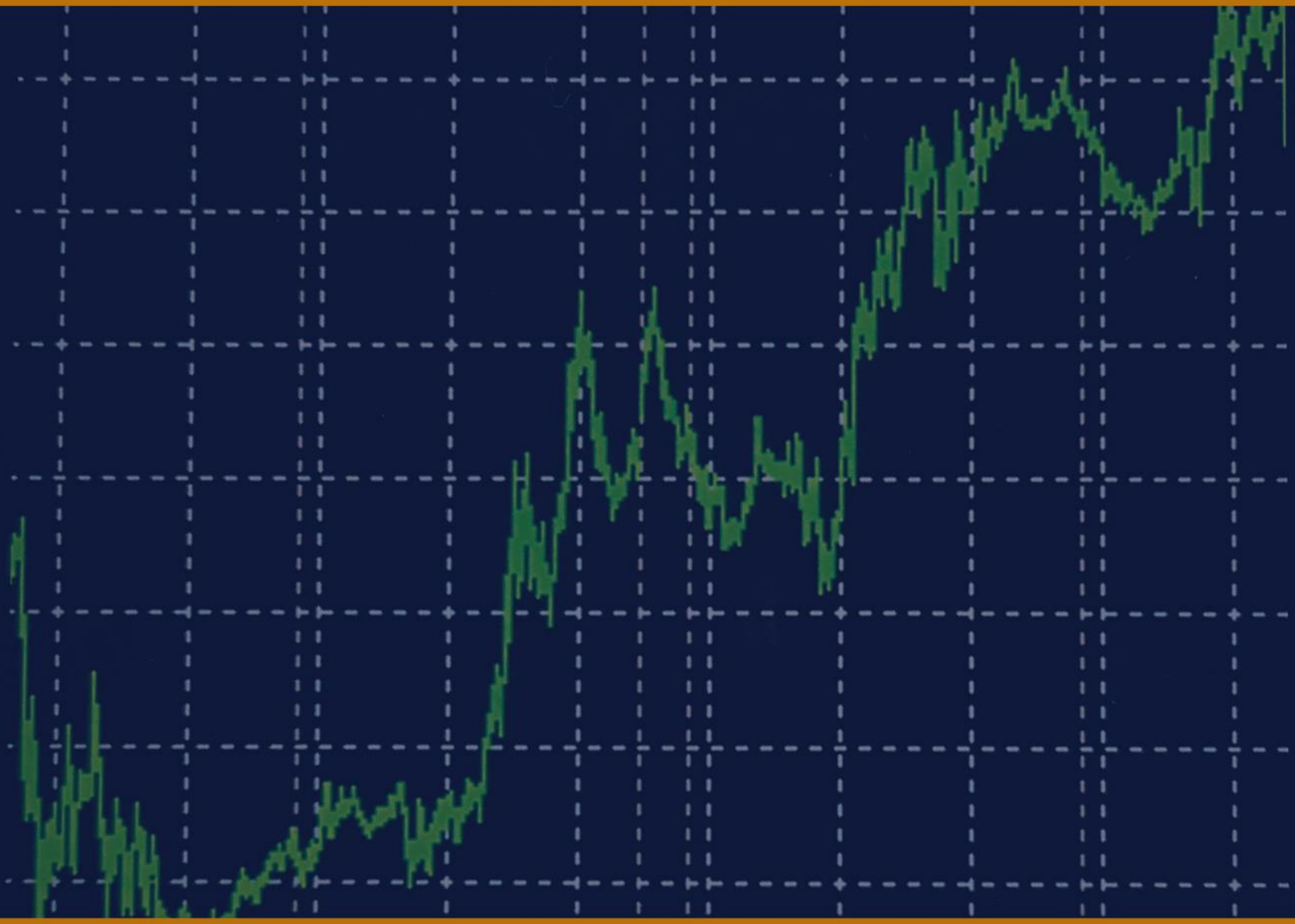
PENGANTAR PROSES STOKASTIK



H. Sugiyarto, S.Si., M.Si., Ph.D.

PENGANTAR PROSES STOKASTIK

Penyusun	: H. Sugiyarto, M.Si., Ph.D
Layout dan Desain Cover	: Rizal Redita Putra
	Galang Suryaputra
	Imas Abu Yazid

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI TERAPAN
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN

Kata Pengantar

Bismillahirrahmanirrahiim
Puji syukur Alhamdulillah penyusun panjatkan kepada Allah SWT atas berkat rahmat dan hidayah-Nya sehingga penyusun dapat menyelesaikan buku dengan judul “Pengantar Proses Stokastik”. Buku ini digunakan sebagai salah satu pegangan untuk mata kuliah Proses Stokastik.

Buku ini terdiri dari 9 bab yaitu :

1. Teori Probabilitas
2. Variabel Acak dan Distribusinya
3. Proses Poisson
4. Proses Pembaharuan
5. Rantai Markov Waktu Diskrit
6. Rantai Markov Waktu Kontinu
7. Proses Pembaruan
8. Model Reliabilitas
9. Model Antrian

Penyusun menyadari bahwa buku ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan buku ini. Akhir kata, penyusun berharap semoga buku ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan khususnya pada bidang Matematika

Yogyakarta, 2021

Penyusun

Daftar ISI

BAB III

BAB IV

BAB V

BAB VI

BAB VII

BAB VIII

BAB IX

BAB I

TEORI PROBABILITAS

1.1. Ruang Sampel dan Kejadian

Pada subbab ini akan diberikan beberapa percobaan, yaitu melempar uang logam, melempar dadu, mengambil kartu, dan lain-lain. Hasil percobaan tidak dapat diprediksi sebelumnya, tetapi semua hasil yang mungkin dari suatu ekperimen dapat diprediksi menggunakan teori probabilitas yaitu dengan memperhatikan uji coba random pada suatu percobaan. Hasil dari uji coba random pada suatu percobaan disebut titik sampel. Titik sampel dinotasikan dengan ω (omega kecil).

1.1.1. Ruang Sampel

Ruang sampel merupakan himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Ruang sampel dinotasikan dengan Ω (omega kapital).

1.1.2. Kejadian

Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Kejadian dinotasikan dengan huruf kapital, seperti $(A, B, C, \ldots)$.

Berikut adalah beberapa contoh ruang sampel dan kejadian

Contoh 1.1. Tentukan ruang sampel dari percobaan melempar 2 uang logam

Penyelesaian :

$S =$ Ruang Sampel

$A =$ Muncul sisi angka

$G =$ Muncul sisi gambar

Ruang sampelnya adalah $S = \{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$

Contoh 1.2. Suatu percobaan mencatat sambungan telefon seluler yang terjadi secara random pada interval waktu $(0,20)$ detik. Tentukan ruang sampelnya dan tentukan kejadian dari ruang sampel yang bersesuaian

Penyelesaian :

Proses ini mendefinisikan suatu percobaan dimana hasilnya adalah seluruh titik pada interval waktu $(0,20)$, sehingga ruang sampelnya adalah

$$S = \{x|0 \leq x \leq 20\}$$

Dibaca "S adalah kumpulan semua x, dimana x berada pada interval waktu $(0,20)$". Sedangkan kejadian dari ruang sampel adalah seluruh titik pada interval waktu $(0,20)$.

Contoh 1.3. Tentukan beberapa kejadian berikut dari percobaan melempar 2 uang logam.

a) Kejadian muncul angka pada pelemparan pertama
b) Kejadian muncul paling sedikit satu angka

Penyelesaian :

Ruang sampel dari percobaan melempar 2 uang logam adalah

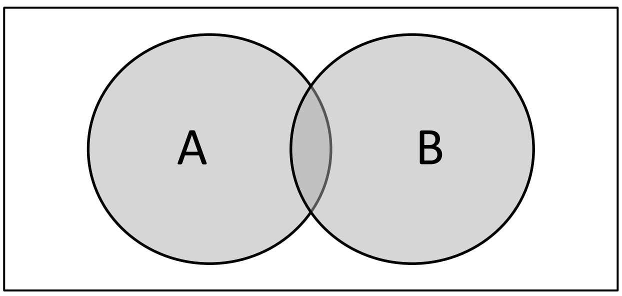
$$S = \{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$$

a) Kejadian muncul angka pada pelemparan pertama adalah
$$A = \{(A, A), (A, G)\}$$
b) Kejadian muncul paling sedikit satu angka adalah
$$B = \{(A, A), (A, G), (G, A)\}$$

Definisi 1.1. Untuk setiap kejadian A dan B pada ruang sampel Ω , dapat didefinisikan :

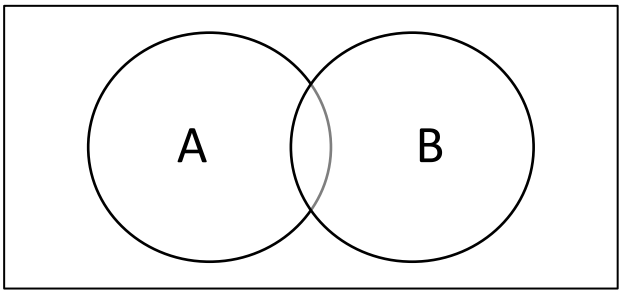
1. Gabungan

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \; atau \; \omega \in B\}$$



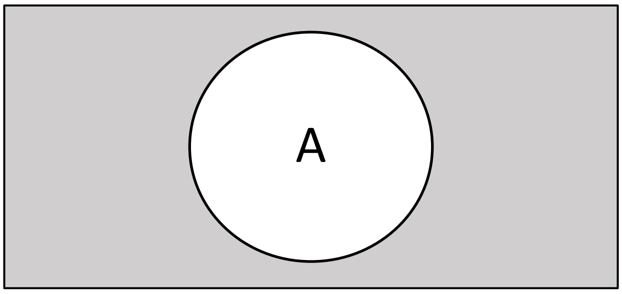
2. Irisan

$$AB = A \cap B = \{\omega : \ \omega \in A \ atau \ \omega \in B\}$$



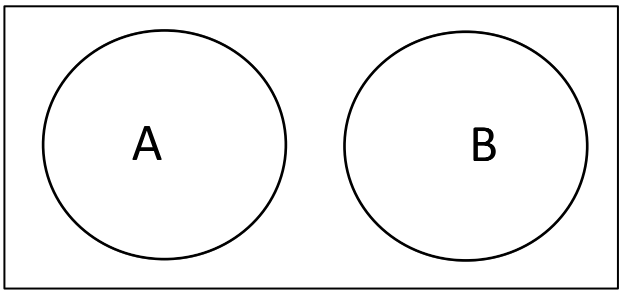
3. Komplemen

$$A^c = \{\omega : \ \omega \notin A \}$$



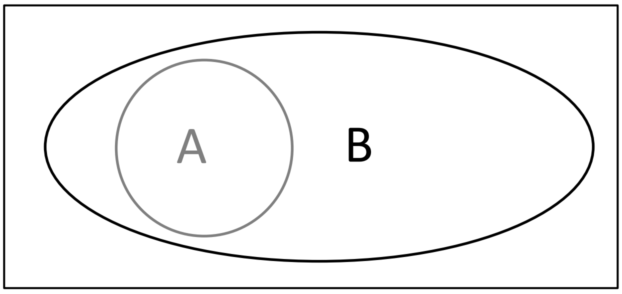
4. Eksklusi

$$AB = \phi$$



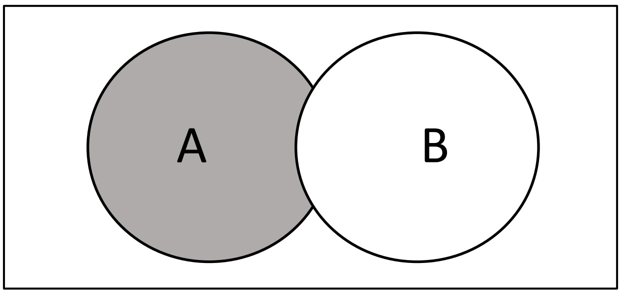
5. Inklusi

$$A \subset B(tidak\ terkecuali\ A = B)$$



6. Selisih

$$A - B = AB^c = \omega :\ \omega \in A\ \ dan\ \omega \notin B\ \}$$



Contoh 1.4. Percobaan melempar satu keping uang logam, lalu $\Omega = \{\mathrm{A}, \mathrm{G}\}$, dimana A dan G berturut-turut berarti bahwa yang muncul adalah "angka" dan "gambar".

Contoh 1.5. Jika melakukan percobaan melempar satu keping uang logam sebanyak n kali percobaan, maka jumlah dari semua hasil yang mungkin adalah $2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n\ (prinsip\ perkalian)$.

Contoh 1.6. Berdasarkan gambar pada **Definisi 1.1**, dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{array}{ll} AB \subset B, & AB \subset A, \\ A \cup B = A \cup (B - AB), & A(B - AB) = \emptyset, \\ A \cup B = B \cup (A - AB), & B(A - AB) = \emptyset \end{array}$$

AB adalah subset dari A atau B, A dan $B - AB$, B dan $A - AB$ saling tidak berhubungan.

1.2. Probabilitas

Probabilitas adalah derajat atau tingkat kepastian dari munculnya hasil percobaan statistik atau ukuran ketidakpastian suatu kejadian untuk terjadi. Probabilitas dilambangkan dengan P. Bila kejadian A terjadi dalam m cara dari seluruh n cara yang mungkin terjadi dan masing-masing n cara itu mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul, maka probabilitas kejadian A dinotasikan dengan $P\{A\}$, dapat diperoleh dengan :

$$P\{A\} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

Definisi 1.2. Diberikan kejadian A pada ruang sampel Ω, bilangan real $P\{A\}$ terdefinisi dan memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $0 \leq P\{A\} \leq 1$

2. $\mathrm{P}\{\Omega\} = 1$

3. Setiap barisan kejadian A_1, A_2, ... yang saling lepas $A_n A_m = \emptyset$ dengan $n \neq m$, maka

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\}$$

Teorema 1.1. Diberikan dua kejadian A dan B,

1. $P\{A^C\} = 1 - P\{A\}$
   Bukti :
   Kejadian A dan A^C merupakan kejadian yang saling lepas dan *exhaustive*, maka $A \cup A^C = \Omega$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} 1 &= P\{\Omega\} \\ &= P\{\mathrm{A} \cup \mathrm{A}^{\mathrm{C}}\} \\ &= P\{(\mathrm{A}) + P(A^C)\} \end{aligned}$$

   Atau

$$P\{A^C\} = 1 - P\{A\}$$

2. $P\{A - B\} = P\{A\} - P\{AB\}$

   Bukti :

   Berdasarkan definisi selisih dua kejadian, diketahui bahwa $A - B$ dan AB saling lepas dan diperoleh $A = (A - B) \cup AB$

   Sehingga,

$$\begin{aligned} P\{A\} &= P\{(A - B) \cup AB\} \\ &= P\{A - B\} + P\{AB\} \end{aligned}$$

   Dapat juga ditulis

$$P\{A - B\} = P\{A\} - P\{AB\}$$

3. Jika $A \subset B$, maka $P\{A\} \leq P\{B\}$

   Bukti :

   Jika $A \subset B$ maka B dapat dibentuk menjadi kejadian saling lepas antara kejadian A dan kejadian $B - A \cdot B = A \cup (B - A)$

$$\begin{aligned} P\{B\} &= P\{A \cup (B - A)\} \\ &= P\{A\} + P\{B - A\} \\ &\geq P\{A\} \end{aligned}$$

   Untuk $P\{B - A\} \geq 0$.

4. $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$

   Bukti :

   Kejadian $A \cup B$ dapat dibentuk menjadi kejadian saling lepas antara $A - B$ dan B.

   $A \cup B = (A - B) \cup B$.

$$\begin{aligned} P\{A \cup B\} &= P\{(A - B) \cup B\} \\ &= P\{A - B\} + P\{B\} \\ &= P\{A\} - P\{AB\} + P\{B\} \\ &= P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} \end{aligned}$$

Definisi 1.3. Untuk setiap kejadian A dan B dalam ruang sampel Ω, probabilitas bersyarat dari kejadian A dengan syarat B dapat didefinisikan sebagai

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}, \qquad P\{B\} > 0$$

Jika kejadian A dimana kejadian B saling bebas, maka

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A\}P\{B\}}{P\{B\}} = P\{A\}$$

$$P\{B|A\} = \frac{P\{A\}P\{B\}}{P\{A\}} = P\{B\}$$

Jika kejadian A dan B saling lepas, maka

$$P\{A|B\} = P\{B|A\} = 0$$

Hal ini karena dua kejadian yang terpisah maka tidak saling beririsan, sehingga $P\{AB\} = 0$.

Definisi 1.4. Untuk setiap n kejadian $A_1, A_2, \dots, A_n$ jika

$$P\{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}\} = P\{A_{i1}\}P\{A_{i2}\} \dots P\{A_{ik}\}$$

untuk $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, 2 \leq k \leq n$, lalu kejadiannya $A_1, A_2, \dots, A_n$ merupakan kejadian saling lepas.

Definisi 1.5. (Kejadian saling lepas atau percobaan berulang) Dimisalkan $A_1, A_2, \dots, A_n$ menjadi n percobaan acak untuk sebuah ruang sampel Ω. Percobaan acak disebut *stochastically independent* atau *statistically independent* atau *independent* jika setiap $A_i \subset \Omega$ $(\mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n})$.

$$P\{A_1A_2 \dots A_n\} = P\{A_1\}P\{A_2\} \dots P\{A_n\}$$

Definisi 1.6. Kejadian $A_1, A_2, \dots, A_n$ dari partisi sebuah ruang sampel Ω, jika kejadian A_i adalah kejadian saling lepas dan semestanya adalah Ω. Jika

$$A_iA_j = \emptyset$$

Untuk setiap $i \neq j$, dan

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

maka kejadian $A_1, A_2, \dots, A_n$ dari sebuah partisi.

Teorema 1.2. (Formula Probabilitas Total) misalkan $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ menyatakan kejadian sedemikian sehingga $B_iB_j = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ dan

$$A \subset (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$$

maka

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}\, P\{B_i\}$$

dimana $P\{B_i\} > 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$

Bukti :

Ingat bahwa $P\{A|B_i\}P\{B_i\} = P\{AB_i\}$

Dan

$$(AB_i)\big(AB_j\big) = A\big(B_iB_j\big) = \emptyset$$

untuk setiap $i \neq j$, memiliki

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}P\{B_i\} &= \sum_{i=1}^{n} P\{AB_i\} \\ &= P\{AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_n\} \\ &= P\{A(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)\} \\ &= P\{A\}\end{aligned}$$

Ingat bahwa teorema ini berlaku jika kejadian $B_1, B_2, \ldots, B_n$ berasal dari partisi, maka akan selalu benar

$$A \subset (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = \Omega$$

Teorema 1.3. (Teorema Bayes) misalkan $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ menyatakan kejadian sedemikian sehingga $B_iB_j = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ dan

$$A \subset (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$$

dan

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{A|B_i\}P\{B_i\}}{\sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}P\{B_i\}}$$

dimana $P\{A\} > 0\ dan\ P\{B_i\} > 0\ untuk\ i = 1,2, \ldots, n.$

Bukti :

Menggunakan kondisi probabilitas pada **Definisi 1.2**, didapat

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{B_i\}}{P\{A\}} = \frac{P\{A|B_i\}P\{B_i\}}{P\{A\}}$$

Dengan menggunakan rumus probabilitas total untuk penyebut pada sisi kanan dari persamaan diatas.

Contoh 1.7. Pada percobaan melempar satu keeping koin, jika koin tersebut "seimbang" (simetris), maka

$$P\{A\} = P\{G\} = \frac{1}{2}$$

Contoh 1.8. Seluruh mahasiswa dapat lulus pelajaran A dan B dengan probabilitas sebagai berikut : $A = 50\%, B = 40\%, AB = 10\%$.

a. Probabilitas dapat lulus paling sedikit satu pelajaran?

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} = 0.5 + 0.4 - 0.1 = 0.8$$

b. Probabilitas hanya lulus salah satu pelajaran A atau B

$$P\{A - AB\} = P\{A\} - P\{AB\} = 0.5 - 0.1 = 0.4$$

$$P\{B - AB\} = P\{B\} - P\{AB\} = 0.4 - 0.1 = 0.3$$

Contoh 1.9. Sebuah perusahaan memproduksi barang yang sama menggunakan tiga buah mesin, yaitu $B_1, B_2, dan\ B_3$, dimana masing-masing kapasitas produksinya adalah 60%, 30%, dan 10% secara berturut-turut. Persentase dari barang rusak setiap mesin adalah 6%, 3%, dan 5% secara berturut-turut.

a. Hitunglah probabilitas terpilihnya barang rusak secara acak. Misalkan A adalah kejadian terpilihnya barang rusak secara acak. Lalu, dengan menggunakan formula probabilitas total, diperoleh

$$\begin{aligned} P\{A\} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}P\{B_i\} \\ &= (0.06 \times 0.60) + (0.03 \times 0.30) + (0.05 \times 0.10) \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

b. Hitunglah probabilitas terpilihnya barang rusak secara acak yang diproduksi oleh mesin $B_1, B_2, dan\ B_3$ secara berturut-turut. Gunakan formula Bayes, maka diperoleh

$$P\{B_1|A\} = \frac{P\{A|B_1\}P\{B_1\}}{P\{A\}} = \frac{36}{50} = 72\%$$

$$P\{B_2|A\} = \frac{P\{A|B_2\}P\{B_2\}}{P\{A\}} = \frac{9}{50} = 18\%$$

$$P\{B_3|A\} = \frac{P\{A|B_3\}P\{B_3\}}{P\{A\}} = \frac{5}{50} = 10\%$$

1.3. Analisis Kombinasi

Misalkan a adalah bilangan real dan r adalah bilangan integer non-negatif, didefinisikan

$$(a)_r = a(a-1)(a-2)\dots(a-r+1)$$

untuk $r = 0, (a)_0 = 1$.

Diasumsikan a bilangan integer non-negatif dan $a = r$, maka

$$(r)_r = r(r-1)(r-2)\dots 2 \cdot 1 = r!$$

Notasi r! Dibaca r faktorial yang berperan sebagai pusat analisis kombinatorial.

1.4. Koefisien Binomial

Asumsikan a adalah bilangan real dan r adalah bilangan integer non-negatif, koefisien binomial didefinisikan sebagai berikut :

$$\binom{a}{r} =_a C_r = \frac{(a)_r}{r!} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-r+1)}{r!}$$

untuk $r > 0$. Jika $r = 0$, maka $\binom{a}{0} = 1$

Jika $a = n$ dan $n \geq r \geq 0$, maka

$$(n)_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Jika r merupakan integer negatif, maka $\binom{a}{r} = 0$.

Teorema 1.4. Jika sebuah operasi pada A_1 dapat dilakukan dengan n_1 cara berbeda, kemudian operasi lain pada A_2 dengan n_2 cara berbeda, k operasi pada A_k dengan n_k cara berbeda, maka k operasi dapat dilakukan satu per satu dengan $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$ cara.

Bukti :

Pembuktian akan ditunjukkan menggunakan produk Cartesian.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in A_i, i = 1,2, \dots, k\}$$

dan ukuran produk Cartesian tersebut adalah $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Definisi 1.7. Misalkan sebuah himpunan terdiri dari n objek yang berbeda $a_1, a_2, \dots, a_n$. Susunan yang berurutan $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ dari n simbol disebut sampel terurut dari himpunan berukuran n. Sampel dengan pengembalian didefinisikan sebagai kenyataan bahwa setiap pemilihan yang dibuat diambil dari semua objek dalam himpunan (dengan pengulangan). Sampel tanpa pengembalian didefinisikan sebagai kenyataan bahwa sebuah objek yang sudah dipilih dihapus dari himpunan (tanpa pengulangan) atau disebut juga permutasi.

Teorema 1.5. Misalkan n dan r bilangan bulat yang mana $n \geq r \geq 0$,

(i) Banyaknya sampel berurutan yang berbeda dengan ukuran r diambil dengan pengembalian dari suatu himpunan dengan n objek adalah n^r.

(ii) Banyaknya sampel berurutan yang berbeda dengan ukuran r diambil tanpa pengembalian dari suatu himpunan dengan n objek adalah $(n)_r$.

(iii) Banyaknya kombinasi yang berbeda dengan ukuran r yang diambil tanpa pengembalian dari himpunan dengan n objek adalah $\binom{n}{r}$.

(iv) Banyaknya kombinasi yang berbeda dengan ukuran r yang diambil dengan pengembalian dari himpunan dengan n objek adalah

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

Bukti :

(i) Bukti dapat ditunjukkan dengan menggunakan Prinsip Perkalian dari Teorema 1.4.

(ii) Dengan menggunakan Prinsip Perkalian dan ingat bahwa himpunan berkurang satu per satu, maka didapat $(n)_r$ cara.

(iii) Banyaknya r-permutasi adalah $(n)_r$. Jika kita mengabaikan urutan, maka didapat permutasi $(r)_r = r!$ dimana sama dengan kombinasi. Dengan demikian, kita memiliki $\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}$ kombinasi dari r sampel yang diambil dari himpunan n.

(iv) Misalkan objek $1,2, \dots, n$. menggunakan pengulangan, didapat r-tupels

Contoh 1.10. Diberikan himpunan 3 objek (katakanlah a, b, c). Tentukan banyaknya cara yang berbeda untuk $r = 3$ dan sebutkan mereka berdasarkan teorema di atas.

1) $3^3 = 27$ cara, Tidak ditampilkan adalah sisa urutan di mana b atau c muncul pertama (ubah elemen pertama dalam tanda kurung di atas menjadi b atau c).
2) $(3)_3 = 3! = 6$ cara, (abc), (acb), (bac), (bca), (cab), (cba) .
3) $\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!} = 1$ cara, (abc).
   $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ cara, dan (ab), (bc), (ac)
4) $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ cara, dan
   $(aaa), (bbb), (ccc), (aab), (abb), (bbc), (bcc), (aac), (acc), (abc)$.

Teorema 1.6. Misalkan n dan r menjadi bilangan bulat yang mana $n \geq r \geq 0$

(i) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
(ii) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.
(iii) $\binom{n+r-1}{r-1} = (-1)^{r-1}\binom{-n-1}{r-1}$.
(iv) $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$.

Contoh 1.11. (Soal Ulang Tahun) Terdapat r siswa di kelas. Jika kita berasumsi bahwa ulang tahun setiap siswa memiliki kemungkinan yang sama dan kita mengabaikan tahun kabisat, berapakah probabilitas bahwa semua siswa memiliki hari ulang tahun yang berbeda? Ada 365^r cara di mana r siswa berulang tahun. Kami memiliki $(365)^r$ cara dari semua r berbeda ulang tahun, di mana $r \leq 365$. Artinya, probabilitas bahwa semua r siswa memiliki hari ulang tahun yang berbeda adalah

$$P = \frac{(365)_r}{365^r} = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{365}\right)$$

Tabel 1.1 menunjukkan hasil komputasi untuk $r = 11, \ldots, 30$. Dari tabel ini kita melihat bahwa, jika ada 23 siswa dalam satu kelas, kemungkinan setidaknya ada dua siswa yang berulang tahun melebihi $\frac{1}{2}$. Kita menunjukkan perkiraan kasar untuk r kecil. Memperluas sisi kanan P , kita mendekati dua suku P

$$P \approx 1 - \frac{1 + 2 + \cdots + r - 1}{365} = 1 - \frac{r(r-1)}{730}$$

Tabel 1.1 juga menunjukkan perkiraan di atas yang cukup berguna dalam praktik untuk r kecil.

Tabel 1.1 :

Contoh hasil dari masalah ulang tahun

r	Eksak	Aproksimasi
11	0.8589	0.8493
12	0.8330	0.8192
13	0.8056	0.7863
14	0.7769	0.7507
15	0.7471	0.7123
16	0.7164	0.6712
17	0.6850	0.6274
18	0.6531	0.5808
19	0.6209	0.5315
20	0.5886	0.4795
21	0.5563	0.4247
22	0.5243	0.3671
23	0.4927	0.3068
24	0.4617	0.2438
25	0.4313	0.1781
26	0.4018	0.1096
27	0.3731	0.0384

28	0.3455	-0.0356
29	0.3190	-0.1123
30	0.2937	-0.1918

Teorema 1.7. (Teorema Poincare atau Formula Eksklusi dan Inklusi) Untuk setiap kejadian $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P\{ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \} = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

dimana untuk setiap $k = 1,2, \ldots, n$, S_k didefinisikan oleh

$$S_k = \sum_{i\,1 < i\,2 < \ldots < i\,k} P\{ A_{i1}\, A_{12} \ldots A_{ik} \} \; (i_1 \geq 1, i_k \leq n)$$

yaitu penjumlahan semua kombinasi dari n kejadian yang diambil k pada satu waktu ($k = 1,2, \ldots, n$).

Contoh 1.12. (Pencocokan atau Kebetulan) Ada n pasang suami istri di pesta topeng. Setiap suami mengusulkan untuk menjadi pasangan dansa dari setiap istri yang dipilih secara acak. Berapa probabilitas setidaknya satu suami memilih istrinya sendiri? Misalkan A_k adalah peristiwa suami ke -k memilih istrinya, di mana $k = 1,2, \ldots, n$. Maka $P\{ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \}$ adalah probabilitas bahwa setidaknya satu suami memilih istrinya, yang diberikan dalam Teorema 1.7. Jelas itu

$$P\{ A_k \} = \frac{(n - 1)!}{n!}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} P\{ A_k \} = \binom{n}{1} \frac{(n - 1)!}{n!} = 1$$

$$P\{ A_i A_j \} = \frac{(n - 2)!}{n!}$$

$$S_2 = \sum_{i<j} P\{ A_i A_j \} = \binom{n}{2} \frac{n - 2}{n!} = \frac{1}{2!}$$

dan, secara umum,

$$P\{ A_{i1}, A_{i2}, \ldots A_{ik} \} = \frac{(n - k)!}{n!}$$

$$S_k = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

Suku terakhir dari Teorema 1.7. diberikan oleh

$$S_n = P\{A_1, A_2, \dots A_n\} = \frac{1}{n!}$$

Akhirnya, kita punya

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

Jika n cukup besar, kita memiliki pendekatan berikut :

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\} \approx 1 - e^{-1} = 0.63212$$

dengan

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots$$

Tabel 1.2 menunjukkan probabilitas dengan komputasi untuk $n = 3, \dots ,10$. Probabilitas dari setidaknya satu kecocokan didekati dengan $1 - e^{-1} = 0.63212$ bahkan jika n bervariasi. Inilah yang disebut masalah kecocokan (kebetulan atau rencontre) dan memiliki beberapa variasi, mengingat perubahan dalam istilah yang relevan.

