_{90}} = 10{,}2816$$

$$2P_{90} = 105,7113$$

$$P_{90} = 52,8556$$

9. Jika dalam distribusi normal X probabilitasnya adalah 0,5 dengan X kurang dari 500 dan 0,0227 bahwa X lebih kecil dari 650. Berapakah simpangan baku dari X ?

   Jawab :

   Mencari $\sigma\, untuk\, P\left(X > 650\right) = 0,0227$

   Diketahui : $\mu = 500$

$$P\left(X > x_0\right) = 0,0227$$

$$P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = 0,9773$$

$$P\left(Z < \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) = 0,9773$$

$$\frac{x_0-\mu}{\sigma} = inv\, normal\left(0,9773\right)$$

$$\sigma = \frac{x_0-\mu}{inv\, normal\left(0,9773\right)}$$

   Gunakan tabel 2 untuk mendapatkan $inv\, normal$ (0,9773) = 2,00

$$\sigma = \frac{650-500}{2,00}$$

$$= \frac{150}{2} = 75$$

10. Jika $X \sim N\left(5,4\right)$, maka berapa probabilitas bahwa $8 < Y < 13\, dimana\, Y = 2x+1$?

    Jawab :

    Diketahui : $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \qquad dimana\, \mu = 5$

$$X \sim N\left(5,4\right) \qquad \sigma = \sqrt{4} = 2$$

$$maka,\ P(8 < Y < 13) = P(8 < 2x+1 < 13)$$

$$= P(7 < 2x < 12)$$

$$= P(3,5 < x < 6)$$

$$= P\left(\frac{3,5-5}{2} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{6-5}{2}\right)$$

$$= P(-0,75 < Z < 0,5)$$

$$= P\left(Z < 0,5\right) - p(Z < -0,75)$$

$$= 0,6915 - 0,2266 \rightarrow \left(dapat\, dilihat\, dari\, tabel\, 2\right)$$

$$= 0,4649$$

11. Diberikan fungsi kepadatan probabilitas variabel random X sebagai berikut

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & jika\, x > 0 \\ 0 & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

Berapa momen ke-n dari X

Jawab :

- Fungsi pembangkit momen adalah $Mx\left(t\right) = E\left(e^{tx}\right)$

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & jika\, x > 0 \\ 0 & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

$$E\left(e^{tx}\right) = \int_0^\infty e^{tx} \theta e^{-\theta x} dx$$

$$= \theta \int_0^\infty e^{(t-\theta)x} dx$$

$$= \theta \left(\frac{1}{t-\theta}\right) e^{(t-\theta)x} \Big|_0^\infty \quad (yang\, terbatas\, hanya\ jika\, t < 0)$$

$$Mx\left(t\right) = \frac{\theta}{\theta - t}$$

- Momen ke-n dari X adalah $Mx\left(n\right) = E\left(X^n\right) = \left.\frac{d^n Mx\left(t\right)}{dt^n}\right|_{t=0}$

$$E\left(X^n\right)=\left.\frac{d^n Mx(t)}{dt^n}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{\theta}{(\theta-t)^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{\theta}$$

$$E\left[X^2\right]=\left.\frac{d^2 Mx(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\theta}{(\theta-t)^3}\right|_{t=0}=\frac{2}{\theta^2}$$

$$E\left[X^3\right]=\left.\frac{2\times 3\times\theta}{(\theta-t)^4}\right|_{t=0}=\frac{3!}{\theta^3}$$

$$moment\ ke-n\ dari\ X\ Mx(^n)=E\left(X^n\right)=\frac{n!}{\theta^n}$$

12. Jika variabel random X adalah normal dengan mean 1 dan standar devisi 2, maka berapa $P\left(X^2-2X\le 8\right)$?

    Jawab :

    Diketahui :

    $\mu=1$

    $\sigma=2$

    $$P\left(x^2-2x\le 8\right)=P\left(x^2-2x+1\le 9\right)$$

    $$=P\left((x-1)^2\le 9\right)$$

    $$=P(-3\le x-1\le 3)$$

    $$=P\left(-\frac{3}{2}\le\frac{x-1}{2}\le\frac{3}{2}\right)$$

    $$=P(-1,5\le 2\le 1,5)$$

    $$=p(2\le 1,5)-P(2\le -1,5)$$

    $$=0,93319-0,06681$$

    $$=0,86638$$

13. Jika variabel random X memiliki ditribusi unifrom pada interval $[0, a]$, berapa probabilitas variabel random lebih besar dari kuadratnya, yaitu $P > X^2$?

    Jawab :

    - Diketahui : $x \sim UNIF[0, a] \rightarrow dimana\, a > 0$

      Jadi, PDF dari x adalah :

      $$f(x)\begin{cases} \frac{1}{a-0} = \frac{1}{a} & ,untuk\, 0 \le X \le a \\ 0 & ,untuk\, lainnya \end{cases}$$

      $$= P\left(> X^2\right)$$

      $$= P\left(X^2 < X\right)$$

      $$= P\left(X^2 - X < 0\right)$$

      $$= P\left(X^2 - 2X\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} < 0\right)$$

      $$= P((X - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < 0)$$

      $$= P[(X - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}]$$

      $$P\left[-\frac{1}{2} < X - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\right]$$

      $$\rightarrow P\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} < X - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = P[0 < X < 1]$$

    - Oleh karena itu $P\left(X > X^2\right) = P\left(O < X < 1\right)$ Jadi jika $a > 1$, maka didapatkan :

      $$P\left(X > X^2\right) = P\left(0 < X < 1\right)$$

      $$= \int_0^1 f(x)\, dx$$

      $$= \int_0^1 \frac{1}{a}\, dx$$

      $$= \frac{1}{a}\int_0^1 1\, dx$$

$$=\frac{1}{a}[x]_0^1$$

$$=\frac{1}{a}$$

- Dan jika, $a \le 1$; *maka* :

$$P\left(X > X^2\right) = P\left(0 < X < 1\right)$$

$$= \int_0^1 F\left(x\right) dx$$

$$= \int_0^a F\left(x\right) dx + \int_a^1 F\left(X\right) dx$$

$$= \int_0^a \frac{1}{a} dx + \int_a^1 F\left(x\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{a} + 0 \left[\therefore a \le 1, dan\, f\left(x\right) adalah\, valid\, dalam \left[0, a\right]\right]$$

$$=\frac{1}{a}[x]_1^a$$

$$=\frac{a}{a}$$

$$=1$$

Oleh karena itu, $X > X^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & jika\;\; a > 1 \\ 1 & jika\, a \le 1 \end{cases}$

14. Jika variabel acak Y memiliki distribusi chi-kuadrat dengan 54 derajat kebebasan, lalu berapa perkiraan persentil ke -84 dari Y ?

    Jawab :

    Dari distribusi chi kuadrat; untuk 54 derajat kebebasan dan persentil ke-84; nilai kritis $X^2 = 64.2639$

15. Misalkan X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & ,untuk\, 1 < x < 2 \\ 0\;, & untuk\; yang\; lain \end{cases}$$

Penyelesaian :

Misalkan $y = \sqrt{x}$

$$x = y^2$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

Jika kisaran y

$$x = 1 \ maka \ y = \sqrt{1}$$

$$x = 2 \ maka \ y = \sqrt{2}$$

PDF dari y diberikan oleh

$$h(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad X = g^{-1}(y)$$

$g(x)$ sangat monotonik itu terbalik

$$h(y) = \frac{2}{y^4}, |2y|$$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{4}{y^3} & untuk\, 1 < y < \sqrt{2} \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

16. Jika X normal dengan mean 0 dan varians 4, maka berapakah probabilitasnya dari kejadian $X - \frac{4}{X} \geq 0$, yaitu $\left(X - \frac{4}{X} \geq 0\right)$?

Jawab :

$$N \sim (0,4)$$

$$\mu = 0 \ , \sigma^2 = 4 \quad , \quad \sigma = 2$$

$$P\left(X - \frac{4}{X} \geq 0\right) = P\left(\frac{X^2 - 4}{X} \geq 0\right)$$

$$= P\left(X^2 - 4 \geq 0\right)$$

$$= P\left(X^2 \geq 4\right)$$

$$= P(X \geq 2)$$

$$= 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-4}{\sigma} < \frac{2-0}{2}\right)$$

$$= 1 - P(Z < 1)$$

$$= 1 - [0,5]$$

$$= 0,5$$

17. Jika waktu tunggu di drive-in-window Rally didistribusikan secara normal dengan mean 13 menit dan standar deviasi 2 menit, lalu berapa persentasenya pelanggan menunggu lebih lama dari 10 menit tetapi kurang dari 15 menit?

    Jawab :

    Diberikan $\mu = 13$ dan $\sigma = 2$

    $$P(10 < x < 15) = P(x < 15) - P(x < 10)$$

    $$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{15-13}{2}\right) - P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{10-13}{2}\right)$$

    $$= P(Z < 1.00) - P(Z < -1.50)$$

    $$= 0.8413 - 0.0668 \quad \text{(menggunakan tabel distribusi normal)}$$

    $$= 0.7745$$

18. Jika X adalah distribusi seragam pada interval dari -5 sampai 5,berapa probabilitas bahwa persamaan kuadrat $100t^2 + 20tX + 2X + 3 = 0$ memiliki solusi kompleks?

    Jawab :

    untuk persamaan kuadrat diatas memiliki solusi kompleks:

    $$b^2 - 4ac < 0$$

    $$(20X)^2 - 4 \square 100 \square (2X+3) < 0$$

    $$X^2 - 2X - 3 < 0$$

$$(X+1)(X-3)<0$$

Maka probabilitasnya

$$P\left((X+1)>0 \wedge \ (X-3)<0\right)+P\left((X+1)<0 \ \wedge \ (X-3)>0\right)$$

$$=P(X>-1 \ \wedge \ X<3)+P(X<-1 \ \wedge \ X>3)$$

$$=\frac{(5-(-1))}{10}*\frac{(3-(-5))}{10}+\frac{(-1-(-5))}{10}*\frac{(5-3)}{10}$$

$$=0,6*0,8+0,4*0,2=0,56$$

19. Jika variabel random $X \sim Exp(\theta)$,lalu berapa fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random $Y=X\sqrt{X}$?

 Jawab :

$$X \sim Exp(\theta)$$

 Jadi

$$F_x(x)=\frac{1}{\theta} \cdot e^{\frac{x}{\theta}}$$

$$Y=g(x)=X^{\frac{3}{2}}$$

$$g^{-1}(x)=Y^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d}{dy}\left|g^{-1}\right|=\frac{d}{dy}\left(Y^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}Y^{-\frac{1}{3}}$$

 Jadi

$$f_y(y)=\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \cdot f_x\left(g^{-1}(y)\right)$$

$$=\left|\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\right| \cdot \left[\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\theta}}\right]$$

$$f_y(y) = \frac{2}{3\theta} y^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\theta}}$$

20. Jika variabel random $X \sim N(0,1)$, lalu berapa fungsi kepadatan probabilitasnya fungsi dari variabel random $Y = \sqrt{|X|}$

    Jawab :

    Diberikan $X \sim N(0,1)$ dan $Y = \sqrt{|X|}$

    PDF dari X

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2x}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu = 0, \sigma^2 = 1 \rightarrow \sigma = \pm 1$$

PDF dari X adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2x}} e^{-\frac{(x)^2}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Misalkan $f_x \, dan \, f_y$ adalah mendefinisikan PDF masing-masing dari $F_x \, dan \, F_y$ adalah CDF masing-masing.))

CDF dari Y saat $y < 0 = 0$

CDF dari Y saat $y \geq 0 = 0$

$$F_y(y) = P(Y \leq y)$$

$$= P\left(\sqrt{X} \leq y\right)$$

$$= P\left(-y^2 \leq X \leq y^2\right)$$

$$= P\left(X \leq y^2\right) - P\left(X < -y^2\right)$$

$$= F_x\left(y^2\right) - F_x\left(-Y^2\right)$$

Oleh karena itu

$$f_y(y) = \begin{cases} F_x\left(y^2\right) - F_x\left(-y^2\right) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Menurunkan CDF y untuk mendapatkan PDF

$$f_y(y) = F_x(y^2)2y + F_x(-y^2)2y$$

$$= 2f_x(y^2) \square 2y$$

Karena $f_x(y^2) = f_x(-y^2)$ *ketika* $X \sim N(0,1)$

Jadi

$$f(x) = \begin{cases} 2f_x(y^2) \square 2y & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad \text{atau} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2y}}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^4}{2}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

21. Jika variabel random $X \sim\wedge(\mu, \sigma^2)$,lalu berapa fungsi kepadatan probablitas dari variabel random $\ln(X)$?

    Jawab :

$$X \sim\wedge \frac{n!}{r!(n-r)!}(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$Y = In(X)$$

$$P(Y = y) = P(In(X)) = y$$

$$P(Y = y) = P(X = e^y)$$

$$P(Y = y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(e^y - \mu)^2}$$

BAB VII

DUA VARIABEL ACAK

Ada banyak eksperimen acak yang melibatkan lebih dari satu variabel acak. Misalnya, seorang pendidik dapat mempelajari perilaku bersama dari kelas dan waktu yang dihabiskan untuk belajar; seorang dokter dapat mempelajari perilaku sendi dari tekanan darah dan berat badan. Demikian pula seorang economist dapat mempelajari perilaku gabungan volume dan laba bisnis. Faktanya, sebagian besar masalah nyata yang kita temui akan memiliki lebih dari satu variabel acak yang mendasarinya

7.1 Variabel Acak Bivariat Diskrit

Dalam Bab ini, kita akan mempelajari terkait dengan Dua Variabel Acak Diskrit.

Definisi 7.1.

Variabel acak bivariat diskrit (X,Y) adalah pasangan berurutan dari variabel acak diskrit.

Definisi 7.2.

Misalkan (X,Y) adalah variabel acak bivariat dan misalkan R_X dan R_Y adalah rentang ruang masing-masing X dan Y. Fungsi bernilai real $f: R_X \times R_Y \to \mathbb{R}$ disebut fungsi kepadatan probabilitas gabungan untuk X dan Y jika dan hanya jika

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

untuk semua $(x,y) \in R_X \times R_Y$. Disini, kejadian $(X = x, Y = y)$ berarti irisan kejadian $(X = x)$ *dan* $(Y = y)$, yaitu

$$(X = x) \cap (Y = y)$$

Contoh 7.1.

a. Lempar dua dadu. Misalkan X menjadi nilai pada dadu pertama dan misalkan Y menjadi nilai pada dadu kedua. Kemudian X dan Y bernilai 1 sampai 6 dan fungsi kepadatan probabilitas gabungan adalah $P(i,j) = \frac{1}{36}$ untuk semua i dan j antara 1 dan 6. Berikut adalah tabel probabilitas gabungan :

   Jawab:

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

b. Lempar dua dadu. Misalkan X adalah nilai pada dadu pertama dan misalkan T menjadi total pada kedua dadu. Berikut adalah tabel probabilitas gabungan :

$X\backslash T$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Contoh 7.2. Sekelompok 9 eksekutif dari perusahaan tertentu termasuk 4 orang sudah menikah, 3 yang tidak pernah menikah, dan 2 yang sudah bercerai. Tiga dari eksekutif harus dipilih untuk promosi. Misalkan X menunjukkan jumlah eksekutif yang menikah dan Y jumlah eksekutif tidak pernah menikah di antara 3 yang dipilih untuk promosi. Dengan asumsi bahwa ketiganya dipilih secara acak dari sembilan yang tersedia, berapa fungsi kepadatan probabilitas gabungan dari variabel acak X dan Y?

Jawab :

Banyaknya cara kita dapat memilih 3 dari 9 adalah $\binom{9}{3}$ yaitu 84.

Jadi

$$f(0,0) = P(X=0, Y=0) = \frac{0}{84} = 0$$

$$f(1,0) = P(X=1, Y=0) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{84} = \frac{4}{84}$$

$$f(2,0) = P(X=2, Y=0) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{84} = \frac{12}{84}$$

$$f(3,0) = P(X=3, Y=0) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}\binom{2}{0}}{84} = \frac{4}{84}$$

Demikian pula, kita dapat menemukan probabilitas lainnya. Tabel berikut memberikan informasi lengkap tentang probabilitas tersebut.

3	$\frac{1}{84}$	0	0	0
2	$\frac{6}{84}$	$\frac{12}{84}$	0	0
1	$\frac{3}{84}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{18}{84}$	0
0	0	$\frac{4}{84}$	$\frac{12}{84}$	0
	0	1	2	3

Definisi 7.3.

Misalkan (X,Y) adalah variabel acak bivariat diskrit. Misalkan R_X dan R_Y masing-masing adalah rentang ruang dari X dan Y. Misalkan $f(x,y)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas gabungan dari X dan Y. Fungsinya

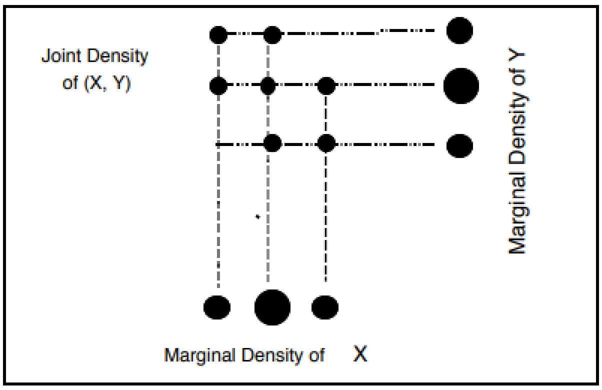
$$f_1(x) = \sum_{y \in R_y} f(x,y)$$

disebut fungsi kepadatan probabilitas marjinal dari X. Demikian pula, fungsinya

$$f_2(x) = \sum_{x \in R_x} f(x,y)$$

disebut fungsi kepadatan probabilitas marjinal dari Y.

Diagram berikut menggambarkan konsep marginal secara grafis.



Contoh 7.3. Jika fungsi kepadatan probabilitas gabungan dari variabel acak diskrit dan diberikan oleh

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{36} & jika\ 1\le x=y\le 6\\ \dfrac{2}{36} & jika\ 1\le x=y\le 6\\ 0 & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

lalu berapa margin dari X dan Y?