Table 1.2 :

Contoh dari masalah perbandingan

n	Probabilitas
3	0.6667
4	0.6250
5	0.6333
6	0.6319
7	0.6321
8	0.6321

9	0.6321
10	0.6321

Teorema 1.8. (Koefisien Multinomial) Misalkan A terdiri dari n objek dan $n_1, n_2, \dots, n_r$ bilangan bulat positif yang mana $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Maka terdapat

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ \dots \ n_r} = \frac{n}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$$

partisi terurut yang berbeda dari A dari himpunan bagian terurut $(A_1, A_2, \dots, A_r)$, dimana A_k berisi n_k objek, $k = 1,2, \dots, r$. Persamaan tersebut disebut koefisien multinomial.

Bukti :

Pertama, kita buktikan tersebut untuk $r = 2$. Persamaan terurut subset (A_1, A_2) bentuk partisi dan kita memilih n_1 objek dari subset A_1 dan kita memilih $n_2 = n - n_1$ objek dari subset A_2 yang mana ukurannya adalah $n - n_1$. Maka

$$\binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n - n_1} = \frac{n!}{n!\,(n - n_1)!} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}$$

Secara umum, kita punya

$$\binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n_2}\binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \dots \binom{n - n_1 - \dots - n_{k-2}}{n_{k-1}}\binom{n - n_1 - \dots - n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

yang mana merupakan koefisien multinomial pada Teorema 1.7.

Contoh 1.13. (Ekspansi Multinomial)

$$(x + y + z)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 n_3} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$$

dimana penjumlahannya diatas semua kombinasi $n_1 + n_2 + n_3 = n, n_1, n_2, n_3 \geq 0$. Sebagai contoh,

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

Maka

$$\binom{2}{200} = \binom{2}{020} = \binom{2}{002} = 1$$

$$\binom{2}{110} = \binom{2}{011} = \binom{2}{101} = 2$$

Contoh 1.14. (Distribusi Hipergeometri) Diberikan sebuah guci berisi n bola berisi n_1 bola merah dan $n_2 = n - n_1$ bola hitam. Kami mengambil bola r tanpa penggantian secara acak. Berapa probabilitas P_k bahwa k bola merah ditarik (dan, tentu saja, $(r-k)$ bola hitam ditarik)? Kita mengambil k bola merah dari n_1 bola merah, yaitu, $\binom{n_1}{k}$ cara yang berbeda, dan $(r-k)$ bola hitam dari $n - n_1$ bola hitam, yaitu, $\binom{n-n_1}{r-k}$ cara yang berbeda. Jadi, sejak kita punya $\binom{n}{r}$ berbagai cara mengambil bola r dari n bola, kita punya

$$P_k = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{n_1-k}}{\binom{n}{n_1}}$$

dimana $\max(0, r-n_2) \leq k \leq \min(r, n_1)$. Identitas terakhir berasal dari identitas dalam teorema 1.6. poin (1).

Contoh 1.15. (Inspeksi Sampling) Dalam kendali mutu, kita sering menghadapi masalah tipikal inspeksi sampling : Banyak ukuran n tunduk pada inspeksi sampling. Ada n bola (barang) yang berisi n_1 bola merah (barang cacat) dan $n_2 = n - n_1$ bola hitam (barang nondefektif). Kami mengambil bola r di mana k bola merah dihitung. Namun, kami tidak dapat mengetahui jumlah n_1 item yang rusak sebelumnya. Masalah inspeksi pengambilan sampel adalah bagaimana memperkirakan dan menguji jumlah n_1 item yang cacat.

LATIHAN

1. Misalkan A, B, C adalah tiga kejadian, Ω adalah ruang sampel dan ϕ adalah kejadian kosong. Buktikan operasi-operasi berikut :
   a. $A \cup A = A,\ \ A \cap A = A$ (*Idempoten Laws*)
   b. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ \ (AB)C = A(BC)$ (*Associative Laws*)
   c. $A \cup B = B \cup A,\ \ AB = BA$ (*Communicative Laws*)
   d. $(A \cup B)^c = A^c B^c,\ \ (AB)^c = A^c \cup B^c$ (*De Morgan's Laws*)

   Penyelesaian :

   a. $A \cup A = A,\ \ A \cap A = A$ (*Idempoten Laws*)

   Diketahui $A \subseteq A \cup A$ jika dan hanya jika $A \cup A \subseteq A$ dan $A \subseteq A \cup A$

   i. Ambil sebarang ω titik sampel dengan $\omega \in A \cup A$, maka $\omega \in A$ dan $\omega \in A$ berakibat $\omega \in A$, karena itu $A \cup A \subseteq A$.
   ii. Ambil sebarang ω titik sampel dengan $\omega \in A$, maka $\omega \in A$ dan $\omega \in A$ maka dapat ditulis $\omega \subseteq A \cup A$, berakibat $A \subseteq A \cup$

   Dari i dan ii dapat disimpulkan bahwa $A \subseteq A \cup A$.

   Diketahui $A \subseteq A \cap A$ jika dan hanya jika $A \cap A \subseteq A$ dan $A \subseteq A \cap A$

   i. Ambil sebarang ω titik sampel dengan $\omega \in A \cap A$, maka $\omega \in A$ dan $\omega \in A$ berakibat $\omega \in A$, karena itu $A \cap A \subseteq A$.
   ii. Ambil sebarang ω titik sampel dengan $\omega \in A$, maka $\omega \in A$ dan $\omega \in A$ maka dapat ditulis $\omega \subseteq A \cap A$, berakibat $A \subseteq A \cap A$.

   Dari i dan ii dapat disimpulkan bahwa $A \subseteq A \cap A$.

   b. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ \ (AB)C = A(BC)$ (*Associative Laws*)

   Diketahui $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ jika dan hanya jika $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ dan $(A \cup B) \cup C \subseteq (A \cup B) \cup C$

   i. Ambil sebarang $\omega \in (A \cup B) \cup C$, berarti $\omega \in (A \cup B)$ atau $\omega \in C$. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa ($\omega \in A$ atau $\omega \in B$) atau $\omega \in C$ pernyataan tersebut akan sama jika dinyatakan $\omega \in A$ atau ($\omega \in B$ atau $\omega \in C$). Sehingga $\omega \in A$ atau $\omega \in (B \cup C)$ dan dapat ditulis $\omega \in A \cup (B \cup C)$. Jadi, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

ii. Ambil sebarang $\omega \in A \cup (B \cup C)$, berarti $\omega \in A$ atau $\omega \in (B \cup C)$. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa $\omega \in A$ atau ($\omega \in B$ atau $\omega \in C$) pernyataan tersebut akan sama jika dinyatakan ($\omega \in A$ atau $\omega \in B$) atau $\omega \in C$. Sehingga $\omega \in (A \cup B)$ atau $\omega \in C$ dan dapat ditulis $\omega \in (A \cup B) \cup C$. Jadi, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

Dari i dan ii dapat disimpulkan bahwa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

c. $A \cup B = B \cup A,\ \ AB = BA$ (*Communicative Laws*)

Diketahui $A \cup B = B \cup A$ jika dan hanya jika $A \cup B \subseteq B \cup A$ dan $B \cup A \subseteq A \cup B$

i. Ambil sebarang ω titik sampel dengan $\omega \in A \cup B$, maka $\omega \in A$ dan $\omega \in B$ berakibat $\omega \in B \cup A$, karena itu $A \cup B \subseteq B \cup A$.
ii. Ambil sebarang ω titik sampel dengan $\omega \in B \cup A$, maka $\omega \in B$ dan $\omega \in A$ berakkibat $\omega \in A \cup B$, karena itu $B \cup A \subseteq A \cup B$.

d. $(A \cup B)^c = A^c B^c,\ (AB)^c = A^c \cup B^c$ (*De Morgan's Laws*)

Jika $(A \cup B)^c$ terjadi, maka $A \cup B$ tidak terjadi, sehingga A tidak terjadi (begitu juga A^c tidak); B tidak terjadi (begitu juga B^c), sehingga A^c dan B^c keduanya terjadi. Oleh karena itu $(A \cup B)^c \subset A^c B^c$
Jika $A^c B^c$ terjadi, maka A^c terjadi (dan A tidak), B^c terjadi (sehingga B tidak). Oleh karena itu, bukan A atau B yang terjadi, dengan demikian $(A \cup B)^c$ tidak. Sehingga $A^c B^c \subset (A \cup B)^c$.

2. Buktikan bahwa jika 2 kejadian A dan B independen, maka A^c dan B^c juga independen.

Penyelesaian :

Diketahui bahwa $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c), (A \cap B)$, dan $(A \cap B^c)$ saling asing, serta A dan B independen. Maka diperoleh

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)]$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$= P(A)P(B) + P(A \cap B^c)$$

Atau

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)P(B)$$

Sedemikian sehingga,

$$P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B)$$

Jadi, terbukti A^c dan B^c juga independen.

3. Misalkan A dan B adalah dua kejadian A dan B, dengan

$$P\{A\} = \frac{1}{3}, P\{B\} = \frac{1}{4}. P\{A \cup B) = \frac{1}{2}$$

(i) $P\{A|B\} = P\{A\} = \frac{1}{3}$
(ii) $P\{B|A\} = P\{B\} = \frac{1}{4}$
(iii) $P\{A - B\} = P\{A\} - P\{AB\} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
(iv) $P\{B - A\} = P\{B\} - P\{AB\} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

4. Berapa banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih seorang ketua dan 3 wakil ketua dari 50 orang?

Penyelesaian :

Kejadian ini berulang dan tidak ada pengembalian, maka untuk memilih seorang ketua dapat dicari dengan

$$\binom{50}{1} = \frac{50!}{1!\,(50-1)!} = 50\ cara$$

Untuk memilih 3 wakil ketua dapat dicari dengan

$$\binom{50}{1}\binom{49}{3} = 50 \times 18424 = 921200\ cara$$

5. Asumsikan bahwa setiap anak yang lahir kemungkinan besar adalah laki-laki atau perempuan. Jika sebuah keluarga memiliki dua anak, berapakah probabilitas :
   a. Kedua anak yang lahir perempuan?
   b. Anak pertama yang lahir adalah perempuan?
   c. Paling sedikit terdapat satu anak perempuan?

Penyelesaian :

a. Kedua anak yang lahir perempuan :

Misalkan X adalah kedua anak perempuan, Y adalah anak tertua perempuan, dan Z adalah paling sedikit terrdapat satu anak perempuan.

$$P(X) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(Y) = \frac{1}{2}$$

b. Anak yang tertua adalah perempuan

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

c. Paling sedikit terdapat satu anak perempuan adalah $\frac{1}{3}$.

6. Berapakah probabilitas bersyarat bahwa dadu pertama adalah 6 dan jumlah dari kedua dadu adalah 7?

Penyelesaian :

Misalkan A dan B masing-masing menunjukkan bahwa dadu pertama adalah 6 dan jumlah dari kedua dadu adalah 7. Probabilitas yang diinginkan $P(B|A)$, maka

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

7. Jika terdapat 10 titik dengan tidak ada 3 titik yang berada pada satu garis lurus, maka banyak segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 10 titik tersebut?

Penyelesaian :

Untuk membuat segitiga, diperlukan 3 titik yang tidak berada pada satu garis dan arena tidak ada 3 titik yang segaris, maka dapat dibuat segitiga sebanyak koombinasi 3 dari 10 titik, yaitu

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120\ segitiga$$

8. Diketahui terdapat 4 orang dari dari keempat orang tersebut dipilih 3 orang yang akan duduk pada kursi membentuk lingkaran. Ada berapa banyak cara susunan yang mungkin dibuat?

   Penyelesaian :

   Pertama, melakukan pemilihan 3 dari 4 orang yang tersedia, sehingga banyaknya cara yang mungkin adalah

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

   Banyaknya cara untuk menyusun 3 orang yang duduk pada 3 kursi yang membentuk lingkaran adalah $(3-1)! = 2!$ cara. Maka banyak cara yang mungkin dibuat adalah $4 \times 2 = 8$ cara.

9. Misalkan W adalah kejadian perempuan resign dan A, B, C adalah kejadian orang keluar dari toko

$$P(C|W) = \frac{P(W|C)P(C)}{P(W|C)P(C) + P(W|B)P(B) + P(W|A)P(A)}$$

$$= \frac{70 \times \frac{100}{225}}{\left(70 \times \frac{100}{225}\right) + \left(60 \times \frac{75}{225}\right) + \left(50 \times \frac{50}{225}\right)}$$

$$= \frac{{}^{70}/_{225}}{{}^{140}/_{225}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

BAB II

VARIABEL ACAK DAN DISTRIBUSINYA

2.1. Pendahuluan

Misalkan sebuah eksperimen mempunyai ruang sampel Ω.Variabel acak adalah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada ruang sampel Ω.

2.2. Variabel Acak dan Distribusi

Definisi 2.1. Misalkan sebuah eksperimen mempunyai ruang sampel Ω. Variabel acak real yang didefinisikan pada ruang sampel Ω. Dengan kata lain, variabel acak X pada ruang sampel Ω adalah fungsi dari Ω di dalam bilangan real $\mathbb{R}$.

Jika ditentukan interval $(a, b]$ $(a < b)$ pada $\mathbb{R}$ maka probabilitasnya adalah

$$P\{a < X \leq b\} = P\{\omega \epsilon\, \Omega : X(\omega) \in (a, b]\}$$

Definisi 2.2. Distribusi Probabilitas atau distribusi sederhana pada variabel acak X didefinisikan untuk setiap bilangan real x oleh

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{\omega \epsilon\, \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\}$$

Yang mana probabilitas variabel acak X kurang dari sama dengan x.

Teorema 2.1. Distribusi $F_X(x)$ pada variabel acak X mengikuti :

a. $F_X(x)$ monoton naik dan $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
b. $F_X(x)$ kontinu kanan, $\lim\limits_{h\to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$.
c. $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ dan lim $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

variabel acak X dikatakan *diskrit* jika untuk semua nilai yang mungkin diatas dapat dihitung atau diubah. Untuk variabel acak diskrit, fungsi probabilitas $p_X(x_i)$ didefinisikan oleh

$$p_X(x_i) = P\{X = x_i\} = P\{\omega \epsilon\, \Omega : \mathrm{X}(\omega) = x_i\}$$

Dimana $p_X(x_i) \geq 0$, $i = 1,2,3, \ldots$ dan $\sum_{i=0}^{\infty} p_X(x_i) = 1$. Kemudian distribusi pada variabel acak diskrit X adalah

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{\omega \epsilon \Omega : \mathrm{X}(\omega) \in (-\infty, x]\} = \sum_{y \leq x} p_X(y)$$

Variabel acak X dikatakan *kontinu* jika kepadatan $f_X(x)$ adalah

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) dy$$

Dimana

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}. \qquad (2.2.6)$$

Ekspektasi variabel acak X untuk *diskrit* dan *kontinu*,

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_x(x_i), & \text{jika } x\ diskrit \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx, & \text{jika } x\ kontinu \end{cases}$$

Sehingga variansi variabel acak X

$$\begin{aligned} V(x) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 dF_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\, E(X) + E(X)^2) dF_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_X(x)\, dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x)\, dx + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \qquad (2.2.8) \end{aligned}$$

Dengan kata lain, rata-ratanya adalah $E(X)$ dan standar deviasinya adalah akar positif dari variansi $\left(\sqrt{V(x)}\right)$.Bentuk standar variabel acak Y ke X didefinisikan

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(x)}}, \text{dimana } E(Y) = 0 \text{ dan } V(Y) = 1.$$

Bentuk umumnya :

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_X(x)\, dx\,, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

$$E((X - E(X))^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^n dF_X(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{E(X - E(X)^n)}{\sqrt{V(x)}^n}, n = 1,2,3, \ldots \text{(dimensi momen)}$$

Fungsi karakteristik variabel acak X didefinisikan

$$\varphi_X(u) = E\left(e^{iuX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuX} dF_X(x)\, dx, i = \sqrt{-1}$$

Momen ke n pada variabel acak X,

$$E(X^n) = i^{-n} \left. \frac{d^n \varphi_X(u)}{du^n} \right|_{u=0}$$

Dimana

$$\varphi_X(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{iu^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_X(x)\, dx$$

Fungsi Pembangkit Momen / MGF (*Moment Generating Function)*

$$M_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF_X(x)\, dx$$

2.3. Distribusi Diskrit

2.3.1. Distribusi Bernoulli

Peubah acak Bernoulli hanya mempunyai dua nilai yaitu 0 dan 1 dalam satu kali percobaan. Peluang sukses dinyatakan dengan p dan gagal dinyatakan dengan $1 - p$.

Definisi 2.3. Suatu peubah acak X mempunyai distribusi bernoulli jika dan hanya jika distribusi peluangnya diberikan dengan $f(x, p) = p^x(1 - p)^{1-x} = p^x(q)^{1-x}$, untuk $x = 0,1$.

Definisi 2.4. Distribusi bernoulli memiliki rata-rata dan variansi sebagai berikut :

$$E[X] = p$$

Dan

$$Var(X) = pq$$

Teorema 2.2.

- Untuk Rataan

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{1} x.f(x,p) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x.p^x q^{1-x} \\ &= 0.p^0 q^{1-0} + 1.p^1 q^{1-1} \\ &= 0 + p \\ &= p \end{aligned}$$

- Untuk Variansi
  Diketahui bahwa :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[\left(x - E(X)\right)^2\right] \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Untuk $E(X) = p$, kemudian mencari $E(X^2)$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{1} x^2.f(x,p) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x^2.p^x q^{1-x} \\ &= 0^2.p^0 q^{1-0} + 1^2.p^1 q^{1-1} \\ &= 0 + p \\ &= p \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[\left(x - E(X)\right)^2\right] \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= p - p^2 \\ &= 1(1 - p) \\ &= pq \end{aligned}$$

Contoh 2.1. Sebuah uang logam dilempar satu kali, dicatat bahwa hasilnya muncul angka "A" dan gambar "G". berapa peluang yang muncul angka "A"?

Penyelesaian :

Ruang sampel dari masalah diatas adalah $S = \{A, G\}$ dan dimisalkan kejadian muncul angka adalah $X = \{A\}$, dan muncul gambar adalah $Y = \{G\}$. Sehingga peluang muncul angka adalah

$$P(A) = \frac{n(X)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

Dalam hal ini sesuai dengan distribusi Bernoulli, yaitu $f(x;p) = p^2(1-p)^{1-x}$, untuk $x = 0,1$. Setelah dilakukan pelemparan ternyata uang logam yang muncul adalah angka, berarti $x = 1$ atau berhasil. Jadi

$$f(x;p) = (0.5)^1(0.5)^{1-1} = 0.5$$

2.3.2. Distribusi Binomial

Merupakan probabilitas diskrit yang jumlah keberhasilannya dalam n percobaan menghasilkan sukses atau gagal saling bebas dan dimana setiap hasil percobaannya memiliki probabilitas p.

a) Ekspektasi

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!\,(n-x)!} p p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$$= \mathrm{np} \sum_{x=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$$= np$$

$$E(X^2) = E(X)^2 - E(X) + E(X)$$
$$= E(X^2 - X) + (\mathrm{E}(X)$$
$$= E\big(X(X-1)\big) + E(X)$$

Dimana

$$E\big(X(X-1)\big) = \sum_{x=0}^{n} x\,(x-1) f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\,(x-1) \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-x)!} p^2 p^{x-2} (1-p)^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x}$$

$$= n^2p^2 - \mathrm{n}p^2$$

sehingga

$$E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X)$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np$$

$$= n^2p^2 + np(1-p)$$

b) Variansi

$$\begin{aligned} Var(X) &= E([X-E(X)]^2) \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= n^2p^2 + np(1-p) - (np)^2 \\ &= np(1-p) = npq \end{aligned}$$

Contoh 2.2. Seorang pemain basket , melakukan tembakan sebanyak 10 kali dan peluang untuk masuk adalah 0,3 untuk setiap tembakan. Berapa peluang untuk memenangkan 6 kali tembakan?

Penyelesaian :

Misalkan $P_{masuk} = 0{,}3$ dan $P_{keluar} = 0{,}7$

$$b(x; 10{,}0{,}3) = \binom{10}{x}(0{,}3)^x(0{,}7)^{10-x}$$
$$b(6; 10{,}0{,}3) = \binom{10}{6}(0{,}3)^6(0{,}7)^4 = 210\,.\,(0{,}3)^6(0{,}7)^4 = 0.037$$

2.3.3. Distribusi Hipergeometrik

Distribusi probabilitas hipergeometrik digunakan untuk menentukan probabilitas kemunculan sukses jika sampling dilakukan tanpa pengembalian. Variabel random hipergeometrik adalah jumlah sukses (x) dalam n pilihan, tanpa pengembalian, dari sebuah populasi terbatas N, dimana D diantaranya adalah sukses dan $(N - D)$ adalah gagal.

Penurunan fungsi distribusi hipergeometrik diturunkan dengan menghitung kombinasi-kombinasi yang terjadi. Kombinasi yang dapat dibentuk dari populasi berukuran N untuk sampel berukuran n adalah kombinasi $C(N, n)$. Jika sebuah variabel random (diskrit) X menyatakan jumlah sukses, selanjutnya dapat dihitung kombinasi diperoleh x sukses dari sejumlah D sukses dalam populasi yang diketahui yaitu $C(D, x)$. dan demikian pula halnya dapat dicari $(n - x)$ kombinasi gagal dari sisanya $(N - D)$, yaiu $C((N - D), (n - x))$.

Suatu percobaan hipergeometrik memiliki sifat-sifat berikut :

1. Sampel acak ukuran n diambil dari N benda.
2. Sebanyak D benda dapat diberi nama sukses sedangkan sisanya $N - D$ diberi nama gagal.

Banyaknya keberhasilan X dalam suatu percobaan hipergeometrik disebut **peubah acak hipergeometrik.** Dengan demikian, distribusi peluang bagi peubah acak hipergeometrik disebut **distribusi hipergeometrik.**

Dengan demikian :

Sukses $C(D, x)$. $C((N - D), (n - x))$ atau $\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}$ yang diperoleh dari kombinasi yang mungkin C(N,n) atau $\binom{N}{n}$.

Sebuah variabel random (diskrit) X menyatakan jumlah sukses dalai percobaan bernoulli dan total jumlah sukses D diketahui dari sebuah populasi berukuran N,

maka dikatakan x mengikuti distribusi hipergeometrik dengan fungsi densitas probabilitasnya:

$$f(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x = 1,2, \ldots, \min(n, D)$$

Keterangan :

N = jumlah populasi

n = jumlah sampel

D = jumlah sukses

x = jumlah sukses terambil

Teorema 2.3. Jika $X \sim HYP(n, D, N)$ dimana $n = 1,2, \dots, N; D = 0,1,2, \dots, N$ (X variabel random berdistribusi Hipergeometrik), maka :

1. Nilai Harapan/Mean : $E(x) = \frac{nD}{N}$
2. Variansi : $V(x) = \frac{nD}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Bukti :

Ekspektasi

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x f(x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{D!}{x!\,(x-D)!} \frac{\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{D(D-1)!}{x(x-1)!\,(x-D)!} \frac{\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = D \sum_{x=0}^{n} \frac{(D-1)!}{(x-1)!\,(x-D)!} \frac{\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Misalkan $y = x - 1$

$$E(X) = D \sum_{y=0}^{n} \frac{(D-1)!}{((y+1)-1)!\,\big((y+1)-D\big)!} \frac{\binom{N-D}{n-(y+1)}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = D \sum_{y=0}^{n} \frac{(D-1)!}{y!\,(y-(D-1))!} \frac{\binom{(N-1)-(D-1)}{(n-1)-y}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = D\sum_{y=0}^{n} \frac{\binom{D-1}{y}\binom{(N-1)-(D-1)}{(n-1)-y}}{\binom{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}$$

$$E(X) = \frac{nD}{N}\sum_{y=0}^{n} \frac{\binom{D-1}{y}\binom{(N-1)-(D-1)}{(n-1)-y}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

$$E(X) = \frac{nD}{N} \quad \boldsymbol{Terbukti}$$

Variansi

Ekspektasi perkalian x dan $(x-1)$ adalah

$$E\big(X(X-1)\big) = E(X^2) - E(X)$$

Karena

$$E(X) = \frac{nD}{N}$$

Dan

$$E(X-1) = \frac{(n-1)(D-1)}{N-1}$$

Maka

$$E\big(X(X-1)\big) = \frac{nD}{N}\frac{(n-1)(D-1)}{N-1}$$

$$E\big(X(X-1)\big) = \frac{(D-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

Sehingga

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$V(X) = E\big(X(X-1)\big) + \mu - \mu^2$$

$$V(X) = \frac{(D-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nD}{N} - \left(\frac{nD}{N}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{(D-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nD}{N} - \left(\frac{n^2D^2}{N^2}\right)$$

$$V(X) = \left[\frac{(D-1)n(n-1) + nD(N-1)}{N(N-1)}\right] - \left(\frac{n^2D^2}{N^2}\right)$$

$$V(X) = \left[\frac{Dn(Dn - D - n + 1 + N - 1)}{N(N-1)}\right] - \left(\frac{n^2D^2}{N^2}\right)$$

$$V(X) = \left[\frac{Dn(Dn - D - n + N)}{N(N-1)}\right] - \left(\frac{n^2D^2}{N^2}\right)$$

$$V(X) = \left[\frac{Dn(Dn - D - n + N)N - n^2D^2(N-1)}{N^2(N-1)}\right]$$

$$V(X) = \left[\frac{Dn(DnN - DN - nN + N^2) - DnN + nD}{N^2(N-1)}\right]$$

$$V(X) = \left[\frac{Dn(-DN - nN + N^2 + nD}{N^2(N-1)}\right]$$

$$V(X) = \frac{nD}{N}\left[\frac{nD - DN - nN + N^2}{N(N-1)}\right]$$

$$V(X) = \frac{nD}{N}\left[\frac{(N-n)(N-D)}{N(N-1)}\right]$$

$$V(X) = \frac{nD}{N}\left[\left(\frac{N-D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{(N-1)}\right)\right]$$

$$V(X) = \frac{nD}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{(N-1)}\right) \qquad \boldsymbol{Terbukti}$$

2.3.4. Distribusi Geometrik

Bila uji coba yang bebas dan berulang-ulang dapat menghasilkan sukses dengan peluang $q = 1 - p$, maka distribusi peluang bagi peubah acak X, yaitu banyaknya uji coba sampai munculnya sukses pertama

$$g(x; p) = pq^{x-1} \qquad untuk\ x = 1,2,3, \dots$$

Agar $[X = x]$ terjadi, diperlukan permutasi tertentu yang terdiri dari $x - 1$ kegagalan yang diikuti dengan keberhasilan. Karena uji coba independent, probabilitas ini adalah hasil kali p dengan $x - 1$ faktor dari $q = 1 - p$. Karena $0 < p < 1$ dan

$$\sum_{x=1}^{\infty} g(x;p) = p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p(1+q+q^2+\cdots)$$

$$= p\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{p}{p} = 1$$

Distribusi X disebut distribusi geometrik

Dari sifat-sifat deret geometrik bahwa fungsi distribusi kumulatif pada X adalah

$$g(x;p) = \sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1} \qquad untuk\ x = 1,2,3, \ldots$$

Contoh 2.3. Probabilitas pemain bisbol tertentu mendapatkan pukulan adalah 0.3 , waktu ancang-ancang pada pemukul adalah independent. Probabilitas bahwa ia membutuhkan lima kali pukulan untuk mendapatkan pukulan pertamanya adalah $g(5; 0.3) = 0.7 * (0.3)$. Mengingat ia telah berada diancang-ancang 10 kali tanpa pukulan, probabilitasnya masih 0.7*(0.3) yang dibutuhkan lima kali lagi pada pukulan untuk mendapatkan pukulan pertamanya. Dan juga probabilitas bahwa lima atau kurang ancang-ancang untuk mendapat pukulan pertamanya

$$G(5; 0.3) = 1 - (0.7)^5 = 0.83193$$

Distribusi geometrik adalah satu-satunya distribusi probabilitas diskrit yang dimiliki yang disebut no-memory property.

Teorema 2.4. No-Memory Property $X \sim GEO(p)$, dimana

$$P[X > j + k | X > j] = P[X > k]$$

Bukti :

$$P[X > j + k | X > j] = \frac{P[X > j + k]}{P[X > j]} = \frac{(1-p)^{j+k}}{(1-p)^j}$$

$$= (1-p)^k$$

$$= P[X > k]$$

Dengan demikian, diketahui bahwa uji coba diuji coba telah berlalu tanpa keberhasilan tidak mempengaruhi kemungkinan k lebih banyak uji coba yang diperlukan untuk memperoleh keberhasilan. Artinya, mengalami beberapa kegagalan berturut-turut tidak berarti anda lebih pantas untuk sukses.

Contoh 2.4. Lemparkan koin sampai angka pertama muncul. Jika X adalah jumlah lemparan, dan jika $p = PH$, maka $X \sim GEO(p)$. Tercatat hasil yang sesuai "tidak mendapatkan angka" tidak diperlukan. Tentu saja itu karena kemungkinannya NOL. Jika A mewakili peristiwa "satu angka tidak pernah diperoleh, maka A adalah kejadian setidaknya satu angka" dan

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \sum_{x=1}^{\infty} g(x;p) = 1 - 1 = 0$$

Rata-rata $X \sim GEO(p)$ diperoleh sebagai berikut :

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} p \frac{d}{dp} q^x$$

$$= p \frac{d}{dp} \sum_{x=1}^{\infty} q^x$$

$$= p \frac{d}{dp} (1-q)^{-1}$$

$$= \frac{1}{p}$$

Yang berarti,

$$E(X^2) = \frac{1+q}{p^2}$$

Sehingga

$$Var(x) = \frac{q}{p^2}$$

2.3.5. Distribusi Binomial Negatif

Dalam percobaan berulang secara independent, dengan X menunjukkan keberhasilan dengan probabilitas r. Kemudian distribusi probabilitas X adalah distribusi binomial negatif dengan diskrit sebagai berikut :

$$f(x;r,p) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad x = r, r+1, \ldots$$

Karena kejadian $[X = x]$ terjadi, kita harus memperoleh keberhasilan yang pertama pada percobaan ke r dengan mendapatkan "$r - 1$ keberhasilan dalam percobaan $x - 1$" dan kemudian mendapatkan "keberhasilan pada percobaan ke x" demikianlah, kemungkinan kejadian pertama dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\binom{x-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(x-1)-(r-1)}$$

Dan mengalikannya dengan p, maka probabilitas kejadian kedua akan menghasilkan persamaan

$$f(x;r,p) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad x = r, r+1, \ldots$$

Notasi khusus yang menunjukkan bahwa X memiliki distribusi binomial negatif $X \sim NB(p,r)$. Mean dan variansi dengan menerapkan fungsi karakteristik distribusi binomial negatif $X{\sim}NB(p,r)$. Fungsi karakteristik

$$\varphi_X(u) = \left(\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}\right)^r$$

Mean

$$\begin{aligned}
E[X] &= \left[i^{-1}\frac{d\varphi_X(u)}{du}\right]_{u=0} \\
&= i^{-1}\left[r\left(\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}\right)^{r-1}\left(\frac{pe^{iu}i\big(1-qr^{iu}\big)-pe^{iu}\big(qe^{iu}i\big)}{(1-qe^{iu})^2}\right)\right]_{u=0} \\
&= i^{-1}r\left[\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1}\left(\frac{pi(1-q)-p(qi)}{(1-q)^2}\right)\right] \\
&= i^{(-1)}r\left[\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1}\left(\frac{pi-piq-p(qi)}{(1-q)^2}\right)\right] \\
&= i^{(-1)}r\left[\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1}\left(\frac{i(p-pq)}{(1-q)^2}\right)\right] \\
&= i^{-1}\left(\frac{i(p-pq)}{(1-q)^2}\right)r\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1} \\
&= \left(\frac{(p-pq)}{(1-q)^2}\right)r\left(\frac{p}{1-q}\right)^{r-1} \\
&= r\left[\left(\frac{1}{1-q}\right)^{r-1}\frac{p(1-q)}{(1-q)^2}\right] \\
&= r\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \left[i^{-2}\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}\right]_{u=0} = i^{-2}\left[i^2\left(\frac{rq+p^2}{p^2}\right)\right] \\
&= \frac{rq+p^2}{p^2}
\end{aligned}
$$

Variansi

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[X^2] + E[X]^2 = \frac{rq+p^2}{p^2} - \left(\frac{r}{p}\right)^2 \\
&= \frac{rq}{p^2}
\end{aligned}
$$

Contoh 2.5. Tim A melawan Tim B di tujuh permainan seri dunia. Artinya, seri berakhir ketika salah satu tim menang dalam empat pertandingan. Untuk setiap pertandingan, $P(A_{menang}) = 0.6$ dan diasumsikan independen. Berapakah kemungkinan bahwa seri ini akan berakhir tepat dalam enam pertandingan?

Jawab :

Kami memiliki $x = 6, r = 4\ dan\ P = 0.6$, diperoleh :

$$
\begin{aligned}
P\big(A_{menang}\ di\ 6\ seri\big) &= f(6; 4{,}0.6) \\
&= \binom{5}{3}(0.6)^4(0.4)^2 \\
&= 0.20736
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\big(B_{menang}\ di\ 6\ seri\big) &= f(6; 4{,}0.4) \\
&= \binom{5}{3}(0.4)^4(0.6)^2 \\
&= 0.09216
\end{aligned}
$$

2.3.6. Distribusi Poisson

Misalkan keadaan dimana jenis kejadian tertentu berulang, seperti panggilan telepon atau kerusakan pada kabel yang panjang. Misalkan $X(t)$ menunjukkan banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval tertentu [0.1). Anggaplah juga asumsi berikut berlaku. Pertama, kemungkinan bahwa suatu kejadian akan terjadi dalam interval pendek tertentu $[t, t +\div \Delta t]$

kira-kira sebanding dengan panjang interval, tidak bergantung pada posisi interval. Selanjutnya, anggaplah bahwa kemunculan kejadian diinterval yang tidak tumpang tindih adalah independen, dan probabilitas dua kejadian atau lebih dalam interval pendek $[t, t +\div \Delta t]$ dapat diabaikan. Jika asumsi ini menjadi valid sebagai $\Delta t \to 0$ maka distribusi $X(t)$ akan menjadi Poisson. Asumsi dan kesimpulan dinyatakan secara matematis pada teorema

Teorema 2.5. (Proses Poisson Homogen) Misalkan $X(t)$ menunjukkan jumlah kemunculan interval $[0, t]$, dan $P_n(t) = P\big[n\ menunjukkan\ fungsi\ [0, t]\big]$.

1) $X(0) = 0$
2) $P[X(t + h) - X(t) = n|X(s) = m] = P[X(t + h) - X(t) = n],\ \forall\ 0 \leq s \leq t\ dan\ 0 < h.$
3) $P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)\ \ untuk\ beberapa\ konstan\ \lambda > 0$
4) $P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1] = o(\Delta t)$

jika sifat melalui 4 tahan, maka untuk semua $t > 0$

Bukti :

Kejadian bisa terjadi pada interval $[0, (t + \Delta t)]$ dengan memiliki 0 kejadian pada $[t, t + \Delta t]$ dan n kejadian pada $[0, t]$, atau satu kejadian pada $[t, t + \Delta t]$ dan $n - 1$ kejadian pada $[0, t]$, atau dua atau lebih kejadian pada $[t, t + \Delta t]$; jadi untuk $n > 0$;

$$P_n(t + \Delta t) = P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= P_{n-1}(t)[\lambda \Delta t + o(\Delta t)] + P_n(t)[1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)] + o(\Delta t)$$

Tetapi

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{n-1}(t)\lambda \Delta t + P_n(t) + P_n(t)\lambda \Delta t - P_n(t)}{\Delta t}$$

$$= \lambda[P_{n-1}(t) - P_n(t)]$$

Untuk $n = 0$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t)$$

$$= P_0(t)[1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)]$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\lambda \Delta t P_0(t) + o(\Delta t) P_0(t)}{\Delta t}$$

$$= -\lambda P_0(t)$$

Dengan asumsi awal $P_0(0) = 1$, penyelesaian persamaan diferensial diatas dapat diverifikasi dengan mudah.

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Begitu juga , jika $n = 1$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda[P_0(t) - P_1(t)]$$

$$= \lambda\left[e^{-\lambda t} - P_1(t)\right]$$

Dimana diberikan

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Dapat ditunjukkan dengan induksi ini

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0,1,2, \ldots$$

2.3.7. Distribusi Seragam (*Uniform*)

Distribusi probabilitas diskrit yang paling sederhana adalah jika tiap nilai variabel random memiliki probabilitas yang sama untuk terpilih. Distribusi probabilitas seperti ini disebut Distribusi seragam atau *Uniform* Diskrit.

Jika variabel random X bisa memiliki nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ dan masing-masing bisa muncul dengan probabilitas yang sama maka distribusi probabilitasnya diberikan oleh :

$$f(x,k) = \frac{1}{k}, \qquad untuk\ x = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k.}$$

Notasi $f(x,k)$ menyatakan nilai fungsi f tergantung pada k. Ada yang menyebutkan fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi uniform diskrit sebagai berikut,

Suatu variabel random X berdistribusi Uniform, jika fungsi kepadatan probabilitasnya berbentuk ;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x = 1,2,3,\dots,N \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Contoh 2.6. Jika sebuah dadu dilemparkan, tiap elemen $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ muncul dengan peluang $\frac{1}{6}$. Jadi merupakan distribusi peluang seragam dengan $f(x,6) = \frac{1}{6}$ dengan $x = 1,2,3,4,5,6$.

Histogram distribusi seragam selalu berbentuk persegi panjang dengan fungsi yang sama. Pada contoh diatas, maka histogramnya adalah sebagai berikut :

Gambar 2.3.1 Distribusi Seragam Diskrit

Ekspektasi dan Variansi distribusi seragam $f(x,k)$ adalah

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

Dan

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

Bukti :

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i,k) = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{1}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 f(x_i,k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

Contoh 2.7. Dari contoh 2.6, tentukan ekspektasi dan variansinya!

Penyelesaian :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2}{k} = \frac{(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + \cdots + (6-3.5)^2}{6} = \frac{35}{12}$$

2.4. Distribusi Kontinu

2.4.1. Distribusi Seragam (*uniform*)

Densitas distribusi seragam dalam interval (a, b) $(a < b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a < x < b)$$

Distribusi yang sesuai

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \le a) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & (a < x < b) \\ 1 & (x \ge b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \left[\frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Fungsi karakteristik

$$\varphi_X(u) = \int_a^b \frac{e^{iux}}{b-a}dx = \left[\frac{1}{iu(b-a)}e^{iux}\right]_a^b$$
$$= \frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$$

Secara khusus, distribusi seragam $X \sim U(0,1)$ disebut distribusi seragam standar dan sesuai dengan nomor acak yang kontinu pada interval [0,1].

Contoh 2.8. Suatu fungsi distribusi seragam didefinisikan pada interval $(0,5)$. Hitunglah peluang untuk $P(X < 3)$!

Penyelesaian :

$$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{5}dx = F(3) - F(0)$$
$$= \frac{3-0}{5} - \frac{0-0}{5} = \frac{3}{5}$$

2.4.2. Distribusi Gamma

Distribusi kontinu yang sering terjadi dalam aplikasi disebut distribusi gamma.nama dihasilkan dari hubungan dengan fungsi yang disebut fungsi gamma.

Definisi 2.5. Fungsi gamma dilambangkan dengan $\Gamma(k)$ untuk semua $k > 1$, diberikan

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Misalkan jika $k = 1$, dimana $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$. Fungsi gamma memiliki beberapa sifat yang berguna seperti yang dinyatakan dalam teorema

Teorema 2.6. Fungsi gamma memenuhi sifat-sifat berikut:

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1) \quad k > 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{n}$$

Variable random kontinu X dikatakan berdistribusi gamma dengan parameter $k > 0$ dan $\theta > 0$ jika memiliki bentuk fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x;\theta,k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta * \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\theta} & untuk\ x > 0 \\ 0 & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Contoh 2.9. Jumlah harian (dalam inci) curah hujan terukur dilembah sungai adalah variabel acak $X \sim GAM(0.2{,}6)$ menarik untuk diketahui kemungkinan bahwa jumlah curah hujan akan melebihi tingkat tertentu, katakanlah 2 inci, ini akan menjadi

$$P[X > 2] = \int_2^\infty \frac{1}{(0.2)^6\Gamma(6)} x^{6-1} e^{-\left(\frac{x}{0.2}\right)} dx$$

$$= 1 - F(2; 0.2{,}6)$$

$$= \sum_{i=0}^{5} \frac{10^i}{i!} e^{-10} = 0.067$$

Nilai mean dari $X \sim GAM(\theta, k)$ diperoleh :

$$E(x) = \int_2^\infty x \frac{1}{\theta * \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{\theta * \Gamma(k)} \int_2^\infty x^{(1+k)-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{\theta^{1+k} * \Gamma(1+k)}{\theta * \Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{1+k} * \Gamma(k)} x^{(1+k)-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{\theta^{1+k} * \Gamma(1+k)}{\theta * \Gamma(k)}$$

$$= \frac{\theta k \Gamma(k)}{\Gamma(k)}$$

$$= k\theta$$

$$E(X^2) = \theta^2 k(1+k)$$

$$Var(X) = \theta^2 k(1+k) - (k\theta)^2 = k\theta^2$$

Fungsi Pembangkit Momen

$$M_x(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{x^{x-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta * \Gamma(k)} dx$$

$$= \frac{1}{\theta * \Gamma(k)} \int_2^{\infty} x^{k-1} e^{(t-1/\theta)/x} dx$$

Subtitusi $u = -\left(t - \frac{1}{\theta}\right) x,$

$$M_x(t) = \left(\frac{1}{\theta} - t\right)^{-k} \frac{1}{\theta * \Gamma(k)} \int_2^{\infty} u^{k-1} e^{-u} du$$

$$M_x(t) = (1 - \theta t)^{-k} \qquad t < 1/\theta$$

Dan

$$M_X^{(r)}(t) = (k + r - 1) \dots (k + 1) k \theta^r (1 - \theta t)^{-k-r}$$

$$= \frac{\Gamma(k + r)}{\Gamma(k)} \theta^r (1 - \theta t)^{-k-r}$$

$$E(X') = \frac{\Gamma(k + r)}{\Gamma(k)} \theta^r$$

Penurunan ini hanya valid jika r adalah bilangan positif

Bentuk Deret pangkat

$$M_x(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k + r)}{\Gamma(k)} \frac{\theta^r}{r!} t^r$$

Kasus khusus dari distribusi gamma dengan $\theta = 2 \ dan \ k = \frac{v}{2}$ disebut sebagai chi-kuadrat dengan derajat kebebasan v

2.4.3. Distribusi Eksponensial

Variabel random kontinu X mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ dalam bentuk

$$f(x; 0) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & untuk \ x > 0 \\ 0 & untuk \ yang \ lainnya \end{cases}$$

Nilai kumulatif X adalah

$$F(x; \theta) = 1 - e^{-x/\theta} \qquad x > 0$$

Sehingga θ merupakan parameter skala yang dinotasikan $X \sim GAM(\theta, 1)$ dapat digunakan untuk menetapkan bahwa X memiliki $f(x; 0) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$ $untuk$ $x > 0$ tetapi notasi yang lebih sering digunakan adalah $X \sim EXP(\theta)$.

Teorema 2.7. Untuk variabel random kontinu $X, X \sim EXP(\theta)$ jika dan hanya jika

$$P\left[X > a + t \,\middle|\, X > a\right] = P[X > t]$$

Untuk setiap $a > 0$ dan $t > 0$.

Bukti :

$$P[X > a + t | X > a] = \frac{P[X > a + t \text{ } and \text{ } X > a]}{P[X > a]}$$

$$= \frac{P[X > a + t]}{P[X > a]}$$

$$= \frac{e^{-(a+t)/\theta}}{e^{-a/\theta}}$$

$$= P[X > t]$$

Contoh 2.10. Misalkan keadaan utuh suatu komponen memiliki masa hidup atau masa kegagalan (dalam jam) $X \sim EXP(\theta)$. Probabilitas yang komponennya akan bertahan setidaknya 50 jam adalah

$$P[X \geq 50] = 1 - F(50; 100) = e^{-0.5} = 0.6065$$

Jadi dari hubungan ke distribusi gamma bahwa $E(X) = 1 \cdot \theta = \theta$ dan $Var(X) = 1 \cdot \theta^2 = \theta^2$ dengan demikian pada contoh sebelumnya, rata-rata masa hidup dari komponen adalah $\mu = 100 \text{ } jam$ dan standar deviasi σ adalah 100 jam.

2.4.4. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull biasanya digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang menyangkut lama waktu (umur) suatu objek yang mampu bertahan hingga akhirnya objek tersebut tidak berfungsi sebagaimana mestinya (rusak atau mati). Distribusi Weibull memiliki parameter λ dan k, dimana parameter λ dan k tersebut lebih besar dari 0.

a. Ekspektasi

$$E(X) = \int_0^\infty x \, f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty x\alpha\beta(\alpha x)^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta} dx$$

Misalkan

$$u = \alpha x^\beta$$
$$x = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\beta}}$$
$$du = \alpha\beta(x\alpha)^{\beta-1} dx$$

Maka

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\beta}} e^{-u}\, du$$

Gunakan fungsi gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx\,; x > 0$$

Maka

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Sehingga

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\, f(x) dx$$
$$= \int_0^\infty x^2 \alpha\beta(\alpha x)^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta} dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\beta}}\right)^2 e^{-u}\, du$$
$$= \frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)$$

b. Variansi

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2$$
$$= \left[\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2\right]$$

Contoh 2.11. Waktu kegagalan (dalam jam) sebuah komponen mesin dapat dimodelkan sebagai sebuah variabel acak Weibull dengan $\beta = {}^{1}\!/_{2}$ dan $\delta = 5000$ jam. Tentukan rata – rata kegagalan

Penyelesaian :

$$E(X) = 5000\Gamma\left[1 + \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= 5000\Gamma[3]$$

$$= 5000 \times 2!$$

$$= 10.000\ jam$$

2.4.5. Distribusi Normal

Distribusi Normal pertama kali diperkenalkan oleh braham de moivre pada tahun 1733 sebagai suatu perkiraan untuk distribusi variabel acak binomial. Dimana sebuah variabel X acak mengikuti distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2. Persamaan distribusi normal secara umum :

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-[\frac{x-\mu}{\sigma}]^2/2}$$

Untuk $-\infty < x < \infty$, dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$. hal ini dinotasikan sebagai $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Distribusi normal juga sering disebut distribusi Gaussian.

Mean dan variansi dengan menerapkan fungsi karakteristik distribusi normal $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Berdasarkan subsitusi $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, kita memiliki mean

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)\emptyset(z)dz$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \emptyset(z)dz + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\emptyset(z)dz$$

$$= \mu$$

Dan

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)^2 \emptyset(z) dz$$

$$= \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \emptyset(z) dz + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\emptyset(z) dz + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \emptyset(z) dz$$

Variansi

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2 = \sigma^2$$

Teorema 2.8. Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka

1. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
2. $F_x(X) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Bukti :

$$F_z(z) = P[Z \leq z]$$

$$= P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right]$$

$$= P[X \leq \mu + z\sigma]$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+z\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

Setelah disubsitusi $w = \frac{x-\mu}{\sigma}$, kita mempunyai

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw$$

Berikutnya dengan diferensiasi,

$$f_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Diperoleh,

$$F_x(x) = P[X \leq x] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Contoh 2.12. Diberikan X masa hidup baterai dalam berbulan-bulan dan asumsikan bahwa aproksimasi $X \sim N(60,36)$. Fraksi baterai yang akan gagal dalam periode garansi empat tahun diberikan sebagai berikut :

$$P[X \leq 48] = \Phi\left(\frac{48-60}{6}\right)$$

$$= \Phi(-2)$$

$$= 0.0228$$

Jika seseorang ingin mengetahui apakah masa garansi akan setara dengan 15% kegagalan, maka,

$$P[X \leq 0] = \Phi\left(\frac{x_{0.05}-60}{6}\right) = 0.05$$

Yang berarti bahwa $\frac{x_{0.05}-60}{6} = -1.645$, dan $x_{0.05} = -1.645(6) + 60 = 50.13$ bulan.

Teorema 2.9. Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka

$$M_x(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$$E(X-\mu)^{2r} = \frac{(2r)!\,\sigma^{2r}}{r!\,2^r} \qquad r = 1,2,\dots$$

$$E(X-\mu)^{2r-1} = 0 \qquad r = 1,2,\dots$$

Bukti :

Ditunjukkan persamaan, kita mencatat bahwa MGF *(moment generating function)* untuk standar variabel random normal ditunjukkan oleh

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tz} e^{-x^2/2}\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-t)^2/2 + t^2/2} dx = e^{t^2/2}$$

Integral dari faktor pertama dalam integral kedua adalah 1, karena merupakan integral dengan mean t dan variansi 1. Karena $X = Z_\sigma + \mu$,

$$M_x(t) = M_{\sigma Z+\mu}(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

Mengikuti dari ekspansi berikut, didapat :

$$M_{X-\mu}(t) = e^{\sigma 2r/2}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r} t^{2r}}{2^r r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r} (2r)!\, t^{2r}}{2^r r!\,(2r)!}$$

Ekspansi ini hanya mengandung kekuatan integer, dan koefisien dari $t^{2r}/(2r)!$ adalah $2rth$ kejadian dari $(X - \mu)$.

LATIHAN

1. Buktikan persamaan berikut

   i. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$n = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

$$n = k \Rightarrow 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$n = k + 1 \Rightarrow 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k^2 + k}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k^2 + k + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad Terbukti!$$

   ii. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1(1+1) + (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

$$1 = 1$$

$$n = k \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2+1)}{6}$$

$$n = k+1 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad Terbukti!$$

iii. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$$n = 1 \Rightarrow 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$$

$$1 = \frac{1 \cdot 4}{4}$$

$$1 = 1$$

$$n = k \Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

$$n = k+1 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 1)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(n)^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad Terbukti!$$

2. Misalkan X adalah variabel random non-negatif dengan distribusi $F_X(x)$. Diasumsikan bahwa $F_X(0) = 0$. Buktikan

$$E[X] = \int_0^\infty x^n \, dF_n(x) = n \int_0^\infty x^{n-1} \, [1 - F_X(x)] dx \qquad n = 1,2,\ldots$$

Bukti :

Telah diberikan persamaan

$$E[X] = \int_0^\infty [1 - F_X(x)] \, dx$$

Dan

$$E[X^2] = 2 \int_0^\infty x \, [1 - F_X(x)] dx$$

Maka

$$\begin{aligned} E[X] = \int_0^\infty [1 - F_X(x)] \, dx &= \int_0^\infty \left(1 - 1 + e^{-\lambda x}\right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, dx \\ &= \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \, dF_X(x)$$

Dengan

$$E[X] = \int_0^\infty x \, dF_X(x) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)] \, dx$$

Maka

$$\begin{aligned} E[X^n] = \int_0^\infty x^n \, dF_X(x) &= \int_0^\infty x \, x^{n-1} dF_X(x) \\ &= \int_0^\infty x^{n-1} \, x dF_X(x) \\ &= \int_0^\infty x^{n-1} \, [1 - F_X(x)] dx \end{aligned}$$

3. Fungsi karakteristik $\varphi_X(u)$ dari distribusi seragam $X \sim U(C+L, C+NL)$ diberikan dalam persamaan (2.3.5). Hitung mean dan variansi dari distribusi seragam dengan menerapkan persamaan (2.2.18)

   Penyelesaian :

   Persamaan (2.3.5)

$$\varphi_X(u) = E\left[e^{iuX}\right] = \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{iu(C+L)}}{N}$$
$$= \frac{e^{iu(C+L)}\left(1 - e^{iuLN}\right)}{N(1 - e^{iuL})}$$

   Persamaan (2.2.18)

$$E[X^n] = \left[i^{-n} \frac{d^n \varphi_X(u)}{du^n}\right]_{u=0}$$

   Mean

$$E[X] = \left[i^{-1} \frac{d^n \varphi_X(u)}{du^n}\right]_{u=0} = i^{-1}\left[i\left(Ce^{iu} + \frac{\left(Ne^{iuL} + e^{iuLN}\right)L^2 e^{iuN}}{e^{iuL} + e^{iuL}}\right)\right]_{u=0}$$
$$= i^{-1} i\left[C(1) \frac{(N(1)+1)L(1)}{1+1}\right]$$
$$= C + \frac{(N+1)L}{2}$$

$$E[X^2] = \left[i^{-2} \frac{d^n \varphi_X(u)}{du^n}\right]_{u=0}$$
$$= i^{-2}\left[i^2\left(C^2 e^{iu} + \left(Ne^{iuL} + e^{uiLN}\right)CLe^{iuN} + \frac{\left(Ne^{iuL} + e^{iuLN}\right)\left(2Ne^{iuL} + e^{iuLN}\right)L^2 e^{iuN}}{3(e^{iuL} + e^{iuL})}\right)\right]_{u=0}$$
$$= i^{-2} i^2\left[C^2(1) + (N(1)+1)CL(1) + \frac{(N(1)+1)(2N(1)+1)}{3(1+1)}\right]$$
$$= C^2 + (N+1)LC + \frac{(N+1)(2N+1)L^2}{6}$$

   Variansi

$$Var(X) = E[X^2] + E[X]^2$$
$$= \left[C^2 + (N+1)LC + \frac{(N+1)(2N+1)L^2}{6}\right] + \left[C + \frac{(N+1)L}{2}\right]^2$$
$$= \frac{(N^2-1)L^2}{12}$$

4. Hitung mean dan variansi dengan menerapkan fungsi karakteristik distribusi binomial negatif $X \sim NB(p, r)$.

   Penyelesaian :

   Fungsi karakteristik

$$\varphi_X(u) = \left(\frac{pe^{iu}}{1 - qe^{iu}}\right)^r$$

   Mean

$$\begin{aligned}
E[X] &= \left[i^{-1}\frac{d\varphi_X(u)}{du}\right]_{u=0} \\
&= i^{-1}\left[r\left(\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}\right)^{r-1}\left(\frac{pe^{iu}i\left(1-qr^{iu}\right) - pe^{iu}\left(qe^{iu}i\right)}{(1-qe^{iu})^2}\right)\right]_{u=0} \\
&= i^{-1}r\left[\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1}\left(\frac{pi(1-q) - p(qi)}{(1-q)^2}\right)\right] \\
&= i^{(-1)}r\left[\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1}\left(\frac{pi - piq - p(qi)}{(1-q)^2}\right)\right] \\
&= i^{(-1)}r\left[\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1}\left(\frac{i(p-pq)}{(1-q)^2}\right)\right] \\
&= i^{-1}\left(\frac{i(p-pq)}{(1-q)^2}\right)r\left(\frac{p(1)}{1-q(1)}\right)^{r-1} \\
&= \left(\frac{(p-pq)}{(1-q)^2}\right)r\left(\frac{p}{1-q}\right)^{r-1} \\
&= r\left[\left(\frac{1}{1-q}\right)^{r-1}\frac{p(1-q)}{(1-q)^2}\right] \\
&= r\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \left[i^{-2}\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}\right]_{u=0} = i^{-2}\left[i^2\left(\frac{rq+p^2}{p^2}\right)\right] \\
&= \frac{rq+p^2}{p^2}
\end{aligned}$$

   Variansi

$$\begin{aligned}
Var(X) = E[X^2] + E[X]^2 &= \frac{rq+p^2}{p^2} - \left(\frac{r}{p}\right)^2 \\
&= \frac{rq}{p^2}
\end{aligned}$$

5. Distribusi Gamma $X \sim GAM(\lambda, k)$

Mean

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot f(x)\, dx = \int_0^\infty x \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} dx$$
$$= \frac{k}{\lambda} \int_0^\infty \frac{\lambda^{k+1} x^k e^{-\lambda x}}{\Gamma(k+1)} dx$$
$$= \frac{k}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)\, dx = \frac{k+k^2}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k+1)} dx$$
$$= \frac{k+k^2}{\lambda^2}$$

Variansi

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{k+k^2}{\lambda^2} - \left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 = \frac{k}{\lambda^2}$$

6. Distribusi Weibull $X \sim WEI(\alpha, \beta)$

Mean

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot f(x)\, dx = \int_0^\infty x\alpha\beta(\alpha x)^{\beta-1}\, e^{-(\alpha x)^\beta} dx$$

Misalkan :

$$u = \alpha x^\beta$$
$$x = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\beta}}$$
$$du = \alpha\beta(x\alpha)^{\beta-1} dx$$

Maka

$$E[X] = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\beta}} e^{-u} du = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty u^{\frac{1}{\beta}}\, e^u du$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x} dx \qquad (x > 0)$$
$$E[X] = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^\infty x^2\, \alpha\beta(\alpha x)^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta} dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\beta}}\right)^2\, e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)$$

Variansi

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\right] - \left[\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\right]$$

7. Distribusi Lognormal $X \sim LOGN(\mu, \sigma^2)$

   Mean

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{x}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(ln\, x - \mu)^2\right] dx$$

   Misalkan :

$$z = \frac{\ln x\, \mu}{\sigma}$$

$$dz = \frac{1}{x\sigma} dx$$

$$x = \exp(\sigma z + \mu)$$

   Maka

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z + \mu)\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}z^2\right) dx$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(t^2 - \sigma^2)\right) dx$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{x}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(ln\, x - \mu)^2\right] dx$$

   Misalkan :

$$z = \frac{\ln x\, \mu}{\sigma}$$

$$dz = \frac{1}{x\sigma} dx$$

$$x = \exp(\sigma z + \mu)$$

   Maka

$$E[X^2] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}(z^2 - \sigma^2)\right] dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\sigma z + 2\mu)\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dx \\
&= \exp(2\mu) + 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z^2 - 4\sigma z + 4\sigma^2)^2\right] dx \\
&= \exp(2\mu) + 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2 - 2\sigma^2\right) dx \\
&= \exp(2\mu) + 2\sigma^2
\end{aligned}
$$

Variansi

$$
\begin{aligned}
Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \left[\exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]^2 \\
&= \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)
\end{aligned}
$$

8. Distribusi Beta $X \sim BETA(\alpha, \beta)$
   Mean

$$
\begin{aligned}
E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{(\alpha-\beta-1)!\,\alpha!}{(\alpha-1)!\,(\alpha+\beta)!} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2+\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} B[(2+\alpha),\beta] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(2+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma[(2+\alpha)+\beta]} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{(\alpha+\beta-1)!\,(\alpha+1)!}{(\alpha-1)!\,(\alpha+\beta+1)!}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

Variansi

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha+\beta+1} - \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\frac{(\alpha^2+\alpha)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta-\alpha^3-\alpha^2-\alpha^2\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right]$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

BAB III

PROSES POISSON

3.1. Proses Stokastik

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses menghitung *(counting process)* jika $N(t)$ atau N_t menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi selama waktu t.

Fenomena random dapat dijelaskan dengan proses Poisson didefinisikan secara tepat dan membuat sketsa proses Poisson secara informal. Misal interval waktu $[0, t]$ yang dibagi menjadi n interval waktu yang sama kecilnya, dimana $n\Delta t = t$. Untuk setiap interval kecil $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ $(k = 0,1,2, \dots, n-1)$ menggunakan percobaan Bernoulli dengan probabilitas p adalah kedatangan pelanggan dan $q = 1 - p$ adalah probabilitas pelanggan tidak datang yang diasumsikan tidak ada dua atau lebih pelanggan sekaligus yang dating dalam interval yang kecil. Probabilitas bahwa k pelanggan tiba pada interval waktu [0,1] ditunjukkan oleh

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} (\lambda t)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

dimana

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n\left[n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\right]}{k!}$$

dan $p = \frac{\lambda t}{n}$ maka $q = 1 - p = 1 - \frac{\lambda t}{n}$

sehingga diperoleh

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{n\left[n\left(n - \frac{1}{n}\right)\left(n - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\right]}{k!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

$$= n^k \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)\right)}{k!} \left(\frac{\lambda t^k}{n^k}\right)\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

$$= n^k \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)}{k!}\left(\frac{1}{n^k}\right)(\lambda t)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)}{k!}(\lambda t)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

maka diperoleh persamaan

$$P\{N(t)=k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

yaitu probabilitas $P\{N(t)=k\}$ yang memenuhi distribusi Poisson $N(t) \sim POI(\lambda t)$

Dari asumsi diatas, turunan probabilitas kedatanngan pelanggan pada interval n. Perhatikan distribusi geometri berikut :

$$pq^{n-1} = \lambda\Delta t\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-1} = \lambda e^{-\lambda t}\Delta t$$

dimana $n \to \infty, p = \lambda\Delta t$ dan $t = n\Delta t$ berarti bahwa probabilitas $P\{X_1 \leq t\}$ bahwa pelanggan pertama tiba sampai waktu t adalah :

$$dP\{X_1 \leq t\} = \lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$\int dP\{X_1 \leq t\} = \int \lambda\, e^{-\lambda t}dt$$

Misalkan :

$$x = -\lambda t$$

$$dx = -\lambda dt$$

$$dt = \frac{dx}{-\lambda}$$

Maka

$$P\{X_1 \leq t\} = \lambda \int e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int e^x \frac{dx}{-\lambda}$$

$$= -1 \int e^x\,dx$$

$$= -1(e^x)$$

substitusi $x = -\lambda t$ maka

$$P\{X_1 \leq t\} = 1 - \left(e^{-\lambda t}\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Untuk proses stokastik waktu kontinu $\{X(t), t \geq 0\}$ dikatakan independen increments jika seluruh $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ variabel.