Jawab :

Marginal X dapat diperoleh dengan menjumlahkan fungsi kepadatan probabilitas gabungan $f(x,y)$ untuk semua nilai y dalam ruang rentang R_Y dari variabel acak Y. Itu adalah

$$f_1(x)=\sum_{y\in R_y} f(x,y)$$

$$=\sum_{y=1}^{6} f(x,y)$$

$$=f(x,x)+\sum_{y>x} f(x,y)+\sum_{y<x} f(x,y)$$

$$=\frac{1}{36}+(6-x)\frac{2}{36}+0$$

$$=\frac{1}{36}[13-2x]\ ,\qquad x=1,2,\ldots,6$$

Demikian pula, kita dapat memperoleh kepadatan probabilitas marginal Y dengan menjumlahkan semua nilai x dalam rentang ruang R_X dari variabel acak X. Oleh karena itu,

$$f_2(y)=\sum_{x\in Rx} f(x,y)$$

$$=\sum_{x=1}^{6} f(x,y)$$

$$=f(x,x)+\sum_{x<y} f(x,y)+\sum_{x>y} f(x,y)$$

$$=\frac{1}{36}+(y-1)\frac{2}{36}+0$$

$$=\frac{1}{36}[2y-1]\ ,\qquad x=1,2,\ldots,6$$

Contoh 7.4. Misalkan X dan Y adalah variabel acak diskrit dengan fungsi kepadatan probabilitas gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{21}(x+y) & \text{jika } x=1,2 \;; y=1,2,3\\ 0 & \text{untuk yang lainnya}\end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan probabilitas marginal dari X dan Y?

Jawab :

Marginal X diberikan oleh

$$f_1(x)=\sum_{y=1}^{3}\frac{1}{21}(x+y)$$

$$=\frac{1}{21}3x+\frac{1}{21}[1+2+3]$$

$$=\frac{x+2}{7}, \quad x=1,2$$

Demikian pula, marginal Y diberikan oleh

$$f_2(x)=\sum_{x=1}^{2}\frac{1}{21}(x+y)$$

$$=\frac{2y}{21}+\frac{3}{21}$$

$$=\frac{3+2y}{21}, \quad y=1,2,3$$

Dari contoh di atas, perhatikan bahwa marginal $f_1(x)$ diperoleh dengan menjumlahkan seluruh kolom. Demikian pula, marginal $f_2(y)$ diperoleh dengan menjumlahkan seluruh baris.

Teorema berikut mengikuti dari definisi probabilitas gabungan fungsi kepadatan.

Teorema 7.1. Nilai real fungsi f dari dua variabel adalah probabilitas gabungan fungsi densitas (kepadatan) dari sepasang variabel acak diskrit X dan Y (dengan range ruang sampel R_X dan R_Y, masing-masing) jika dan hanya jika

a. $f(x,y)\geq 0\,\forall(x,y)\in R_X\times R_Y$

b. $\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} f(x,y)=1$

Contoh 7.5. Untuk nilai konstanta k diberikan fungsi

$$f(x,y)=\begin{cases} k\,xy, & jika\; x=1,2,3;\, y=1,2,3 \\ 0, & untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

Fungsi kepadatan probabilitas gabungan dari beberapa variabel acak X dan Y adalah?

Jawab :

$$1=\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} f(x,y)$$

$$=\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} k\,xy$$

$$=k[1+2+3+2+4+6+3+6+9]$$

$$=36k$$

Karenanya

$$k=\frac{1}{36}$$

dan fungsi kepadatan yang sesuai diberikan oleh

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{36}xy, & jika\; x=1,2,3;\, y=1,2,3 \\ 0, & untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

Seperti dalam kasus satu variabel acak, ada banyak situasi dimana kita ingin mengetahui probabilitas bahwa nilai dari dua variabel acak kurang dari atau sama dengan beberapa bilangan real x dan y.

Definisi 7.4. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak diskrit. Fungsi bernilai real $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ disebut fungsi distribusi probabilitas kumulatif gabungan X dan Y jika dan hanya jika

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$$

untuk semua $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Di sini, kejadian $(X\le x, Y\le y)$ berarti $(X\le x)\cap(Y\le y)$.

Dari definisi ini dapat ditunjukkan bahwa untuk bilangan real a dan b $F(a\le X\le b, c\le Y\le d)=F(b,d)+F(a,c)-F(a,d)-F(b,c)$

Lebih jauh, kita juga dapat menunjukkannya

$$F(x,y) = \sum_{s \le x} \sum_{t \le y} f(s,t)$$

dimana (s,t) adalah sembarang pasangan bilangan nonnegatif.

7.2 Variabel Acak Bivariat Kontinu

Pada bagian ini, kita akan memperluas materi tentang fungsi kepadatan probabilitas dari satu variabel acak dengan dua variabel acak.

Definisi 7.5. Fungsi kepadatan probabilitas gabungan dari variabel acak X dan Y adalah fungsi integral $f(x,y)$ sedemikian sehingga

$$f(x,y) \ge 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$$

Contoh 7.6. Misalkan fungsi kepadatan gabungan X dan Y diberikan oleh

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,xy^2, & jika\, 0 < x < y < 1 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah nilai konstanta k?

Jawab :

Karena f adalah fungsi kepadatan probabilitas gabungan, kita punya

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k\,xy^2\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 ky^2 \int_0^1 x\, dx\, dy$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^1 y^4\, dy$$

$$= \frac{k}{10} \left[y^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{k}{10}$$

Karenanya

$$k = 10$$

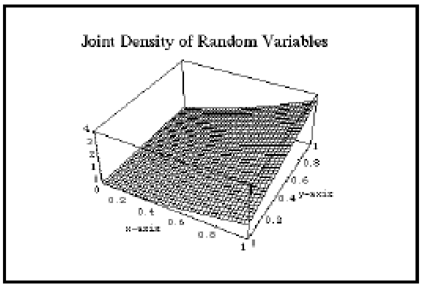
Jika kita mengetahui fungsi kepadatan probabilitas gabungan f dari variabel acak X dan Y, maka kita dapat menghitung probabilitas dari kejadian A

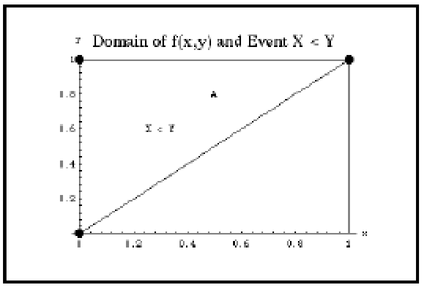
$$P(A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Contoh 7.7. Misalkan kepadatan gabungan dari variabel acak kontinu X dan Y adalah

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(x^2 + 2xy\right), & jika\, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapa probabilitas kejadian $(X \le Y)$?





Jawab :

Misalkan $A = (X \le Y)$. kita akan mencari

$$P(A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^y \frac{6}{5}\left(x^2 + 2xy\right) dx \right] dy$$

$$= \frac{6}{5} \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + x^2 y \right]_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= \frac{6}{5} \int_0^1 \frac{4}{3} y^3 dy$$

$$= \frac{2}{5} \left[y^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5}$$

Definisi 7.6. Misalkan (X,Y) adalah variabel acak bivariat kontinu. Misalkan $f(x,y)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas gabungan dari X dan Y. Fungsinya

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

disebut fungsi kepadatan probabilitas marginal dari X. Dengan demikian, fungsinya

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

disebut fungsi kepadatan probabilitas marginal dari Y.

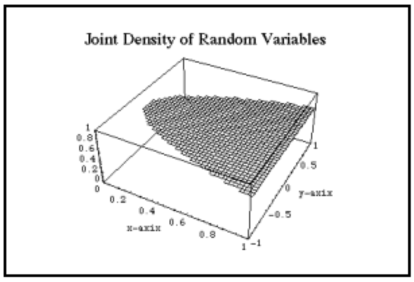
Contoh 7.8. Jika fungsi kepadatan gabungan untuk X dan Y diberikan oleh

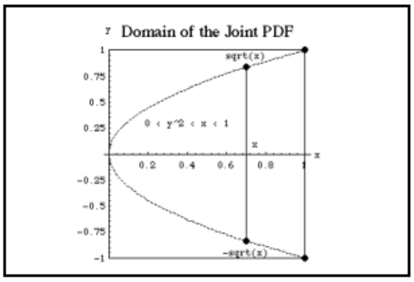
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \textit{untuk}\; 0 < y^2 < x < 1 \\ 0, & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

lalu berapa fungsi kepadatan marginal X, untuk $0 < x < 1$?

Jawab :

Domain f terdiri dari daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$ dan garis vertikal $x = 1$.



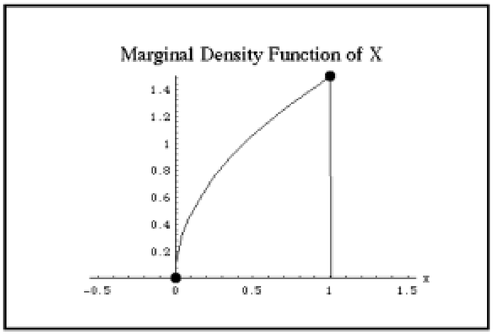


Karenanya

$$f_1(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{3}{4}\,dy$$

$$= \left[\frac{3}{4}y\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x}$$



Contoh 7.9. Misalkan X dan Y memiliki fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x-y}, & untuk\, 0<x\le y<\infty \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah densitas marginal X jika bukan nol?

Jawab :

Diketahui kepadatan marginal X diberikan oleh

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

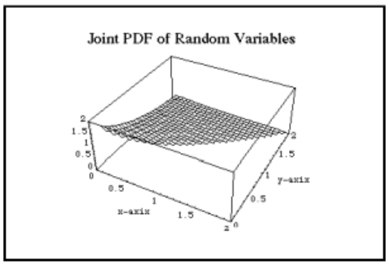
$$=\int_{x}^{\infty} 2e^{-x-y}\,dy$$

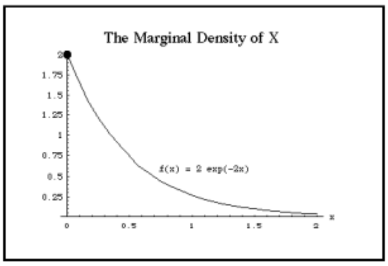
$$=2e^{-x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\,dy$$

$$=2e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_x^{\infty}$$

$$=2e^{-x}-e^{-x}$$

$$=2e^{-2x} \qquad 0<x<\infty$$





Contoh 7.10. Misalkan (X,Y) didistribusikan secara seragam pada cakram melingkar berpusat pada $(0,0)$ dengan jari-jari $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Berapakah fungsi kepadatan marginal X dimana bukan nol?

Jawab :

Persamaan lingkaran dengan jari-jari $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ dan pusatnya adalah $x^2 y^2 = \frac{4}{\pi}$ Oleh karena itu, menyelesaikan persamaan ini untuk y, kita dapatkan

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi} - x^2}$$

Jadi, kepadatan marginal X diberikan oleh

$$f\_1(x) = \int_{-\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}}^{\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}}^{\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}} \frac{1}{area\ of\ the\ circle}\,dy$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}}^{\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}} \frac{1}{4}\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{4}y\right]_{-\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}}^{\sqrt{\frac{4}{\pi}-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\pi} - x^2}$$

Definisi 7.7. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas gabungan $f(x,y)$. Fungsi distribusi kumulatif gabungan $F(x,y)$ dari X dan Y didefinisikan sebagai

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

untuk semua $(x,y) \in \mathsf{R}^2$

Dari teorema dasar kalkulus, kita dapatkan lagi

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial_x \partial_y}$$

Contoh 7.11. Jika fungsi distribusi kumulatif gabungan dari X dan Y adalah diberikan oleh

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^3y+3x^2y^2, & untuk\, 0<x,y<1\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

lalu berapa kepadatan gabungan X dan Y ?

Jawab :

$$f(x,y)=\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial_x}\frac{\partial}{\partial_y}\left(2x^3y+3x^2y^2\right)$$

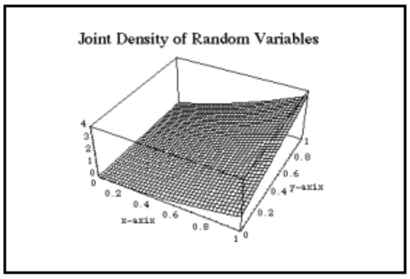
$$=\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial_x}\left(2x^3+6x^2y\right)$$

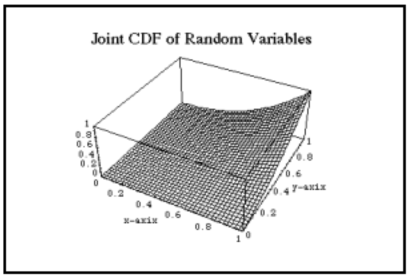
$$=\frac{1}{5}\left(6x^2+12xy\right)$$

$$=\frac{6}{5}\left(x^2+2xy\right)$$

Oleh karena itu, kepadatan gabungan X dan Y diberikan oleh

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}\left(x^2+2xy\right), & untuk\, 0<x,y<1\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$





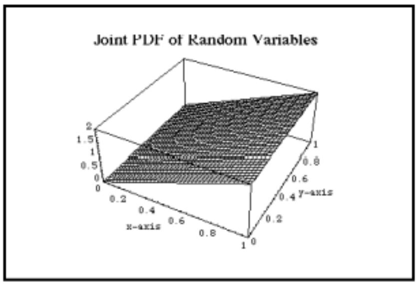
Contoh 7.12. Misalkan X dan Y memiliki fungsi kepadatan gabungan

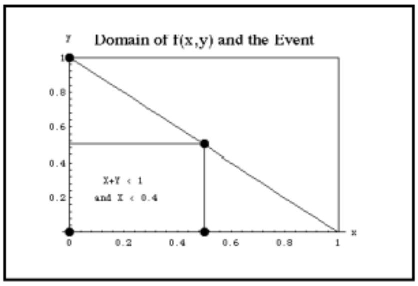
$$f(x,y)=\begin{cases}2x, & untuk\, 0<x<1\, ,0<y<1\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Berapakah $P\left(X+Y\le 1\,|\,X\le\frac{1}{2}\right)$

Jawab :

(Lihat diagram di bawah ini.)





$$P\left(X+Y\leq 1\,|\,X\leq\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left[(X+Y\leq 1)\cap\left(X\leq\frac{1}{2}\right)\right]}{P\left(X\leq\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx\right]dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\int_0^{1-y}2x\,dx\right]dy}{\int_0^1\left[\int_0^{\frac{1}{2}-y}2x\,dx\right]dy}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

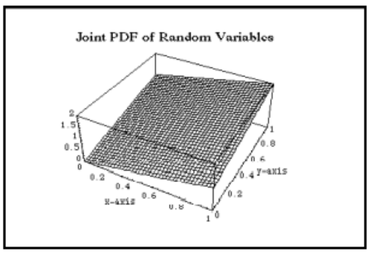
Contoh 7.13. Misalkan X dan Y memiliki fungsi kepadatan gabungan

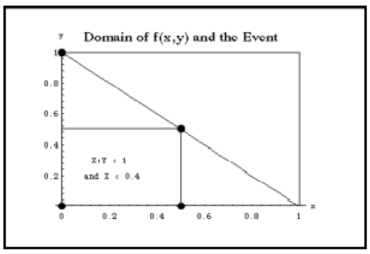
$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, \ untuk\ 0<x<1\ ,0<y<1 \\ 0, \ untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah $P(2X\leq 1|X+Y\leq 1)$?

Jawab :

Kita tahu bahwa





$$P(2X \leq 1 | X+Y \leq 1) = \frac{P\left[\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(X+Y \leq 1\right)\right]}{P\left(X+Y \leq 1\right)}$$

$$P\left(X+Y \leq 1\right) = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(x+y\right) dy\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{\left(1-x\right)^3}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Demikian pula

$$P\left[\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(X+Y \leq 1\right)\right] = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-x} \left(x+y\right) dy\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{\left(1-x\right)^3}{6}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{11}{48}$$

Jadi,

$$P(2X \leq 1 | X+Y \leq 1) = \left(\frac{11}{48}\right)\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{11}{16}$$

7.3 Distribusi Bersyarat

Pertama, kita definisikan distribusi bersyarat menggunakan variabel acak diskrit dan kemudian berdasarkan definisi ini kita berikan secara umum definisi distribusi bersyarat. Misalkan X dan Y adalah dua acak diskrit variabel dengan kepadatan probabilitas gabungan $f\left(x,y\right)$. Kemudian menurut definisi kepadatan probabilitas gabungan, kita dapatkan

$$f\left(x,y\right) = P\left(X=x, Y=y\right).$$

Jika $A = \left\{X = x\right\}, B = \left\{Y = y\right\} dan\, f_2\left(y\right) = P\left(Y = y\right)$, lalu dari persamaan di atas kita dapatkan

$$P(\{X=x\}\,|\{Y=y\}) = P\,(A\,|B)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(\{X=x\}\,dan\,\{Y=y\})}{P(\{Y=y\})}$$

Jika kita menuliskan $P(\{X=x\}\,|\{Y=y\})$ sebagai $g(x|y)$, maka kita dapatkan

$$g(x\,|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Untuk variabel acak bivariat diskrit, kita dapat menulis probabilitas bersyarat dari suatu kejadian $\{X=x\}$ diberikan kejadian $\{Y=y\}$ sebagai rasio kemungkinan kejadian $\{X=x\} \cap \{Y=y\}$ dengan probabilitas kejadian $\{Y=y\}$ yang mana

$$g(x\,|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Kita menggunakan fakta ini untuk mendefinisikan fungsi kepadatan probabilitas bersyarat yang diberikan dua variabel acak X dan Y.

Definisi 7.8.

Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak dengan kepadatan gabungan $f(x,y)$ dan margin $f_1(x)$ dan $f_2(y)$. Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat g dari X, dengan syarat (kejadian) $Y=y$, didefinisikan sebagai

$$g(x\,|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad f_2(y) > 0$$

Demikian pula, fungsi kepadatan probabilitas bersyarat h dari Y, dengan syarat (kejadian) $X=x$, didefinisikan sebagai

$$h(y\,|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \qquad f_1(x) > 0$$

Contoh 7.14.

Misalkan X dan Y adalah variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{21}(x+y), & untuk\; x = 1,2,3;\; y = 1,2 \\ 0, & untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan probabilitas bersyarat dari X, dengan syarat $Y=2$?

Jawab :

Kita akan mencari

$$g(x\,|2)=\frac{f(x,2)}{f_2(2)}$$

Pertama-tama kita harus menghitung marginal dari Y, yaitu $f_2(2)$. Marginal dari Y diberikan oleh

$$f_2(2)=\sum_{x=1}^{3}\frac{1}{21}(x+y)$$

$$=\frac{1}{21}(6+3y)$$

Karenanya $f_2(2)=\frac{12}{21}$. Jadi, fungsi kepadatan probabilitas bersyarat dari X, dengan syarat $Y=2$, adalah

$$g(x\,|2)=\frac{f(x,2)}{f_2(2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{21}(x+2)}{\frac{12}{21}}$$

$$=\frac{1}{12}(x+2),\qquad x=1,2,3$$

Contoh 7.15. Misalkan X dan Y adalah variabel acak diskrit dengan fungsi kepadatan probabilitas gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{32}, & \textit{untuk } x=1,2;\, y=1,2,3,4\\ 0, & \textit{untuk yang lainnya}\end{cases}$$

Berapakah probabilitas bersyarat dari Y dengan syarat $X=x$?

Jawab :

$$f_1(x)=\sum_{y=1}^{4}f(x,y)$$

$$= \frac{1}{32} \sum_{y=1}^{4} (x + y)$$

$$= \frac{1}{32} (4x + 10)$$

Karena itu

$$h(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{32}(x + y)}{\frac{1}{32}(4x + 10)}$$

$$= \frac{x + y}{4x + 10}$$

Jadi, probabilitas bersyarat Y dengan syarat $X = x$ adalah

$$h(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{4x + 10}, & untuk\ x = 1, 2;\ y = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

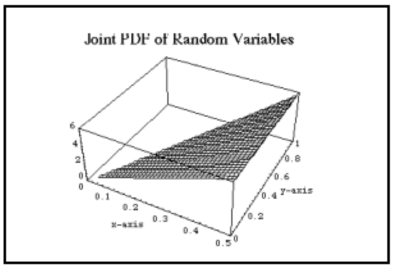
Contoh 7.16. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan PDF bersama

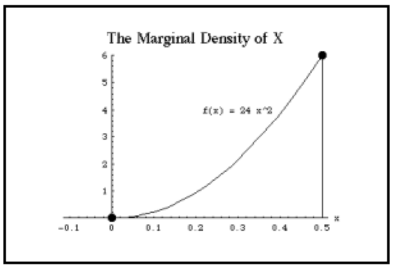
$$f(x, y) = \begin{cases} 12x, & untuk\ 0 < y < 2x < 1 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan bersyarat dari Y dengan syarat $X = x$?

Jawab :

Pertama, kita temukan marginal dari X





$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^{2x} 12x\,dy$$

$$= 24x^2$$

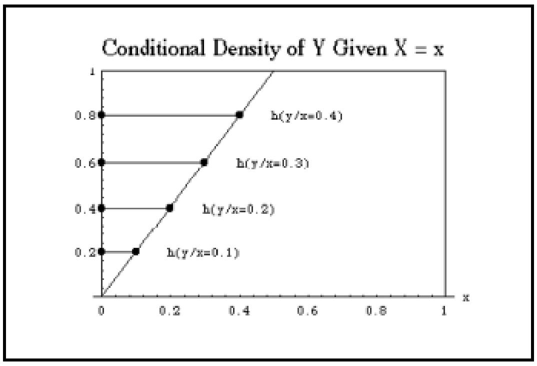
Jadi, kepadatan bersyarat dari Y dengan syarat $X = x$ adalah

$$h(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

$$= \frac{12x}{24x^2}$$

$$= \frac{1}{2x}$$

untuk $0 < y < 2x < 1$ *dan* 0 *untuk yang lainnya*



Contoh 7.17. Misalkan X dan Y adalah variabel acak sehingga X memiliki fungsi kepadatan

$$f_1(x) = \begin{cases} 24x^2, & untuk\, 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

dan Kepadatan bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah

$$h(y \mid x) = \begin{cases} \frac{y}{2x^2}, & untuk\, 0 < y < 2x \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapa kepadatan bersyarat X yang diberikan $Y = y$ di atas domain yang sesuai?

Jawab :

Kepadatan gabungan $f(x,y)$ dari X dan Y diberikan oleh

$$f(x,y) = h(y|x) f_1(x)$$

$$= \frac{y}{2x^2} 24x^2$$

$$= 12y \quad untuk\ 0 < y < 2x < 1$$

Kepadatan marginal Y diberikan oleh

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} 12y\,dx$$

$$= 6y(1-y), \qquad untuk\ 0 < y < 1$$

Oleh karena itu, kepadatan bersyarat dari X yang diberikan $Y = y$ adalah

$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$= \frac{12y}{6y(1-y)}$$

$$= \frac{2}{1-y}$$

Jadi, kepadatan bersyarat dari X yang diberikan $Y = y$ diberikan oleh

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-y}, & untuk\ 0 < y < 2x < 1 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk x tertentu, fungsi $f(x,y)$ adalah irisan permukaan $z = f(x,y)$ dengan bidang $x =$ konstanta. Kepadatan bersyarat $f(y|x)$, adalah profil $f(x,y)$ dinormalisasi oleh faktor $\frac{1}{f_1(x)}$.

7.4 Independensi Variabel Acak

Pada bagian ini, kita mendefinisikan konsep independensi stokastik dari dua variabel acak X dan Y. Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat g dari X yang diberikan $Y = y$ biasanya bergantung pada y. Jika g independen dengan y, maka variabel acak X dan Y dikatakan independen. Ini menjelaskan definisi berikut.

Definisi 7.9.

Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak dengan kepadatan gabungan $f(x,y)$ dan margin $f_1(x)$ dan $f_2(y)$. Variabel acak X dan Y (secara stokastik) independen jika dan hanya jika

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

Untuk semua $(x,y) \in R_X \times R_Y$.

Contoh 7.18. Misalkan X dan Y adalah variabel acak diskrit dengan kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{36}, & untuk\, 1 \le x = y \le 6 \\ \dfrac{1}{36}, & untuk\, 1 \le x < y \le 6 \end{cases}$$

Apakah X dan Y independen secara stokastik?

Jawab :

Margin X dan Y diberikan oleh

$$f_1(x) = \sum_{y=1}^{6} f(x,y)$$

$$= f(x,x) + \sum_{y>x} f(x,y) + \sum_{y<x} f(x,y)$$

$$= \frac{1}{36} + (6-x)\frac{2}{36} + 0$$

$$= \frac{13-2x}{36}, \qquad untuk\; x = 1,2,\ldots,6$$

Dan

$$f_2(y) = \sum_{x=1}^{6} f(x,y)$$

$$= f(y,y) + \sum_{x<y} f(x,y) + \sum_{x>y} f(x,y)$$

$$= \frac{1}{36} + (y-1)\frac{2}{36} + 0$$

$$= \frac{2y-1}{36}, \qquad untuk\; y = 1,2,\ldots,6$$

Karena

$$f(1,1)=\frac{1}{36}\neq\frac{11}{36}\frac{1}{36}=f_1(1)f_2(2)$$

kita menyimpulkan bahwa $f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$, dan X dan Y tidak independen.

Contoh ini juga menggambarkan bahwa margin X dan Y dapat ditentukan jika kita mengetahui kepadatan gabungan $f(x,y)$. Namun, jika ada yang mengetahui margin X dan Y, maka tidak mungkin untuk menemukan kepadatan gabungan X dan Y kecuali variabel acak adalah independen.

Contoh 7.19. Misalkan X dan Y memiliki kepadatan sambungan

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & untuk\, 0<x,y<\infty \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Apakah X dan Y independen secara stokastik?

Jawab :

Margin X dan Y diberikan oleh

$$f_1(x)=\int_0^\infty f(x,y)\,dy=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}$$

Dan

$$f_2(y)=\int_0^\infty f(x,y)\,dx=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$$

Karenanya

$$f(x,y)=e^{-(x+y)}=e^{-x}e^{-y}=f_1(x)f_2(y)$$

Jadi, X dan Y tidak bergantung secara stokastik.

Perhatikan bahwa jika kepadatan gabungan $f(x,y)$ dari X dan Y dapat difaktorkan menjadi dua fungsi nonnegatif, satu hanya bergantung pada x dan yang lainnya semata-mata tergantung y, maka X dan Y adalah independen. Kita bisa menggunakan pendekatan faktorisasi ini untuk memprediksi kapan X dan Y tidak independen.

Contoh 7.20. Misalkan X dan Y memiliki kepadatan gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & untuk\, 0<x<1; 0<y<1 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Apakah X dan Y independen secara stokastik?

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$f(x,y) = x + y$$
$$= x\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

Jadi, kepadatan gabungan tidak dapat difaktorkan menjadi dua fungsi non-negative satu bergantung pada x dan yang lainnya bergantung pada y; dan karena itu X dan Y tidak independen.

Jika X dan Y independen, maka variabel random $U = \phi(X)$ dan $V = \psi(Y)$ juga independen. Di sini $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah beberapa I bernilai real fungsi. Dari komentar ini, dapat disimpulkan bahwa jika X dan Y independen, maka variabel acak e^X dan $Y^3 + Y^2 + 1$ juga independen.

Definisi 7.10. Variabel acak X dan Y dikatakan independen dan didistribusikan secara identik jika dan hanya jika X dan Y independen dan memiliki distribusi yang sama.

Contoh 7.21. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak independen dengan fungsi kepadatan probabilitas identik yang diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & untuk\, x > 0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan probabilitas $W = min\{X,Y\}$?

Jawab :

Misalkan $G(w)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari W. lalu

$$G(w) = P(W \le w)$$
$$= 1 - P(W > w)$$
$$= 1 - P(min\{x,y\} > w)$$
$$= 1 - P(X > w\, dan\, Y > w)$$
$$= 1 - P(X > w)P(Y > w) \quad \text{(karena } X \text{ dan } Y \text{ adalah independen)}$$
$$= 1 - \left(\int_0^\infty e^{-x} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y} dy\right)$$

$$=1-\left(e^{-w}\right)^2$$

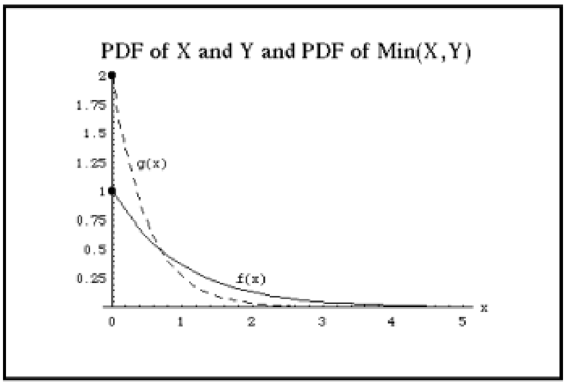
$$=1-e^{-2w}$$

Jadi, fungsi kepadatan probabilitas W adalah

$$g(w)=\frac{d}{dw}G(w)=\frac{d}{dw}\left(1-e^{-2w}\right)=2e^{-2w}$$

Karenanya

$$g(w)=\begin{cases}2e^{-2w}, & untuk\; w>0\\ 0, & untuk\; yang\; lainnya\end{cases}$$



Latihan Soal

1. Misalkan X dan Y adalah variabel acak diskrit dengan fungsi kepadatan probabilitas gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{21}(x+y), & untuk\; x=1,2,3;\; y=1,2\\ 0, & untuk\; yang\; lainnya\end{cases}$$

Berapa margin dari X dan Y?

Jawab :

Formula untuk margin gabungan

$$f(x)=\sum_y f(x,y)$$

Margin gabungan x

$$f_1(x) = \sum_{y} \frac{x+y}{21}$$

$$= \sum_{1,2} \frac{x+y}{21}$$

$$= \frac{1}{21}(2x+1+2)$$

$$= \frac{2x+3}{21}$$

Untuk x

$$Px(1) = \frac{2(1)+3}{21} = \frac{5}{21}$$

$$Px(2) = \frac{2(2)+3}{21} = \frac{7}{21}$$

$$Px(3) = \frac{2(3)+3}{21} = \frac{9}{21}$$

Margin gabungan y

$$f_2(y) = \sum_{x} \frac{x+y}{21}$$

$$= \sum_{1,2,3} \frac{x+y}{21}$$

$$= \frac{1}{21}(3y+1+2+3)$$

$$= \frac{3y+6}{21}$$

Untuk y

$$Py(1) = \frac{3(1)+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$Py(2) = \frac{3(2)+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

2. Lempar sepasang dadu yang tidak bias. Misalkan adalah maksimum dari dua sisi dan adalah jumlah dari dua sisi. Berapa kepadatan gabungan dan ?

Jawab :

ketika dua dadu dilempar, kemungkinan hasilnya adalah

$$\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

x menunjukkan maksimal dua sisi

y menunjukkan jumlah dari dua sisi

nilai yang mungkin dari x :$1,2,3,4,5,6$

nilai yang mungkin dari y :$2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$

$$p(x=1, y=2) = p\{\textit{mendapatkan kejadian tersebut } (1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$p(x=1, y=3) = p\{\phi\} = 0$$

$$p(x=1, y=4) = 0$$

$$\vdots$$

$$p(x=1, y=12) = 0$$

$$p(x=1, y=j) = 0 \;\; \textit{untuk } j = 3,4,\ldots,12$$

$$p(x=2, y=2) = 0$$

$$p(x=2, y=3) = p\left(\textit{mendapatkan } (1,2) \textit{ atau } (2,1)\right) = \frac{2}{36}$$

$$p(x=2, y=4) = p\left(\textit{mendapatkan } (2,2)\right) = \frac{1}{36}$$

$$p(x=2, y=j) = 0 \;\; \textit{untuk } j = 5,6,\ldots,12$$

$$p(x=3, y=2) = 0$$

$$p\left(x=3, y=3\right)=0$$

$$p\left(x=3, y=4\right)=p\left(mendapatkan\left(1,3\right)atau\left(3,1\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=3, y=5\right)=p\left(mendapatkan\left(2,3\right)atau\left(3,2\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=3, y=6\right)=p\left(mendapatkan\left(3,3\right)\right)=\frac{1}{36}$$

$$p\left(x=3, y=j\right)=0 \;\; untuk\; j=7,8,\ldots,12$$

$$p\left(x=4, y=j\right)=0 \;\; untuk\; j=2,3,4$$

$$p\left(x=4, y=5\right)=p\left(mendapatkan\left(4,1\right)atau\left(1,4\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=4, y=6\right)=p\left(mendapatkan\left(2,4\right)atau\left(4,2\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=4, y=7\right)=p\left(mendapatkan\left(3,4\right)atau\left(4,3\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=4, y=8\right)=p\left(mendapatkan\left(4,4\right)\right)=\frac{1}{36}$$

$$p\left(x=4, y=j\right)=0 \;\; untuk\; j=4,10,11,12$$

$$p\left(x=5, y=j\right)=0 \;\; untuk\; j=2,3,4,5$$

$$p\left(x=5, y=6\right)=p\left(mendapatkan\left(1,5\right)atau\left(5,1\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=5, y=7\right)=p\left(mendapatkan\left(2,5\right)atau\left(5,2\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=5, y=8\right)=p\left(mendapatkan\left(3,5\right)atau\left(5,3\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=5, y=9\right)=p\left(mendapatkan\left(4,5\right)atau\left(5,4\right)\right)=\frac{2}{36}$$

$$p\left(x=5, y=10\right)=p\left(mendapatkan\left(5,5\right)\right)=\frac{1}{36}$$

$$p(x=5, y=11) = p(x=5, y=12) = 0$$

$$p(x=6, y=j) = 0 \quad untuk\ j = 2,3,4,5,6$$

$$p(x=6, y=7) = p\left(mendapatkan(1,6)\,atau\,(6,1)\right) = \frac{2}{36}$$

$$p(x=6, y=8) = p\left(mendapatkan(2,6)\,atau\,(6,2)\right) = \frac{2}{36}$$

$$p(x=6, y=9) = p\left(mendapatkan(3,6)\,atau\,(6,3)\right) = \frac{2}{36}$$

$$p(x=6, y=10) = p\left(mendapatkan(4,6)\,atau\,(6,4)\right) = \frac{2}{36}$$

$$p(x=6, y=11) = p\left(mendapatkan(5,6)\,atau\,(6,5)\right) = \frac{2}{36}$$

$$p(x=6, y=12) = p\left(mendapatkan(6,6)\right) = \frac{1}{36}$$

kepadatan gabungan x dan y diringkas dalam tabel di bawah ini

y \ x	1	2	3	4	5	6
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
3	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
4	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0
5	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0
6	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
7	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
8	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
9	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

10	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
11	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & untuk\, 1 < x < y = 2x < 12 \\ \frac{2}{36} & untuk\, 1 < x < y < 2x < 12 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

3. Berapakah nilai dari c jika diberikan fungsi bernilai real

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+2y), & untuk\ x = 1,2;\ y = 1,2 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

kepadatan gabungan untuk beberapa variable acak X dan Y?

Jawab :

Kita punya

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+2y), \ untuk\ x = 1,2;\ y = 1,2 \\ 0,\ untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

$$\sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{2} f(x,y) = 1$$

$$\sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{2} c(x+2y) = 1$$

$$c\sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{2} (x+2y) = 1$$

$$c\sum_{y=1}^{2}\left[(1+2y)+(2+2y)\right] = 1$$

$$c\sum_{y=1}^{2}[4y+3]=1$$

$$c\left[\left(4(1)+3\right)+\left(4(2)+3\right)\right]=1$$

$$c\left[(4+3)+(8+3)\right]=1$$

$$c[7+11]=1$$

$$18c=1$$

$$c=\frac{1}{18}$$

4. Misalkan X dan Y memiliki kepadatan gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & untuk\, 0 \le x, y < \infty \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah $P(X \ge Y \ge 2)$?

Jawab :

Disini kita punya

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, \ untuk\, 0 \le x, y < \infty \\ 0, \ untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

$$P(X \ge Y \ge 2)=\int_2^\infty\int_y^\infty e^{-(x+y)}dx\,dy$$

$$=\int_2^\infty\left[-e^{-y}e^{-x}\right]_y^\infty dy$$

$$=\int_2^\infty\left[e^{-2y}\right]dy$$

$$=\left[-e^{-2y}\right]_2^\infty$$

$$=\frac{e^{-4}}{2}$$

$$=0,0092$$

5. Misalkan Y memiliki distribusi seragam pada interval $(0,1)$, dan misalkan kepadatan bersyarat dari X diberikan $Y=y$ seragam pada interval dari 0 sampai $\sqrt{y}$. Berapa kepadatan

marginal X untuk $0 < x < 1$?

Jawab :

$$X \mid Y = y \sim UNIF\left(0, \sqrt{y}\right)$$

Kemudian

$$f\left(x, y\right) = f\left(x|y\right).f\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{y}}.1 = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow f\left(x, y\right) = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Dengan jarak $x\, dan\, y$ yaitu $0 < x < \sqrt{y} < 1$

Marginal dari fungsi X adalah

$$f\left(x\right) = \int_{x^2}^{1} f\left(x, y\right) dy = \int_{x^2}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$\Rightarrow f\left(x\right) = \int_{x^2}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$\Rightarrow f\left(x\right) = \left[\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}\right]_{x^2}^{1}$$

$$\Rightarrow f\left(x\right) = \left[\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]_{x^2}^{1}$$

$$\Rightarrow f\left(x\right) = \left[2y^{\frac{1}{2}}\right]_{x^2}^{1}$$

Jadi ,

$$\Rightarrow f\left(x\right) = 2\left(1 - x\right), 0 < x < 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & untuk\, 0 < x < 1 \\ 0 & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

6. Jika distribusi kumulatif gabungan dari variabel acak dan dan adalah

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right) & untuk\, x > 0, y > 0 \\ 0 & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

Berapa fungsi kepadatan probabilitas gabungan dari variabel acak X dan Y, dan Berapakah $P(1 < X < 3,\quad 1 < Y < 2)$?