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

adalah independen, dimana $X(t_i) - X(t_{i-1})$ increment. Proses $\{X(t), t \geq 0\}$ disebut increment stasioner jika $X(t+s) - X(t)$ memiliki distribusi yang sama untuk seluruh $t \geq 0$. Proses $\{X(t), t \geq 0\}$ disebut increment independen stasioner jika $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ memiliki distribusi yang sama untuk seluruh $t_2 > t_1 \geq 0$ dan $s > 0$.

3.2. Proses Poisson

Proses perhitungan $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah salah satu proses stokastik yang paling sederhana dan mewakili jumlah kejadian yang merujuk pada pelanggan yang datang, parikel, pekerjaan, transaksi, data, dll.

Definisi 3.1. Fungsi $f(h)$ dikatakan $o(h)$ jika

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Contoh 3.1. Untuk interval (waktu) kecil $(h > 0)$ diperoleh

$$e^{-\lambda h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^n}{n!}$$

$$= 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots$$

$= 1 - \lambda h + o(h)$ (peluang tidak ada kejadian pada interval waktu yang kecil)

$1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ (peluang ada kejadian pada interval waktu yang kecil)

Perhatikan bahwa $P\{X \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$ dan $P\{X > t\} = e^{-\lambda t}$ untuk distribusi eksponensial $X \sim EXP(\lambda)$.

Definisi 3.2. Proses perhitungan $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika memenuhi kondisi berikut

i. $N(0) = 0$

ii. Proses ini memiliki kenaikan stasioner independen

iii. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$

iv. $P\{N(h) \geq 2\} = O(h)$

Untuk $t \geq 0$ diperoleh

$$P_k(t) = P\{N(t) = k|N(0) = 0\} \quad (k = 0,1,2, \dots)$$

yang menunjukkan probabilitas bahwa kejadian k terjadi pada interval waktu $(0, t]$. Perhatikan bahwa $P_k(t)$ adalah fungsi probabilitas massa untuk t tetap, diperoleh

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

karena probabilitas total $= 1$, dengan menerapkan stasioner dari proses Poisson, diperoleh

$$P\{N(t+h) = N(t) + k|N(t)\} = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & k = 1 \\ \lambda h + o(h) & k = i + 1 \\ o(h) & k > i + 1 \end{cases}$$

dari persamaan diatas dan **Definisi 3.2** diperoleh

$$P_k(t+h) = P(N(t+h) = 0) = P(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0)$$

$$= P_0(t)P_0(h)$$

$$= P_0(t)\big(1 - \lambda h + o(h)\big)$$

$$= P_0(t) - \lambda h P_0(t) + o(h)$$

dimana $k = 0$ dan

$$P_k(t+h) = P(N(t+h) = k)$$

$$= P(N(t) = k, N(t+h) - N(t) = 0) + P(N(t) = k-1, N(t+h) - N(t) = 1) + P(N(t) \leq k-2)P(N(h) \geq 2)$$

$$= P_k(t)P_0(h) + P_{k-1}(t)P_1(h) + o(h)$$

$$= P_k(t)\big(1 - \lambda h + o(h)\big) + P_{k-1}(t)\big(\lambda h + o(h)\big) + o(h)$$

$$= (1 - \lambda h)P_k(t) + \lambda h P_{k-1}(t) + o(h)$$

dari dua persamaan diatas dan asumsi $h \to 0$ diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t)$$

dengan kondisi $P_0(0) = P\{N(0) = 0\} = 1$ dan $P_k(0) = P\{N(0) = k\} = 0$ $(k = 1,2, \dots)$ dengan **Definisi 3.2** dari huruf **(i)**.

Menerapkan teori dari persamaan diferensial diperoleh

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \ \ (k = 0,1,2, \dots)$$

yang merupakan fungsi probabilitas massa dari distribusi Poisson dengan parameter λt, yaitu t tetap $N(t) \sim POI(\lambda t)$.

Definisi 3.3. Proses perhitungan $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika memenuhi kondisi berikut

i. $N(0) = 0$

ii. Proses ini memiliki kenaikan independen

iii. Probabilitas bahwa kejadian k memenuhi semua interval t yang diberikan oleh

$$P\{N(t+s) - N(s) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

untuk semua $s, t \geq 0$ adalah $N(t+s) - N(s) \sim POI(\lambda t)$ untuk $s, t \geq 0$.

Dari **Definisi 3.3** memenuhui **Definisi 3.2** ditunjukkan oleh

$$P\{N(h) = 1\} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$$

$$P\{N(h) = k\} = \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h} = o(h) \ \ \ (k = 2,3, \dots)$$

dari pernyatan diatas bahwa $N(h) \sim POI(\lambda h)$, maka diperoleh bahwa kedua definisi tersebut ekuivalen.

3.3. Proses Poisson Non-Homogen

Definisi 3.4. Proses perhitungan $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses Poisson non-homogen atau non-stasioner dengan fungsi intesitas $\lambda(t)$ jika memenuhi

i. $N(0) = 0$

ii. Proses memiliki kenaikan independen

iii. $\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

iv. $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$

Proses Poisson homogeny memiliki parameter λ, sedangkan proses Poisson non-homogen memiliki parameter $\lambda(t)$ yang disebut fungsi intensitas, yaitu

$$m(t) = \int_0^t \lambda(x)\, dx$$

maka diperoleh

$$P_k(t) = P\{N(t) = k | N(0) = 0\} = \frac{[m(t)]^k}{k!} e^{-m(t)}$$

dimana $E[N(t)] = m(t)$ merupakan mean dari t tetap dan disebut fungsi nilai mean.

Distribusi bersyarat dari waktu kedatangan S_1 menunjukkan bahwa $N(t) = 1$ adalah

$$P\{S_1 \leq s | N(t) = 1\} = \frac{P\{S_1 \leq s, N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}} = \frac{P\{N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0\}}{P\{N(t) = 1\}}$$

$$= \frac{m(s)e^{-m(s)}e^{[m(t)-m(s)]}}{m(t)e^{-m(t)}}$$

$$= \frac{m(s)}{m(t)} \quad (s \leq t)$$

Teorema 3.1. Distribusi bersyarat dari waktu tunggu $S_1, S_2, \dots, S_n$ menunjukkan bahwa $N(t) = n$

$$P\{S_1 \leq s_1, S_2 \leq s_2, \dots, S_n \leq s_n | N(t) = n\} = n! \int_0^{s_1} \int_{s_1}^{s_2} \dots \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{\prod_{i=1}^n \lambda(x_i)}{[m(t)]^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Densitas bersyarat dari n waktu tunggu $S_1, S_2, \dots, S_n$ menunjukkan bahwa $N(t) = n$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n | N(t) = n) = \frac{n!}{[m(t)]^n} \prod_{i=1}^n \lambda(t_i)$$

LATIHAN

1. Buktikan persamaan

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (k = 0,1,2,\dots)$$

Penyelesaian :

Misal $P_k(t)$ adalah peluang dari k kedatangan dalam interval waktu t, dimana $k = 0,1,2,3,\dots$ Peluang terjadi k kedatangan dapat dinyatakan dengan mengembangkan persamaan diferensial seperti pada penjelasan materi 3.2, maka diperoleh persamaan

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

Untuk $k = 0$ diperoleh

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$
$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda dt$$
$$\ln P_0(t) = -\lambda t$$
$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Dan persamaan

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t)$$

Untuk $k = 1$ diperoleh

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t)$$
$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t)$$
$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$
$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right) = \lambda$$
$$e^{\lambda t} P_1(t) = \int \lambda\, dt$$
$$P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Untuk $k = 2$ diperoleh

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t)$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t}P_2(t) = \lambda^2 t$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_2(t)\right) = \lambda^2 t$$
$$e^{\lambda t}P_2(t) = \int \lambda^2 t\, dt$$
$$P_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2\cdot 1}e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}$$

Untuk $k = 3$ diperoleh

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_2(t) - \lambda P_3(t)$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda P_2(t)$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}$$
$$e^{\lambda t}\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t}P_3(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^2}{2}$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_3(t)\right) = \frac{1}{2}\lambda^3 t^2$$
$$e^{\lambda t}P_3(t) = \int \frac{1}{2}\lambda^3 t^2\, dt$$
$$e^{\lambda t}P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3$$
$$P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3\cdot 2\cdot 1}e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t}$$

Sehingga dapat diambil suatu rumus umum, yaitu :

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad k \geq 0$$

Jadi, terbukti bahwa peluang dari k kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah $\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, dengan jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt.

2. Untuk pembukaan toko dari jam 9 pagi hingga jam 6 sore. Pelanggan yang dating mengikuti proses Poisson dengan 10 orang/jam selama jam kerja.
   (i) Hitung mean dan variansi dari pelanggan yang dating selama jam kerja.
   (ii) Hitung probabilitas bahwa tidak ada pelanggan yang dating selama setengah jam.

Penyelesaian :

(i) Diketahui :

$$\lambda = 10\ orang$$
$$t = 0\ (9\ pagi)$$
$$t = 9\ (6\ sore)$$

Mean

$$E[N(9)] = \lambda t = 10 \cdot 9 = 90\ orang$$

Variansi

$$Var\big(N(9)\big) = 90\ orang^2$$

(ii) $P\{N(0.5) = 0\} = e^{-\lambda t} = e^{-0.5(10)}$
$= e^{-5}$
$= 0.00673795$

3. Untuk pembukaan toko dari jam 9 pagi hingga jam 6 sore. Pelanggan yang datang mengikuti proses Poisson dengan waktu antar kedatangan rata-rata 6 menit.

a) Hitung probailitas ke- k pelanggan ($k = 0,1,2, \ldots$) tiba dalam waktu $\frac{1}{2}$ jam.

b) Hitung mean dan variansi dari pelanggan yang dating lebih rendah dan lebih tinggi untuk rata-rata $\pm 3\sqrt{Var}$.

Penyelesaian :

a) Diketahui waktu kedatangan antar pelanggan rata-rata 6 menit, maka $\frac{60\ menit}{6\ menit} = 10$ maka dalam 1 jam ada 10 pelanggan yang dating sehingga $\lambda = 10$ dan $t = 0.5$

$$\begin{aligned} P_0(30) = P\{N(30) = 0\} &= e^{-\lambda t} \\ &= e^{-(0.5)10} \\ &= e^{-5} \\ &= 0.00673795 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(30) = P\{N(30) = 1\} &= \lambda t e^{-\lambda t} \\ &= (0.5)(10)e^{-(0.5)10} \\ &= 5e^{-5} \\ &= 0.0336897 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(30) = P\{N(30) = 2\} &= \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{\big((0.5)(10)\big)^2}{2!} e^{-(0.5)10} \\ &= \frac{25}{2} e^{-5} \\ &= 0.0842243 \end{aligned}$$

b) Diketahui

$$\lambda = 10\ orang$$
$$t = 0\ (9\ pagi)$$
$$t = 9\ (6\ sore)$$

Mean

$$E[N(9)] = \lambda t = 10 \cdot 9 = 90\ orang$$

Variansi

$$Var\big(N(9)\big) = 90\ orang^2$$

Jumlah pelanggan

$$\begin{aligned} Upper = 90 + 3\sqrt{90} &= 90 + 28.4605 \\ &= 118.4605\ \approx 119\ orang \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Lower = 90 - 3\sqrt{90} &= 90 - 28.4605 \\ &= 61.5395 \approx 62\ orang \end{aligned}$$

4. Misalkan $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses Poisson. Tunjukkan bahwa

$$P\{N(s) = k|N(t) = n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \qquad (k = 0,1,2, \dots, n)$$

untuk $s < t$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
P\{N(s) = k|N(t) = n\} &= \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{P\{N(s) = k\}P\{N(t - s) = n - k\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{\left[\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\right]\left[\frac{\big(\lambda(t-s)\big)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}\right]}{\left[\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\right]} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left[(\lambda s)^k\big(\lambda(t-s)\big)^{n-k}(\lambda t)^{-n}e^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}e^{\lambda t}\right] \\
&= \binom{n}{k}\left[\lambda^{k+n-k-n}e^{-\lambda s-\lambda(t-s)+\lambda t}s^k(t-s)^{n-k}t^{-n}\right] \\
&= \binom{n}{k}s^k(t-s)^{n-k}t^{-n} \qquad \left(kalikan\ dengan\frac{t^k}{t^k}\right) \\
&= \binom{n}{k}\frac{s^k}{t^k}\ (t-s)^{n-k}t^{-n}t^k \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\ (t-s)^{n-k}t^{-n}t^k \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\ (t-s)^{n-k}t^{-(n-k)} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(\frac{(t-s)^{n-k}}{t}\right) \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

BAB IV

PROSES PEMBAHARUAN

4.1. Pendahuluan

Definisi 4.1. Proses perhitungan $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut sebagai proses pembaharuan jika interval waktunya berdistribusi sama dan saling lepas dengan semua distribusinya $F(t)$.

4.2. Fungsi Pembaharuan

Dari **Definisi 4.1** dapat didefinisikan distribusi interval waktu identic secara umum, yaitu

$$F(t) = P\{X_m \leq t\} \quad (m = 1,2, \dots)$$

dengan variabel random X_m merupakan variabel non-negatif untuk proses pembaharuan.

Misalkan S_n adalah jumlahan waktu tunggu untuk kejadian ke-n dengan

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (n = 1,2, \dots)$$

dimana $S_0 = 0$. Distribusi $P\{S_n \leq t\}$ merupakan distribusi dari jumlahan waktu tunggu untuk kejadian ke-n dimana

$$P\{S_n \leq t\} = F^{(n)}(t) = F * F * \dots * F(t) \quad (n = 1,2, \dots)$$

yang merupakan konvulasi Stieltjes n-kali lipat dan distribusi antar kedatangan $F(t)$, maka dapat didefinisikan

$$F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t - x) dF(x)$$

dengan $(n = 1,2, \dots)$. Dimana $F^{(0)}(t) = 1(t)$ fungsi langkah dan $F^{(1)} = F(t)$, relasi antara S_n dan $N(t)$, yaitu

$$S_n \leq t \iff N(t) \geq n$$

maka terdapat

$$P\{N(t) = n\} = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n + 1\} = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)$$

Mean dari variabel random $N(t)$ disebut sebagai fungsi pembaharuan $M(t) = E[N(t)]$, yang merupakan jumlah pembaharuan atau kejadian hingga waktu t, maka didefinisikan

$$\begin{aligned} M(t) = E[N(t)] = \sum_{m=1}^{\infty} m\, P\{N(t) = m\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} P\{N(t) = m\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P\{N(t) = m\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}\,(t) \end{aligned}$$

4.3. Transformasi Laplace Stieltjes

Definisi 4.2. Transformasi Laplace-Stieltjes adalah transformasi integral yang mirip dengan transformasi laplace.

Transformasi Laplace-Stieltjes adalah transformasi fungsi $g: R \to R$ yang didefinisikan dari integral Labergue-Stieltjes. Misalkan $F(t)$ adalah fungsi yang terdefinisi dengan baik pada t, untuk $t \geq 0$ dan t merupakan jumlahan kompleks, maka jika ada

$$F(t) = \int_0^t dF(x) = \int_0^t f(x)\, dx$$

maka transformasi Laplace-Stieltjes adalah

$$F^*(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t) dt$$

Teorema 4.1. Untuk suatu nilai α non-negatif terdapat

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t^\alpha} = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

maka didapat

$$\lim_{s\to+0} s^\alpha\, F^*(s) = C$$

dimana $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{k-1} dx$ adalah fungsi gamma.

Teorema 4.2. Jika $F(t)$ fungsi yang tidak menurun dan transformasi Laplace-Stieltjes nya adalah

$$F^*(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t)$$

Konvergen pada $\mathcal{R}(s) > 0$, dan jika nilai α non-negatif, maka

$$\lim_{s\to+0} s^\alpha\ F^*(s) = C$$

Maka

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t^\alpha} = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Contoh 4.1. Jika diasumsikan $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ untuk proses pembaharuan, maka terdapat

$$F^{(n)}(t) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!}dx = \frac{\lambda}{(n-1)!}\int_0^t (\lambda x)^{n-1}\, e^{-\lambda x}dx$$

Misalkan :

$$u = \lambda x$$

$$\frac{du}{\lambda} = dx$$

Maka

$$F^{(n)}(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!}\int_0^t u^{n-1}\, e^{-u}\frac{du}{\lambda} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t u^{n-1}\, e^{-u}du$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}[u^{n-1}e^{-u}]_0^t$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[(\lambda t)^{n-1}e^{-\lambda t}\right] - 0$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(\lambda t)^{n-1}e^{-\lambda t}$$

dengan $i = 1 - n$ maka

$$F^{(n)}(t) = \frac{1}{i!}(\lambda t)^i e^{-\lambda t} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned}
P\{N(t) = n\} = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \left(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^i}{n!} e^{-\lambda t} \right) \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(t) = E[N(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_0^t e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \\
&= \int_0^t e^{-\lambda x} \left(\frac{\lambda(\lambda x)^{1-1}}{(1-1)!} + \frac{\lambda(\lambda x)^{2-1}}{(2-1)!} + \frac{\lambda(\lambda x)^{3-1}}{(3-1)!} + \frac{\lambda(\lambda x)^{4-1}}{(4-1)!} + \cdots \right) dx \\
&= \int_0^t e^{\lambda x} \left(\frac{\lambda(\lambda x)^0}{0!} + \frac{\lambda(\lambda x)^1}{1!} + \frac{\lambda(\lambda x)^2}{2!} + \frac{\lambda(\lambda x)^3}{3!} + \cdots \right) dx \\
&= \int_0^t e^{-\lambda x} \lambda \left(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots \right) dx \\
&= \lambda \int_0^t e^{-\lambda x} \left(1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots \right) dx
\end{aligned}$$

Ingat Deret Taylor

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ax}{n!} = 1 + \frac{ax}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Maka

$$M(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda x} \cdot e^{\lambda x} dx = \lambda \int_0^t dx$$

$$= \lambda [x]_0^t$$

$$= \lambda t$$

Contoh 4.2. Diasumsikan bahwa

$$F(t) = \int_0^t \lambda(\lambda x)\, e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \int_0^t x\, e^{-\lambda x} dx$$

Misalkan :

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$dv = e^{-\lambda x}$$

intervalnya diabaikan terlebih dahulu, maka

$$F(t) = \lambda^2 \int x\, e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \left[x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) — \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda x}\, dx \right]$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} \cdot -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \right]$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]$$

$$= -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}$$

Maka

$$F(t) = \int_0^t \lambda\,(\lambda x)e^{-\lambda x}dx = \left[-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$= \left(-\lambda t e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}\right) - (-\lambda(0)e^0 - e^0)$$

$$= (-\lambda t - 1)e^{-\lambda t} - (-1)$$

$$= 1 + (-\lambda t - 1)e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$$

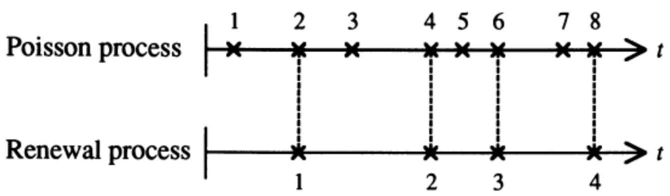
Misalkan $X_m \sim GAM(\lambda, 2)$ dengan $m = 1,2,3, \dots$ maka teradapat

$$P\{N(t) = n\} = \sum_{i=2n}^{2n+1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \qquad (n = 0,1,2, \dots)$$

$$= \frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!} e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dengan $n = 0,1,2, \dots$

- Untuk $n = 0$ maka
$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} + \frac{(\lambda t)^1}{(0+1)!} = \frac{1}{1} + \frac{\lambda t}{1} = 1 + \lambda t$$
- Untuk $n = 1$ maka
$$P\{N(t) = 1\} = \frac{(\lambda t)^1}{2!} + \frac{(\lambda t)^{2(1)+1}}{(2+1)!} = \frac{\lambda t}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!}$$



Gambar diatas menunjukkan hubungan antara proses pembaharuan yang berdistribusi $X_m \sim GAM(\lambda, 2)$ dengan proses Poisson yang berparameter λ. Dapat dipahami bahwa terdapat dua kejadian berurutan untuk proses Poisson dan proses pembaharuan dengan distribusi

$X_m \sim GAM(\lambda, 2)$ yang menyatakan bahwa distribusi dari jumlahan dua variabel independen yang eksponensial adalah distribusi gamma order 2.

Fungsi pembaharuan $M(t)$ dapat didefinisikan sebagai

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left[\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda t}\right]$$

$$= \left[\frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t}\right] + \left[2\left(\frac{(\lambda t)^4}{4!}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^5}{5!}e^{-\lambda t}\right)\right] + \left[3\left(\frac{(\lambda t)^6}{6!}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^7}{7!}e^{-\lambda t}\right)\right] + \cdots$$

$$= \frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^3}{6}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^4}{12}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^5}{60}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^6}{240}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^7}{1680}e^{-\lambda t} + \cdots$$

$$= \frac{\lambda t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\lambda t}$$

Contoh 4.3. Untuk generalisasi **Contoh 4.2**, dengan menggunakan k secara umum, dimana k adalah bilangan bulat positif

$$F(t) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}dx = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

dengan $X_m \sim GAM(\lambda, k)$ $(m = 1,2,3,\dots)$ maka terdapat

$$P\{N(t) = n\} = \sum_{i=nk}^{nk+k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

Dan

$$M(t) = \frac{\lambda t}{k} + \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1} \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\left[1 - e^{-\lambda t(1-\varepsilon_r)}\right]$$

dimana $\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi ri}{k}}$ $(r = 0,1,2,\dots,k-1)$ adalah akar persamaan $s^k = 1$.

Fungsi pembaharuan $M(t)$ didefinisikan sebagai

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = F(t) + F^{(2)}(t) + F^{(3)}(t) + \cdots$$

$$= F(t) + F * F^{(1)}(t) + F * F^{(2)}(t) + \cdots$$

$$= F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F * F^{(n)}(t)$$

$$= F(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$$

$$= F(t) + F * M(t)$$

$$= F(t) + \int_0^t M(t-x)\, dF(x)$$

dimana merupakan persamaan pembaharuan yang persaaan integral $F(t)$ diketahui dan $M(t)$ tidak diketahui.

Dari persamaan (kovalarinya)

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)\, dF(x)$$

dapat diperkenalkan persamaan transformasi Laplace-Stieltjes

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dF(t)$$

Dan

$$M^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dM(t)$$

Transformasi Laplace-Stieltjes dari

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)\, dF(x)$$

Adalah

$$M^*(s) = F^*(s) + F^*(s)M^*(s)$$

Dan

$$M^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}$$

Persamaan diatas menegaskan bahwa $F^*(s)$ (yaitu $F(t)$) secara unik menentukan $M^*(s)$ (yaitu $M(t)$) dan sebaliknya.

Contoh 4.4. Transformasi Laplace-Stieltjes dari $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t) dt$$

dimana $f(t) = F'(t)$ dengan

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F'(t) = 0 - (-\lambda)e^{-\lambda t}$$

$$f'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

Maka

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty e^{-st}\, e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-st-\lambda t}\, dt$$

Misalkan :

$$u = -st - \lambda t$$

$$\frac{du}{dt} = -s - \lambda$$

$$dt = \frac{1}{-s-\lambda} du$$

Maka

$$F^*(s) = \lambda \int_0^\infty e^{-st-\lambda t}\, dt = \lambda \int_0^\infty e^u \frac{du}{-s-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{-s-\lambda} \int_0^\infty e^u\, du$$

$$= \left[\frac{\lambda e^{u}}{-s-\lambda}\right]_0^{\infty}$$

$$= \left[\frac{\lambda e^{-st-\lambda t}}{-s-\lambda}\right]_0^{\infty}$$

$$= \left[\frac{\lambda e^{-(s+\lambda)t}}{-s-\lambda}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{\lambda e^{-(s+\lambda)\infty}}{s+\lambda} - \left(-\frac{\lambda e^{-(s+\lambda)0}}{s+\lambda}\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{\lambda(1)}{s+\lambda}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

$$M^*(s) = \frac{F^*(s)}{1-F^*(s)} = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1-\frac{\lambda}{s+\lambda}}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{\frac{\lambda}{s+\lambda} - \frac{\lambda}{s+\lambda}}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{\frac{s}{s+\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda}{s}$$

Contoh 4.5. Tentukan transformasi Laplace-Stieltjes dari $F(t) = 1 - (1+\lambda t)e^{-\lambda t}$

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dF(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Dengan

$$F(t) = 1 - (1+\lambda t)E^{-\lambda t}$$

$$f'(t) = f(t) = \frac{d}{dt} + \left[\frac{d}{dt}(-1-\lambda)e^{-\lambda t}\right]$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= 0 + \left[\frac{d}{dt} - e^{-\lambda t} - \frac{d}{dt}\lambda t e^{-\lambda t}\right] \\
&= 0 + \left[-\lambda e^{-\lambda t} - \left(\left(\frac{d}{dt}\lambda t\right)e^{-\lambda t} + \lambda t\left(\frac{d}{dt}e^{-\lambda t}\right)\right)\right] \\
&= 0 + \left[-\lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} + \lambda t\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)\right] \\
&= 0 + \left[-\lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t}\right] \\
&= -\lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} \\
&= \lambda^2 t e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt &= \int_0^\infty e^{-st}\,\lambda^2 e^{-\lambda t} t dt \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-st}\, t e^{-\lambda t} dt \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty t\, e^{-st-\lambda t} dt
\end{aligned}$$

Dengan

$$g' = e^{-st-\lambda t}$$

$$g = -\frac{e^{-st-\lambda t}}{s+\lambda}$$

$$f = t$$

$$f' = 1\,dt$$

Maka

$$F^*(s) = \lambda^2 \int_0^\infty t\, e^{-st-\lambda t} dt = \lambda^2\left(-\frac{te^{-st-\lambda t}}{s+\lambda} - \int_0^\infty -\frac{e^{-st-\lambda t}}{s+\lambda}\,dt\right)$$

Misalkan :

$$u = -st - \lambda t$$

$$\frac{du}{dt} = -s - a$$

$$dt = \frac{1}{-s-a} du$$

Maka

$$F^*(s) = \lambda^2 \left[-\frac{te^{-st-\lambda t}}{s+\lambda} - \left(\int_0^\infty -e^u \frac{1}{s+\lambda} \frac{du}{-(s+a)} \right) \right]$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{te^{-st-\lambda t}}{s+\lambda} - \left(\int_0^\infty \frac{1}{(s+\lambda)^2} e^u du \right) \right]$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{te^{-st-\lambda t}}{s+\lambda} - \left(\frac{1}{(s+\lambda)} \int_0^\infty e^u \, du \right) \right]$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{te^{-st-\lambda t}}{s+\lambda} - \frac{e^u}{(s+\lambda)^2} \right]_0^\infty$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{te^{-st-\lambda t}}{s+\lambda} - -\frac{e^{-st-\lambda t}}{(s+\lambda)^2} \right]_0^\infty$$

$$= \lambda^2 \left[-\frac{(s+\lambda)te^{-(s+\lambda)t}}{(s+\lambda)^2} - \frac{e^{-(s+\lambda)t}}{(s+\lambda)^2} \right]_0^\infty$$

$$= \lambda^2 \left[\left(-\frac{(s+\lambda)\infty e^\infty}{(s+\lambda)^2} - \frac{e^\infty}{(s+\lambda)^2} \right) - \frac{(s+\lambda)0e^0}{(s+\lambda)^2} - \frac{e^0}{(s+\lambda)^2} \right)$$

$$= \lambda^2 \left[0 - \left(0 - \frac{1}{(s+\lambda)^2} \right) \right]$$

$$= \lambda^2 \left[- \left(-\frac{1}{(s+\lambda)^2} \right) \right]$$

$$= \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}$$

$$M^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2}{1 - \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}}{\frac{(s+\lambda)^2 \lambda^2}{(s+\lambda)^2}}$$

$$= \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2 - \lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda^2}{(s^2 - 2s\lambda + \lambda^2) - \lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda^2}{s^2 - 2s\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^2}{s(s - 2\lambda)}$$

$$= \frac{\lambda}{2s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2\lambda}{s + 2\lambda}$$

Momen ke-2 dari $N(t)$

$$E[N(t)^2] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \, P\{N(t) = m\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} - m\right) P\{N(t) = m\}$$

$$= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} n \, P\{N(t) = m\} - \sum_{m=1}^{\infty} m \, P\{N(t) = m\}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=n}^{\infty} P\{N(t) = m\} - M(t)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \, P\{S_n \leq t\} - M(t)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \, [F^*(s)]^n - M^*(s)$$

$$= 2\left\{\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}\right\}^2 + \frac{F^*(s)}{1-F(s)}$$

maka diperoleh

$$E[N(t)^2] = 2M * M(t) + M(t)$$

Dan

$$Var\big(N(t)\big) = 2M * M(t) + [M(t)]^2$$

Contoh 4.6. Tentukan transformasi Laplace-Stieltjes dari $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\, \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-st}\, e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-st-\lambda t}\, dt$$

Misalkan :

$$u = -st - \lambda t$$

$$\frac{du}{dt} = -s - \lambda$$

$$dt = \frac{1}{-s-\lambda} du$$

Maka

$$F^*(s) = \lambda \int_0^\infty e^u \frac{1}{-s-\lambda} du = \frac{\lambda}{-s-\lambda} \int_0^\infty e^u\, du$$

$$= \left[\frac{\lambda e^u}{-s-\lambda}\right]_0^\infty$$

$$= \left[\frac{\lambda e^{-(s+\lambda)t}}{-s-\lambda}\right]_0^\infty$$

$$= \left(\frac{\lambda e^{-\infty}}{-s-\lambda}\right) - \left(\frac{\lambda e^0}{-s-\lambda}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{s + \lambda}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dE[N(t)^2] = 2\left\{\frac{F^*(s)}{1 = F^*(s)}\right\}^2 + \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}$$

$$= 2\left\{\frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}}\right\}^2 + \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}}$$

$$= 2\left\{\frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{\frac{s+\lambda-\lambda}{s+\lambda}}\right\}^2 + \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{\frac{s+\lambda-\lambda}{s+\lambda}}$$

$$= 2\left(\frac{\lambda}{s}\right)^2 + \frac{\lambda}{s}$$

$$= 2\frac{\lambda^2}{s} + \frac{\lambda}{s}$$

$$E[N(t)^2] = 2M * M(t) + M(t)$$

Mencari $M(t)$

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

$$= \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} \left(\frac{(\lambda x)^0}{0!} + \frac{(\lambda x)^1}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \cdots\right) dx$$

$$= \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} dt$$

$$= \lambda \int_0^t dt$$

$$= \lambda t$$

$$E[N(t)^2] = 2M * M(t) + M(t)$$
$$= 2M * \lambda t + \lambda t$$
$$= (\lambda t)^2 + \lambda t$$
$$= \lambda^2 t^2 + \lambda t$$

$$Var\big(N(t)\big) = 2M * M(t) + M(t) - \big(M(t)\big)^2$$
$$= 2M * \lambda t + \lambda t - (\lambda t)^2$$
$$= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2$$
$$= \lambda t$$

4.4. Teorema Limit

Teorema pembaharuan memiliki banyak aplikasi dalam praktisnya. Fungsi pembaharuan dilambangkan dengan $M(t)$ dan $Var(N(t))$. Misalkan μ, σ^2, μ_3 adalah mean, variansi dan momen ketiga dari distribusi waktu antar kedatangan $F(t)$. Mengembangkan $F^*(s)$ dengan memperhatikan s dan momen kedua adalah $\sigma^2 + \mu^2$ maka diperoleh

$$F * (s) = 1 - \mu s + \frac{1}{2}(\,\sigma^2 + \mu^2)s^2 - \frac{1}{3!}\mu_3 s^3 + o(s^3)$$

Mensubstitusi persamaan diatas ke persamaan

$$M^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}$$

Dan

$$E[N(t)^2] = 2\left\{\frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}\right\}^2 + \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)},$$

dan membaliknya, maka didapatkan

$$M(t) = \frac{t}{\mu} + \left(\frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{2}\right) + o(1)$$

Dan

$$Var\big(N(t)\big) = \frac{\sigma^2 t}{\mu^3} + \left(\frac{1}{12} + \frac{5\sigma^4}{4\mu^4} - \frac{2\mu_3}{3\mu^3}\right) + o(1)$$

Yang merupakan bentuk asimtotik dan bias lenyap menjadi $t \to \infty$.