Jawab :

Fungsi kepadatan probabilitas dari (x, y) diberikan

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left\{e^{-x}\left(1-e^{-y}\right)\right\}$$

$$= e^{-x}e^{-y}$$

$$= e^{-(x+y)} \quad ,x > 0, y > 0$$

Kemudian

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & untuk\, x > 0, y > 0 \\ 0, & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

$$P(1 < x < 3,\, 1 < y < 2) = \int_{x=1}^{3}\int_{y=1}^{2} e^{-(x+y)}$$

$$= \int_{x=1}^{3} e^{-x}\left\{-e^{-x}\,|_1^2\right\}dx = \left(e^{-1} - e^{-2}\right)\int_{1}^{3} e^{-x}dx$$

$$= \left(e^{-1} - e^{-2}\right)\left(e^{-1} - e^{-3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}\right)$$

$$= \frac{(e-1)(e^2-1)}{e^2 e^3}$$

$$= \frac{(e^2-1)(e-1)}{e^5}$$

7. Jika variabel acak X dan Y memiliki kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}x, & untuk\, 1 \le x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

Berapakah probabilitas $P(Y \ge X^2)$?

Jawab :

$$P(Y \ge X^2) = \int_{\frac{3.\sqrt{5}}{2}}^{1} \int_{1-y}^{\sqrt{y}} \frac{6}{7} x\, dxdy + \int_{1}^{2} \int_{0}^{2-y} \frac{6}{7} x\, dxdy$$

$$= \int_{\frac{3-5}{2}}^{1} \left(\frac{3}{7} x^2 \right)_{1-y}^{\sqrt{y}} + \int_{1}^{2} \left(\frac{3}{7} x^2 \right)_{0}^{2-y}$$

$$= \int_{\frac{3-5}{2}}^{1} \left(\frac{-3}{7} y^2 + \frac{9}{7} y - \frac{3}{7} \right) dy + \int_{0}^{1} \frac{3(2-y)^2}{7} dy$$

$$= \left(\frac{-y^3}{7} + \frac{9}{7}\frac{y^2}{2} - \frac{3}{7} y \right)_{\frac{3-5}{2}}^{1} + \left[\frac{(2-y)^3}{-7} \right]_1^2$$

$$= 0{,}1493 + 0{,}1428$$

$$= 0{,}2922$$

8. Jika variabel acak X dan Y memiliki kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}x, & untuk\, 1 \le x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

berapa probabilitas $P[max(X,Y) > 1]$?

Jawab:

$$P\left[\max(X,Y) > 1\right] = 1 - P\left[\max(x,y) < 1\right]$$

$$=1-P(X<1)\cap P(Y<1)]$$

$$=1-\int_0^1\int_{1-x}^1 \frac{6}{7}x\,dy\,dx$$

$$=1-\int_0^1 \frac{6}{7}x\left[y\right]_{1-x}^1 dx$$

$$=1-\int_0^1 \frac{6}{7}x\left[1-(1-x)\right]dx$$

$$=1-\frac{6}{7}\int_0^1\left[x-x+x^2\right]dx$$

$$=1-\frac{6}{7}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=1-\frac{6}{7}\times\frac{1}{3}$$

$$=1-\frac{6}{7}$$

$$=\frac{5}{7}$$

Jadi probabilitas $P[max(X,Y)>1]$ adalah $\frac{5}{7}$

9. Jika X dan Y memiliki fungsi kepadatan probabilitas gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{5}{16}xy^2, & untuk\; 0<x<y<2\\ 0, & untuk\; yang\; lainnya\end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan marginal dari X yang bukan nol?

Jawab :

Fungsi kepadatan probabilitas gabungan X,Y adalah $f(x,y)=\frac{5}{16}xy^2$, untuk $0<x<y<2$

Fungsi kepadatan marginal dari X dapat ditentukan

$$P_X(x)=\int_{y=x}^{y=2} f(x,y)\,dy$$

dengan $X=x$, Y harus dalam interval $0<x<y<2 \Rightarrow y\in(x,2)$

$$P_X\left(x\right)=\int_{y=x}^{y=2}\frac{5}{16}xy^2dy=\frac{5}{48}\left[xy^3\right]_x^2$$

$$P_X\left(x\right)=\frac{5}{48}\left[x\left(2\right)^3-x\left(x\right)^3\right]$$

Sehingga

$$P_X\left(x\right)=\frac{5}{48}\left[8x-x^4\right]\ \ untuk\ 0<x<2$$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{5}{48}\left[8x-x^4\right] & untuk\ 0<x<2\\ \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Adalah fungsi kepadatan marginal yang diperlukan

10. Misalkan X dan Y memiliki fungsi kepadatan probabilitas gabungan

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}4x, & untuk\ 0<x<\sqrt{y}<1\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan marginal dari Y, yang mana bukan nol?

Jawab :

Fungsi kepadatan probabilitas

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}4x & untuk\ 0<x<\sqrt{y}<1\\ 0 & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan marginal dari $y\ (0<x<\sqrt{y}<1)$

$$f_y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{x,y}\left(x,y\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}4x\,dx$$

$$=4\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{y}}$$

$$=4\left(\frac{y}{2}\right)$$

$= 2y$

dan fungsi kepadatan marginal dari $y\left(x \notin \left(0, \sqrt{y}\right)\right)$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dx$$

$$= 0, \qquad f_{x,y}(x,y) = 0$$

Jadi,

$$f_y(y) \begin{cases} 2y & \textit{untuk}\, 0 < y < 1 \\ 0 & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Oleh karena itu, fungsi kepadatan marginal x, $(0 < x < \sqrt{y} < 1)$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dy$$

$$= \int_{x^2}^{1} 4x\, dx$$

$$= 4y_{x^2}^{1}$$

$$= 4x\left(1 - x^2\right)$$

$$= 4x - 4x^3$$

Dan fungsi kepadatan marginal dari $x\left(x \notin \left(x^2, 1\right)\right)$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dx$$

$$f_{x,y}(x,y) = 0$$

Jadi,

$$f_x(x) \begin{cases} 4x\left(1 - x^2\right) & \textit{untuk}\, 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

11. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2 - x - y), & \textit{untuk}\, 0 < x, y < 2; 0 < x + y < 2 \\ 0, & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Berapa probabilitas bersyarat $P(X < 1 \mid Y < 1)$?

Jawab :

$$f(x) = \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy = \frac{3}{4}\int_0^{2-x} (2-x-y)\,dy$$

$$= \frac{3}{4}\left[2(2-x) - x(2-x) - \frac{(2-x)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{4}(2-x)\left[\frac{2-x}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{8}(x-2)^2 \text{ , } 0 < x < 2$$

Maka $f(y) = \frac{3}{8}(y.2)^2, \ \ 0 < y < 2$

$$P(x < 1 | y < 1) = \frac{P(x<1, y<1)}{P(y<1)} = \frac{\int_0^1\int_0^1 \frac{3}{4}(2-x-y)\,dxdy}{\int_0^1 (y.2)^2\,dy}$$

$$= 2 \times \frac{\int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2} - y\right)dy}{\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{-1}}$$

$$= \frac{6}{7} \times \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{6}{7}$$

12. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 12x, & \textit{untuk}\ 0 < y < 2x < 1 \\ 0, & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan bersyarat dari Y mengingat $X = x$?

Jawab :

$$f(x,y) = 12x, \qquad 0 < y < 2x < 1$$

$$= 0, \qquad\qquad 0$$

$$f(x) = \int_0^{2x} 12x\, dy$$

$$= 12x[y]_0^{2x}$$

$$= 12x(2x - 0)$$

$$f(x) = 24x^2 \qquad\qquad 0 < 2x < 1$$

$$\therefore f(x) = 24x^2 \qquad\qquad 0 < x < 0,5$$

$$= 0, \qquad\qquad 0$$

$$\therefore f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

$$= \frac{12x}{24x^2}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & untuk\ 0 < y < 2x \\ \\ 0 & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

13. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & untuk\, x > 0, y > 0, 0 < x + y < 1 \\ 0, & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

Berapa probabilitas bersyarat $P\left(X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{1}{4} \right)$?

Jawab :

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$$= \int_0^{1-y} 24xy\, dx$$

$$=12y\left(x^2\right)_0^{1-y}$$

$$=12y(1-y)^2, \qquad 0<y<1$$

Kondisi PDF dari x diberikan $y=y$

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{24xy}{12y(1-y)^2}=\frac{2x}{(1-y)^2}$$

$$P\left(x<\frac{1}{2}\middle| y=\frac{1}{4}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)=\frac{1}{4}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x}{\frac{9}{16}}dx$$

$$=\frac{16}{9}\left(x^2\right)_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{16}{9}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{4}{9}$$

14. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak independen dengan fungsi kepadatan probabilitas identik yang diberikan oleh

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & untuk\ x>0 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapakah fungsi kepadatan probabilitas $W=max\{X,Y\}$?

Jawab :

Misalkan $W=max(X,Y)$

Ini berarti bahwa $W\le w$

Dengan kedua X dan Y lebih kecil dari w

Kita dapat menuliskan notasi probabilitasnya sebagai:

$$P(W \le w) = P(X \le w, Y \le w)$$

Sehingga X dan Y dapat kita tuliskan sebagai

$$P(W \le w) = P(X \le w)P(Y \le w)$$

Dari definisi kita dapatkan :

$$P(X \le w) = f_x(w)$$

$$P(Y \le w) = f_y(w)$$

Sehingga kita memerlukan penyelesaian faktor diferensial dari fungsi eksponensial

$$f(x) = \int_0^x e^{-u} du$$

$$= \left[-e^{-u}\right]_0^x$$

$$= -\left(e^{-x} - 1\right)$$

$$= 1 - e^{-x}$$

Maka $w \ge 0$

$$f_w(w) = f_x(w) f_y(w) = \left(1 - e^{-x}\right)^2$$

$$= 1 - 2e^{-w} + e^{2w}$$

15. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak independen dengan fungsi kepadatan probabilitas identik yang diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3}, & untuk\, 0 \le x \le \theta \\ 0, & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

untuk beberapa $\theta > 0$. Berapakah fungsi kepadatan probabilitas dari $W = min\{X, Y\}$?

Jawab :

Fungsi Kepadatan Probabilitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & untuk\, 0 \le x \le \theta \\ 0, & untuk\ yang\, lainnya \end{cases}$$

Fungsi Distribusi Kumulatif dari x

$$F(x) = \int_0^x \frac{3x^2}{\theta^3} x^2\, dx$$

$$= \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\theta^3}\left[x^3 - 0\right]$$

$$F_X(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^3, F_Y(y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^3$$

Maka $W = min\{X, Y\}$

Fungsi Distribusi Kumulatif dari W

$$F_W(w) = P(W \le w) = 1 - P(W > w)$$

$$= 1 - P\left[min(X, Y) > w\right]$$

$$= 1 - P(X > w)P(Y > w)$$

$$= 1 - \left[1 - F_X(w)\right]\left[1 - F_Y(w)\right]$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{w^3}{\theta^3}\right]\left[1 - \frac{w^3}{\theta^3}\right]$$

$$F_W(w) = 1 - \left(1 - \frac{w^3}{\theta^3}\right)^2$$

Fungi Kepadatan Probabilitas dari W

$$F_W(w) = \frac{d}{dW} F_W(w) = \frac{d}{dw}\left(1 - \left(1 - \frac{w^3}{\theta^3}\right)^2\right)$$

$$= 0 - 2\left(1 - \frac{w^3}{\theta^3}\right)\left(-\frac{3w^2}{\theta^3}\right)$$

$$= \frac{6w^2}{\theta^3}\left(1 - \frac{w^3}{\theta^3}\right)$$

16. Rizal dan Anggi setuju untuk bertemu antara pukul 5 PM. dan 6 PM. Misalkan masing-masing dari mereka tiba pada suatu waktu yang didistribusikan seragam secara acak dalam interval waktu ini, tidak bergantung satu sama lain (independen). Masing-masing akan menunggu paling lama 10 menit (dan jika orang lain tidak muncul, mereka akan pergi). Berapakah probabilitas mereka benar-benar pergi?

Jawab :

Diberikan dua kasus:

Kasus I- Rizal datang lebih dulu dan **Kasus II**- Anggi datang lebih dulu.

Kemungkinan mereka bertemu adalah sama terlepas dari siapa yang datang lebih dulu, jadi kita bisa fokus pada Kasus I.

Misalkan Rizal tiba antara 5:00 PM dan 5:50 PM. Ini mewakili 50 dari total 60 menit, jadi kemungkinan dia datang selama waktu ini adalah $\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$. Sekarang Anggi harus tiba selama 10 menit berikutnya. Ini terjadi dengan probabilitas $\left(\frac{10}{60}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)$. Jadi, kemungkinan mereka bertemu dalam keadaan ini adalah $\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{36}\right)$.

Karena waktu kedatangan mereka independen, kita bisa mengalikan probabilitas tunggal untuk sampai pada probabilitas gabungan.

Sekarang misalkan Rizal tiba antara jam 5:50 PM dan 6:00 PM. Ini mewakili 10 dari total 60 menit, jadi kemungkinan dia datang selama waktu ini adalah $\left(\frac{10}{60}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)$. Sekarang Anggi harus tiba sebelum jam 6:00 PM, tapi berapa menitnya? Jika Rizal sama-sama mungkin datang antara jam 5:50 PM dan 6:00 PM, maka rata-rata dia akan tiba jam 5:55 PM. Oleh karena itu, rata-rata Anggi memiliki waktu 5 menit untuk tiba. Ini terjadi dengan probabilitas $\left(\frac{5}{60}\right) = \left(\frac{1}{12}\right)$ Jadi, kemungkinan mereka bertemu adalah $\left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{1}{12}\right) = \left(\frac{1}{72}\right)$.

Jadi, jika Rizal datang terlebih dahulu, kemungkinan mereka akan bertemu adalah $\left(\frac{5}{36}\right) + \left(\frac{1}{72}\right) = \left(\frac{11}{72}\right)$.

Seperti yang dinyatakan di atas, ini berarti bahwa jika Anggi datang lebih dulu, probabilitas mereka akan bertemu juga $\left(\frac{5}{36}\right)+\left(\frac{1}{72}\right)=\left(\frac{11}{72}\right)$.

Jadi probabilitas pertemuan Rizal dan Anggi adalah $\left(\frac{11}{72}\right)+\left(\frac{11}{72}\right)=\left(\frac{22}{72}\right)=\left(\frac{11}{36}\right)$.

17. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak independen yang didistribusikan secara seragam pada interval $[0,1]$. Berapa probabilitas kejadian $Y \geq \frac{1}{2}$ jika diberikan $Y \geq 1-2X$?

    Jawab :

    Jika diketahui x dan y adalah dua distribusi variabel acak independen yang seragam dengan interval $[0,1]$ maka

    $$F(x)=1 \qquad 0<x<L$$

    $$F(y)=1 \qquad 0<y<L$$

    $$F(x,y)=f(x)\ .f(y)$$

    $$F(x,y)=L, \quad 0<x<L, \quad 0<y<L$$

    Sekarang kita menghitung

    $$P\left[y \geq \frac{1}{2} \mid y \geq 1-2x\right]=\frac{P\left[y \geq \frac{1}{2} \cap y \geq 1-2x\right]}{P[y \geq 1-2x]}$$

    Untuk $P\left[y \geq \frac{1}{2} \cap y \geq 1-2x\right]$

    $$=\int_0^{\frac{1}{4}}\int_{1-2x}^{1} L\,dydx+\int_0^{\frac{1}{4}}\int_{1-2x}^{1} L\,dydx$$

    $$=\int_0^{\frac{1}{x}}\left(1-1+2x+\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)$$

    $$=2\left[\frac{x^2}{x}\right]_0^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}x\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

    $$=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1+7}{16}$$

$$\to p\ [y \geq \frac{1}{2} \cap y \geq 1-2x = \frac{7}{16}$$

$$p\left[y \geq 1-2x\right] = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{1-2x}^{1} L.dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{1} 1\,dy$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left[x - x + 2x\right] + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[1-0\right] dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{x}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1+2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$p\left[y \geq 1-2x\right] = \frac{3}{4}$$

Maka

$$p\left[\ y \geq \frac{1}{2}\ |\ y \geq 1-2x\ \right] = \frac{p\left[\ y \geq \frac{1}{2} \cap y \geq 1-2x\ \right]}{p\left[y \geq 1-2x\right]}$$

$$= \frac{\frac{7}{16}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{7}{12}$$

$$Maka\ p[\ y \geq \frac{1}{2}\ |\ y \geq 1-2x\ ] = \frac{7}{12}$$

18. Misalkan X dan Y memiliki kepadatan gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & untuk\; 0<y<x<1 \\ 0, & untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

Berapa $P(X+Y>1)$?

Jawab :

Jadi, area yang dipersyaratkan adalah area berbayang ganda di mana x bergerak dari $\frac{1}{2}$ hingga 1 dan y bergerak dari $1-y$ hingga x

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{1-x}^{x} 8xy\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[4xy^2\right]_{1-x}^{x} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4x\left(x^2-(1-x)^2\right)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4x(2x-1)\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(8x^2-4x\right)dx$$

$$= \left[\frac{8x^3}{3}-2x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Jadi, $P(X+Y>1)$ adalah $\frac{5}{6}$

19. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & untuk\; 0\le y\le x<1 \\ 0, & untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

Apakah X dan Y independen secara stokastik?

Jawab :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(2, y)\, dy$$

$$= \int_0^x 2dy = 2x$$

maka

$$f_x(x) = 2x,\ 0 < x < 1$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(2, y)\, dx$$

$$= \int_y^1 2dx = 2(1 - y),$$

maka

$$f_y(y) = 2(1 - y),\ 0 < y < 1$$

$$f_x(x)\, f_y(y) = 2x\ .2(1 - y)$$

$$= 4x(1 - y)$$

Sehingga

$$f(x, y) \neq f_x(x)\, f_y(y)$$

Jadi X dan Y tidak stokastik independen.

20. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x, & untuk\ 0 < x, y < 1 \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Apakah X dan Y independen secara stokastik?

Jawab :

Misalkan $f(x, y) = 2x$ *untuk* $0 < x, y < 1$

$$f(x) = \int_y f(x, y)\, dy = \int_0^1 2x\, dy = [2xy]_0^1$$

$$f(x) = 2x\ , \quad 0 < x < 1$$

$$f(y)=\int_x f(x,y)\,dx=\int_0^1 2x\,dx=\left[2\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$f(y)=1\,, \qquad 0<y<1$$

Kita tahu bahwa X dan Y independen

$$f(x,y)=2x \quad \text{.............} \ (1)$$

$$f(x).f(y)=(2x)(1)=2x \quad \text{...............} \ (2)$$

dari (1) dan (2)

$$f(x,y)=f(x).f(y)$$

X dan Y independen

21. Sebuah bus dan penumpangnya tiba di halte bus pada waktu yang terdistribusi secara seragam pada interval 0 hingga 1 jam. Asumsikan waktu kedatangan bus dan penumpang adalah independen satu sama lain dan penumpang akan menunggu hingga 15 menit sampai bus tiba. Berapa probabilitas penumpang akan naik bus?

    Jawab :

    Y adalah variabel acak yang menunjukkan temperatur

    Misalkan W_P menunjukkan waktu ketika penumpang akan tiba dan W_B menunjukkan waktu ketika bus akan datang.

    Waktu menunggu $W_P.W_B<15$

    Probabilitas $P[W_P-W_B<15]$

    Misalkan $W_P-W_B=U, 0<U<60$

    $$B=V, \qquad 0<V<60$$

    P dan B independent maka $f_{P,B}(p,b)=\left(\frac{1}{60}\right)^2, 0<p,b<60$

    Untuk $V=B$

    $$P=U+B=U+V$$

    Maka $P=U+V$

    $$B=V$$

    Untuk itu $f_{U,V}(u,v)=f_{PB}(u+v,v)|J|$

    Dimana $|J|=\begin{vmatrix}\frac{dP}{du} & \frac{dP}{dv}\\ \frac{dB}{du} & \frac{dB}{dv}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{d}{du}(u+v) & \frac{d}{dv}(u+v)\\ \frac{d}{du}v & \frac{d}{dv}v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$

$$f_{UV}(u,v)=\left(\frac{1}{60}\right)^2.1=\frac{1}{60^2}\ dengan\ 0<u,v<60$$

$$f_U(u)=\int_v f_{u,v}(u,v)\,dv=\int_0^{60}\frac{1}{60^2}dv=\frac{1}{60}$$

$$P[P-B<15]=P[U<15]=\int_0^{15}f_u(u)\,du=\int_0^{15}\frac{1}{60}du=\frac{1}{4}$$

Jadi probabilitas penumpang akan naik bus = $\frac{1}{4}$

22. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & untuk\ 0\le x,y\le 1\\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Berapakah probabilitas kejadian $X\le\frac{1}{2}$ jika diberikan $Y\ge\frac{3}{4}$?

Jawab :

$$P\left(X\le\frac{1}{2},Y\ge\frac{3}{4}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{3}{4}}^{1}f(x,y)\,dydx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{3}{4}}^{1}4xy\,dydx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[2xy^2\right]_{\frac{3}{4}}^{1}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{9}{8}\right)x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{7}{8}x\,dx$$

$$=\left[\frac{7}{16}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{7}{64}-0\right)$$

$$=\frac{7}{64}=0{,}109375$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1 4xy\,dx$$

$$=\left[2x^2y\right]_0^1=2y$$

$$P\left(Y\ge\frac{3}{4}\right)=\int_{\frac{3}{4}}^{1}2y\,dy=\left[y^2\right]_{\frac{3}{4}}^{1}$$

$$= \frac{7}{16} = 0,4375$$

$$P\left(X \le \frac{1}{2} | Y \ge \frac{3}{4} \right) = \frac{\frac{7}{64}}{\frac{7}{16}} = \frac{7}{64} \cdot \frac{16}{7}$$

$$= \frac{1}{4}$$

23. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{untuk}\ 0 < x < y < 2 \\ 0, & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Berapa probabilitas kejadian $X \le \frac{1}{2}$ jika diberikan $Y = 1$?

Jawab :

$$f_Y(y) = \int_0^y f(x,y)\,dx = \int_0^y \frac{1}{2} dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} \right]_0^y = \frac{y}{2}, 0 \le y \le 1$$

$$f_{(X|Y)}(x|1) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{1}{y} = 1, 0 \le x \le 1$$

$$P\left(X \le \frac{1}{2} | Y = 1 \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx = [x]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

24. Jika densitas gabungan variabel acak X dan Y adalah

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \textit{untuk}\ 0 \le x \le y \le 1 \\ \frac{1}{2}, & \textit{untuk}\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \textit{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Berapakah probabilitas kejadian $X \le \frac{3}{2}, Y \le \frac{1}{2}$?

Jawab :

$$P\left(X \le \frac{3}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right) = ?$$

$$P\left(X \le \frac{3}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2}.0 \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4} [x]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} . \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$Jadi\ P\left(X \le \frac{3}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

25. Jika kepadatan gabungan variabel acak X dan Y adalah

$$f(x,y) = \begin{cases} \left[e^{\min\{x,y\}} - 1\right] e^{-(x+y)}, & untuk\ 0 < x, y < \infty \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

lalu berapa fungsi kepadatan marginal dari X, dimana bukan nol?

Jawab :

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \left[e^{\min(x,y)} - 1\right] e^{-(x,y)} & \text{jika } 0 < x, y < \infty \\ 0 \end{cases}$$

Distribusi marginal dari X,

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

Dimana $f(x,y) = 0$ untuk $y < 0$

$$f_x(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^\infty \left[e^{\min(x,y)} - 1\right] e^{-(x,y)} dy$$

Mari kita bagi $(0,\infty)$ menjadi $(0,x)$ dan (x,∞). sehingga $min(x,y)$ dapat dihitung saat mengintegrasikan. Dalam $(0,\ x)$, $min(x,y) = y$. Dalam (x,∞) $min(x,y) = x$

$$f_x(x) = \int_0^x (e^y - 1) e^{-(x+y)}\, dy + \int_x^\infty (e^x - 1) e^{-(x+y)}\, dy$$

$$= \int_0^x e^{-x} dy - \int_0^x e^{-(x+y)} dy + \int_x^\infty e^{-y} dy - \int_x^\infty e^{-(x+y)} dy$$

$$= xe^{-x} - e^{-x} \int_0^\infty e^{-y} dy + \frac{[e^{-y}]_x^\infty}{(-1)}$$

$$= xe^{-x} - e^{-x} \frac{[e^{-y}]_0^\infty}{(-1)} + e^{-x}$$

$$= xe^{-x} - e^{-x} + e^{-x}$$

$$= xe^{-x}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & jika\ \ 0 \le x < \infty \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Jadi, fungsi kepadatan marginal dari X, dimana bukan nol adalah xe^{-x}

BAB VIII

HASIL KALI MOMEN VARIABEL ACAK BIVARIAT

Dalam bab ini, kita definisikan berbagai hasil kali momen dari variabel acak bivariat. Konsep utama yang diperkenalkan dalam bab ini adalah pengertian kovarians antara dua variabel acak. Dengan menggunakan definisi ini, kita mempelajari korelasi statistik dari dua variabel acak.

8.1 Kovarian Variabel Acak Bivariat

Pertama, kita definisikan pengertian hasil kali momen dari dua variabel acak dan kemudian menggunakan hasil kali momen ini, diberikan definisi kovarian antara dua variabel acak.

Definisi 8.1. Misalkan X dan Y berupa dua variabel acak dengan fungsi kepadatan gabungan $f(x,y)$. Hasil kali momen X dan Y, dilambangkan dengan $E(XY)$, didefinisikan sebagai:

$$E(XY)\begin{cases} \sum_{x\in Rx}\sum_{y\in Ry} xy\, f(x,y) & jika\ X\ dan\ Y\ diskrit \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\,dxdy & jika\ X\ dan\ Y\ kontinu. \end{cases}$$

Di sini, R_X dan R_Y mewakili ruang jangkauan X dan Y masing-masing.

Definisi 8.2. Misalkan X dan Y berupa dua variabel acak dengan fungsi kepadatan gabungan $f(x,y)$. Kovariansi antara X dan Y, dilambangkan dengan $Cov(X,Y)$ atau (σ_{XY}), didefinisikan sebagai

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right),$$

di mana μ_X dan μ_Y masing-masing adalah mean dari $X\ dan\ Y$.

Perhatikan bahwa kovarians X dan Y sebenarnya adalah hasil kali momen dari $X-\mu_X\ dan\ Y-\mu_Y$. Selanjutnya, mean dari μ_X diberikan oleh

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\,dxdy$$

Dengan demikian mean dari Y diberikan oleh

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,dydx$$

Teorema 8.1. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak. Maka

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right) \\
&= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y) \\
&= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y \\
&= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y \\
&= E(XY) - \mu_X \mu_Y \\
&= E(XY) - E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

Corollary 8.1.

$$Cov(X,X) = \sigma_X^2$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
Cov(X,X) &= E(XX) - E(X)E(X) \\
&= E(X^2) - \mu_X^2 \\
&= Var(X) \\
&= \sigma_X^2
\end{aligned}$$

Contoh 8.1. Misalkan X dan Y adalah variabel acak diskrit dengan kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+2y}{18} & untuk\; x = 1,2\;, y = 1,2 \\ 0 & untuk\; yang\; lainnya \end{cases}$$

Berapa kovariansi σ_{XY} antara X dan Y ?

Jawab :

Marginal dari X adalah

$$f_1(x)=\sum_{y=1}^{2}\frac{x+2y}{18}=\frac{1}{18}(2x+6)$$

Oleh karena itu nilai ekspektasi dari X adalah

$$E(X)=\sum_{x=1}^{2}x\,f_1(x)$$

$$=1f_1(1)+2f_2(2)$$

$$=\frac{8}{18}+2\frac{10}{18}$$

$$=\frac{28}{18}$$

Demikian pula, marginal Y adalah

$$f_2(y)=\sum_{x=1}^{2}\frac{x+2y}{18}=\frac{1}{18}(3+4y)$$

Karenanya nilai yang diharapkan dari Y adalah

$$E(Y)=\sum_{x=1}^{2}y\,f_2(y)$$

$$=1f_2(1)+2f_2(2)$$

$$=\frac{7}{18}+2\frac{11}{18}$$

$$=\frac{29}{18}$$

Selanjutnya, hasil kali momen dari X dan Y diberikan oleh

$$E(XY)=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{2}xy\,f(x,y)$$

$$=f(1,1)+2f(1,2)+2f(2,1)+4f(2,2)$$

$$=\frac{3}{18}+2\frac{5}{18}+2\frac{4}{18}+4\frac{6}{18}$$

$$=\frac{3+10+8+24}{18}$$

$$=\frac{45}{18}$$

Oleh sebab itu, kovarians antara X dan Y diberikan oleh

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=\frac{45}{18}-\left(\frac{28}{18}\right)\left(\frac{29}{18}\right)$$

$$=\frac{(45)(18)-(28)(29)}{(18)(18)}$$

$$=\frac{810-812}{324}$$

$$=-\frac{2}{324}=-0.00617$$

Catatan 8.1. Untuk variabel acak yang berubah-ubah, hasil kali momen dan kovarian mungkin ada atau tidak. Lebih lanjut, perhatikan bahwa tidak seperti varians, kovariansi antara dua variabel acak mungkin negatif.

Contoh 8.2. Misalkan X dan Y memiliki Fungsi Kepadatan Gabungan

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & jika\ 0<x,y<1 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapa kovariansi antara X dan Y?

Jawab :

Kepadatan marginal X adalah

$$f_1(x)=\int_0^1 (x+y)\,dy$$

$$=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$=x+\frac{1}{2}$$

Jadi, nilai ekspektasi dari X diberikan oleh

$$E(X)=\int_0^1 x\ f_1(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1$$

$$=\frac{7}{12}$$

Demikian pula (atau menggunakan fakta bahwa kepadatannya simetris di x dan y), kita dapatkan

$$E(Y)=\frac{7}{12}$$

Sekarang, kita menghitung hasil kali momen dari X dan Y

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left(x^2y+xy^2\right)dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\left[\frac{y^2}{6}+\frac{y^3}{6}\right]_0^1 dy$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{12}$$

Oleh karena itu, kovariansi antara X dan Y diberikan oleh

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{4}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right)$$

$$= \frac{48-49}{144}$$

$$= -\frac{1}{144}$$

Contoh 8.3. Misalkan $X\ dan\ Y$ adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & jika\ 0 < y < 1-x; 0 < x < 1 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapa kovarians antara $X\ dan\ Y$?

Jawab :

Kepadatan marginal X diberikan oleh

$$f_1(x) = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x)$$

Oleh sebab itu nilai ekspektasi dari X adalah

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 x\ f_1(x)dx = \int_2^1 2(1-x)dx = \frac{1}{3}$$

Demikian pula, marginal Y adalah

$$f_2(y) = \int_0^{1-y} 2dx = 2(1-y)$$

Karenanya nilai ekspektasi dari Y adalah

$$\mu_Y = E(Y) = \int_0^1 y\ f_2(y)dy = \int_2^1 2(1-y)dy = \frac{1}{3}$$

Hasil kali momen X dan Y diberikan oleh

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^{1-x} xyf(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,2\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$

$$= 2\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

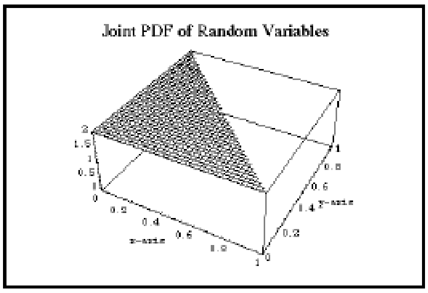
$$= \frac{1}{12}$$

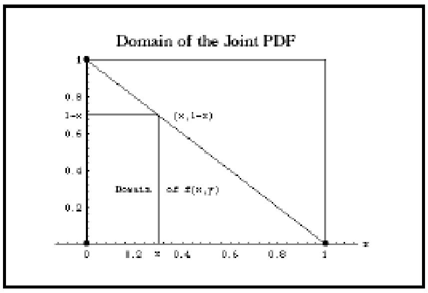
Oleh karena itu, kovariansi antara X dan Y diberikan oleh

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{9}$$

$$= -\frac{1}{36}$$





Teorema 8.2. Jika X dan Y adalah dua variabel acak dan $a, b, c,$ dan d adalah konstanta real, maka

$$Cov(aX - b, cY + d) = a\,c\,Cov(X,Y)$$

Bukti :

$$Cov(aX+b, cY+d)$$

$$= E\left((aX+b)(cY+d)\right) - E(aX+b)E(cY+d)$$

$$= E(acXY + adX + beY + bd) - \left(aE(X)+b\right)\left(cE(Y)+d\right)$$

$$= acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd$$
$$-\left[acE(X)E(Y) + adE(X) + bcE(Y) + bd\right]$$

$$= ac\left[E(XY) - E(X)E(Y)\right]$$

Contoh 8.4. Jika hasil kali momen dari X dan Y adalah 3 dan rata-rata dari X dan Y keduanya adalah sama dengan 2, maka berapakah kovarians variabel acak $2X+10$ dan $-\frac{5}{2}Y+3$?

Jawab :

Karena $E(XY)=3$ dan $E(X)=2=E(Y)$, kovarians X dan Y diberikan oleh

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - 4 = -1$$

Maka kovariansi dari $2X+10$ dan $-\frac{5}{2}Y+3$ diberikan oleh

$$Cov\left(2X+10, -\frac{5}{2}Y+3\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)Cov(X,Y)$$

$$= (-5)(-1)$$

$$= 5$$

Catatan 8.2. Pada Teorema 8.2 dapat ditingkatkan lebih lanjut. Artinya, jika X,Y,Z adalah tiga variabel acak, maka

$$Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$$

Dan

$$Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$$

Rumus pertama dapat ditetapkan sebagai berikut. Memperhitungkan

$$Cov(X+Y,Z) = E((X+Y)Z) - E(X+Y)E(Z)$$

$$= E(XZ+YZ) - E(X)E(Z) - E(Y)E(Z)$$

$$= E(XZ) - E(X)E(Z) + E(YZ) - E(Y)E(Z)$$

$$= Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$$

8.2 Variabel Acak Independen

Pada bagian ini, yang dipelajari adalah pengaruh independensi pada hasil kali momen (dan karenanya pada kovarians). Perhatikan teorema berikut.

Teorema 8.3.

Jika X dan Y adalah variabel acak independen, maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Bukti :

Ingatlah bahwa X dan Y adalah independen jika dan hanya jika

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

Mari kita asumsikan bahwa X dan Y adalah kontinu. Karena itu

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_1(x) f_2(y)\,dxdy$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy\right)$$

$$= E(X)E(Y)$$

Jika X dan Y diskrit, gantilah integral dengan jumlah yang sesuai membuktikan hasil yang sama.

Contoh 8.5. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak independen dengan masing-masing fungsi kepadatan :

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & untuk\, 0<x<1\\ \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Dan

$$g(y)=\begin{cases}4y^3, & untuk\, 0<y<1\\ \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya\end{cases}$$

Berapakah $E\left(\frac{X}{Y}\right)$?

Jawab :

Karena X dan Y adalah independen, maka kepadatan gabungan X dan Y diberikan oleh

$$h(x,y)=f(x)g(y)$$

Karena itu

$$E\left(\frac{X}{Y}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{y}h(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1\frac{x}{y}f(x)g(y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1\frac{x}{y}3x^2 4y^3\,dxdy$$

$$=\left(\int_0^1 3x^3dx\right)\left(\int_0^1 4y^2dy\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=1$$

Catatan 8.3. Independensi X dan Y tidak berarti $E\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{E(X)}{E(Y)}$ tetapi hanya menyiratkan $E\left(\frac{X}{Y}\right)=E(X)E\left(Y^{-1}\right)$. Lebih lanjut, perhatikan bahwa $E\left(Y^{-1}\right)$ tidak sama dengan $\frac{1}{E(Y)}$.

Teorema 8.4.

Jika X dan Y adalah variabel acak independen, maka kovariansi antara X dan Y selalu nol, artinya

$$Cov(X,Y)=0$$

Bukti :

Misalkan X dan Y adalah independen, maka dengan Teorema 8.3, kita punya $E(XY)=E(X)E(Y)$. Sehingga

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y)-E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Contoh 8.6.

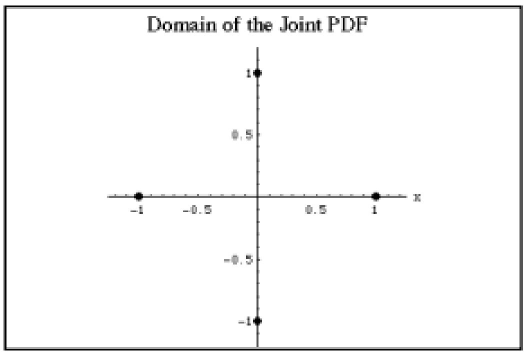
Misalkan variabel acak X dan Y memiliki kepadatan gabungan

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & untuk\ (x,y)\in\{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\} \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapa kovariansi X dan Y? Apakah variabel acak X dan Y independen?