Teorema 4.3. Untuk proses pembaharuan dengan probabilitas 1

$$\frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

dimana $\mu = E(X_n) \leq \infty$.

Bukti :

Dari definisi $N(t)$ dinyatakan bahwa $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$ untuk semua nilai $t \geq 0$. Dengan membagi ketiga ruas pertidaksamaan dengan $N(t)$ diperoleh

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}$ adalah rata-rata waktu selang kedatangan $N(t)$ yang pertama. Dengan hukum bilangan besar untuk $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to E(X_n) = \mu$$

Karena $N(t) \to \infty$ untuk $t \to \infty$ diperoleh :

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$$

Secara lebih lanjut dapat dituliskan

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \left[\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right]\left[\frac{N(t)+1}{N(t)}\right]$$

Maka

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$$

Karena $\frac{t}{N(t)}$ terletak diantara dua bilangan yang masing-masing konvergen ke μ jika $t \to \infty$ dan $E(X) = \mu$, maka nilai t yang besar diperoleh $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$ dengan probabilitas 1. Artinya dalam jangka waktu yang panjang, rata-rata banyaknya pembaharuan per unit waktu sama dengan kebalikan dari mean waktu selang kejadian antara dua pembaharuan berurutan.

Teorema 4.4. *(Teorema Pembaruan Elementer)* Untuk proses pembaharuan

$$\frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

dengan $t \to \infty$, dimana $\mu = E[X_m]$ adalah rata-rata antar waktu kedatangan.

Teorema 4.5. Untuk proses pembaharuan

$$\frac{Var\big(N(t)\big)}{t} \to \frac{\sigma^2}{\mu^3}$$

dengan $t \to \infty$, dimana μ dan σ adalah rata-rata dan variansi dari waktu antar kedatangan. Menggunakan bentuk asimtotik dalam persamaan $M(t) = \frac{t}{\mu} + \left(\frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{2}\right) + o(1)$ dan $Var\big(N(t)\big) = \frac{\sigma^2 t}{\mu^3} + \left(\frac{1}{12} + \frac{5\sigma^4}{4\mu^4} - \frac{2\mu_3}{3\mu^3}\right) + o(1)$. Didapatkan teorema yang sesuai dengan teorema batas pusat untuk proses pembaharuan.

Teorema 4.5. Misalkan μ dan, diasumsikan berhingga, menyatakan rataan dan variansi dari distribusi waktu antar kedatangan $F(t)$untuk proses renewal $\{N(t), t \geq 0\}$, maka

$$P\left\{\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq y\right\} \to \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Bukti :

Misalkan

$$N(t) < n \leftrightarrow S_n > t$$

Dan

$$n = \frac{t}{\mu} + y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}$$

Maka

$$P\left\{\frac{N(t)-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}\leq y\right\}=P\left\{N(t)<\frac{t}{\mu}++y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}\right\}$$

$$=P\{N(t)<n\}$$

$$=P\{S_n>t\}$$

$$=P\left\{\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}}>\frac{t-n\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{t-\mu\left(\frac{t}{\mu}+y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}\right)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}+y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{t-t-\mu y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}+\frac{y\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{t}{\mu}}}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{-\frac{\mu y\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}+\frac{y\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{t}{\mu}}}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{-y\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sigma\sqrt{\sqrt{\frac{t}{\mu}}\left(\sqrt{\frac{t}{\mu}}+\frac{y\sigma}{\mu}\right)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{-y\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sqrt{\frac{t}{\mu} + \frac{y\sigma}{\mu}\left(\sqrt{\frac{t}{\mu}}\right)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{-\frac{y}{\mu}\sqrt{t\mu}}{\frac{1}{\mu}\sqrt{t\mu \ + y\sigma\mu\left(\sqrt{\frac{t}{\mu}}\right)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{-y\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sqrt{t\mu \ + y\sigma\mu\left(\sqrt{\frac{t}{\mu}}\right)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > -y\sqrt{\frac{t\mu}{t\mu + y\sigma}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > -y\left(\frac{t\mu + y\sigma\sqrt{t\mu}}{t\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > -y\left(\frac{\sqrt{t\mu}\sqrt{t\mu} + y\sigma}{\sqrt{t\mu}\sqrt{t\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > -y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

Dengan menggunakan teorema limit pusat diperoleh $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ konvergen menuju variable acak normal dengan rataan 0 dan variansi 1. Selain itu karena $-y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}} \to -y$. Sehinga diperoleh

$$\left\{\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^2}}} < y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx.$$

Karena

$$\int_{-y}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

maka terbukti bahwa

$$P\left\{\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-x^2}{2}} \quad dx \quad untuk \quad t \to \infty$$

BAB V

RANTAI MARKOV WAKTU DISKRIT

5.1. Pendahuluan

Definisi 5.1. (Shunji Osaki, 1992) Misalkan $\{X(n), n = 0,1,2, \dots\}$ sebuah proses stokastik waktu diskrit dengan keadaan $i = 0,1,2, \dots$. Jika

$$P\{X(n+1) = j \mid X(0) = i_0, X(1) = i_1, \dots, X(n-1) = i_{n-1}, X(n) = i\}$$

$$\Leftrightarrow P\{X(n+1) = j | X(n) = i\} = p_{ij}$$

(Artinya probabilitas kejadian besok ditentukan hari ini)

Dimana $X(n) = i$ menyatakan proses berada dalam keadaan $i(i = 0,1,2,\dots)$ pada waktu n $(n = 0,1,2, \dots.,)$

untuk seluruh $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ dan n, lalu proses itu disebut *rantai Markov waktu diskrit* dan p_{ij} disebut *probabilitas transisi (stasioner).*

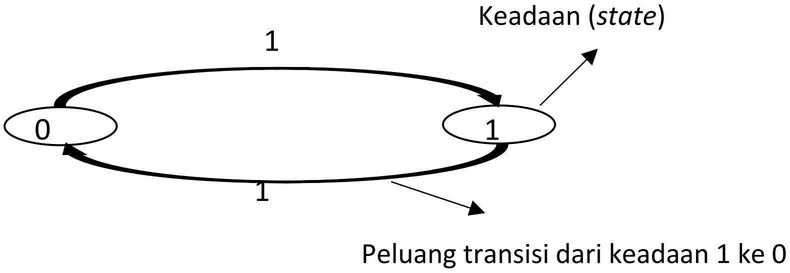
Sebuah matriks $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]$ disebut dengan probabilitas transisi matrix, dimana

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \qquad (i, j = 0,1,2, \dots)$$

Contoh 5.1. Mengingat rantai Markov dua keadaan yaitu 0 dan 1, dengan matriks probabilitas transisi berikut :

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



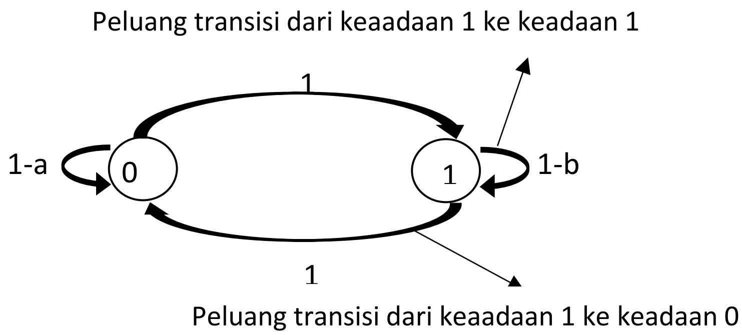
Gambar 5.1 – Sebuah diagram transisi state dari Contoh 5.1.

Artinya, pada waktu tertentu proses pindah ke keadaan lain dengan probabilitas dari 1. Dalam gambar 5.1, dimana angka yang dilingkari menunjukan keadaan dan angka yang muncul pada busur adalah probabilitas transisi.

Contoh 5.2. Mengingat rantai Markov dua keadaan. Secara umum, matriks probabilitas transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

dimana $0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1$ dan $|1-a-b| < 1$. Sebuah keadaan diagram transisi ditunjukkan pada gambar berikut. Berdasarkan kondisi $|1-a-b| < 1$ pada contoh ini, pada Example 5.1 dengan $a = b = 1$.



Gambar 5.2 Diagram transisi state dari Contoh 5.2

5.2. Persamaan Chapman-Kolmogorov

Sebelumnya telah didefinisikan probabilitas transisi satu langkah pada persamaan

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$$

Sifat probabilitas rantai Markov $\{X(n), n = 0,1,2 \dots\}$ secara lengkap digambarkan dengan probabilitas inisial (awal) dan probabilitas transisi sebagai berikut :

$$P\{X(0) = i_0, X(1) = i_1, \dots, X(n) = i_n\}$$

$$\Leftrightarrow P\{X(n) = i_n | X(0) = i_0, X(1) = i_1, \dots, X(n-1) = i_{n-1}\}$$

$$\Leftrightarrow P\{X(0) = i_0, X(1) = i_1, \dots, X(n-1) = i_{n-1}\}$$

$$\Leftrightarrow p_{i_{n}-1 i_n} P\{X(0) = i_0, X(1) = i_1, \dots, X(n-1) = i_{n-1}\}$$

$$\Leftrightarrow \cdots$$

$$\Leftrightarrow p_{i_{n}-1 i_n} p_{i_n - 2 i_{n-1}} \dots p_{i_0 i_1} P\{X(0) = i_0\}$$

dimana $P\{X(0) = i_0\}$ adalah probabilitas awal. Misalkan $\pi(0)$ menyatakan distribusi awal

$$\pi(0) = [\pi_0(0), \pi_1(0), \dots]$$

Dimana

$$\pi_j(0) = P\{X(0) = j\} \geq 0 \quad (j = 0,1,2, \dots)$$

merupakan probabilitas awal, sehingga

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(0) = 1.$$

Selanjutnya akan dihitung P_{ij}^n melalui probabilitas transisi P_{ij} dengan $P_{ij}^0 = 0, i \neq j$ dan $P_{ij}^0 = 1.$ Probabilitas transisi n langkah P_{ij}^n dapat dihitung dengan menjumlahkan seluruh probabilitas perpindahan dari keadaan i ke keadaan k dalam r langkah $(0 \leq r \leq n)$ dan perpindahan dari keadaan k ke keadaan k pada sisa waktu $n - r$.

$$P_{ij}^n = P\{X(n) = j | X(0) = i\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(r) = k | X(0) = i\} P\{X(n) = j | X(r) = k\}.$$

$$P_{ij}^n = \sum_{i=1}^{\infty} P_{ik}^r \, P_{kj}^{n-r}.$$

persamaan ini disebut persamaan Chapman-Kolmogorov. Dalam bentuk matrix ditulis,

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = [p_{ij}^n]$$

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{(r)} . \boldsymbol{P}^{(n-r)}$$

Catat bahwa, $\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{P} = [p_{ij}]$. Secara rekursif memiliki matriks probabilitas transisi n −langkah :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{(n)} &= \boldsymbol{P}^{(1)}.\boldsymbol{P}^{(n-1)} \\
&= \boldsymbol{P}.\boldsymbol{P}^{(n-1)} \\
&= \boldsymbol{P}^{2}.\boldsymbol{P}^{(n-2)} \\
&= \cdots \\
&= \boldsymbol{P}^{n}.\boldsymbol{P}^{(n-n)} \\
&= \boldsymbol{P}^{n}
\end{aligned}
$$

Artinya, matrix probabilitas transisi langkah ke-n diperoleh dari matriks $\boldsymbol{P}$ dipangkatkan n. Sehingga didapatkan

$$\boldsymbol{P}^{n} = \boldsymbol{P}^{r}.\boldsymbol{P}^{n-r}$$

Seperti persamaan $P_{i_{n-1}i_n}P_{i_{n-2}i_{n-1}}$ ... $P_{i_0 i_1}P\{X(0) = i_0\}$, maka probabilitas gabungan dapat dihitung melalui probabilitas awal (seperti distribusi awal π_0) dan probabilitas transisi (matriks $\boldsymbol{P}$).

Misalkan,

$$
\begin{aligned}
\pi_j(n) &= P\{X(0) = j\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} P\{X(n) = j | X(0) = i\} P\{X(0) = i\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(0) P_{ij}^{n} \qquad (j = 0,1,2,\ldots)
\end{aligned}
$$

merupakan probabilitas proses kejadian j pada waktu ke n. Misalkan

$$\pi(n) = [\pi_0(n), \pi_1(n), \ldots]$$

merupakan distribusi n langkah, sehingga berlaku

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n) = 1.$$

Maka,

$$\pi(n) = \pi(0)\boldsymbol{P}^{n}.$$

Contoh 5.3. *(Contoh 5.1)* Diberikan contoh numerik saat $a = 0.2$ dan $b = 0.3$, yaitu

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 1-0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P \cdot P$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.64 + 0.06 & 0.16 + .014 \\ 0.24 + 0.21 & 0.06 + 0.49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P \cdot P \cdot P$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.56 + 0.09 & 0.14 + 0.21 \\ 0.36 + 0.165 & 0.09 + 0.385 \end{bmatrix}$$

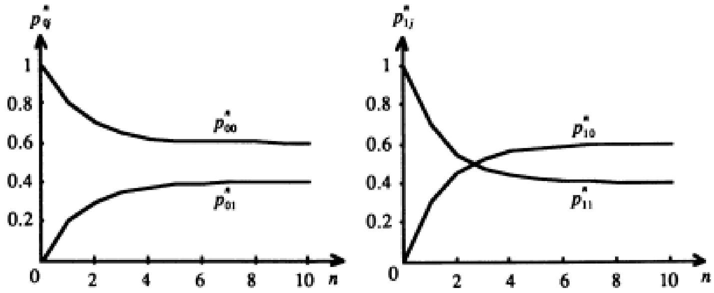
$$= \begin{bmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.525 & 0.475 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P \cdot P \cdot P \cdot P$$

$$= \begin{bmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.525 & 0.475 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.52 + 0.105 & 0.13 + 0.245 \\ 0.42 + 0.1425 & 0.105 + 0.3325 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.5626 & 0.4375 \end{bmatrix}$$



Gambar 5.3 Kurva P_{ij}^{n} sebagai $n \to \infty$ $(a = 0.2\,, b = 0.3)$

Contoh 5.4. *(Contoh 5.2)* Diberikan contoh numerik lainnya ketika $a = 0.6$ dan $b = 0.9$, yaitu :

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 1-0.9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P \cdot P$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.16+0.54 & 0.24+0.06 \\ 0.36+0.09 & 0.54+0.01 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P \cdot P \cdot P$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.28+0.27 & 0.42+0.03 \\ 0.18+0.495 & 0.27+0.055 \end{bmatrix}$$

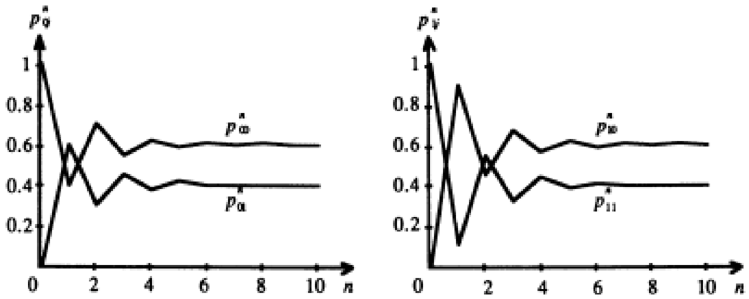
$$= \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.675 & 0.325 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P \cdot P \cdot P \cdot P$$

$$= \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.675 & 0.325 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.22 + 0.405 & 0.33 + 0.045 \\ 0.27 + -0.2925 & 0.405 + 0.0325 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 05625 & 0.4375 \end{bmatrix}$$



Gambar 5.4 Kurva P_{ij}^{n} sebagai $n \rightarrow \infty$ $(a = 0.6\,, b = 0.9)$

Pada **Contoh 5.2** dapat diselesaikan

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-a)^2 + ab & (1-a)a + (1-b)a \\ (1-a)b + (1-b)b & ab + (1-b)^2 \end{bmatrix}$$

Secara umum, n-langkah matriks probabilitas transisi ditunjukkan dengan

$$P^n = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}$$

Contoh 5.5. Diberikan sebuah rantai Markov dua keadaan dengan matriks transisi sebagai berikut :

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$$

dimana $0 < a < 1$, maka terdapat

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-a)^2 + a(1-a) & a(1-a) + a^2 \\ (1-a)^2 + a(1-a) & a(1-a) + a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2a+a^2+a-a^2 & a-a^2+a^2 \\ 1-2a+a^2+a-a^2 & a-a^2+a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$$

Secara umum, untuk probabilitas transisi n-langkah dapat ditulis

$$P^n = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$$

untuk sembarang $n > 0$. Ini menyebabkan probabilitas transisi menjadi independen untuk keadaan yang diberikan, maka

$$\pi(n) = \pi(0)P^0 = [1-a, a]$$

Secara umum, dapat diasumsikan bahwa probabilitas transisi ditulis

$$p_{ij} = p_{.j} > 0 \quad (i, j = 0,1, \dots)$$

Artinya, probabilitas transisi positif dan independen dari state saat ini dengan rantai Markov disebut rantai Markov yang homogeny secara spasial.

5.3. Klasifikasi Keadaan

Teorema 5.1. (Shunji Osaki, 1992) Komunikasi adalah hubungan kesetaraan, yaitu;

- **(i)** $i \leftrightarrow i$.
- **(ii)** Jika $i \leftrightarrow j$, maka $j \leftrightarrow i$ (simetri).
- **(iii)** Jika $i \leftrightarrow j$ dan $j \leftrightarrow k$, maka $i \leftrightarrow k$ (transitif).

Bukti :

(i) Dari definisi diketahui bahwa $p_{ij}^0 = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$. Jadi didapat $p_{ii}^0 > 0$, sehingga $i \leftrightarrow i$.

(ii) Karena $i \leftrightarrow j$ maka $p_{ij}^{n} > 0$ dan $p_{ji}^{m} > 0$ untuk suatu $m, n \geq 0$. Maka kita peroleh bahwa $j \leftrightarrow i$.

(iii) **(i)** dan **(ii)** jelas dari definisi komunikasi. Untuk pembuktian **(iii)**, diasumsikan bahwa ada bilangan bulat m dan n sedemikian rupa sehingga $p_{ij}^{m} > 0$ dan $p_{jk}^{n} > 0$, kemudian dari persamaan Chapman-Kolmogorv didapatkan

$$p_{ik}^{m+n} = \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}^{m} p_{lk}^{n} \geq p_{ij}^{m} p_{jk}^{n} > 0,$$

yang menyiratkan $i \leftrightarrow k$. Demikian pula dapat dibuktikan $k \leftrightarrow i$.

Contoh 5.6. *(Contoh 5.1 dan 5.2)* Untuk kedua contoh (kecuali $a = b = 0$), dimiliki $0 \rightarrow 1$ dan $1 \rightarrow 0$, dimana satu kelas $\{0,1\}$. Maka, $a = b = 0$ dari **Contoh 5.2** menjadi dua kelas $\{0\}$ dan $\{1\}$.

Contoh 5.7. Diberikan sebuah rantai Markov dengan mengikuti probabilitas trasisi matriks

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jelas bahwa tidak ada transisi dari i state manapun ke $j(i \neq j)$ kecuali dari statenya sendiri, dengan tiga kelas $\{0\}, \{1\}$, dan $\{2\}$.

Contoh 5.8. Diberikan sebuah rantai Markov dengan mengikuti probabilitas transisi matrix;

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Jelas bahwa $1 \leftrightarrow 2$ dan $2 \leftrightarrow 0$. Namun tidak ada transisi $0 \leftrightarrow 2$. Yang mana mereka adalah dua kelas $\{0\}$ dan $\{1,2\}$.

Definisi 5.2. (Shunji Osaki, 1992) Untuk sebuah rantai Markov, jika hanya terdapat satu kelas komunikasi, rantai Markov disebut *irreducible (tidak tereduksi)*. Berarti, untuk rantai Markov irreducible, semua keadaan berkomunikasi satu sama lain.

Periode dari keadaan i adalah pembagi persekutuan terbesar dari $n \geq 1$, sehingga $p_{ii}^{n} > 0$ dan dinotasikan dengan $d(i)$. Jika $p_{ii}^{n} = 0$ untuk semua $n \geq 1$ maka $d(i) = 0$. Jika $d(i) = 1$ maka state i disebut *aperiodic*.

Teorema 5.2. (Shunji Osaki, 1992) Jika $i \leftrightarrow j$, maka $d(i) = d(j)$.

Bukti :

Terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $p_{ji}^{m} > 0$ dan $p_{ji}^{n} > 0$, jika $p_{ii}^{s} > 0$, maka

$$p_{jj}^{n+m} \geq p_{ji}^{n} p_{ij}^{m} > 0,$$

$$p_{jj}^{n+s+m} \geq p_{ji}^{n} p_{ii}^{s} p_{ij}^{m} > 0.$$

dari definisi diatas, $d(j)$ membagi $n + m$ dan $n + s + m$, serta $n + s + m - (n + m) = s$, dimana $p_{ii}^{s} > 0$. Karena $d(i)$ membagi s maka $d(j)$ membagi $d(i)$. dengan argument yang sama dapat ditunjukan bahwa $d(i)$ membagi $d(j)$. Jadi $d(i) = d(j)$.

Contoh 5.9. Diberikan rantai Markov dengan matriks probabilitas transisi berikut

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jelas bahwa $0 \to 1 \to 2 \to 0$, sehingga rantai Markov yang tak tereduksi. selanjutnya $p_{00}^{3} = p_{00}^{6} = \cdots = 1$, dimana keadaan 0 berkala dengan $d(0) = 3$. Tentu, $d(i) = 3$ $(i = 0,1,2)$ dari **Teorema 5.2**.

Definisi 5.3. (Shunji Osaki, 1992) Jika $f_{ii} = 1$, maka keadaan i dapat dikatakan berulang (*recurrent*). Jika $f_{ii} < 1$, maka keadaan i dikatakan sementara (*transient*).

Teorema 5.3. (Shunji Osaki, 1992)Keadaan i recurrent jika dan hanya jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$$

Keadaan i transient jika dan hanya jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty$$

Bukti :

Misalkan M adalah banyaknya proses kembali ke keadaan i yaitu

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$$

dimana

$$1\{X_n = i\} = \begin{cases} 1, X_n = i \\ 0, X_n \neq i \end{cases}$$

- Misalkan i adalah keadaan transient. Maka $f_{ii} < 1$ dan $E\{M|X_0 = i\} < \infty$. Maka

$$\begin{aligned} \infty > E\{M \mid X_0 = i\} &= E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \{1\{X_n = i\} \mid X_0 = i\}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E\{1\{X_n = i\} \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot P\{X_n = i \mid X_0 = i\} + 0 \cdot P\{X_n \neq i \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = i \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} \end{aligned}$$

  Jadi terbukti

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty.$$

- Misalkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty$$

  Maka M adalah peubah acak dengan mean berhingga, sehingga M harus hingga. Yaitu proses mulai dari keadaan i, dan kembali ke keadaan i hanya dalam waktu berhingga. Maka terdapat probabilitas positif bahwa proses mulai dari keadaan i, dan tidak pernah kembali ke keadaan i. Dengan kata lain $1 - f_{ii} > 0$ dan $f_{ii} < 1$. Jadi terbukti keadaan i transient.

Contoh 5.10. Diberikan rantai Markov dengan matriks probabilitas transisi berikut

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{n} = 1 + 1 + \cdots = \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 < \infty,$$

yang mana keadaan 0 reccurent dan keadaan 1 transient.

Penyelesaian :

Mengunakan teorema 5.3

$$P = P^1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P^2 = P.P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2.P \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

sehingga,

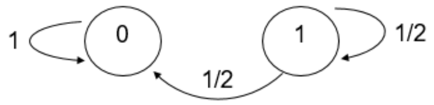
$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = P_{00}^{1} + P_{00}^{2} + P_{00}^{3} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

→ state 0 recurrent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{11}^{n} = P_{11}^{1} + P_{11}^{2} + P_{11}^{3} + \cdots = \frac{1}{2} + (1/2)^{\,2} + (1/2)^{\,3} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 < \infty$$

→ state 1 recurrent.

dengan **Definisi 5.3.2**



$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{n} = f_{00}^{1} + f_{00}^{2} + f_{00}^{3} + \cdots$$

$$f_{00}^{1} = p_{00} = 1, f_{00}^{2} = p_{01}p_{10} = 0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f_{00}^{3} = p_{01}^{2}p_{10} = p_{01}p_{11}p_{10} = 0\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{n} = 0, n \geq 2$$

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{n} = 1 \qquad \rightarrow \ state\ 0\ recurrent$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{n} = f_{11}^{1} + f_{11}^{2} + f_{11}^{3} + \cdots$$

$$f_{11}^{1} = p_{11} = \frac{1}{2}$$

$$f_{11}^{2} = p_{10}p_{01} = \left(\frac{1}{2}\right).0 = 0$$

$$f_{11}^{3} = p_{10}^{2}p_{01} = p_{10}p_{00}p_{01=}\left(\frac{1}{2}\right).(1).0 = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{11}^{n} = 0, n \geq 2$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{n} = \frac{1}{2} + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2} < 1 \quad \rightarrow \quad state\ 1\ transient.$$

Teorema 5.4 (Shunji Osaki, 1992) Jika state i recurrent dan $i \leftrightarrow j$, maka state j juga recurrent.

Bukti :

Karena $i \leftrightarrow j$ maka terdapat $m, n \geq 1$ sedemikian rupa sehingga $p_{ji}^{m} > 0$ dan $p_{ij}^{n} > 0$. Untuk setiap $s \geq 0$,

$$p_{jj}^{m+s+n} \geq p_{ji}^{m} p_{ii}^{s} p_{ij}^{n}.$$

disimpulkan bahwa s

$$\sum_{s} p_{jj}^{m+s+n} \geq \sum_{s=0}^{\infty} p_{ji}^{m} p_{ii}^{s} p_{ij}^{n} = p_{ji}^{m} p_{ij}^{n} \sum_{s} p_{ii}^{s} = \infty,$$

Karena i recurrent maka

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_{ii}^{s} = \infty$$

Akibatnya

$$\sum_{s} p_{jj}^{m+s+n} = \infty$$

Jadi, state j berulang.

Contoh 5.11. *(Random Walk satu dimensi)* Diberikan rantai Markov yang ruang keadaannya adalah himpunan semua bilangan bulat dan probabilitas bergerak ke kanan p, yaitu

$$p_{i,i+1} = p, p_{i,i-1} = 1 - p = q \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

dimana $0 < p < 1$. Maka matriks probabilitas transisinya

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p & p_{02} & \cdots \\ q & p_{11} & p & \cdots \\ p_{20} & q & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa semua bagian memiliki rantai Markov yang tidak dapat direduksi. Selanjutnya di identifikasi apakah itu berulang atau sementara. Dengan menghitung probabilitas transisi bahwa proses kembali ke dirinya sendiri pada $2n$ langkah dengan n langkah kanan dan n langkah kiri :

$$p_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{2n!}{n!\,(2n-n)!}(pq)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n$$

Dengan mengaplikasikan formula Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

maka diperoleh

$$p_{00}^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi} 2n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)^2}(pq)^n$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi} 2n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}(pq)^n$$

$$= \frac{2n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}(pq)^n$$

$$= \frac{2n^{2n} 2n^{\frac{1}{2}}}{n^n n^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} n^n n^{\frac{1}{2}}}(pq)^n$$

$$= \frac{2n^{2n}\sqrt{2n}}{n^{2n} n \sqrt{2\pi}}(pq)^n$$

$$= \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}(pq)^n$$

$$= \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Menjumlahkan n kali maka

$$p_{00}^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

konvergen jika $4pq = 4p(1-p) < 1$ dan divergen jika $4pq = 4p(1-p) = 1$, kesetaraan berlaku untuk $4p(1-p) \leq 1$ jika hanya jika $p = \frac{1}{2}$.

$$4p(1-p) = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

maka rantai tersebut recurrent jika $p = \frac{1}{2}$ dan transien jika $p \neq \frac{1}{2}$. Ketika $p = \frac{1}{2}$, rantai disebut random walk simetris satu dimensi.

Teorema 5.5. (Shunji Osaki, 1992) Untuk rantai Markov, semua state dapat diklasifikasikan ke dalam beberapa kelas berulang $C_1, C_2, ...$, dan state yang tersisa adalah sementara.