Jawab :

Kepadatan gabungan X dan Y ditunjukkan pada tabel berikut dengan margin $f_1(x)$ dan $f_2(y)$.



(x,y)	-1	0	1	$f_2(y)$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Dari tabel ini, dapat dilihat bahwa

$$0 = f(0,0) \neq f_1(0) f_2(0) = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

dan dengan demikian

$$f(x,y) \neq f_1(x) f_2(y)$$

untuk semua (x,y) adalah ruang interval dari variabel gabungan (X,Y). Oleh karena itu X dan Y tidak independen.

Selanjutnya, kita menghitung kovariansi antara X dan Y. Untuk itu kita membutuhkan $E(X), E(Y)$ dan $E(XY)$.

Nilai ekspektasi dari X adalah

$$E(X) = \sum_{x=-1}^{1} x f_1(x)$$

$$= (-1) f_1(-1) + (0) f_1(0) + (1) f_1(1)$$

$$= -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}$$

$$= 0$$

Begitu pula dengan nilai ekspektasi dari Y adalah

$$E(Y) = \sum_{x=-1}^{1} y f_1(Y)$$

$$= (-1) f_1(-1) + (0) f_1(0) + (1) f_1(1)$$

$$= -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}$$

$$= 0$$

Hasil kali momen X dan Y diberikan oleh

$$E(XY) = \sum_{x=-1}^{1} \sum_{x=-1}^{1} xy\, f(x, y)$$

$$\begin{aligned} &= (1) f(-1,-1) + (0) f(-1,0) + (-1) f(-1,1) \\ &\quad + (0) f(0,-1) \;\; + (0) f(0,0) + (0) f(0,1) \\ &\quad + (-1) f(1,-1) + (0) f(1,0) + (1) f(1,1) \end{aligned}$$

$$= 0$$

Oleh karena itu, kovariansi antara X dan Y diberikan oleh

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

Catatan 8.4. Contoh ini menunjukkan bahwa kovarians X dan Y adalah nol bukan berarti mean variabel acak itu independen. Namun, kita tahu dari Teorema 8.4 bahwa jika X dan Y adalah independen, maka $Cov(X,Y)$ adalah selalu nol.

8.3 Kombinasi Linear Varians dari Variabel Acak

Diberikan dua variabel acak, X dan Y, kita menentukan varians kombinasi liniernya,yaitu $aX + bY$.

Teorema 8.5. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak dan misalkan a dan b menjadi dua bilangan real. Maka

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2\,a\,b\,Cov(X,Y).$$

Bukti :

$$Var(aX + bY)$$

$$= E\left(\left[aX + bY - E(aX + bY)\right]^2\right)$$

$$= E\left(\left[aX + bY - a\,E(X) + b\,E(Y)\right]^2\right)$$

$$= E\left(\left[a(X - \mu_X) + b(Y - \mu_Y)\right]^2\right)$$

$$= E\left(a^2 (X - \mu_X)^2 + b^2 (Y - \mu_Y)^2 + 2\,a\,b(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right)$$

$$= a^2 E\left((X - \mu_X)^2\right) + b^2 E\left((Y - \mu_Y)^2\right) + 2\,a\,b\,E\left((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right)$$

$$= a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2\,a\,b\,Cov(X, Y)$$

Contoh 8.7. Jika $Var(X+Y)=3$, $Var(X-Y)=1$, $E(X)=1$ dan $E(Y)=2$, maka berapa $E(XY)$?

Jawab :

$$Var(X+Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\,Cov(X,Y),$$

$$Var(X-Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\,Cov(X,Y).$$

Oleh karena itu, kita mendapatkan

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{4}\left[Var(X+Y) - Var(X-Y)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[3-1]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Oleh karena itu, hasil kali momen X dan Y diberikan oleh

$$E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{2} + (1)(2)$$

$$= \frac{5}{2}$$

Contoh 8.8. Misalkan X dan Y adalah variabel acak dengan $Var(X)=4, Var(Y)=9$ dan $Var(X-Y)=16$. Berapakah $Cov(X,Y)$?

Jawab :

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)$$

$$16=4+9-2Cov(X,Y).$$

Karenanya

$$Cov(X,Y)=-\frac{3}{2}$$

Catatan 8.5. Teorema 8.5 dapat diperluas menjadi tiga atau lebih variabel acak. Dalam kasus tiga variabel acak $X,Y,Z,$ kita punya

$$\begin{aligned}
&Var(X+Y+Z)\\
&=Var(X)+Var(Y)+Var(Z)+2Cov(X,Y)\\
&\quad+2Cov(Y,Z)+2Cov(Z,X)
\end{aligned}$$

Untuk melihat ini perhitungkan

$$\begin{aligned}
&Var(X+Y+Z)\\
&=Var((X+Y)+Z)\\
&=Var(X+Y)+Var(Z)+2Cov(X+Y,Z)\\
&=Var(X+Y)+Var(Z)+2Cov(X,Z)+2Cov(Y,Z)\\
&=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)+Var(Z)\\
&\quad+2Cov(X,Z)+2Cov(Y,Z)\\
&=Var(X)+Var(Y)+Var(Z)+2Cov(X,Y)\\
&\quad+2Cov(Y,Z)+2Cov(Z,X)
\end{aligned}$$

Teorema 8.6. Jika X dan Y adalah variabel acak independen dengan $E(X)=0=E(Y)$, maka

$$Var(XY)=Var(X)Var(Y)$$

Bukti :

$$Var(XY) = E\left((XY)^2\right) - \left(E(X)E(Y)\right)^2$$

$$= E\left((XY)^2\right)$$

$$= E\left(X^2Y^2\right)$$

$$= E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) \quad \text{(dengan } X \text{ dan } Y \text{ independen)}$$

$$= Var(X)Var(Y)$$

Contoh 8.9. Misalkan X dan Y adalah variabel acak independen, masing-masing dengan kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & untuk -\theta < x < \theta \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Jika $Var(XY) = \dfrac{64}{9}$,maka berapa nilai dari θ?

Jawab :

$$E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{2\theta} x dx = \frac{1}{2\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\theta}^{\theta} = 0$$

Karena Y memiliki kepadatan yang sama, kita menyimpulkan bahwa $E(Y) = 0$. Karenanya

$$\frac{64}{9} = Var(XY)$$

$$= Var(X)Var(Y)$$

$$= \left(\int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{2\theta} x^2 dx\right)\left(\int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{2\theta} y^2 dy\right)$$

$$= \left(\frac{\theta^2}{3}\right)\left(\frac{\theta^2}{3}\right)$$

$$= \frac{\theta^4}{9}$$

Maka, kita dapatkan

$$\theta^2 = 64 \qquad atau \qquad \theta = 2\sqrt{2}$$

8.4 Korelasi dan Independensi

Dependensi fungsional dari variabel acak Y pada variabel acak X dapat diperoleh dengan memeriksa koefisien korelasi. Definisi koefisien korelasi ρ antara X dan Y diberikan di bawah ini.

Definisi 8.3. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak dengan masing-masing varians σ_X^2 dan σ_Y^2. Misalkan kovariansi X dan Y menjadi $Cov(X,Y)$. Kemudian koefisien korelasi ρ antara X dan Y diberikan oleh

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma X \sigma Y}.$$

Teorema 8.7. Jika X dan Y adalah independen, koefisien korelasi antara X dan Y adalah nol.

Bukti :

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$= \frac{0}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$= 0$$

Catatan 8.6. Kebalikan dari teorema ini tidak benar. Jika koefisien korelasi X dan Y adalah nol, maka X dan Y dikatakan tidak berkorelasi.

Lemma 8.1. Jika X^* dan Y^* adalah standarisasi variabel acak X dan Y, masing-masing, koefisien korelasi antara X^* dan Y^* sama dengan koefisien korelasi antara X dan Y.

Bukti :

Misalkan ρ^* adalah koefisien korelasi antara X^* dan Y^*. Selanjutnya, misalkan ρ menunjukkan koefisien korelasi antara X dan Y. Kita akan menunjukkan bahwa $\rho^* = \rho$.

$$\rho^* = \frac{Cov\left(X^*, Y^*\right)}{\sigma^{X*}\sigma^{Y*}}$$

$$= Cov\left(X^*, Y^*\right)$$

$$= Cov\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_{X^*}}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_{Y^*}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y} Cov\left(X-\mu_X, Y-\mu_Y\right)$$

$$= \frac{Cov\left(X, Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$= \rho$$

Lemma ini menyatakan bahwa nilai koefisien korelasi antara dua variabel acak tidak berubah dengan standarisasi.

Teorema 8.8. Untuk variabel acak X dan Y, koefisien korelasi ρ memenuhi

$$-1 \le \rho \le 1$$

Dan $\rho = 1$ atau $\rho = -1$ menyiratkan bahwa variabel acak $Y = aX + b$, di mana a dan b adalah sembarang konstanta real dengan $a \ne 0$.

Bukti :

Misalkan μ_X adalah mean dari X dan μ_Y adalah mean dari Y, dan σ_X^2 dan σ_Y^2 masing-masing adalah varians dari X dan Y. Selanjutnya, misalkan

$$X^* = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \qquad dan \qquad Y^* = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$$

menjadi standardisasi X dan Y, masing-masing. Kemudian

$$\mu_{X^*} = 0 \quad dan \quad \sigma_{X^*}^2 = 1,$$

Dan

$$\mu_{Y^*} = 0 \quad dan \quad \sigma_{Y^*}^2 = 1.$$

Jadi

$$Var\left(X^* - Y^*\right) = Var\left(X^*\right) + Var\left(Y^*\right) - 2Cov\left(X^*, Y^*\right)$$

$$= \sigma_{X^*}^2 + \sigma_{Y^*}^2 - 2\rho^* \sigma_{X^*} \sigma_{Y^*}$$

$$= 1 + 1 - 2\rho^*$$

$$= 1 + 1 - 2\rho \qquad (dari\, Lemma\, 8.1)$$

$$= 2(1-\rho)$$

Karena varians variabel acak selalu positif, kita memperolehnya

$$2(1-\rho) \geq 0$$

Yang mana

$$\rho \leq 1$$

Dengan argumen serupa, menggunakan $Var(X^* - Y^*)$, kita dapat menunjukkan bahwa $-1 \leq \rho$. Oleh karena itu, kita memiliki $-1 \leq \rho \leq 1$. Sekarang, kita tunjukkan bahwa jika $\rho = 1$ atau $\rho = -1$, maka Y dan X terkait melalui transformasi Affine. Perhitungkan kasus $\rho = 1$, maka

$$Var(X^* - Y^*) = 0$$

Tetapi jika varians dari variabel acak adalah 0, maka semua kepadatan probabilitas terkonsentrasi pada satu titik (yaitu, distribusi variabel acak yang bersangkutan berdegenerasi). Jadi $Var(X^* - Y^*) = 0$ berarti $X^* - Y^*$ hanya membutuhkan satu nilai. Tapi $E\left[X^* - Y^*\right] = 0.$ Jadi, kita mendapatkan

$$X^* - Y^* \equiv 0$$

Atau

$$X^* \equiv Y^*$$

Karenanya

$$\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

Mnyelesaikan ini untuk Y dalam X, kita dapatkan

$$Y = aX + b$$

Dimana

$$\alpha = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \qquad dan \qquad b = \mu_Y - \alpha\mu_X$$

Jadi jika $\rho = 1$, maka Y adalah linear di X. Demikian pula, kita dapat menunjukkan untuk kasus $\rho = -1$, variabel acak X dan Y berhubungan linier. Ini melengkapi bukti teorema.

8.5 Fungsi Pembangkit Momen

Serupa dengan fungsi pembangkit momen untuk kasus univariat, fungsi pembangkit momen dapat didefinisikan pada kasus bivariat untuk menghitung berbagai hasil kali momen. Fungsi pembangkit momen pada kasus bivariat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 8.4. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak dengan fungsi kepadatan gabungan $f(x,y)$. Fungsi bernilai real $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ditentukan oleh

$$M(s,t) = E\left(e^{sX+tY}\right)$$

disebut fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y jika nilai yang diharapkan ini ada untuk semua s adalah beberapa interval $-h < s < h$ dan untuk semua t adalah beberapa interval $-k < t < k$ untuk beberapa h dan k positif.

Sangat mudah untuk menghitung dari definisi ini

$$M(s,0) = E\left(e^{sX}\right)$$

Dan

$$M(0,t) = E\left(e^{tY}\right)$$

Dari itu dapat dihitung bahwa

$$E(X^k) = \left.\frac{\partial^k M(s,t)}{\partial s^k}\right|_{(0,0)}, \qquad E(Y^k) = \left.\frac{\partial^k M(s,t)}{\partial t^k}\right|_{(0,0)}$$

$untuk\ k = 1,2,3,4,\ldots;$ dan

$$E(XY) = \left.\frac{\partial^2 M(s,t)}{\partial s \partial t}\right|_{(0,0)}$$

Contoh 8.10. Misalkan variabel acak X dan Y memiliki kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & untuk\ 0 < x < y < \infty \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Berapa fungsi pembangkit momen (MGF) gabungan untuk X dan Y?

Jawab :

Fungsi pembangkit momen gabungan X dan Y diberikan oleh

$$M(s,t) = E\left(e^{sx+ty}\right)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{sx+ty} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{sx+ty} e^{-y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_x^\infty e^{sx+ty-y}\, dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{(1-s-t)(1-t)}$$

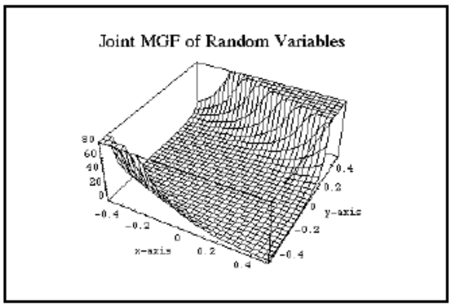
asalkan $s+t<1$ *dan* $t<1$

■ **Contoh 8.11.** Jika fungsi pembangkit momen gabungan menghasilkan fungsi acak variabel X dan Y adalah

$$M(s,t) = e^{\left(s+3t+2s^2+18t^2+12st\right)}$$

Berapa kovarians dari X dan Y ?

Jawab :



$$M(s,t) = e^{\left(s+3t+2s^2+18t^2+12st\right)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} = (1+4s+12t)\,M(s,t)$$

$$\left.\frac{\partial M}{\partial s}\right|_{(0,0)} = 1M(0,0)$$

$$=1$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}=\left(3+36t+12s\right)M\left(s,t\right)$$

$$\left.\frac{\partial M}{\partial t}\right|_{(0,0)}=3M\left(0,0\right)$$

$$=3$$

Karenanya

$$\mu_X=1 \text{ dan } \mu_Y=3$$

Sekarang kita hitung hasil kali momen dari X dan Y

$$\frac{\partial^2 M\left(s,t\right)}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial M}{\partial s}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(M\left(s,t\right)\left(1+4s+12s\right)\right)$$

$$=\left(1+4s+12t\right)\frac{\partial M}{\partial t}+M\left(s,t\right)\left(12\right)$$

Karena itu

$$\left.\frac{\partial^2 M\left(s,t\right)}{\partial s\,\partial t}\right|_{(0,0)}=1\left(3\right)+1\left(12\right)$$

Jadi

$$E\left(XY\right)=15$$

Dan kovarians dari X dan Y adalah

$$Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

$$=15-\left(3\right)\left(1\right)$$

$$=12$$

Teorema 8.9. Jika X dan Y independen maka

$$M_{aX+bY}\left(t\right)=M_X\left(at\right)M_Y\left(bt\right)$$

Dimana a dan b adalah parameter nyata (real)

Bukti :

Misalkan $W = aX + bY$. karenanya

$$M_{aX+bY}(t) = M_W(t)$$

$$= E\left(e^{tW}\right)$$

$$= E\left(e^{t(aX+bY)}\right)$$

$$= E\left(e^{taX}\, e^{tbY}\right)$$

$$= E\left(e^{taX}\, e^{tbY}\right) \qquad \text{(dari teorema 8.3)}$$

$$= M_X(at) M_Y(bt)$$

Teorema ini sangat kuat. Ini membantu kita menemukan sebuah distribusi kombinasi linier dari variabel acak independen. Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana kita dapat menggunakan teorema ini untuk menentukan distribusi linier kombinasi.

Contoh 8.12. Misalkan variabel acak X adalah normal dengan mean 2 dan standar deviasi 3 dan variabel acak Y juga normal dengan mean 0 dan standar deviasi 4. Jika X dan Y adalah independen, maka berapakah distribusi probabilitas dari variabel acak $X+Y$?

Jawab :

Karena $X \sim N(2,9)$, fungsi pembangkit momen dari X diberikan oleh

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = e^{2t + \frac{9}{2}t^2}$$

Demikian pula, karena $Y \sim N(0,16)$,

$$M_Y(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = e^{\frac{16}{2}t^2}$$

Karena X dan Y adalah independen, fungsi pembangkit momen dari $X+Y$ diberikan oleh

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

$$= e^{2t + \frac{9}{2}t^2}\, e^{\frac{16}{2}t^2}$$

$$= e^{2t + \frac{25}{2}t^2}$$

Oleh karena itu $X+Y \sim N(2,25)$. Jadi, $X+Y$ berdistribusi normal dengan mean 2 dan varians 25. Dari informasi ini kita dapat mencari kepadatan probabilitas fungsi $W = X+Y$ sebagai

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-2}{5}\right)^2}, \qquad -\infty < w < \infty$$

Catatan 8.7. Sebenarnya jika X dan Y adalah variabel acak normal independen dengan masing-masing mean μ_X dan μ_Y dan varians σ_X^2 dan σ_Y^2, kemudian $aX+bY$ juga normal dengan mean $a\mu_X + b\mu_Y$ dan varians $a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$

Contoh 8.13. Misalkan X dan Y adalah dua independen dan terdistribusi identik variabel acak. Jika distribusi persekutuannya adalah chi-square dengan satu derajat kebebasan, lalu berapa distribusi $X+Y$? Berapa fungsi pembangkit momen $X-Y$?

Jawab :

Karena X dan Y *keduanya* $\chi^2(1)$, fungsi pembangkit momen (MGF) adalah

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

Dan

$$M_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

Karena variabel acak X dan Y adalah independen, maka fungsi pembangkit momen $X+Y$ diberikan oleh

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{2}{2}}}$$

Oleh karena itu $X+Y \sim \chi^2(2)$. Jadi, jika X dan Y adalah variabel acak chi-square independen, maka jumlahnya juga merupakan variabel acak chi-square. Selanjutnya, kita menunjukkan bahwa $X-Y$ bukanlah variabel acak chi-square, meskipun X dan Y keduanya adalah chi-square.

$$M_{X-Y}(t) = M_X(t)M_Y(-t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \frac{1}{\sqrt{1+2t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$$

Fungsi pembangkit momen ini tidak berhubungan dengan fungsi pembangkit momen variabel acak chi-square dengan derajat kebebasan apa pun. Lebih lanjut, hal ini mengherankan bahwa fungsi pembangkit momen ini tidak sesuai dengan distribusi yang diketahui.

Catatan 8.8. Jika X dan Y adalah chi-square dan variabel acak independen, maka kombinasi linearnya belum tentu merupakan variabel acak chi-square.

Contoh 8.14. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak independen Bernoulli dengan parameter p. Berapa distribusi $X+Y$?

Jawab :

Karena X dan Y adalah Bernoulli dengan parameter p, maka fungsi pembangkit momennya adalah

$$M_X(t) = (1-p) + pe^t \qquad M_Y(t) = (1-p) + pe^t$$

Karena, X dan Y adalah independen, jumlah fungsi pembangkit momennya adalah hasil kali dari fungsi pembangkit momennya, yaitu

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

$$= \left((1-p) + pe^t\right)\left((1-p) + pe^t\right)$$

$$= \left(1 - p + pe^t\right)^2$$

Oleh karena itu $X+Y \sim BIN(2, p)$. Jadi jumlah dari dua variabel acak independen Bernoulli adalah variabel acak binomial dengan parameter 2 dan p.

Latihan Soal

1. Misalkan X_1 *dan* X_2 adalah variabel acak dengan mean nol dan varians satu. Jika koefisien korelasi dari X_1 *dan* X_2 adalah $-0,5$, maka berapakah varians dari

$$Y=\sum_{k=1}^{2}k^2X_k$$

Jawab :

X_1 dan X_2 merupakan variabel acak dengan

$$E\left(X_k\right)=0$$

$$Var\left(X_k\right)=1 \qquad k=1,2$$

$$Cov\left(X_1\ ,X_2\right)=-0,5$$

$$Y=\sum_{k=1}^{2}k^2\ X_k$$

$$Y=k^2X_1+k^2X_2 \quad , \quad k=1,2$$

$$Y=1X_1+4X_2$$

$$Var\left(Y\right)=Var\left(X_1+4X_2\right)$$

$$Var\left(Y\right)=Var\left(X_1\right)+16Var\left(X_2\right)+\left(2\right)\left(4\right)cov\left(X_1,X_2\right)$$

$$Cov\left(X_1,X_2\right)=Cov\left(X_1,X_2\right).\sigma_X\ .\sigma_Y$$

$$=-0,5\left(1\right)\left(1\right)$$

$$=-0,5$$

$$Var\left(Y\right)=1+16\left(1\right)+\left(2\right)\left(4\right)\left(-0,5\right)$$

$$Var\left(Y\right)=17-4$$

$$Var\left(Y\right)=13$$

2. Jika kepadatan gabungan dari variabel acak X *dan* Y adalah

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8} & \text{untuk } (x,y)\in\{(x,0),(0,-y)\mid x,y=-2,-1,1,2\}\\ 0 & \text{untuk yang lainnya}\end{cases}$$

berapa kovarians X *dan* Y? Apakah X *dan* Y independen?

Jawab :

$f(x,y)$		X			
		-2	-1	1	2
Y	-2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	-1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
	2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0

Titik marginal dari X

x	-2	-1	1	2
$P_x(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

Titik marginal dari Y

y	-2	-1	1	2
$P_y(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

$$E(X)=-2\times\frac{2}{8}-1\times\frac{2}{8}+1\times\frac{2}{8}+2\times\frac{2}{8}=0$$

$$E(Y)=-2\times\frac{2}{8}-1\times\frac{2}{8}+1\times\frac{2}{8}+2\times\frac{2}{8}=0$$

$$E(X)=E(Y)=0$$

$$E\left(X^2\right)=4\times\frac{2}{8}+1\times\frac{2}{8}+1\times\frac{2}{8}+4\times\frac{2}{8}=2,5$$

$$E\left(Y^2\right)=4\times\frac{2}{8}+1\times\frac{2}{8}+1\times\frac{2}{8}+4\times\frac{2}{8}=2,5$$

$$E\left(X^2\right)=E\left(Y^2\right)=2,5$$

$$E\left(XY\right)=-2\times1\times\frac{1}{8}-2\times2\times\frac{1}{8}-1\times1\times\frac{1}{8}-1\times2\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1$$
$$\times(-2)\times\frac{1}{8}+2\times(-1)\times\frac{1}{8}+2\times(-2)\times\frac{1}{8}$$

$$E\left(XY\right)=\sum_x\sum_y xy\,P\left(xy\right)$$

$$E\left(XY\right)=\frac{1}{8}\left(-2-4-1-2-1-2-2-4\right)=-\frac{1}{8}\times16=-2$$

Maka Kovarians $XY=Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right).E\left(Y\right)$

$$=-2-0=-2$$

Sehingga X dan Y tidak independen

3. Misalkan variabel acak $X\ dan\ Y$ adalah independen dan terdistribusi identik. Misalkan $Z=aX+Y$. Jika koefisien korelasi antara $X\ dan\ Z$ adalah $\frac{1}{3}$, lalu berapakah nilai konstanta a?

   Jawab :

Diberikan $X\ dan\ Y$ adalah dua variabel acak independen dan terdistribusi identik

$\mu_x=\mu_y$, $\sigma_x=\sigma_y$ dan $Cov\left(x,y\right)=0$

Misalkan:

$$Z=aX+Y$$

$$\mu_Z=E\left(Z\right)=E\left(aX+Y\right)$$

$$=aE\left(X\right)+E\left(Y\right)$$

$$= a\,\mu_x + \mu_y$$

$$\sigma_2^2 = E\left[(Z - \mu_Z)^2\right]$$

$$= E\left[\left(aX + Y - a\mu_x - a\,\mu_y\right)^2\right]$$

$$= E\left[a\left(X - \mu_x + (Y - \mu_y)\right)\right]^2$$

$$= E[a^2\left(X - \mu_x)^2 + \left(Y - \mu_y\right)^2 + 2a\left(X - \mu_x\right)\left(Y - \mu_y\right)\right]$$

$$= a^2\,E[\left(X - \mu_x)^2\,\right] + E\left[\left(Y - \mu_y\right)^2\,\right] + 2a\,E\left[\left(X - \mu_x\right)\left(Y - \mu_y\right)\right]$$

$$= a^2\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 0$$

$$= a^2\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 0 \quad [\sigma_x^2 = \sigma_y^2]$$

$$= (a^2 + 1)\sigma_x^2$$

$$= \sqrt{a^2 + 1}\;\sigma_x$$

$$Cov(x, z) = E\left[\left(X - \mu_x\right)\left(Z - \mu_z\right)\right]$$

$$= E[\left(a\left(X - \mu_x\right) + \left(Y - \mu_y\right)\left(X - \mu_x\right)\right]$$

$$= E[\left(a\left(X - \mu_x\right)^2 + \left(Y - \mu_y\right)\left(X - \mu_x\right)\right]$$

$$= E[\left(a\left(X - \mu_x\right)^2\,\right] + E\left[\left(Y - \mu_y\right)\left(X - \mu_x\right)\right]$$

$$= E[\left(a\left(X - \mu_x\right)^2\right] + 0$$

$$= E[\left(a\left(X - \mu_x\right)^2\right]$$

korelasi antara $x\,dan\,z$ adalah

$$\rho(x, z) = \frac{Cov(x, z)}{\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{a\sigma_x^2}{\sqrt{a^2+1}\ \sigma_x\quad \sigma_x}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{a\sigma_x^2}{\sqrt{a^2+1}\ \sigma_x^2}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1}=3a$$

$$a^2+1=9^2$$

$$8a^2=1$$

$$a^2=\frac{1}{8}$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

4. Misalkan $X\ dan\ Y$ adalah dua variabel acak independen berdistribusi chi-kuadrat dengan 2 derajat kebebasan. Berapa fungsi pembangkit momen dari variabel acak $2X+3Y$? Jika memungkinkan, berapa distribusinya $2X+3Y$?

   Jawab:

   MGF distribusi chi-Square dengan $df=2$ adalah

$$M_x(t)=\frac{1}{(1-2t)^{2/2}}=\frac{1}{(1-2t)}$$

$$M_y(t)=\frac{1}{(1-2t)^{2/2}}=\frac{1}{(1-2t)}$$

   Kemudia MGF dari $Z=2X+3Y$ adalah

$$M_z(t)=E\left[e^{t(2X+3Y)}\right]$$

   Sehingga $X\ dan\ Y$ *independent* jadi ,

$$M_z(t)=E\left[e^{t(2X+3Y)}\right]=E\left[e^{(2tX+3tY)}\right]=E\left[e^{(2tX+3tX)}\right]=E\left(e^{2tX}\right)E\left(e^{2tY}\right)$$

$$=E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right)E\left(e^{tY}\right)$$

$$=\left[M_x(t)\right]^2\left[M_Y(t)\right]^2$$

$$=\left[\frac{1}{1-2t}\right]^5=\frac{1}{(1-2t)^{10/2}}$$

Jadi ,

$$M_{2X+3Y^{(t)}}=\frac{1}{(1-2t)^{10/2}}=\frac{1}{(1-2t)^{10/2}}$$

Sehingga didapat MGF distribusi Chi-Square dengan derajat kebebasan 10 . jadi menurut sifat MGF bisa dituliskan

$$2X+3Y\sim Chi-squared\left(df=10\right)$$

5. Misalkan $X\ dan\ Y$ adalah dua variabel acak independen. Jika $X\sim BIN(n,p)$ dan $Y\sim BIN(m,p)$, lalu berapakah distribusi $X+Y$?

Jawab:

$$X\rightarrow BIN(n,p)$$

Mgf dari X adalah

$$M_x(t)=\left(q+pe^t\right)^n$$

Dan juga

$$Y\rightarrow BIN(m,p)$$

Mgf dari Y adalah

$$M_y(t)=\left(q+pe^t\right)^m$$

Selanjutnya X dan Y *independent*

Kemudian MGF dari X dan Y adalah

$$M_{x+y}(t)=M_x(t)+M_y(t)$$

$$=\left(q+pe^t\right)^n+\left(q+pe^t\right)^m$$

$$=\left(q+pe^t\right)^{n+m}$$

Sehingga didapat MGF distribusi Binomial dengan parameter $m+n\,dan\,p$

$$X+Y \to BIN(n+m,p)$$

6. Misalkan X dan Y menjadi dua variabel acak independent. Jika X dan Y keduanya standar normal, lalu berapa distribusi variabel acak $\frac{1}{2}\left(X^2-Y^2\right)$?

   Jawab :

   - Misalkan $x \sim GAMMA(\alpha,\beta) \therefore$ PDF dari $x: f_x(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}}x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\sqrt{\alpha}}, x>0$

     MGF dari x : $M_x(t)=E\left(e^{tx}\right)=\int_0^\infty e^{tx}.\dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}}x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\sqrt{\alpha}}dx \qquad dimana,\ \sqrt{\alpha}=(\alpha-1)!$

     $$=\frac{1}{\beta^\alpha\sqrt{\alpha}}\frac{\sqrt{\alpha}}{\left(\frac{1}{\beta}-t\right)^\alpha}\frac{\int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{\beta}-t\right)}x^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\beta}-t\right)^\alpha}{\sqrt{\alpha}} \qquad \alpha>0,\frac{1}{\beta}-t>0$$

     Karena $\dfrac{\int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{\beta}-t\right)}x^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\beta}-t\right)^\alpha}{\sqrt{\alpha}}=1\left(\therefore pdf\ dari\ gamma\left(\alpha,\dfrac{1}{\frac{1}{\beta}-t}\right)\right)$

     Maka $\dfrac{1}{(1-\beta t)^\alpha}=(1-\beta t)^{-\alpha} \quad dimana\ 1-\beta t>0$

   - Mean $= E(x)=\dfrac{d}{dt}M_x(t)\Big|_{t=0}^{a}=\left[-\alpha(1-\beta t)^{-\alpha-1}\beta\right]_{t=0}^{a}=\alpha\beta$

     $$E\left(x^2\right)=\frac{d^2}{dt^2}M_x(t)\Big|_{t=0}^{a}=\left[-\alpha(-\alpha-1)(1-\beta)^{-\alpha-2}\beta^2\right]_{t=0}^{a}=\alpha(\alpha+1)\beta^2$$

     $$\therefore Variansi: Var(x)=E\left(x^2\right)-E^2(x)=\alpha(\alpha+1)\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha\beta^2$$

     $$x\sim N(0,1) \quad \therefore f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<\infty$$

     MGF dari x^2 $:M_{x^2}(t)=E\left(e^{tx^2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx^2}f_x(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx^2}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1-2t)} dx = \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{1-2t}} e^{-\frac{x^2}{2\frac{1}{(1-2t)}}} d$$

Karena $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{1-2t}} e^{-\frac{x^2}{2\frac{1}{(1-2t)}}} dx = 1\left(pdf\ dari\ N\left(0, \frac{1}{\sqrt{(1-2t)}}\right)\right)$

Menurut definisi dari persegi (tingkat kebebasan n) $\left(X_n^2\right)$

$$Y \sim X_n^2 \quad \therefore pdf\ : f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{y}{2}} . y^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}}, \quad y > 0 \qquad \therefore Y \sim gamma(\Gamma)\left(\alpha = \frac{n}{2}, \beta = 2\right)$$

$$\therefore x^2 \sim X_n^2$$

MGF dari $x^2 : M_{x^2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}} \equiv MGF\ \ dari\ \ Y^2$

MGF dari $\frac{x^2+y^2}{2} : M_{\frac{x^2+y^2}{2}}(t) = E\left(e^{\frac{t(x^2+y^2)}{2}}\right) = E\left(e^{\frac{tx^2}{2}}\right) E\left(e^{\frac{ty^2}{2}}\right) \quad [\therefore x, y\, independen]$

$$= M_{x^2}\left(\frac{t}{2}\right) M_{y^2}\left(\frac{t}{2}\right) = \left(\frac{1}{\left(1-2\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = \frac{1}{1-t}$$

$\therefore Dari\, MGF\ : \frac{x^2+y^2}{2} \equiv Z \sim gamma(\alpha = 1, \beta = 1) \equiv E_{xp}(\lambda = 1)$

PDF dari $Z : f_z(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z > 0 \\ 0 & yang\, lain \end{cases}$

7. Jika probabilitas fungsi kepadatan dari X dan Y adalah

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & jika\ \ 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & untuk\ yang\, lain \end{cases}$$

Lalu berapa fungsi pembangkit momen Bersama X dan Y?

Jawab :

kita diberi PDF gabungan dari x dan y

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & jika\ 0<x<1;0<y<1\\ 0 & untuk\ yang\ lain\end{cases}$$

temukan gabungan MGF $x\,dan\,y$ yaitu

$$m_{X,Y}(s,t)$$

$$m_{x,y}(s,t)=E\left[e^{sx+ty}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{sx+ty}f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 e^{sx+ty}(1)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 e^{sx}e^{ty}(1)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 e^{ty}\left\{\int_0^1 e^{sx}\,dx\right\}dy$$

$$=\int_0^1 e^{ty}\left[\frac{e^{sx}}{s}\right]_0^1 dy$$

$$=\int_0^1 e^{ty}\left[\frac{1}{s}\left(e^{s(1)}-e^{s(0)}\right)\right]dy$$

$$=\int_0^1 e^{ty}\left[\frac{e^{s}-e^{0}}{s}\right]dy$$

$$=\int_0^1 e^{ty}\left[\frac{e^{s}-1}{s}\right]dy$$

$$=\frac{e^{s}-1}{s}\int_0^1 e^{ty}\,dy$$

$$=\frac{e^{s}-1}{s}\left[\frac{e^{ty}}{t}\right]_0^1$$

$$=\frac{e^{s}-1}{s}\left(\frac{1}{t}\left(e^{s(1)}-e^{s(0)}\right)\right)$$

$$= \frac{e^s - 1}{s}\left[\frac{e^t - e^0}{t}\right]$$

$$= \frac{\left(e^s - 1\right)\left(e^t - 1\right)}{st}$$

Jadi diperoleh $m_{x,y}(s,t) = \dfrac{\left(e^s - 1\right)\left(e^t - 1\right)}{st}$

8. Misalkan fungsi kepadatan gabungan X dan Y menjadi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{36} & jika\ 1 \le x = y \le 6 \\ \dfrac{2}{36} & jika\ 1 \le x < y \le 6 \end{cases}$$

Apa korelasi koefisien dari X dan Y?

Jawab:

$$E(X) = \int_0^6 \int_X^6 Xf(X,Y)\,dYdX$$

$$= \int_0^6 \int_X^6 \left(\frac{2}{36}\right) XdYdX$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{2}{36}\right)\left(6X - X^2\right) dX$$

$$= \left(\frac{2}{36}\right)(108 - 72)$$

$$= \left(\frac{2}{36}\right)(36) = 2$$

$$E(Y) = \int_0^6 \int_0^Y Yf(X,Y)\,dXdY$$

$$= \int_0^6 \int_0^Y \left(\frac{2}{36}\right) YdXdY$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{2}{36}\right) Y^2 dY$$

$$= \left(\frac{2}{36}\right)(72)$$

$$= 4$$

$$E(XY) = \int_0^6 \int_X^6 XYf(X,Y)\,dYdX$$

$$= \int_0^6 \int_X^6 \left(\frac{2}{36}\right) XYdYdX$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{1}{36}\right)\left(36X - X^3\right)dX$$

$$= 9$$

$$E\left(X^2\right) = \int_0^6 \int_X^6 X^2 f(X,Y)\,dYdX$$

$$= \int_0^6 \int_X^6 \left(\frac{2}{36}\right) X^2 dYdX$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{2}{36}\right)\left(6X^2 - X^3\right)dX$$

$$= 24 - 18$$

$$= 6$$

$$E\left(Y^2\right) = \int_0^6 \int_0^Y Y^2 f(X,Y)\,dXdY$$

$$= \int_0^6 \int_0^Y \left(\frac{2}{36}\right) Y^2 dXdY$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{2}{36}\right) Y^3 dY$$

$$= 18$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 9 - (2\ .4) = 9 - 8 = 1$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 = 6 - 4 = 2$$

$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - \left(E(Y)\right)^2 = 18 - 16 = 2$$

Hubungan dari X dan Y adalah $\rho XY = \frac{Cov(X,Y)}{(V(X).V(Y))^{1/2}} = \frac{1}{2}$

9. Misalkan X dan Y adalah variabel acak yang menghasilkan momen bersama

fungsi

$$M(s,t) = \left(\frac{1}{4}e^s + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}\right)^{10}$$

Untuk semua s dan t real. Berapa kovarian dari X dan Y?