Bukti :

Misalkan $C_1, C_2, ...$ menjadi kelas berulang dan T menjadi set dari semua state sementara yang tersisa untuk rantai Markov. Kemudian, semua set $C_1, C_2, \dots, T$ terputus-putus dan lengkap.

$$P = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ T \end{array} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 & R_2 & \cdots & Q \end{bmatrix}$$

dimana submatrix $P_1, P_2, ...$ adalah matriks probabilitas transisi untuk masing-masing kelas berulang $C_1, C_2, \dots, Q$ adalah matriks persegi yang menjelaskan transisi di antara semua state sementara untuk T, dan $R_1, R_2, ...$ adalah (belum tentu persegi) matriks yang menjelaskan transisi dari semua state sementara ke kelas berulang yang sesuai $C_1, C_2, ...$

Contoh 5.12. Diberikan rantai markov dengan matriks probabilitas transisi :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

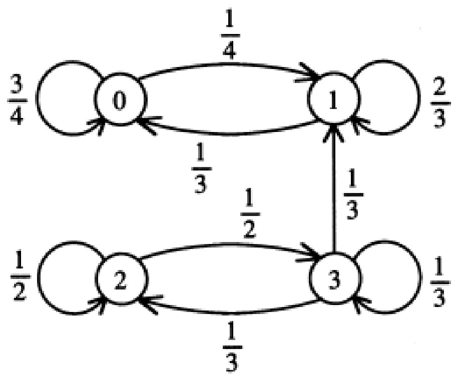
Berdasarkan teorema 5.5, kelas recurrent dimiliki oleh submatriks yang simetris dan himpunan keadaan yang transien memiliki submatriks yang tidak simetris. Sehingga jelas bahwa rantai tersebut memiliki kelas recurrent $\{0,1\}$ dan himpunan keaadaan yang transien $\{2,3\}$. Karena pada kelas $\{0,1\}$ terdapat submatriks simetris yaitu

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

sedangkan pada keadaan $\{2,3\}$ terdapat submatriks yang tidak simetris yaitu

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Jika digambarkan dalam diagram sebagai berikut :



Gambar 5.5. Diagram state transisi dari Example 5.11.

5.4. Limit Probabilitas

Definisi 5.4. (Shunji Osaki, 1992) Untuk rantai Markov, semua keadaan recurrent diklasifikasikan kedalam *positive (atau bukan-null) recurrent states atau null recurrent states* dengan $\mu_j < \infty$ atau $\mu_j = \infty$,

$$\mu_j = E\{R_j | X_0 = j\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^n,$$

Menyatakan waktu recurrent rata-rata untuk keadaan j.

Teorema 5.6. (Shunji Osaki, 1992) Jika keadaan j adalah recurrent dan aperiodic, maka

$$p_{jj}^{n} \to \frac{1}{\mu_j}.$$

dengan $n \to \infty$, dimana ditafsirkan $\frac{1}{\mu_j} = 0$ jika $\mu_j = \infty$ (yaitu jika keadaan j adalah null-recurrent).

Bukti :

Jika keadaan j adalah recurrent dan aperiodic, maka distribusi interarrival $\{f_{jj}^{n}, n = 1,2, \ldots\}$ tidak kisi. Mengaplikasikan **Teorema** dan diasumsikan $\delta = 1$, dimiliki

$$M(n) - M(n-1) = p_{jj}^{n} \to \frac{1}{\mu_j}$$

dengan $n \to \infty$. Jika keadaan j recurrent dan periodic dengan period $d(j)$, dengan mengaplikasikan Blackwell's dimiliki

$$M\big(nd(j)\big) - M\big((n-1)d(j)\big) = p_{jj}^{nd(j)} \to \frac{d(j)}{\mu_j}$$

dengan $n \to \infty$, dimana $\frac{1}{\mu_j} = 0$ jika state j adalah null-recurrent (yaitu $\mu_j = \infty$).

Corollary 5.1. Jika keadaan j adalah transient, maka $p_{jj}^{n} \to 0$. Dengan $n \to \infty$.

Mari perhatikan limit dari p_{jj}^{n} dengan $n \to \infty$ pada umumnya. Seperti yang ditunjukan diatas, kita fokus pada keadaan i dan j yang ditentukan, dimana $X(0) = i$, pemulaan keadaan. Rantai markov mulai dari keadaan i, menuju keadaan j dengan *probability mass function* p_{jj}^{n} dan jarang kembali menuju keadaan j dengan *probability mass function* p_{jj}^{n}, yang dianggap sebagai proses renewal tertunda diskrit. Ingat bahwa f_{ij} menunjukan probabilitas transisi dari keadaan i ke keadaan j.

Teorema 5.7. (Shunji Osaki, 1992) Jika keadaan j adalah recurrent dan aperiodic, maka

$$p_{ij}^{n} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

dengan $n \to \infty$, dimana $\frac{1}{\mu_j} = 0$ jika $\mu_j = \infty$.

Teorema 5.8. (Shunji Osaki, 1992) Jika suatu rantai Markov *Irreducible*, *positive reccurent*, dan *aperiodic* (Rantai Markov Ergodik) maka terdapat limit probabilitas.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0 \qquad\qquad (i, j = 0,1,2, \dots)$$

yang bebas dari keadaan awal i, dengan $\{\pi_j, j = 0,1,2, ..\}$ tunggal dan merupakan solusi positif dari

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} \qquad (j = 0,1,2, ..)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1,$$

dinamakan **distribusi stasioner dari rantai Markov.**

Contoh 5.13. *(Contoh 5.3)* Diberikan matriks probabilitas transisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Distribusi stasioner $\pi = [\pi_0 \quad \pi_1]$ diberikan oleh

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$$\pi_0 = p_{00}\pi_0 + p_{10}\pi_1 = 0.8\pi_0 + 0.3\pi_1$$

$$\pi_1 = p_{01}\pi_0 + p_{11}\pi_1 = 0.2\pi_0 + 0.7\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Dua persamaan pertama sama dengan

$$\pi_0 - 0.8\pi_0 = 0.3\pi_1$$

$$0.2\pi_0 = 0.3\pi_1$$

$$2\pi_0 = 3\pi_1$$

$$\pi_1 - 0.7\pi_1 = 0.2\pi_0$$

$$0.3\pi_1 = 0.2\pi_0$$

$$3\pi_1 = 2\pi_0$$

Sehingga sama dengan menyelesaikan persamaan $2\pi_0 = 3\pi_1$ dan $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

$$\begin{aligned} 2\pi_0 - 3\pi_1 &= 0 \qquad \times 1 \qquad 2\pi_0 - 3\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \qquad \times 3 \qquad 3\pi_0 + 3\pi_1 = 3 \end{aligned}$$

$$5\pi_0 = 3$$

$$\pi_0 = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$0.6 + \pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = 1 - 0.6 = 0.4$$

Contoh 5.14 *(Example 5.4)* Diberikan matriks probabilitas transisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Distribusi stasioner $\pi = [\pi_0 \quad \pi_1]$ diberikan oleh

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$$

$$\pi_0 = p_{00}\pi_0 + p_{10}\pi_1 = 0.4\pi_0 + 0.9\pi_1$$

$$\pi_1 = p_{01}\pi_0 + p_{11}\pi_1 = 0.6\pi_0 + 0.1\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Dua persamaan pertama sama dengan

$$\pi_0 - 0.4\pi_0 = 0.9\pi_1$$

$$0.6\pi_0 = 0.9\pi_1$$

$$6\pi_0 = 9\pi_1$$

$$\pi_1 - 0.1\pi_1 = 0.6\pi_0$$

$$0.9\pi_1 = 0.6\pi_0$$

$$9\pi_1 = 6\pi_0$$

Sehingga sama dengan menyelesaikan persamaan $6\pi_0 = 9\pi_1$ dan $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

$$\begin{aligned} 6\pi_0 - 9\pi_1 &= 0 \qquad \times 1 \qquad & 6\pi_0 - 9\pi_1 &= 0 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \qquad \times 9 \qquad & 9\pi_0 + 9\pi_1 &= 9 \\ & & 15\pi_0 &= 9 \\ & & \pi_0 &= \frac{9}{15} = 0.6 \end{aligned}$$

$$0.6 + \pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = 1 - 0.6 = 0.4$$

Contoh 5.15 *(Example 5.12)* Rantai tidak dapat direduksi dan mempunyai kelas recurrent $\{0,1\}$ dan himpunan keadaan yang transien $\{2,3\}$. Submatriks dari kelas recurrent P_1 diberikan oleh

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Sehingga distribusi stasionermya diberikan oleh

$$\pi_0 = p_{00}\pi_0 + p_{10}\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1$$

$$\pi_1 = p_{01}\pi_0 + p_{11}\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Dua persamaan pertama sama dengan

$$\pi_0 - \frac{3}{4}\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_1$$

$$\frac{1}{4}\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_1$$

$$3\pi_0 = 4\pi_1$$

$$\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_0$$

$$\frac{1}{3}\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_0$$

$$4\pi_1 = 3\pi_0$$

Sehingga sama dengan menyelesaikan persamaan $3\pi_0 = 4\pi_1$ dan $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

$$\begin{array}{rcr} 3\pi_0 - 4\pi_1 = 0 & \times 1 & 3\pi_0 - 4\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 & \times 4 & 4\pi_0 + 4\pi_1 = 4 \\ & & 7\pi_0 = 4 \\ & & \pi_0 = \dfrac{4}{7} \end{array}$$

$$\frac{4}{7} + \pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Jika rantai dimulai dari $i = 0{,}1 \in C_1$, berdasarkan teorema 5.8, maka probabilitas pembatasnya adalah

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i0}^n = \pi_0 = \frac{4}{7} \quad (i = 0{,}1)$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i1}^n = \pi_1 = \frac{3}{7} \quad (i = 0{,}1)$$

Tetapi, jika rantai dimulai dari $i = 2{,}3 \in T$, berdasarkan teorema 5.7, maka probabilitas pembatasnya adalah

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i0}^n = \frac{f_{i0}}{\mu_0} = \frac{4}{7} f_{i0} \quad (i = 2,3)$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i1}^n = \frac{f_{i1}}{\mu_1} = \frac{3}{7} f_{i1} \quad (i = 2,3)$$

Berdasarkan **Corollary 5.1**, maka

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0 \quad (i, j \in T)$$

Contoh 5.16. *(Random Walk dengan pencerminan Barrier)* Random walk dengan pencerminan Barrier adalah rantai markov yang ruang keadaannya himpunan bilangan bulat tidak negatif dan probabilitas transiennya diberikan oleh

$$p_{i,i+1} = p_i, \;\; p_{i,i-1} = 1 - p_i = q_i \qquad (i = 1,2,\cdots)$$

dimana $p_0 = 1$, sehingga

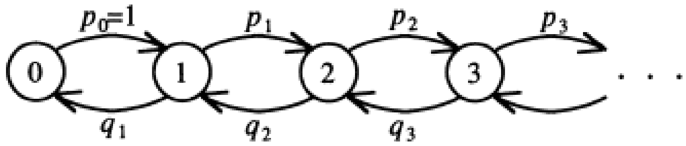
$$p_{01} = p_0 = 1$$

Matriks probabilitas transisinya

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_i & 0 & p_i & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Jika digambarkan dalam diagram



Gambar 5.6. Sebuah diagram transisi state dari random walk.

Rantai diatas dapat direduksi, rekuren, dan periodik dengan periode 2. Diasumsikan bahwa $p_{-1} = 0, p_0 = 1$, dan $\pi_{-1} = 0$, maka

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} = \pi_{j-1} p_{j-1,j} + \pi_{j+1} q_{j+1,j} \qquad (j = 0,1,2,\cdots)$$

Perhatikan bahwa $p_0 = 1$ dan $p_j + q_j = 1$, sehingga

$$\pi_1 q_1 = \pi_0 p_0,$$

$$\pi_2 q_2 - \pi_1 q_1 = \pi_1 p_1 - \pi_0 p_0,$$

$$\pi_3 q_3 - \pi_2 q_2 = \pi_2 p_2 - \pi_1 p_1,$$

$$\vdots$$

$$\pi_{j+1} q_{j+1} - \pi_j q_j = \pi_j p_j - \pi_{j-1} p_{j-1},$$

Menyimpulkan semua sisi;

$$\pi_{j+1} q_{j+1} = \pi_j q_j \quad (j = 0,1,\ldots)$$

yang menghasilkan

$$\pi_{j+1} = \pi_0 \prod_{k=0}^{j} \frac{p_k}{q_{k+1}} \qquad (j = 0,1,2,\ldots)$$

Keadaan yang diperlukan dan cukup bahwa rantai positif recurrent adalah $\pi_0 > 0$;

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \left[1 + \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{j} \frac{p_k}{q_{k+1}} \right] = 1$$

Artinya, keadaan tersebut diberikan oleh

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{j} \frac{p_k}{q_{k+1}} < \infty$$

Secara khusus, jika $p_i = p(q_i = q)(i = 1,2,3,\ldots)$, kita memiliki keadaan yang cukup bahwa $p < q$ (yaitu $p < \frac{1}{2}$). Maka distribusi stasionernya ;

$$\pi_0 = \frac{q-p}{2q}, \pi_j = \frac{q-p}{2q} . \frac{1}{q} \left(\frac{p}{q} \right)^{j-1} \quad (j = 1,2,\ldots)$$

5.5. Rantai Markov dengan Keadaan Terbatas

Teorema 5.9. (Shunji Osaki, 1992) Untuk rantai Markov keadaan terbatas :

- **(i)** Tidak terdapat keadaan recurrent null.
- **(ii)** Tidak semua keadaan adalah transient.

Bukti :

Untuk membuktikan **(ii)**, jika semua keadaan transient, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$ untuk semua j, yang mana berlawanan $\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{0}$ untuk semua n. Untuk membuktikan **(i)**, jika keadaan j adalah recurrent null dan ruang keadaan adalah terbatas, maka waktu pengulangan rata-rata μ_j harus terbatas, yang mana bertentangan pengulangan null. Karena ini, keadaan berulang (*recurrent state*) adalah pengulangan positif.

Corollary 5.2. Rantai Markov keadaan terbatas yang tereduksi keadaan recurrent.

Bukti :

Jika rantai Markov aperiodic, ada distribusi stasioner yang unik dan positif yang merupakan distribusi limit.

Dengan menerapkan **Teorema 5.5** untuk rantai Markov keadaan terbatas, matriks probabilitas transisi sebagai berikut ;

$$P = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ T \end{array} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 & R_2 & \cdots & Q \end{bmatrix}$$

Dimana $C_1, C_2, \dots, C_m$ merupakan semua set kelas perulangan positif dan T adalah satu set sisa state perulangan. Seperti pada Contoh 5.15, dapat diketahui bahwa probabilitas limit $p_{ij}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n}$ untuk semua state. Asumsikan bahwa semua state perulangan positif adalah aperiodic, maka;

$$p_{ij}^{\infty} = \frac{1}{\mu_j} \quad (i, j \ \in C_k; k = 1,2, \dots, m),$$

$$p_{ij}^{\infty} = \frac{f_{ij}}{\mu_j} \quad (i \in T, j \ \in C_k; k = 1,2, \dots, m),$$

$$p_{ij}^{\infty} = 0 \ \ (i \in C_k, j \in C_1; k \neq l),$$

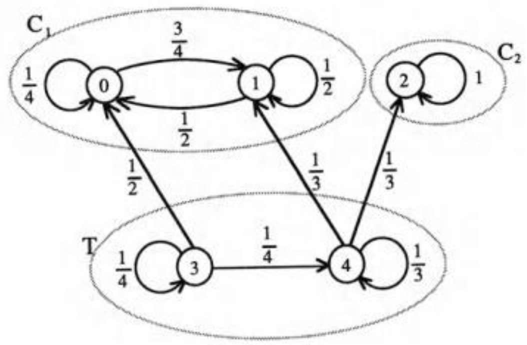
$$p_{ij}^{\infty} = 0 \quad (i, j \ \in T),$$

$$p_{ij}^{\infty} = 0 \quad (i \in C_k; k = 1,2, \dots, m; j \in T)$$

Contoh 5.17. Diberikan rantai markov keadaan terbatas dengan matriks probabilitas transisi

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Rantai tersebut mempunyai dua kelas rekuren positif $C_1 = \{0,1\}$ dan $C_2 = \{2\}$, serta himpunan keadaan transien $T = \{3,4\}$.

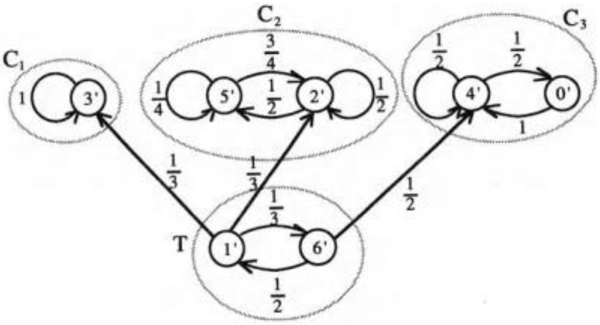


Gambar 5.7. State transisi diagram dari Contoh 5.17

Contoh 5.18. Diberikan rantai Markov keadaan terbatas dengan matriks probabilitas transisi

$$P = \begin{array}{c} 0' \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika digambarkan pada diagram sebagai berikut :



Pelabelan dari keadaan baru sebagaimana sehingga $3' = 0, 5' = 1, 2' = 2, 4' = 3, 0' = 4, 6' = 5, 1' = 6$ menghasilkan matriks probabilitas transisi sebagai berikut :

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga kita mempunyai rantai yang mempunyai 3 kelas rekuren positif $C_1 = \{0\}, C_2 = \{1,2\}, C_3 = \{3,4\}$, dan himpunan keadaan transien $T = \{5,6\}$ untuk keadaan yang diberi label. Untuk kelas rekuren $C_2 = \{1,2\}$, diketahui submatriks

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sehingga distribusi stasionernya

$$\pi_1 = p_{11}\pi_1 + p_{21}\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_2 = p_{12}\pi_1 + p_{22}\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Dua persamaan pertama sama dengan

$$\pi_1 - \frac{1}{4}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\frac{3}{4}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$$

$$6\pi_1 = 4\pi_2$$

$$\pi_2 - \frac{1}{2}\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1$$

$$\frac{1}{2}\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1$$

$$4\pi_2 = 6\pi_1$$

Sehingga sama dengan menyelesaikan persamaan $6\pi_1 = 4\pi_2$ dan $\pi_1 + \pi_2 = 1$.

$$\begin{array}{lcl} 6\pi_1 - 4\pi_2 = 0 & \times 1 & 6\pi_1 - 4\pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 & \times 4 & 4\pi_1 + 4\pi_2 = 4 \\ & & 10\pi_1 = 4 \\ & & \pi_1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{array}$$

$$\frac{2}{5} + \pi_2 = 1$$

$$\pi_2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Jika rantai dimulai dari $i = 1,2 \in C_1$, berdasarkan teorema 5.8, maka probabilitas pembatasnya adalah

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i1}^n = \pi_1 = \frac{2}{5} \quad (i = 1,2)$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i2}^n = \pi_2 = \frac{3}{5} \quad (i = 1,2)$$

Untuk kelas rekuren $C_3 = \{3,4\}$, diketahui submatriks

$$P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga distribusi stasionernya

$$\pi_3 = p_{33}\pi_3 + p_{43}\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3 + \pi_4$$

$$\pi_4 = p_{34}\pi_3 + p_{44}\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3$$

$$\pi_3 + \pi_4 = 1$$

Dua persamaan pertama sama dengan

$$\pi_3 - \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_4$$

$$\frac{1}{2}\pi_3 = \pi_4$$

$$\pi_3 = 2\pi_4$$

$$\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3$$

$$2\pi_4 = \pi_3$$

Sehingga sama dengan menyelesaikan persamaan $\pi_3 = 2\pi_4$ dan $\pi_3 + \pi_4 = 1$.

$$\pi_3 - 2\pi_4 = 0$$

$$\pi_3 + \pi_4 = 1$$

$$-3\pi_4 = -1$$

$$\pi_4 = \frac{1}{3}$$

$$\pi_3 + \frac{1}{3} = 1$$

$$\pi_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Jika rantai dimulai dari $i = 3,4 \in C_1$, berdasarkan teorema 5.8, maka probabilitas pembatasnya adalah

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i3}^n = \pi_3 = \frac{2}{3} \quad (i = 3,4)$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i4}^n = \pi_4 = \frac{1}{3} \quad (i = 3,4)$$

Contoh 5.19 *(Example 5.18)* Turunan f_{ij} untuk $i \in T = \{5,6\}$ dan $j \in C_k$ $(k = 1,2,3)$.

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Inversnya yaitu

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}]^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{5}{6}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{5} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Dengan

$$\boldsymbol{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Maka

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}]^{-1} \boldsymbol{R_1} \cdot 1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}]^{-1} \boldsymbol{R_2} \cdot 1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}]^{-1} \boldsymbol{R_3} \cdot 1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Karena $(i = 5,6)$ dan $(j = 0,1,2,3,4)$, maka

$$f_{50} = \frac{1}{5}, f_{60} = \frac{2}{5}, f_{51} = \frac{1}{5}, f_{61} = \frac{2}{5}$$

$$f_{52} = \frac{1}{5}, f_{62} = \frac{2}{5}, f_{53} = \frac{3}{5}, f_{63} = \frac{1}{5}, f_{54} = \frac{3}{5}, f_{64} = \frac{1}{5}$$

BAB VI

RANTAI MARKOV WAKTU KONTINU

6.1. Pendahuluan

Definisi 6.1. Misalkan $\{X(t_i), t \geq 0\}^1$ menjadi proses stokastik dengan ruang keadaan $i = 0,1,2, \dots, n$, kecuali disebutkan sebelumnya. Jika

$$P\{X(t) = x \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n\} = P\{X(t) = x \mid X(t_n) = x_n\}^2$$

Note 1 : Himpunan kejadian X waktu ke t dengan indeks i dimana t merupakan waktu dengan interval $[0, \infty)$

Note 2 : Probabilitas kejadian-kejadian waktu t itu ditentukan oleh kejadian sebelumnya tanpa memperhatikan kejadian pada masa lampau. Untuk setiap $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, lalu proses tersebut disebut *rantai Markov waktu kontinu*. Untuk $t \geq 0, s \geq 0$,

$$P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\}^3$$

Note 3 : Probabilitas transisi merupakan peluang dari kejadian waktu yang akan datang dimana kejadian tersebut ditentukan oleh kejadian sebelumnya tanpa memperhatikan kejadian pada masa lampau disebut *probabilitas transisi* (Probabilitas transisi merupakan perubahan dari satu status ke status yang lain pada periode waktu berikutnya dan merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas), dimana diasumsikan bahwa $P_{ij}(t)$ adalah waktu independen dari s, proses itu disebut *stasioner* (Proses stasioner merupakan proses stokastik yang berdistribusi probabilitas gabungan tanpa syarta tidak berubah ketika bergeser waktu).

Untuk mendapatkan fungsi eksplisit $P_{ij}(t)$ dengan menggunakan model yang spesifik, didapatkan persamaan Chapman-Kolmogorov untuk rantai Markov waktu kontinu secara umum. Probabilitas transisi $P_{ij}(t+s)$ dapat dihitung dengan menjumlahkan seluruh keadaan k pada waktu t dan pindah menuju keadaan j dari k pada waktu yang tersisa s.

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

6.2. Proses Kelahiran Murni

Definisi 6.2. Jika proses perhitungan $\{N(t), t \geq 0\}^4$ adalah rantai Markov dengan probabilitas transisi stasioner dan memenuhi keadaan berikut :

1. $N(0) = 0$, (Proses kejadian kelahiran awal)

2. $P\{N(t+h) - N(t) = 1|N(t) = k\} = \lambda_k h + o(h)$, (Probabilitas dari kejadian kelahiran pada waktu yang akan datang dikurang proses kelahiran waktu sekarang sama dengan 1, dengan syarat proses kelahiran N pada waktu sekarang sama dengan k)

3. $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2|N(t) = k\} = o(h)$, (Probabilitas dari kejadian kelahiran pada waktu yang akan datang dikurang proses kelahiran waktu sekarang lebih dari sama dengan 2, dengan syarat proses kelahiran N pada waktu sekarang sama dengan k)

Kemudian proses ini disebut *proses kelahiran murni* dengan parameter $\{\lambda_k, k = 0,1,2, \dots\}$

Note 4 : Himpunan kejadian proses kelahiran N dengan waktu t, dimana t pada interval $[0, \infty)$

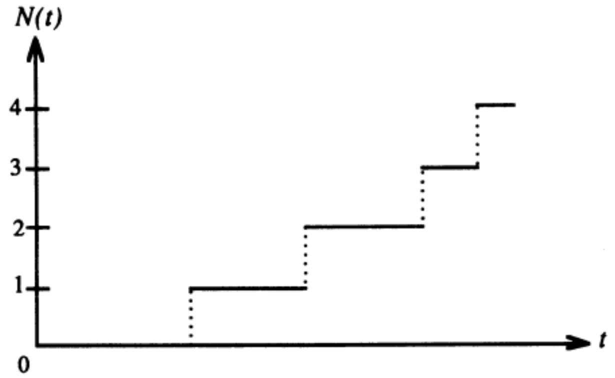


Fig. 6.2.1 A sample function of the pure birth process.

Proses kelahiran murni adalah proses perhitungan dan direalisasikan pada Gambar 6.2.1. Perhatikan bahwa proses tersebut adalah rantai Markov, yang berhubungan dengan probabilitas transisi stasioner (dimana proses kelahiran murni tidak dipengaruhi oleh proses kematian, hal ini mengakibatkan grafik naik terus)

$$P_{ij}(t) = P\{N(t) = j|N(0) = i\} \quad (i, j = 0,1,2, \dots),$$

yang memenuhi persamaan Chapman-Kolmogorov $P_{ij}(t+s)$. Probabilitas transisi dengan menentukan keadaan awal $N(0) = 0$ pada **Definisi 6.1. (i)** adalah

$$P_k(t) = P\{N(t) = k|N(0) = 0\} \quad (k = 0,1,2, \dots)$$

dan dapat dihitung. Pertimbangkan probabilitas $P_0(t)$. Menentukan waktu t dan h, dimana $h > 0$ adalah interval waktu yang sangat kecil, diperoleh

$$P_0(t+h) = P\{N(t+h)=0\}$$

$$= P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0|N(t)=0\}$$

$$= P_0(t)[1-\lambda_0 h + o(h)]$$

dimana $k=0$ dan untuk $k \geq 1$ diperoleh

$$P_k(t+h) = P\{N(t+h)=k\}$$

$$= P\{N(t)=k\}P\{N(t+h)-N(t)=0|N(t)=k\}$$

$$= P\{N(t)=k-1\}P\{N(t+h)-N(t)=1|N(t)=k-1\}$$

$$= \sum_{i=2}^{k} P\{N(t)=k-i\}\, P\{N(t+h)-N(t)=i|N(t)=k-i\}$$

$$= P_k(t)[1-\lambda_k h + o(h)] + P_{k-1}(t)[\lambda_{k-1}h + o(h)] + o(h)$$

dari dua persamaan diatas dan asumsi bahwa $h \to 0$ diperoleh persamaan diferensial

$$P_0'(t) = \frac{dP_0(t)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{P_0(t)[1-\lambda_0 h + o(h)] - P_0(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{P_0(t)[1-\lambda_0 h + o(h) - 1]}{h}$$

$$= P_0(t)\lim_{h\to 0}\frac{-\lambda_0 h + o(h)}{h}$$

$$= -\lambda_0 P_0(t) + P_0(t)\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}$$

$$= -\lambda_0 P_0(t) + P_0(t)(0)$$

$$= -\lambda_0 P_0(t)$$

Sehingga,

$$P_k'(t) = \frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) \quad (k=1,2,\dots)$$

$$P_k'(t) = \frac{dP_k(t)}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{P_k(t+h)-P_k(t)}{h}$$

$$P_k'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P_k(t+h)-P_k(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{P_k(t)[1-\lambda_k h + o(h)] + P_{k-1}(t)[\lambda_{k-1}h + o(h)] + o(h) - P_k(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{P_k(t) - \lambda_k hP_k(t) + o(h)P_k(t) + \lambda_{k-1}hP_{k-1}(t) + o(h)P_{k-1}(t) + o(h) - P_k(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\lambda_k hP_k(t) + o(h)P_k(t) + \lambda_{k-1}hP_{k-1}(t) + o(h)P_{k-1}(t) + o(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\lambda_k hP_k(t) + \lambda_{k-1}hP_{k-1}(t)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{o(h)P_k(t) + o(h)P_{k-1}(t) + o(h)}{h}$$

$$= -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \lim_{h\to 0}\frac{o(h)P_k(t) + o(h)P_{k-1}(t) + o(h)}{h}$$

$$= -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + 0 \rightarrow \left(karena\ nilai \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0\right)$$

$$= -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) \rightarrow\ (k = 1,2,\dots)$$

Persamaan diferensial $P_k(t)(1-\lambda_k h) + P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}h) + o(h)$ dan $-\lambda_k\, P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ disebut persamaan Kolmogorov lanjutan untuk proses kelahiran murni. Kedua persamaan tersebut diselesaikan dengan aturan-aturan persamaan diferensial dan diperoleh solusi sebagai berikut :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t)$$

$$\int dP_0(t) = \int -\lambda_0 P_0(t)\, dt$$

$$\int \frac{1}{P_0(t)}\, dP_0(t) = \int -\lambda_0\, dt$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda_0 t + C$$

$$P_0(t) = Ce^{-\lambda_0 t}$$

Syarat awal :

$$P_0(0) = 1$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} + \lambda_k P_k(t) = \lambda_{k-1} P_{k-1}(t)$$

$$e^{\lambda_k t} \frac{dP_k(t)}{dt} + e^{\lambda_k t} \lambda_k P_k(t) = e^{\lambda_k t} \lambda_{k-1} P_{k-1}(t)$$

$$\int d \left(e^{\lambda_k t} P_k(t) \right) = \int e^{\lambda_k t} \lambda_{k-1} P_{k-1}(t)\, dt$$

$$e^{\lambda_k t} P_k\,(t) = \lambda_{k-1} \int e^{\lambda_k t} P_{k-1}(t)\, dt$$

$$P_k(t) = \lambda_{k-1} e^{-\lambda_k t} \int e^{\lambda_k t} P_{k-1}(t)\, dt \;\; (k = 1, 2, \cdots)$$

Teorema 6.1. Untuk proses kelahiran murni $\{N(t), t \geq 0\}$ dengan parameter $\{\lambda_k, k = 0,1,2, \ldots\}$, dengan waktu antar kedatangan $X_{k+1} (k = 0,1,2, \ldots)$ independen dan terdistribusi eksponensial dengan parameter λ_k $(mean = 1/\lambda_k)$.

Teorema 6.2. Untuk proses kelahiran murni $\{N(t), t \geq 0\}$ dengan parameter $\{\lambda_k, k = 0,1,2, \ldots\}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

Karena jumlah dari semua probabilitas sama dengan , maka untuk setiap $t \geq 0$ jika dan hanya jika

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$$

Contoh 6.1. Sebuah proses Poisson dapat diperoleh dengan mengasumsikan $\lambda_k = \lambda, (k = 0,1,2, \ldots)$ untuk sebuah proses kelahiran murni. Tentu saja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} = \infty$$

Contoh 6.2. Berdasarkan proses kelahiran murni dengan parameter $\lambda_k = 2^k\lambda$. Lalu

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{2}{\lambda} < \infty$$

Penyelesaian :

Ingat deret tak hingga

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 1 + 1 = 2$$

Maka

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k} &= \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2^0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \frac{1}{\lambda}\left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)\right]\\ &= \frac{1}{\lambda}[1+1]\\ &= \frac{2}{\lambda} < \infty\end{aligned}$$

Berarti bahwa kejadian itu terjadi jauh lebih sering dalam jangka waktu yang terbatas. Proses dengan contoh ini tidak berlaku untuk proses kelahiran murni.

Yang menyiratkan bahwa peristiwa-peristiwa tersebut sering terjadi secara tak terhingga dalam interval waktu yang terbatas. Proses dengan contoh ini tidak valid untuk merawat proses kelahiran murni. Proses Yule dalam biologi dan proses Furry dalam fisika adalah contoh terkenal dari kelahiran murni. Nama-nama proses tersebut berasal dari kontribusi Yule pada teori matematika evolusi dan kontribusi Furry pada proses yang berhubungan dengan sinar kosmik.

Untuk proses $\lambda h + o(h)$ untuk melahirkan anggota baru dalam interval waktu yang sangat kecil. Mengingat bahwa $N(0) = i, (i\ bilangan\ asli)$ anggota pada waktu 0 dan diasumsikan bahwa hubungan antar anggota independen, maka diperoleh

$$P\{N(t+h)-N(t)=1|N(t)=k+i\}^{5}=\binom{k+i}{1}[\lambda h+o(h)][1-\lambda h+o(h)]^{k+i-1}$$

$$=\frac{(k+i)!}{(k+i-1)!\,1!}[\lambda h+o(h)][1-\lambda h+o(h)]^{k+i-1}$$

$$=(k+i)[\lambda h+o(h)][1-\lambda h+o(h)]^{k+i-1}$$

$$=(k+i)[\lambda h+o(h)]\frac{[1-\lambda h+o(h)]^{k}[1-\lambda h+o(h)]^{i}}{1-\lambda h+o(h)}$$

$$=(k+i)\lambda h+o(h)$$

Karena $o(h)$ adalah angka yang sangat kecil maka perkalian dengan $o(h)$ menghasilkan $o(h)$ itu sendiri

$$=(k+i)\lambda h+o(h)$$

yang berarti

$$\lambda_{k+i}=(k+i)\lambda$$

Note 5 : Proses probabilitas kejadian anggota baru yang dihasilkan dikurangi anggota sekarang sama dengan 1, ditentukan oleh jumlah anggota sekarang ditambah jumlah anggota awal.

Contoh 6.3. *(Proses Yule)* Asumsikan $i=1$ untuk proses Yule, melabelkan kembali untuk indeks

$$k=i,i+1,i+2,\ldots=1,2,3,\ldots$$

sehingga dapat menyelesaikan $P_k(t)(k=1,2,3,\ldots)$ secara rekursif. Maka,

$$P_1(t)=e^{-\lambda t},$$

$$P_2(t)=\lambda e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda x}\,P_1(x)dx$$

$$=\lambda e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda x}.\,e^{-\lambda x}dx$$

$$=\lambda e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{\lambda x}dx$$

$$=\lambda e^{-2\lambda t}\left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right]_0^t$$

$$= \lambda e^{-2\lambda t}\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{\lambda 0}\right)$$

$$= \lambda e^{-2\lambda t}\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \lambda e^{-2\lambda t}.\frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right)$$

$$= e^{-2\lambda t}\left(e^{\lambda t} - 1\right)$$

$$= e^{-2\lambda t}.e^{\lambda t} - e^{-2\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right),$$

$$P_3(t) = 2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t e^{3\lambda t}\, P_2(x)dx$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t e^{3\lambda x}(e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})\, dx$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t \left(e^{2\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)\right) dx$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t \left(e^{2\lambda x} - e^{\lambda x}\right) dx$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda x}\, dx - \int_0^t e^{\lambda x}\, dx$$

Penyelesaian untuk

$$\int_0^t e^{2\lambda x}\, dx$$

Misalkan,

$$u = 2\lambda x, \qquad \frac{du}{dx} = 2\lambda, \qquad dx = \frac{1}{2\lambda}du$$

maka,

$$\int_0^t e^{2\lambda x}\,dx = \int_0^t e^u.\frac{1}{2\lambda}du = \frac{1}{2\lambda}\int_0^t e^u du = \frac{1}{2\lambda}e^u$$

dengan $u = 2\lambda x$ maka,

$$\int_0^t e^{2\lambda x}\,dx = \frac{e^{2\lambda x}}{2\lambda}\Big|_0^t$$

Kemudian penyelesaian untuk

$$\int_0^t e^{\lambda x}\,dx$$

misal,

$$u = \lambda t, \qquad \frac{du}{dx} = \lambda, \qquad dx = \frac{1}{\lambda}du$$

maka,

$$\int_0^t e^{\lambda t}\,dx = \int_0^t e^u.\frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^u du = \frac{1}{\lambda}e^u$$

dengan $u = \lambda x$ maka,

$$\int_0^t e^{\lambda t}\,dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^t$$

Sehingga

$$P_3(t) = 2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda x}\,dx - \int_0^t e^{\lambda x}\,dx$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\left[\frac{e^{2\lambda x}}{2\lambda} - \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_0^t$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\left[\frac{e^{2\lambda x} - 2e^{\lambda x}}{2\lambda}\right]_0^t$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\left[\frac{e^{2\lambda t} - 2e^{\lambda t}}{2\lambda} - \left(\frac{e^0 - 2e^0}{2\lambda}\right)\right]$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\left[\frac{e^{2\lambda t} - 2e^{\lambda t}}{2\lambda} - \left(\frac{1-2}{2\lambda}\right)\right]$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}\left[\frac{e^{2\lambda t} - 2e^{\lambda t} + 1}{2\lambda}\right]$$

$$= 2\lambda e^{-3\lambda t}.\frac{1}{2\lambda}\left[e^{2\lambda t} - 2e^{\lambda t} + 1\right]$$

$$= e^{-3\lambda t}\left[e^{2\lambda t} - 2e^{\lambda t} + 1\right]$$

$$= e^{-3\lambda t}.e^{2\lambda t} - 2(e^{-3\lambda t}.e^{\lambda t}) + e^{-3\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} - 2e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t}\left(1 - 2e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}\right)$$

$$= e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2,$$

$$P_{k+1}(t) = k\lambda e^{-(k+1)\lambda t}\int_0^t e^{(k+1)\lambda t}\, P_k(x)dx = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^k$$

dimana terlihat bahwa probabilitas transisi, $P_k(t)$ menunjukkan bahwa proses ini pada keadaan k (k anggota) pada waktu t, mengingat bahwa keadaan 1 (1 anggota) pada waktu 0. Harus menambahkan 1 sebagai indeks dalam persamaan.

Fungsi pembangkit untuk $P_k(t)\,(k = 1,2,\dots)$ dapat dengan mudah diperoleh dengan menjumlahkan :

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\, s^k = \frac{se^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})s} \qquad (0 < |s| < 1)$$

Mengingat proses Yule dimana $N(0) = r$ adalah anggota pada waktu 0 pada umumnya. Perhatikan bahwa proses tersebut independen dan tidak ada interaksi antar anggota yang diberikan, anggap bahwa proses Yule dengan $N(0) = r$ sebagai jumlah r independen proses Yule dengan $N(0) = 1$. Menyebabkan

$$P_{rn}(t) = P\{N(t) = n | X(0) = r\} \quad (n = r, r+1, \dots)^6$$

Note 6 : Peluang kejadian proses kelahiran anggota baru pada waktu sekarang sama dengan n ditentukan oleh kelahiran awal sama dengan r tanpa memperhatikan kejadian pada masa lampau. menjadi probabilitas transisi dengan $N(0) = r$. Menyebabkan

$$g_r(s) = \sum_{n=r}^{\infty} P_{rn}(t) s^n \qquad (0 < |s| < 1)$$

Fungsi pembangkit untuk $P_{rn}(t)(n = r, r + 1, \dots)$. Maka diperoleh

$$g_r(s) = [g(s)]^r = \left[\frac{se^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})s}\right]^s$$

yang sesuai dengan fungsi karakteristik dari distribusi binomial negatif. Asumsikan $s = e^{iu}, p = e^{-\lambda t}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
P_{rn}(t) &= \binom{n-1}{n-r} e^{-r\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-r} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\dots(r+1)}{(t-r)!} e^{-\lambda tr} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-r} \\
&= \binom{-r}{n-r} e^{-\lambda tr} \left[-1\left(1 - e^{-\lambda tr}\right)\right]^{n-r} \\
&= \binom{-r}{n-r} e^{-\lambda tr} \left(e^{-\lambda t} - 1\right)^{n-r}
\end{aligned}$$

Misalkan :

$$p = e^{-\lambda t}$$

Maka

$$P_{rn}(t) = \binom{-r}{n-r} p^r (1-p)^{n-r} \Longrightarrow f_{rn}(t) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

Maka **ekspektasinya** adalah

$$\begin{aligned}
E[N(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, f_{rn}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{r}{r} \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} \frac{p^{r+1}}{p} (1-p)^{n-r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,r!\,(n-1)!}{r!\,(r-1)!\,(n-r)!} \frac{p^{r+1}}{p} (1-p)^{n-r}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{rn!\,(r-1)!}{r!\,(r-1)!\,(n-r)!} \frac{p^{r+1}}{p} (1-p)^{n-r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{rn!}{r!\,(n-r)!} \frac{p^{r+1}}{p} (1-p)^{n-r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{p} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} p^{r+1} (1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{r}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} p^{r+1} (1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{r}{p}(1)$$

$$= \frac{r}{p}$$

karena $p = e^{-\lambda t}$ maka

$$E[N(t)] = \frac{r}{e^{-\lambda t}} = r\left(e^{-\lambda t}\right)^{-1} = re^{\lambda t}$$

Variansinya adalah

$$Var[N(t)] = E[N(t)^2] + E[N(t)] - E[N(t)]^2$$

$$= E[N(t)^2 + N(t)] - E[N(t)] - E[N(t)]^2$$

$$= E[N(t)(N(t)+1)] - E[N(t)] - E[N(t)]^2$$

mencari $E[N(t)(N(t)+1)]$

$$E[N(t)(N(t)+1)] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \frac{(n+1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r+1)(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} \frac{p^{r+2}}{p^2} (1-p)^{n-r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r+1)}{p^2} \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} p^{r+2}(1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{r(t+1)}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} p^{r+2}(1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{r(t+1)}{p^2} \cdot 1$$

$$= \frac{r(t+1)}{p^2}$$

Maka

$$Var[N(t)] = E[N(t)(N(t)+1)] - E[N(t)] - E[N(t)]^2$$

$$= \left(\frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p}\right) - \frac{r^2}{p^2}$$

$$= \left(\frac{r(r+1) - pr}{p^2}\right) - \frac{r^2}{p^2}$$

$$= \frac{r^2 + r - pr}{p^2} - \frac{r^2}{p^2}$$

$$= \frac{r - pr}{p^2}$$

$$= \frac{r(1-p)}{p^2}$$

dengan $p = e^{-\lambda t}$, maka

$$Var[N(t)] = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{r\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t}} = r(1 - e^{-\lambda t})e^{2\lambda t}$$

6.3. Proses Kematian Murni

Definisi 6.3. Jika sebuah proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$[7] adalah sebuah rantai Markov dengan probabilitas transisi stasioner dan memenuhi keadaan berikut :

(i) $X(0) = n$,

(ii) $P\{X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = k\} = \mu_k h + o(h)$, (Probabilitas kejadian kematian pada waktu yang akan datang dikurang proses kematian waktu sekarang sama dengan- 1, dengan syarat proses kematian X pada waktu sekarang sama dengan k)

(iii) $P\{X(t+h) - X(t) \geq -2 \mid X(t) = k\} = o(h)$ (Probabilitas dari kejadian kematian pada waktu yang akan datang dikurang proses kematian waktu sekarang lebih dari sama dengan -2, dengan syarat proses kematian X pada waktu sekarang sama dengan k)

lalu proses ini disebut *proses kematian murni* dengan parameter $\{\mu_k, k = 1,2,\dots,n\}$.

Note 7 : Himpunan kejadian proses kematian X pada waktu t, dimana t pada interval $[0,\infty)$

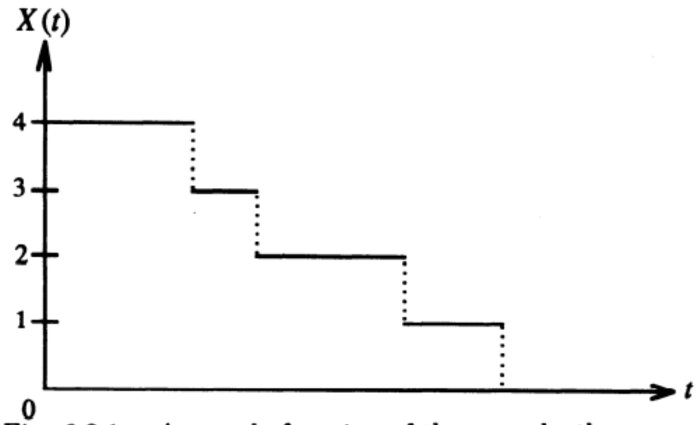


Fig. 6.3.1 A sample function of the pure death process.

wajar bahwa dalam proses kelahiran murni, kejadian-kejadian sering terjadi untuk jangka waktu yang tak terbatas (**Teorema 6.2**). Akan tetapi, dalam proses kematian murni, paling banyak n kejadian yang terjadi untuk jangka waktu tertentu, karena tidak ada kejadian yang terjadi setelah proses tersebut mencapai keadaan 0, yakni keadaan 0 adalah keadaan yang menyerap. Gambar 6.3.1 menunjukkan contoh fungsi dari proses kematian murni. Menyebabkan

$$P_k(t) = P\{X(t) = k \mid X(0) = n\} \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$$

Menjadi probabilitas transisi dengan kondisi awal $X(0) = 0$ pada **Definisi 6.3. (i)**, memiliki

$$P_n'(t) = -\mu_n P_n(t)$$

$$P_k'(t) = -\mu_k P_k(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) \qquad (k = 1,2,\dots\dots n-1)$$

$$P_0'(t) = \mu_1 P_1(t)$$

merupakan *persamaan Kolmogorov maju* untuk proses kematian murni.

Contoh 6.4. Menetapkan parameter $\mu_k = \mu\ (k = 1,2,\dots,n)$ dan $P_n(0) = 1, P_k(0) = 0\ (k = 1,2,\dots,n-1)$, memiliki

$$P_k(t) = \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu t} \qquad (k = 1,2,\dots,n)$$

dan

$$P_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P_k(t)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu t}$$

$$= \underbrace{1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\mu t)^{k}}{k!} e^{-\mu t}}_{n\text{−nya hilang karena sigmanya berjalan dari } k=1 \text{ sampai } n-1}$$

yang dapat dideskripsikan oleh distribusi gamma $X \sim GAM(\mu, n)$ (bagian 2.4.2), karena probabilitas transisi $P_0(t)$ adalah distribusi dari n jumlah variabel random eksponensial yang independen dengan parameter μ.

Contoh 6.5. *(Proses Kematian Murni dengan Tingkat Kematian Linear)* Asumsikan bahwa $\mu_k = k_\mu\ (k = 1,2,\dots,n)$, yakni angka kematian sebanding dengan jumlah anggota yang hidup dalam sebuah populasi. Menetapkan parameter $\mu_k = k_\mu\ (k = 1,2,\dots,n)$ dan $P_n(0) = 1, P_k(0) = 0\ (k = 1,2,\dots,n-1)$,

$$P_k\ (t) = \binom{n}{k} e^{-k\mu t}(1 - e^{-\mu t})^{n-k} \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$$

Misalkan :

$$p = e^{-\mu t}$$

Maka

$$P_k(t) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$$

yaitu distribusi binomial $X \sim B(n, e^{-\mu t})$, maka **ekspektasinya** adalah

$$E[X(t)] = \sum_{k=0}^{n} kP_k(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} pp^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

Misalkan

$$k-1 = a, \qquad k = a+1$$

$$n-1 = m, \qquad n = m+1$$

$$n-k = (m+1)-(a+1)$$

$$= m-a$$

Maka

$$E[X(t)] = np \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{a+1=0}^{m+1} \frac{m!}{a!\,(m-a)!} p^a (1-p)^{m-a}$$

$$= np(p+q)^m$$

$$= np(p+1-p)^m$$

$$= np(1)^m$$

$$= np$$

dimana $p = e^{-\mu t}$

$$E[X(t)] = ne^{-\mu t}$$

Variansinya adalah

$$Var[X(t)] = E\left(\left[X(t) - E\big(X(t)\big)\right]^2\right)$$

$$= E[X(t)^2] - E[X(t)]^2$$

mencari $E[X(t)^2]$

$$E[X(t)^2] = E[X(t)] - E[X(t)] + E[X(t)]$$

$$= E[X(t)^2 - X(t)] + E[X(t)]$$

$$= E[X(t)(X(t) - 1)] + E[X(t)]$$

mencari $E[X(t)(X(t) - 1)]$

$$E[X(t)(X(t) - 1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!\,(n-k)!} p^2 p^{k-2} (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^2 p^{k-2} (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k}$$

Misalkan :

$$k - 2 = a, \qquad k = a + 2$$

$$n - 2 = m, \qquad n = m + 2$$

$$n - k = m + 2 - (a + 2)$$

$$= m - a$$

Maka

$$E[X(t)(X(t)-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{a+2=0}^{m+2} \frac{m!}{a!\,(m-a)!} p^a (1-p)^{m-a}$$

$$= n(n-1)p^2(p+q)^m$$

$$= n(n-1)p^2\big(p+(1-p)\big)^m$$

$$= n(n-1)p^2(1)^m$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$= n^2p^2 - np^2$$

maka variansinya

$$Var[X(t)] = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2$$

$$= \big[E\big(X(t)(X(t)-1)\big) + E\big(X(t)\big)\big] - E[X(t)]^2$$

$$= (n^2p^2 - np^2 + np) - (np)^2$$

$$= n^2p^2 - n^2p^2 + np(1-p)$$

$$= np(1-p)$$

dengan $p = e^{-\mu t}$ maka

$$Var[X(t)] = ne^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t})$$

6.4. Proses Kelahiran dan Kematian

Definisi 6.4. Jika sebuah proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah sebuah rantai Markov dengan probabilitas transisi stasioner dan memenuhi keadaan berikut :

a. $X(0) = i$,

b. $P\{X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = k\} = \lambda_k h + o(h)$,

c. $P\{X(t+h) - X(t) = -1 | X(t) = k\} = \mu_k h + o(h)$,

d. $P\{dua\ atau\ lebih\ peristiwa\ yang\ terjadi\ di\ (t, t+h] | X(t) = k\} = o(h)$, maka proses tersebut dinamakan *proses kelahiran dan kematian* dengan parameter $\{\lambda_k, \mu_{k+1}, k = 0,1,2, \dots\}$, dimana λ_k dan μ_{k+1} disebut *angka kelahiran* dan *angka kematian* secara berturut-turut.

Definisi diatas dapat di interpretasikan sebagai berikut :

i. Memberikan kondisi awal $X(0) = i$, sehingga megimplikasikan

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$$
$$P_{ii}(0) = P\{X(0) = i \mid X(0) = i\} = 1$$
$$P_{ij}(0) = P\{X(0) = j \mid X(0) = i\} = 0$$

ii. Menunjukkan bahwa laju kelahiran pada proses yang terjadi di keadaan k adalah λ_k.

iii. Menunjukkan bahwa laju kematian pada proses yang terjadi di keadaan k adalah μ_k.

iv. Menunjukkan bahwa probabilitas terjadinya 2 atau lebih kejadian di interval kecil h di abaikan.

Dari persamaan di definisi 6.4. ii., iii., iv, maka diperoleh

$$P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = 0\} = 1 - \lambda_0 h + o(h)$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = k\} = 1 - (\lambda_k + \mu_k)h + o(h) \quad (k = 0,1,2, \dots)$$

Misalkan

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$$

sebagai probabilitas proses yang terjadi pada keadaan j di waktu t dengan syarat telah terjadi proses pada keadaan i di waktu 0.

Dengan mengaplikasikan persamaan Chapman-Kolmogorov, yaitu

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

dan mengasumsikan waktu sebagai t dan h, dimana $h > 0$ adalah interval waktu yang sangat kecil. Sehingga untuk $j = 0$, diperoleh

$$P_{i0}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h)$$

$$= P_{i0}(t) P_{0j}(h) + P_{i1}(t) P_{1j}(h) + \sum_{k=2}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h)$$

$$= P_{i0}(t)P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = 0\} +$$

$$P_{i1}(t)P\{X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = 1\} +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_{ik}(t)P\{X(t+h) - X(t) = -k \mid X(t) = k\}$$

$$= P_{i0}(t)[1 - \lambda_0 h + o(h)] + P_{i1}(t)[\mu_1 h + o(h)] + o(h)$$

dengan mengatur ulang kedua sisi,

$$P_{i0}(t+h) = P_{i0}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t)h + P_{i0}(t)o(h) + \mu_1 P_{i1}(t)h + P_{i1}(t)o(h) + o(h)$$

Kemudian jika kedua ruas kita turunkan terhadap t dan memisalkan $h \to 0$, maka

$$\frac{dP_{i0}(t)}{dt} = P'_{i0}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{i0}(t+h) - P_{i0}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{P_{i0}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t)h + P_{i0}(t)o(h) + \mu_1 P_{i1}(t)h + P_{i1}(t)o(h) + o(h) - P_{i0}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\lambda_0 P_{i0}(t)h + P_{i0}(t)o(h) + \mu_1 P_{i1}(t)h + P_{i1}(t)o(h) + o(h)}{h}$$

$$= \frac{-\lambda_0 P_{i0}(t)h + \mu_1 P_{i1}(t)h}{h}$$

$$= \frac{h\big(-\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t)\big)}{h}$$

$$= -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t)$$

Sehingga diperoleh secara umum untuk j

$$P_{ij}(t+h) = P_{ij-1}(t)P\{X(t+h) - X(t) = 1 \mid X(t) = j-1\} +$$

$$P_{ij}(t)P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = j\} +$$

$$P_{ij+1}(t)P\{X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = j+1\} +$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j-1,j,j+1}}^{\infty} P_{ik}(t)P\{X(t+h) - X(t) = j-k \mid X(t) = k\}$$

$$= P_{ij-1}(t)\big[\lambda_{j-1}h + o(h)\big] + P_{ij}(t)\big[1 - \big(\lambda_j + \mu_j\big)h + o(h)\big] +$$

$$P_{ij+1}(t)\big[\mu_{j+1}h + o(h)\big] + o(h)$$

$$= \lambda_{j-1}P_{ij-1}(t)h + P_{ij-1}(t)o(h) + P_{ij}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t)h +$$

$$P_{ij}(t)o(h) + \mu_{j+1}P_{ij+1}(t)h + P_{ij+1}(t)o(h) + o(h)$$

Kemudian jika kedua ruas kita turunkan terhadap t dan memisalkan $h \to 0$, maka

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = P'_{ij}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h}$$

$$= \frac{\lambda_{j-1}P_{ij-1}(t)h - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t)h + \mu_{j+1}P_{ij+1}(t)h}{h}$$

$$= \frac{h\left(\lambda_{j-1}P_{ij-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1}P_{ij+1}(t)\right)}{h}$$

$$= \lambda_{j-1}P_{ij-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1}P_{ij+1}(t)$$

Persamaan $P'_{i0}(t)$ dan $P'_{ij}(t)$ disebut persamaan Kolmogorov maju untuk proses kelahiran dan kematian.

Teorema 6.3. Untuk proses kelahiran dan kematian $\{X(t), t \geq 0\}$ dengan parameter $\{\lambda_k, \mu_{k+1}, k = 0,1,2,\ldots\}$, ketika proses pada keadaan i $(i = 0,1,2,\ldots)$ di waktu t, yaitu $X(t) = i$, waktu antar kedatangan didistribusikan secara eksponensial dengan parameter $\lambda_i + \mu_i$, di mana probabilitas untuk pindah ke keadaan berikutnya $i - 1$ atau $i + 1$ adalah

$$\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Atau

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Perhatikan bahwa ketika $i = 0$, keadaan transisi yang mungkin hanya keadaan 1. Yaitu di interpretasikan bahwa $\mu_0 = 0$ mengimplikasikan

$$\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} = \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{0}{\lambda_i + 0} = 0$$

Dan

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 0} = 1$$

Untuk proses kelahiran dan kematian $\{X(t), t \geq 0\}$ prosesnya bersifat stasioner kenaikan independen yang menghasilkan distribusi eksponensial dari semua waktu antarkedatangan antar transisi. Secara khusus, untuk keadaan k, waktu antar kedatangan didistribusikan secara eksponensial dengan parameter $\lambda_k + \mu_k$, dan proses berpindah ke keadaan $k+1$ dengan probabilitas $\lambda_k/(\lambda_k + \mu_k)$ dan ke keadaan $k-1$ dengan probabilitas $\mu_k/(\lambda_k + \mu_k)$.

Perhatikan bahwa

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} + \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = 1$$

menyiratkan bahwa tidak ada transisi lain kecuali keadaan $k-1$ dan $k+1$.

Untuk menjelaskan persamaan diferensial $P'_{i0}(t)$ dan $P'_{ij}(t)$, kita analogkan model fisika sederhana dari sebuah tangki air. Terdapat sebuah tangki air yang berisi air setinggi $x(t)$ pada waktu t, dimana jumlah air yang masuk adalah I per satuan waktu dan jumlah yang keluar adalah O per satuan waktu. Persamaan differensial dari $x(t)$ diberikan oleh

$$\frac{dx(t)}{dt} = I - O$$

Jika kita mempertimbangkan dua model aliran dari tangki air, maka persamaan diferensialnya menjadi

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = I_1 - O_1, \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = I_2 - O_2$$

dengan $O_1 = I_2$. Dimana $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ adalah tinggi tangki 1 dan 2 pada waktu t. Oleh karena itu, kita juga dapat menuliskan persamaan differensial $P'_{i0}(t)$ dan $P'_{ij}(t)$ sebagai

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda_{j-1}P_{ij-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1}P_{ij+1}(t) & (j = 1,2,\cdots) \\ -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t) & (j = 0) \end{cases}$$

Contoh 6.6. *(Proses Pertumbuhan Linear)* Proses kelahiran dan kematian disebut proses pertumbuhan linear jika

$$\lambda_k = k\lambda, \mu_{k+1} = (k+1)\mu \;\; (k = 0,1,2,\ldots)$$

Contoh proses tersebut muncul dalam studi reproduksi biologis dan pertumbuhan populasi. Perhatikan bahwa $\lambda_0 = 0$ dan keadaan 0 hanyalah keadaan menyerap, kita memiliki persamaan maju Kolmogorov berikut :

$$P'_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t)$$

$$P'_{i0}(t) = -0P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t)$$

$$P'_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t) \qquad (j = 0)$$

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t)$$

$$P'_{ij}(t) = (j-1)\lambda P_{i,j-1}(t) - j(\lambda + \mu) P_{ij}(t) + (j+1)\mu P_{i,j+1}(t) \qquad (j = 1,2,\cdots)$$

Diasumsikan $X(0) = i \geq 1$, ekspektasi pada waktu t adalah

$$M(t) = E[X(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{ij}(t)$$

Jika kita mengalikan persamaan $P'_{ij}(t)$ dengan j pada kedua sisi dan menjumlahkan sebanyak j, sehingga

$$P'_{ij}(t) = (j-1)\lambda P_{i,j-1}(t) - j(\lambda + \mu) P_{ij}(t) + (j+1)\mu P_{i,j+1}(t)$$

$$jP'_{ij}(t) = j(j-1)\lambda P_{i,j-1}(t) + j(j+1)\mu P_{i,j+1}(t) - j^2(\lambda + \mu) P_{ij}(t)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP'_{ij}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(j(j-1)\lambda P_{i,j-1}(t) + j(j+1)\mu P_{i,j+1}(t) - j^2(\lambda + \mu) P_{ij}(t) \right)$$

$$M'(t) = (\lambda - \mu) \sum_{j=0}^{\infty} j P_{ij}(t) = (\lambda - \mu) M(t)$$

dengan kondisi awal $M(0) = i$. Sehingga solusi dari persamaan diatas adalah

$$M(t) = i e^{(\lambda - \mu)t}$$

Misalkan kita membatasi perlakuan dari $M(t)$ sebagai $t \to \infty$. Sehingga

$$\lim_{t \to \infty} M(t) = \begin{cases} 0 & (\lambda < \mu) \\ i & (\lambda = \mu) \\ \infty & (\lambda > \mu) \end{cases}$$

Jika $\lambda > \mu$, rata-rata populasi divergen. Jika $\lambda = \mu$, rata-rata populasi tdak berubah sepanjang waktu. Jika $\lambda < \mu$, rata-rata populasi konvergen ke nol.

Misalkan diasumsikan secara umum bahwa semua parameter positif untuk proses kelahiran dan kematian,

$$\lambda_k > 0, \;\; \mu_{k+1} > 0 \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

Proses tersebut adalah proses yang irreducible dan rekuren. Namun, kita harus mengidentifikasi apakah proses tersebut rekuren positif atau bukan. Mengingat kembali bahwa probabilitas keadaan stabil artinya bahwa tinggi air tidak pernah berubah sepanjang waktu pada model tangki air.