Jawab :

Diberikan bahwa x, y merupakan variabel random dengan fungsi pembangkit momen gabungan,

$$M(s,t) = \left(\frac{1}{4}e^s + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}\right)^{10}$$

$$E(x) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\left(\frac{1}{4}e^s + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}\right)^{10}\right)_{s=10,t=0}^{a}$$

$$= \frac{10}{4}e^s\left(\frac{1}{4}e^s + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}\right)^9 \Bigg|_{s=0,t=0}^{a}$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right)^9 = \frac{5}{2}$$

$$E(y) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{1}{4}e^s + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}\right)^{10}\right)$$

$$= \frac{10\ .3}{8}e^t\left(\frac{1}{4}e^s + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}\right)^9 \Bigg|_{s=0,t=0}^{a}$$

$$= \frac{15}{4}$$

$$E(xy) = \frac{45}{2}\left(\left(\frac{1}{4}e^s + \frac{3}{8}e^t + \frac{3}{8}\right)^8\left(\frac{3}{8}e^t\right)\right)_{s=0,t=0}^{a}$$

$$= \frac{135}{16}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right)^8 = \frac{135}{16}$$

Kovarian dari x dan $y = E(xy) - E(x).E(y)$

$$= \frac{135}{16} - \left(\frac{5}{2} \times \frac{15}{4}\right) = \frac{135-150}{16} = -\frac{15}{16}$$

Oleh karena itu $cov(x, y) = -\frac{15}{16}$

10. Misalkan $X \, dan \, Y$ merupakan variabel random dengan fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi} & untuk \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \\ 0 & untuk \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} > 1 \end{cases}$$

Berapakah kovarian dari X dan Y? apakah X dan Y independent?

Jawab :

$Cov(XY) = E(xy) - E(x).E(y)$

$$f_1(x) = \int_{\frac{-3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{6\pi} dy = \frac{1}{6\pi}\left[\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right] = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}, \quad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{\frac{-2}{3}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{6\pi} dx = \frac{1}{6\pi}\left[\frac{2}{3}\sqrt{4-y^2} + \frac{2}{3}\sqrt{4-y^2}\right] = \frac{4\sqrt{4-y^2}}{18\pi} = \frac{2\sqrt{4-y^2}}{9\pi}, \quad 0 < x < 1$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_{\frac{-3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{6\pi} xy \, dx \, dy = \frac{1}{2 \times 6\pi} \int_0^1 x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 (4-x^2) - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 (4-x^2)\right] = 0$$

$$E(X) = \int_0^1 \frac{x}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{-2}{3 \times 4\pi}\left[3^{3/2} - 4^{3/2}\right] = \frac{5,605}{12\pi}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{2}{4\pi} y\sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{-2}{27\pi}\left[8^{3/2} - 9^{3/2}\right] = \frac{8,74}{27\pi}$$

Maka kovariansi $xy = Cov(XY) = 0 - \frac{5,605}{12\pi} \times \frac{8,74}{27\pi} = -0,0153$

$$f(x,y) \neq f_1(x).f_2(x)$$

Sehingga X *dan* Y tidak independen

11. Misalkan X dan Y menjadi dua variabel random. Misalkan $E(X)=1, E(Y)=2, Var(X)=1, Var(Y)=2,$ dan $Cov(X,Y)=\frac{1}{2}.$ Untuk nilai apa saja kon stanta $a\,dan\,b$, variabel acak $aX+bY$, yang nilai yang diharapkan adalah 3, memiliki varian minimum?

Jawab :

$E(X)=1E(Y)=2$

$Var(X)=1Var(Y)=2$

$Cov(X,Y)=\frac{1}{2}$

$Z=aX+bY$ dimana nilai yang diharapkan $=3$

$E(Z)=E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

$3=a(1)+b(2)$

$a+2b=3$

$a=3-2b$

$Var(2)=a^2\,Var(X)+b^2 Var(Y)+2ab\,Cov(X,Y)$

$=a^2(1)+b^2(2)+2ab\left(\frac{1}{2}\right)$

$=a^2+2ab+ab$

Substitusi $a=3-2b$

$=(3-2b)^2+2b^2+(3-2b)b$

$=9+4b^2-12b+2b^2+3b-2b\,\hat{}\,2$

$Var(2)=4b^2-9b+9$

Untuk Variance minimum maka $\frac{d}{db}Var(2)=0$

$\frac{d}{db}\left(4b^2-9b+9\right)=0$

$8b-9=0$

$$b=\frac{9}{8}$$

$$a=3-2b=3-2\left(\frac{9}{8}\right)=\frac{3}{4}$$

Untuk $a=\frac{3}{4}$ *dan* $b=\frac{9}{8}$ didapat Varians minimum

12. Sebuah kotak berisi 5 bola putih dan 3 bola hitam. Gambar 2 bola tanpa penggantian. Jika X melambangkan jumlah bola putih dan Y melambangkan jumlah bola hitam yang ditarik, berapakah kovariansi dari X *dan* Y?

    Jawab :

X	0	1	2	3	4	5	Marginal Y
0	0	0	$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{5}{14}$	0	0	0	$\frac{10}{28}$
1	0	$\frac{3x5}{28}$	0	0	0	0	$\frac{15}{28}$
2	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{28}$
3	0	0	0	0	0	0	0
$P(x)$ marginal dari X	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$	0	0	0	1

$$E(X)=0x\frac{3}{28}+1x\frac{15}{28}+2x\frac{10}{28}=\frac{35}{28}=E(Y)$$

$$E(XY)=1x1x\frac{15}{28}=\frac{15}{28}\rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{15}{28}-\left(\frac{35}{28}\right)^2=-1.02679$$

13. Jika X mewakili bilangan 1 *dan* Y mewakili bilangan 5 in tiga kali lemparan dadu enam sisi yang adil, apa korelasi antara X *dan* Y?

    Jawab :

    Dari informasi yang diberikan

x	y	x^2	y^2	xy
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	2	0	4	0
0	3	0	9	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1
1	2	1	4	2
2	0	4	0	0
2	1	4	1	2
3	0	9	0	0
$\sum x = 10$	$\sum y = 10$	$\sum x^2 = 20$	$\sum y^2 = 20$	$\sum xy = 5$

    Misalkan, probabilitas x *dan* y *dalam* 3 lemparan dari dadu enam sisi yang adil

    $$n = 10$$

    $$korelasi\ \gamma = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)\left(n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right)}}$$

    $$\gamma = \frac{50 - 100}{\sqrt{(200-100)(200-100)}}$$

    $$\gamma = \frac{-50}{10 \square 10} = -\frac{1}{2}$$

14. Misalkan Y dan Z menjadi dua variabel random. Jika $Var(Y) = 4, Var(Z) = 16,$ *dan* $Cov(Y,Z) = 2,$ lalu berapa $Var(3Z - 2Y)$?

    Jawab :

    Varians di sini dihitung sebagai:

    $$Var(3Z-2Y) = Var(3Z) + Var(2Y) - 2Cov(3Z, 2Y)$$

    Perhatikan bahwa konstanta dapat dikeluarkan dari operator varians hanya setelah mengkuadratkannya dan dari operator kovarian sebagaimana adanya. Karena itu, kita sampai di sini:

$$Var(3Z-2Y)=3^2Var(Z)+2^2Var(Y)-2*3*2Cov(Z,Y)$$

$$Var(3Z-2Y)=9Var(Z)+4Var(Y)-12Cov(Z,Y)$$

$$=9*16+4*4-12*2$$

$$=144+16-24=136$$

Oleh karena itu, 136 adalah varians yang dibutuhkan di sini.

15. Tiga variabel random $X_1, X_2, X_3,$ mempunyai variansi sama σ^2 dan koefisien korelasi antara $X_1\, dan\, X_2$ dari ρ dan antara $X_1\, dan\, X_3$ dan antara $X_2\, dan\, X_3$ dari nol. Apa korelasi antara Y dan Z dimana $Y = X_1 + X_2$ dan $Z = X_2 + X_3$?

    Jawab:

$$x_1\ ,x_2\ \ ,x_3 = varian\ yang\ sama\ \sigma^2$$

$$Corr(x_1\, x_2) = p$$

$$Corr(x_1\, x_3) = 0$$

$$Corr(x_2\, x_3) = 0$$

$$Corr(x,y) = \frac{cov(x_1 x_2)}{\sigma_x\, \sigma_y} = p$$

$$Corr(x,y) = \frac{cov(x_1 x_2)}{\sigma^2} = p$$

$$= cov(x_2 x_3) = 0$$

$$= cov(x_1 x_3) = 0$$

$$= cov(x_1 x_2) = p\sigma^2$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$z = x_2\, x_3$$

$$Cov(y,z) = cov x_1 + x_{2,}\ x_2 + x_3)$$

$$= cov(x_{1,} x_2) + cov(x_1 x_3) + cov(x_2 x_2) + cov(x_2 x_3)$$

$$= cov(x_1x_2) + 0 + var(x_2) + 0$$

$$= p\sigma^2 + \sigma^2$$

$$Cov(y,z) = \sigma^2(1+p)$$

$$Cov(y,z) = \frac{cov(y,z)}{\sqrt{var(y)var(z)}}$$

$$cov(x_{1,}x_2) = \sigma^2$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + 2cov(x_{1,}x_2)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + 2\sigma^2$$

$$\sigma_y^2 = 2\ \sigma^2(1+P)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + 2cov(x_{2,}x_3)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + 0$$

$$= \sigma_z^2 = 2\ \sigma^2$$

$$Corr(y,z) = \frac{cov(y,z)}{\sqrt{\sigma_y}\sqrt{\sigma_z}}$$

$$= \frac{\sigma^2(1+p)}{\sqrt{2\ \sigma^2(1+P)}\ \sqrt{2\ \sigma^2}}$$

$$= \frac{\sigma^2(1+p)}{2\ \sigma^2\sqrt{(1+P)}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+P)}$$

Jadi, $corr(y,z) = \frac{1}{2}\sqrt{(1+P)}$

16. Jika X *dan* Y merupakan dua variabel random Bernoulli independen dengan parameter p, maka berapa fungsi pembangkit momen gabungan dari $X - Y$?

    Jawab :

    Misalkan

$x = 1$ jika sukses terjadi dan

$x = 0$ jika terjadi kegagalan

Maka x memiliki distribusi bernoulli dengan parameter P:

$$P(X = x) = P^x (1 - P)^{1-x}$$

Fungsi pembangkit momen $q\,x$ adalah

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= P(x = 1)e^t + P(x = 0)e^0$$

$$= Pe^t + (1 - P) \qquad 1 - P = q$$

$$= q + Pe^t \qquad t \in R$$

Serupa y adalah distribusi bernoulli dengan parameter P

Kemudian

$$M_{-y}(t) = q + Pe^t$$

Misalkan

$$M_{-y}(t) = E(e^{-ty})$$

$$= Pe^{-t} + q$$

$$= q + Pe^{-t} \qquad t \in R$$

Misalkan x dan y adalah dua distribusi bernoulli independen

Misalkan $w = x - y$

$$M_w(t) = M_x(t).M_{-y}(t)$$

$$= (q + Pe^t)(q + Pe^{-t})$$

$$M_{x-y}(t) = q^2 + Pqe^{-t} + Pqe^t + P^2$$

$$M_{x-y}(t) = P^2 + q^2 + Pq(e^t + e^{-t}), \ \ t \in R$$

$$M_{x-y}(t) = P^2 + q^2 + Pq(e^t + e^{-t})$$

17. Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah variabel acak normal dengan variansi σ^2 dan kovariansi antara pas-

angan variabel acak $\rho\sigma^2$, apa variansi dari $\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)$?

Jawab :

Diberikan

$$V\left(X_i\right)=\sigma^2,\ i=1,2,\ldots,n$$

$$Cov\left(X_i,X_j\right)=\rho\sigma^2,\ i\neq j,\ i=1,2,\ldots,n\, dan\ j=1,2,\ldots,n$$

$$V\left(\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)\right)=\frac{1}{n^2}V\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}V\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}V\left(X_1\right)+V\left(X_2\right)+\ldots+V(X_i)+2Cov\left(X_1,X_2\right)\\ +2Cov\left(X_1,X_3\right)+\ldots+2Cov\left(X_i,X_j\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\sigma^2+\sigma^2+\ldots+\sigma^2+2\rho\sigma^2+2\rho\sigma^2+\ldots+2\rho\sigma^2\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2+2n\rho\sigma^2\right)$$

$$=\frac{n\sigma^2}{n^2}\left(1+2\rho\right)$$

Jadi,

$$V\left(\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)\right)=\left(\frac{1+2\rho}{n}\right)\sigma^2$$

18. Koefisien korelasi antara X dan Y adalah $\frac{1}{3}$ dan $\sigma_X^2=a,\ \sigma_Y^2=4a,$ dan $\sigma_Z^2=114$ dimana $Z=3X-4Y$. Berapakah nilai dari konstanta a?

    Jawab :

    Koefisien korelasi antara variabel random X dan Y adalah $\frac{1}{3}$

    Variabel random Z terdefinisi $Z=3X-4Y$

    Maka, $cov\left(X,Y\right)$ adalah

$$\frac{1}{3}=\frac{cov(XY)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{cov(XY)}{\sqrt{a}\sqrt{4a}}$$

$$cov(XY)=\frac{2a}{3}$$

$$Var(Z)=Var(3X-4Y)$$

$$\sigma_Z^2=Var(3X)+Var(4Y)-2Cov(X,Y)$$

$$114=3\sigma_X^2+4\sigma_Y^2-2Cov(X,Y)$$

$$114=3a+4(4a)-\frac{4a}{3}$$

$$114=3a+16a-\frac{4a}{3}$$

$$114=\frac{53}{3}a$$

$$a=114\ :\frac{53}{3}$$

$$a=6,45$$

19. Misalkan $X\ dan\ Y$ menjadi variabel acak independen dengan $E(X)=1, E(Y)=2,\ dan\ Var(X)=Var(Y)=\sigma^2$. Berapa nilai konstanta k supaya nilai yang diharapkan dari variabel acak $k(X^2-Y^2)+Y^2$ sama dengan σ^2?

    Jawab:

    $$E(x)=1\ ;E(y)=2\ ;v(x)=v(y)=\sigma^2$$

    $$x\ dan\ y\ independen$$

    $$E\left(K\left(x^2-y^2\right)+y^2\right)=\sigma^2$$

    $$\rightarrow K\in\left(x^2-y^2\right)+E\left(y^2\right)=\sigma^2$$

    $$\rightarrow K\left(E\left(x^2\right)-E\left(y^2\right)\right)+E\left(y^2\right)=\sigma^2$$

$$didapatkan\, E\left(x^2\right) = v\left(x\right) + \left[E\left(x\right)\right]^2$$

$$dan\, E\left(x^2\right) = v\left(y\right) + \left[E\left(y\right)\right]^2$$

$$\rightarrow K\left[\sigma^2 + 1 - \left(\sigma^2 + 4\right)\right] + \sigma^2 + 4 = \sigma^2$$

$$\rightarrow K\left(-3\right) + \sigma^2 + 4 = \sigma^2$$

$$\rightarrow 3K = 4$$

$$\rightarrow K = \frac{4}{3}$$

20. Misalkan X menjadi sebuah variabel random dengan varians terbatas. Jika $Y = 15 - X$, lalu berapa koefisien korelasi antara variabel random X dan $\left(X + Y\right)X$?

 Jawab:

 Kita punya $Y = 15 - X$

$$X + Y = 15$$

$$Cor\left(X, \left(X + Y\right)X\right) = Cor\left(X, 15X\right)$$

$$= 15Var\left(X\right)$$

$$= 15\sigma_x^2$$

$$Var\left(X\right) = \sigma_x^2,$$

$$Var\left(15X\right) = \left(15\right)^2 \sigma_x^2$$

 Jadi,

$$Korelasi\left(X, \left(X + Y\right)X\right) = \frac{15\sigma_x^2}{\sqrt{\sigma_x^2 \left(15\right)^2 \sigma_x^2}}$$

$$= \frac{15\sigma_x^2}{15\sigma_x^2} = 1$$

21. Nilai mean dari variabel acak normal X adalah 10 dan variansnya adalah 12. Nilai mean dari variabel acak normal Y adalah -5 dan variansinya adalah 5. Jika kovariansi X dan Y adalah 4, lalu berapakah probabilitas dari kejadian $X+Y>5$?

    Jawab :

    $$X \sim N(10,12)$$

    $$Y \sim N(-5,5)$$

    $$Cov(x,y)=4$$

    Sekarang, $P(X+Y>5)$

    Berdasarkan varians normal standar

    $$\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)=z\right\}$$

    $$\sigma=\sqrt{v(x)}$$

    $$P\left(\frac{(x+y)-E(x+y)}{\sqrt{v(x+y)}}>\frac{5-E(x+y)}{\sqrt{v(x+y)}}\right)$$

    maka

    $$E(x+y)=E(x)+E(y)=10+(-5)=5$$

    $$v(x+y)=v(x)+v(y)+2cov(x,y)$$

    $$=12+5+(2\ .4)$$

    $$=12+5+8$$

    $$\sigma^2 x+y=25$$

    $$\sigma xy=\sqrt{25}=5$$

    selanjutnya

    $$P\left(\frac{(x+y)-5}{5}>\frac{5-5}{5}\right)$$

    $$P(Z>0)=\frac{1}{2}$$

Daftar Pustaka

Sahoo, Prasanna. 2006. *Probability and Mathematical Statistics*. Louisville: Departement of Mathematics, University of Louisville

Walpole, Ronald E dkk. 2012. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists* (Ninth Edition), United States of America: Prentice Hall

Wibisono, Yusuf. 2015. *Metode Statistik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models* (Tenth Edition), California: Elsevier

Wackerly, Dennis D, William Mendenhall III, Richard L Scheaffer. 2008. *Mathematical Statistics with Applications* (Seventh Edition). Florida: Duxbury Press

Soong, T.T. 1988. *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers.* New York:John Wiley and Sons

Ott R Lyman, Michael Longnecker. 2015. *An Introduction to Statistical Methods & Data Analysis* (Seventh Edition). Texas:Cengage Learning

Devore, Jay L, Kenneth N Berk. 2012. *Modern Mathematical Statistics with Applications* (Second Edition), New York:Springer

Roussas, G. 2003. *An Introduction to Probability and Statistical Inference*. San Diego: Academic Press.

Ross, Sheldon M. 2000. *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* San Diego: Harcourt Aca

Taylor, L D. 1974. *Probability and Mathematical Statistics.* New York: Harper & Row

Ross, S. 1988. *A First Course in Probability.* New York: Macmillan.

Rinaman, W. C. 1993. *Foundations of Probability and Statistics.* New York: Saunders College Publishing.

Meyer, P. L. 1970. *Introductory Probability and Statistical Applications.* Reading: Addison-W