Jika terdapat probabilitas yang membatasi

$$p_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

yang mana independen pada keadaan awal i, maka

$$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$$

$$\lambda_{j-1} p_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) p_j + \mu_{j+1} p_{j+1} = 0$$

dengan mengasumsikan $P'_{ij}(t) = 0$ dan mensubtitusikan p_j untuk $P_{ij}(t)$. Dari hukum total probabilitas, kita punya

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

Sehingga

$$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$$

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

$$\lambda_0 p_0 - \lambda_1 p_1 - \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = 0$$

$$\lambda_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = \mu_2 p_2 - \mu_1 p_1$$

$$\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2 - \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3 = 0$$

$$\lambda_2 p_2 - \lambda_1 p_1 = \mu_3 p_3 - \mu_2 p_2$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{j-1} p_{j-1} - \lambda_{j-2} p_{j-2} = \mu_j p_j - \mu_{j-1} p_{j-1}$$

Menjumlahkan kedua sisi, diperoleh

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 - \lambda_0 p_0 + \lambda_2 p_2 - \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_{j-1} p_{j-1} - \lambda_{j-2} p_{j-2}$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 - \mu_1 p_1 + \mu_3 p_3 - \mu_2 p_2 + \cdots + \mu_j p_j - \mu_{j-1} p_{j-1}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{j-1} p_{j-1} = \mu_j p_j$$

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} p_{j-1} = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}}{\mu_j \mu_{j-1}} p_{j-2} = \cdots = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2} \cdots \lambda_0}{\mu_j \mu_{j-1} \cdots \mu_1} p_0 = \left(\prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) p_0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j = p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) p_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right] p_0 = 1$$

Teorema 6.4. Untuk proses kelahiran dan kematian dengan parameter $\{\lambda_k, \mu_{k+1}, k = 0,1,2, \dots\}$, jika kita asumsikan semua parameternya positif, yaitu

$$\lambda_k > 0, \mu_{k+1} > 0 \quad (k = 0,1,2, \dots)$$

ada probabilitas yang membatasi

$$p_j = \lim_{t \to 0} P_{ij}(t) \qquad (i, j = 0,1,2, \dots)$$

yang independen dari keadaan awal i jika dan hanya jika

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty$$

dimana kita mendalilkan $\prod_{k=1}^{j} = 1$ untuk $j = 0$. Kemudian diberikan probabilitas pembatas oleh

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right]^{-1}$$

$$p_j = \left(\prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) p_0$$

Contoh 6.7. ($Antrian\ M/M/1$) Seperti sebuah contoh dari proses kelahiran dan kematian, disebut antrian $M/M/1$, dimana pelanggan datang pada laju Poisson λ dan dilayani secara eksponensial pada laju μ dengan jumlah saluran hanya satu, dan ukuran antrian tidak terbatas. Rinciannya akan dibahas pada Bab 9. Kemudian $\lambda_k = \lambda$ dan $\mu_{k+1} = \mu$ $(k = 0,1,2, \cdots)$ untuk proses kelahiran dan kematian. Sehingga

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda}{\mu} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j = \frac{1}{1 - \rho} < \infty$$

jika dan hanya jika $\rho < 1$, dimana $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ disebut intensitas lalu lintas dari sistem. Artinya, jika $\lambda < \mu$, terdapat probabilitas pembatas

$$p_j = (1-\rho)\rho^j \qquad (\rho < 1; j = 0,1,2,\cdots)$$

yang merupakan distribusi geometrik $X \sim GEO(1-\rho)$.

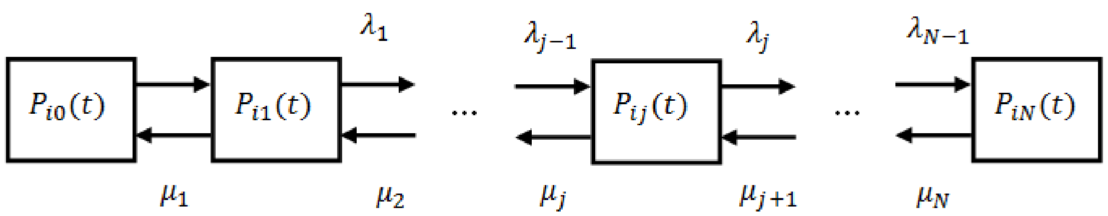
Contoh 6.8. ($antrian\ M/M/\infty$) Sebagai contoh lain dari proses kelahiran dan kematian, pertimbangkan antrian $/M/\infty\ antrian$, dimana calon pelanggan tiba pada tingkat Poisson λ dan disajikan secara eksponensial pada tingkat μ dengan jumlah tak terbatas (yaitu: semua pelanggan yang datang dilayani segera). Kemudian $\lambda_k = \lambda,\ \mu_{k+1} = (k+1)\mu \quad (k = 0,1,2,\dots)$ untuk proses kelahiran dan kematian. Memverifikasi pada persamaan $\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty$ dan mendapatkan $u = \frac{\lambda}{\mu}$, kita dapatkan

$$\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda}{(k+1)\mu} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = e^u < \infty$$

yang valid untuk setiap intensitas lalu lintas u. Yaitu, untuk setiap λ dan μ, ada probabilitas terbatas

$$P_j = \frac{u^j}{j!}e^{-u} \qquad (j = 0,1,2,\dots)$$

yang merupakan distribusi Poisson $X \sim POI(u)$.



Gambar 6.4.6 diagram blok dari proses kelahiran dan kematian dengan keadaan terbatas.

Disini kita juga tertarik pada proses kelahiran dan kematian dengan ruang keadaan terbatas. Misalkan $i = 0,1,2,\cdots,N$, dimana N terhingga. Kita mempunyai persamaan Kolmogorov maju :

$$P'_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t) \qquad (j = 0)$$

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) \qquad (j = 1,2,\cdots,N-1)$$

$$P'_{iN}(t) = \lambda_{N-1}P_{iN-1}(t) - \mu_N P_{iN}(t) \qquad (j = N)$$

Teorema 6.5. Untuk keadaan terbatas dari kelahiran dan kematian dengan parameter $\{\lambda_k,\ \mu_{k+1},\ k = 0,1,2,\dots,N\}$, dimana N terbatas, jika menganggap bahwa semua parameter positif,

$$\lambda_k > 0, \qquad \mu_{k+1} > 0 \ \ (k = 0,1,2,\dots,N-1)$$

kemudian ada batas-batas probabilitas

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \begin{cases} \left[\sum_{j=0}^{N} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}]\right]^{-1} & (j = 0) \\ \left(\prod_{k=1}^{j} \lambda_{k-1}/\mu_k\right) P_0 & (j = 1,2,\dots,N) \end{cases}$$

yang independen dari keadaan awal i, dimana kita mendalilkan $\prod_{k=1}^{j} = 1$ untuk $j = 0$.

Contoh 6.9. ($antrian\, M/M/1/N$) Diberikan antrian $M/M/1/N$, yaitu ketika potensi pelanggan tiba di tingkat Poisson λ dan disajikan secara eksponensial pada kecepatan μ dengan satu alur, dimana ukuran sistem maksimum (termasuk pelanggan yang dilayani) adalah $N < \infty$. Menggunakan **Teorema 6.5**, diperoleh

$$P_j = \begin{cases} \frac{(1-p)p^j}{1-p^{N+1}} & (p \neq 1;\ j = 0,1,2,\dots,N) \\ \frac{1}{N+1} & (p = 1;\ j = 0,1,2,\dots,N) \end{cases}$$

dimana $p = \lambda/\mu$ adalah intensitas trafik. Perhatikan bahwa ada batas-batas kemungkinan p_j terlepas dari jumlah p, karena kondisi persamaan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} < \infty$$

selalu pas untuk keadaan terbatas rantai Markov.

Contoh 6.10. ($rantai\ Markov\ dua\ keadaan$) Untuk rantai Markov dua keadaan, memiliki persamaan garis depan Kolmogorov berikut :

$$\begin{cases} P'_{i0}(t) = -\lambda P_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t) & (i = 0,1), \\ P'_{i1}(t) = \lambda P_{i0}(t) - \mu P_{i1}(t) & (i = 0,1), \end{cases}$$

dimana diasumsikan $\lambda_0 = \lambda$ dan $\mu_1 = \mu$, untuk kesederhanaan. Menerapkan **Teorema 6.5** dimiliki probabilitas terbatas sebagai berikut :

$$p_j = \left[\sum_{j=0}^{N} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right]^{-1} \qquad (j = 0)$$

$$p_j = \left(\prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right) p_0 \qquad (j = 1,2,\cdots,N)$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1} = \left[\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right]^{-1} = \frac{1}{\frac{\mu+\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

$$p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

Penyelesaian persamaan diferensial tersebut dengan nilai awal $P_{00}(0) = 1$ dan $P_{01}(0) = 0$ sebagai berikut :

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Kita punya probabilitas dengan nilai awal $P_{10}(0) = 0$ dan $P_{11}(0) = 1$ sebagai berikut :

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} - \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{11}(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Disetiap kasus kita punya probabilitas pembatas p_j yang independen dengan distribusi awal.

Misalkan diasumsikan distribusi awal

$$P\{X(0) = 0\} = p_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

$$P\{X(0) = 1\} = p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

Maka distribusi probabilitas transisi pada waktu t diberikan oleh

$$p(0)P(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\mu+\lambda} & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\mu+\lambda} & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \frac{\mu}{\mu+\lambda} - \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mu^2 + \mu\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\mu+\lambda)^2} + \frac{\lambda\mu - \lambda\mu e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\mu+\lambda)^2} & \frac{\mu\lambda - \mu\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\mu+\lambda)^2} + \frac{\lambda^2 + \lambda\mu e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\mu+\lambda)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mu^2 + \lambda\mu}{(\mu+\lambda)^2} & \frac{\mu\lambda + \lambda^2}{(\mu+\lambda)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mu(\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda)} & \frac{\lambda(\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mu}{(\mu+\lambda)} & \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)} \end{bmatrix} = p(0)$$

yang mana independen pada waktu t.

Dengan mengasumsikan waktu h dan t, dan memisalkan $h \to 0$ untuk proses kelahiran dan kematian, sehingga kita punya

$$P_{0j}(h+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t)$$

$$= P_{i0}(h)P_{0j}(t) + P_{i1}(h)P_{1j}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t)$$

$$= P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = 0\}P_{0j}(t) +$$

$$P\{X(t+h) - X(t) = -1 \mid X(t) = 1\}P_{1j}(t) +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} P\{X(t+h) - X(t) = -k \mid X(t) = k\}P_{kj}(t)$$

$$= [1 - \lambda_0 h + o(h)]P_{0j}(t) + [\mu_1 h + o(h)]P_{1j}(t) + o(h)$$

dengan mengatur ulang kedua sisi,

$$P_{0j}(h+t) = P_{0j}(t) - \lambda_0 P_{0j}(t)h + P_{0j}(t)o(h) + \mu_1 P_{1j}(t)h + P_{1j}(t)o(h) + o(h)$$

Kemudian jika kedua ruas kita turunkan terhadap t dan memisalkan $h \to 0$, maka

$$\frac{dP_{0j}(t)}{dt} = P'_{0j}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P_{0j}(h+t) - P_{0j}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{P_{0j}(t) - \lambda_0 P_{0j}(t)h + P_{0j}(t)o(h) + \mu_1 P_{1j}(t)h + P_{1j}(t)o(h) + o(h) - P_{0j}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\lambda_0 P_{0j}(t)h + P_{0j}(t)o(h) + \mu_1 P_{1j}(t)h + P_{1j}(t)o(h) + o(h)}{h}$$

$$= \frac{-\lambda_0 P_{0j}(t)h + \mu_1 P_{1j}(t)h}{h}$$

$$= \frac{h\left(-\lambda_0 P_{0j}(t) + \mu_1 P_{1j}(t)\right)}{h}$$

$$= -\lambda_0 P_{0j}(t) + \mu_1 P_{1j}(t)$$

Sehingga diperoleh secara umum untuk j

$$P_{ij}(h+t) = P\{X(h+t) - X(t) = 1 \mid X(t) = i-1\}P_{i-1,j}(t) +$$

$$P\{X(h+t) - X(t) = 0 \mid X(t) = i\}P_{ij}(t) +$$

$$P\{X(h+t) - X(t) = -1 \mid X(t) = i+1\}P_{i+1,j}(t) = i+1\}P_{i+1,j}(t)$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i-1,i,i+1}}^{\infty} P\{X(h+t) - X(t) = i-k \mid X(t) = k\}P_{kj}(t)$$

$$= [\lambda_{i-1}h + o(h)]P_{i-1,j}(t) + [1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)]P_{ij}(t) +$$

$$[\mu_{i+1}h + o(h)]P_{i+1,j}(t) + o(h)$$

$$= \lambda_{i-1}P_{i-1,j}(t)h + P_{i-1,j}(t)o(h) +$$

$$P_{ij}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t)h +$$

$$P_{ij}(t)o(h) + \mu_{i+1}P_{i+1,j}(t)h + P_{i+1,j}(t)o(h) + o(h)$$

Kemudian jika kedua ruas kita turunkan terhadap t dan memisalkan $h \to 0$, maka

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = P'_{ij}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t)}{h}$$

$$= \frac{\lambda_{i-1}P_{i-1,j}(t)h - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t)h + \mu_{i+1}P_{i+1,j}(t)h}{h}$$

$$= \frac{h\left(\lambda_{i-1}P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t) + \mu_{i+1}P_{i+1,j}(t)\right)}{h}$$

$$= \lambda_{i-1}P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t) + \mu_{i+1}P_{i+1,j}(t)$$

sebagai persamaan Kolmogorov mundur.

Untuk mengekspresikan bentuk matriks, kita perkenalkan generator sangat kecil untuk proses kelahiran dan kematian :

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Kita dapat mengekspresikan persamaan Kolmogorov maju dalam bentuk matriks :

$$P'(t) = P(t)A$$

dimana $P'(t) = \left[P'_{ij}(t)\right]$. Catatan bahwa kondisi awal diberikan oleh

$$P(0) = I$$

dimana I adalah matriks identitas.

Kita juga dapat mengekspresikan persamaan Kolmogorov mundur dalam bentuk matriks :

$$P'(t) = AP(t)$$

Jika persamaan Kolmogorov maju dan mundur dalam bentuk matriks mempunyai solusi yang unik, maka solusi tersebut identik, yaitu

$$P(t) = e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

Contoh 6.11. Diberikan proses Poisson dengan parameter λ. Jika diasumsikan $N(0) = i$. Yaitu keadaan awal adalah keadaan i pada waktu 0, maka

$$P_{ij}(t) = 0 \quad (j < i), \qquad P_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} \quad (j \geq i)$$

Persamaan Kolmogorov maju diberikan oleh

$$P_{ij}^{`}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{ij-1}(t)$$

Kemudian dapat dicatat bahwa $P_{i+1,j}(t) = P_{i,j-1}(t)$ karena kemungkinan dari transisi diketahui bahwa $(j-1) - i = j - (i+1)$ kejadian berlangsung pada interval waktu t, yaitu

$$P_{ij}^{`}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{ij+1}(t)$$

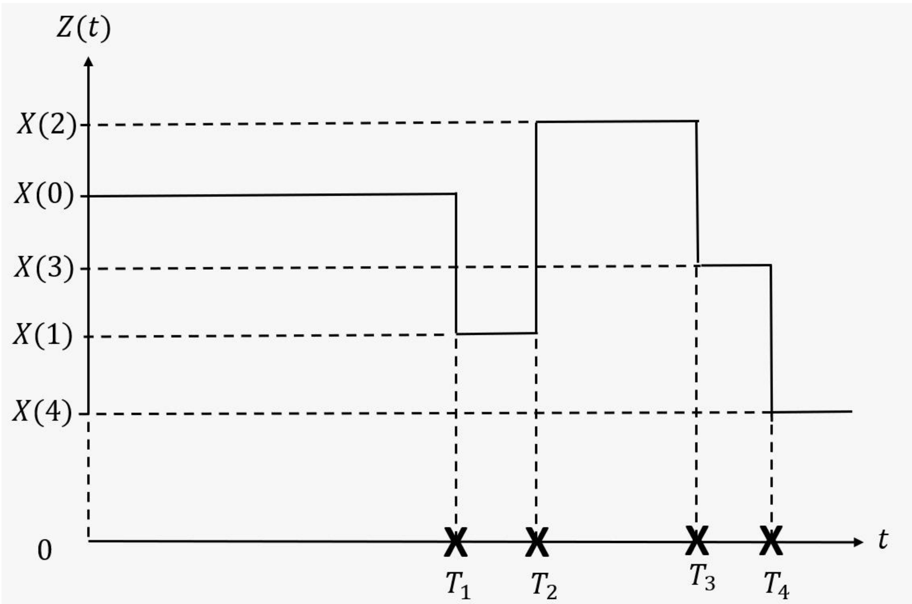
yang merupakan persaman Kolmogorov mundur untuk proses Poisson.

BAB VII

PROSES PEMBARUAN

7.1. Pendahuluan

Proses pembaruan Markov merupakan proses stokastik dengan kombinasi dari rantai Markov dan proses pembaruan. Didefinisikan proses pembaruan $\{N(t), t \geq 0\}$ sebagai proses penghitungan yang menunjukkan jumlah pembaruan hingga waktu t. Proses pembaruan Markov merupakan generalisasi dari proses pembaruan dimana waktu pembaruan ditentukan berdasarkan rantai Markov.



Gambar 1 : Fungsi sampel dari proses stokastik $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{T})$

Misalkan ruang *state* $i = 0, 1, 2, \cdots, m$ dimana m terbatas. Diberikan dua vektor variabel random X dan T pada proses pembaharuan Markov atau proses semi-Markov. Vektor variabel random $\boldsymbol{X}$ adalah $\{X(n) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$, dimana $X(n) = i$ menunjukkan proses di *state* i pada waktu diskrit n. Vektor variabel random $\boldsymbol{T}$ adalah $\{T_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$, T_n menunjukkan variabel random dari waktu kedatangan ke-n pada proses yang bergerak dari satu *state* ke *state* lainnya (termasuk bergerak ke dirinya sendiri), $T_0 = 0$.

Diberikan proses stokastik $\{Z(t), t \geq 0\}$, dengan $Z(t) = i$ diartikan sebagai proses di *state* i pada waktu t. Dimisalkan $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ suatu proses stokastik, vektor $\boldsymbol{N}(t)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{N}(t) = [N_0(t)N_1(t) \cdots N_m(t)]$$

dengan $N_i(t) = k$ merupakan jumlah kedatangan random di *state* i sebanyak k pada interval waktu $(0, t]$. Variabel random $Z(t)$ dapat menentukan *state* pada waktu t, dan vektor variabel random $N(t)$ dapat menentukan perumuman variabel random pembaruan di setiap *state* $i = 0, 1, 2, \cdots, m$.

Definisi 7.1. Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses pembaharuan Markov jika

$$P\{X(n+1) = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X(0) = i_0, \cdots, X(n) = i; T_0 = 0, T_1 = t_1, \cdots, T_n = t_n\}$$

$$= P\{X(n+1) = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X(n) = i, T_n = t_n\}$$

$$= Q_{ij}(t) \qquad (7.2)$$

Memenuhi untuk setiap $n = 0,1,2, \cdots; j = 0,1,2, \cdots, m$ dan $t \in [0, \infty)$.

Note : $X(n+1) = j$ merupakan proses pada waktu $n+1$ di *state* j. T_{n+1} merupakan waktu kedatangan ke-$n+1$ dimana proses berpindah dari satu *state* ke *state* lainnya (termasuk bergerak pada dirinya sendiri).

Probabilitas terjadinya pembaruan diwaktu mendatang dengan syarat terjadi proses pembaruan saat ini dengan waktu pembaruan t_n.

Definisi 7.2. Proses stokastik $\{Z(t), t \geq 0\}$ disebut proses semi-Markov jika persamaan $\boldsymbol{N}(t) = [N_0(t)N_1(t) \cdots N_m(t)]$ memenuhi setiap $n = 0, 1, 2, \cdots; i, j = 0, 1, 2, \cdots, m$ dan $t \in [0, \infty)$.

Proses pembaharuan Markov dan proses semi-Markov dari sudut pandang proses stokastik adalah sama. Pembeda antara kedua proses adalah vektor variabel random yang digunakan. Pada proses pembaharuan Markov vektor variabel random $N(t)$, sedangkan pada proses semi-Markov $Z(t)$.

Diasumsikan proses dengan waktu homogen, yakni

$$Q_{i,j}(t) = P\{X(n+1) = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X(n) = i, T_n = t_n\}$$

Independen dengan $T_n = t_n$. Selanjutnya, $Q_{ij}(t)$ disebut fungsi massa atau probabilitas transisi satu langkah untuk proses pembaharuan Markov. Matriks $Q(t)$ tersusun dari $Q_{ij}(t)$, yaitu

$$\mathbf{Q}(t) = \left[Q_{ij}(t)\right]$$

disebut kernel semi-Markov. Probabilitas transisi satu langkah merupakan probabilitas setelah melakukan transisi dari *state i* selanjutnya ke *state j* selama kurun waktu kurang dari atau sama dengan t. Probabilitas transisi satu langkah memenuhi persamaan berikut :

$$Q_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=0}^{m} Q_{ij}(\infty) = 1 \quad (i, j = 0,1,2, \cdots, m)$$

Misalkan

$$p_{ij} = \lim_{t \to \infty} Q_{ij}(t) = P\{X(n+1) = j | X(n) = i\}$$

dinotasikan sebagai probabilitas transisi yang mana proses dapat berpindah dari *state* i ke *state* j, dengan mengabaikan waktu ketika berada di *state* i. Probabilitas transisi *eventual* memenuhi :

$$p_{ij} \geq 0 \qquad (i, j = 0,1,2, \cdots, m)$$

$$\sum_{j=0}^{m} p_{ij} = 1 \quad (i = 0,1,2, \cdots, m)$$

Rantai markov waktu diskrit $\{X(n), n = 0,1,2, \cdots\}$ mempunyai probabilitas transisi yang mungkin terjadi p_{ij} $(i, j = 0,1,2, \cdots, m)$ yang disebut rantai Markov tertanam.

Jika $p_{ij} > 0$ untuk beberapa i dan j, maka dapat didefinisikan

$$F_{ij}(t) = \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}}$$

dan jika $p_{ij} = 0$ untuk beberapa *state* i dan j, maka dapat didefinisikan $Q_{ij}(t) = 0$ untuk setiap $t \geq 0$ dan $F_{ij}(t) = 1(t)$ (fungsi tangga). Distribusi $F_{ij}(t)$ adalah distribusi dari waktu tinggal yang dihabiskan di *state* i dengan *state* selanjutnya adalah *state* j.

Contoh 7.1. Diberikan suatu proses pembaharuan Markov $N_0(t), t \geq 0\}$ dengan *state* tunggal, yakni *state* 0, dimana $p_{00} = 1$ dan F_{00} adalah distribusi yang berubah-ubah. Artinya, proses pembaharuan Markov semacam itu merupakan proses pembaruan dengan distribusi waktu antar kedatangan $F_{00}(t)$, yang telah dibahas secara menyeluruh pada Bab 4.

Contoh 7.2. (Rantai Markov Diskrit) Diberikan proses semi-markov $\{Z(t), t \geq 0\}$, dimana diasumsikan bahwa

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} 1(t-1)$$

untuk semua $i, j = 0,1,2, \cdots, m$, dimana $1(t-1)$ adalah fungsi tangga pada $t = 1$. Maka proses semi-Markov $\{Z(t), t \geq 0\}$ adalah rantai Markov waktu diskrit $\{X(n), n = 0,1,2, \cdots\}$ dengan probabilitas transisi p_{ij} $(i, j = 0,1,2, \cdots, m)$.

Contoh 7.3. (Rantai Markov Kontinu) Diberikan suatu proses semi-markov $\{Z(t), t \geq 0\}$, dimana diasumsikan bahwa

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}(1 - e^{-\lambda_i t})$$

jika $p_{ij} > 0$, dan

$$Q_{ij}(t) = 0$$

jika $p_{ij} = 0$ untuk semua $i, j = 0,1,2, \cdots, m; i \neq j$; dan $Q_{ij}(t) = 0$ $(i = 0,1,2, \cdots, m)$. Sehingga proses semi-markov adalah rantai markov waktu kontinu dengan generator yang sangat kecil A dengan elemen bukan diagonalnya $p_{ij}\lambda_i$ $(i \neq j)$ dan elemen diagonalnya $-\lambda_i$ $(i, j = 0,1,2, \cdots, m)$.

Diketahui bahwa $Q_{ij}(t) = p_{ij}F_{ij}(t)$ adalah probabilitas transisi satu langkah dari *state* i ke *state* j untuk $i, j = 0,1,2, \cdots, m$. Diasumsikan bahwa momen pertama dan kedua dari distribusi waktu tingga $F_{ij}(t)$ ada, yaitu

$$v_{ij} = \int_0^\infty t dF_{ij}(t), v_{ij}^{(2)} = \int_0^\infty t^2 dF_{ij}(t) \quad (i, j = 0,1,2, \cdots, m)$$

Didefinisikan

$$H_i(t) = \sum_{j=0}^{m} Q_{ij}(t) \qquad (i = 0,1,2, \cdots, m)$$

yang mana disebut distribusi tak bersyarat pada *state* i, karena $H_i(t)$ merupakan distribusi yang tidak menentukan *state* selanjutnya. Didefinisikan momen pertama dan kedua dari $H_i(t)$ adalah

$$\xi_i = \int_0^\infty t dH_i(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} p_{ij} v_{ij}, \xi_i^2$$

$$= \int_0^\infty t^2 dH_i(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} p_{ij} v_{ij}^2 \quad (i = 0,1,2, \cdots, m)$$

ξ_i disebut rata-rata tak bersyarat pada *state* i.

Didefinisikan fungsi pembaharuan Markov

$$M_{ij}(t) = E\left[N_j(t)\middle|Z(0) = i\right] \quad (i,j = 0,1,2,\cdots,m)$$

dimana fungsi pembaharuan diperumum dan merupakan ekspektasi banyak kedatangan sampai *state* j pada interval $(0, t]$, mengingat proses dimulai di *state* i pada waktu 0. Teori kombinasi pembaharuan dan rantai Markov didefinisikan sebagai berikut :

$$M_{ij}(t) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{m} \int_0^t M_{kj}(t-x)dQ_{ik}(x) + \int_0^t \left[1 + M_{jj}(t-x)\right]dQ_{ij}(x)$$

$$= Q_{ij}(t) + \sum_{k=0}^{m} \int_0^t M_{kj}(t-x)dQ_{ik}(x)$$

$$= Q_{ij}(t) + \sum_{k=0}^{m} Q_{ik} * M_{kj}(t)$$

notasi * menandakan konvolusi Stieltjes. Matriks $\mathrm{M}(t) = \left[M_{ij}(t)\right]$ dan $\mathbf{Q}(t) = \left[Q_{ij}(t)\right]$, sehingga persamaan $M_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{k=0}^{m} Q_{ik} * M_{kj}(t)$ dapat dituliskan dalam bentuk matriks :

$$\mathrm{M}(t) = \mathrm{Q}(t) + \mathrm{Q} * \mathrm{M}(t)$$

notasi * pada matriks menunjukkan perkalian matriks kecuali perkalian setiap elemen diganti dengan konvolusi Stieltjes. Persamaan pembaharuan dalam bentuk matriks yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathrm{M}(t) = \mathrm{Q}(t) + \mathrm{Q} * \mathrm{M}(t)$$

$$\mathrm{M}(t) - \mathrm{Q} * \mathrm{M}(t) = \mathrm{Q}(t) + \mathrm{Q} * \mathrm{M}(t) - \mathrm{Q} * \mathrm{M}(t)$$

$$[\mathrm{I} - \mathrm{Q}] * \mathrm{M}(t) = \mathrm{Q}(t)$$

dimana ***I*** adalah matriks identitas dengan elemen diagonal $1(t)$ (fungsi tangga).

Contoh 7.4. Diberikan proses kelahiran dan kematian dua langkah, maka

$$Q_{01}(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad Q_{10}(t) = 1 - e^{-\mu t}, \qquad Q_{00}(t) = Q_{11}(t) = 0$$

Dengan transformasi Laplace-Stietjes,

$$Q_{ij}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dQ_{ij}(t)$$

$$\boldsymbol{Q}^*(s) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\lambda}{s+\lambda} \\ \dfrac{\mu}{s+\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

Dan

$$\boldsymbol{M}^*(s) = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^*(s)]^{-1} - \mathbf{I}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\lambda}{s+\lambda} \\ \dfrac{\mu}{s+\mu} & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & -\left(\dfrac{\lambda}{s+\lambda}\right) \\ -\left(\dfrac{\mu}{s+\mu}\right) & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1.1 - \left(-\left(\dfrac{\lambda}{s+\lambda}\right)\left(-\left(\dfrac{\mu}{s+\mu}\right)\right)\right)} \begin{bmatrix} 1 & -\left(\dfrac{\lambda}{s+\lambda}\right) \\ -\left(\dfrac{\mu}{s+\mu}\right) & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s^2 + \lambda s + \lambda\mu + s\mu}{s^2 + \lambda s + s\mu} & \dfrac{\lambda s + \lambda\mu}{s^2 + \lambda s + s\mu} \\ \dfrac{\lambda\mu + s\mu}{s^2 + \lambda\mu + s\mu} & \dfrac{s^2 + \lambda s + \lambda\mu + s\mu}{s^2 + \lambda s + s\mu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^*(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda\mu}{s^2 + \lambda\mu + s\mu} & \dfrac{\lambda s + \lambda\mu}{s^2 + \lambda\mu + s\mu} \\ \dfrac{\lambda\mu + s\mu}{s^2 + \lambda\mu + s\mu} & \dfrac{\lambda\mu}{s^2 + \lambda\mu + s\mu} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\lambda+\mu)} \begin{bmatrix} \lambda\mu & \lambda(s+\mu) \\ \mu(s+\lambda) & \lambda\mu \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$M_{00}^*(s) = M_{11}^*(s) = \frac{\lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}$$

$$M_{10}^*(s) = \frac{\lambda\mu + s\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu} = \frac{\mu(s+\lambda)}{s^2 + s\lambda + s\mu}$$

$$M_{01}^*(s) = \frac{\lambda s + \lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu} = \frac{\lambda(s+\mu)}{s^2 + s\lambda + s\mu}$$

Mencari $G_{ij}^*(s)$

$$G_{ij}^*(s) = \frac{M_{ij}^*(s)}{1 + M_{jj}^*(s)} \qquad (i, j = 0,1,2,\dots,m)$$

$$G_{01}^*(s) = \frac{M_{01}^*(s)}{1 + M_{11}^*(s)} = \frac{\left(\frac{\lambda(s+\mu)}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}{1 + \left(\frac{\lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda(s+\mu)}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}{\left(\frac{s^2 + s\lambda + s\mu + \lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}$$

$$= \frac{\lambda(s+\mu)}{s^2 + s\lambda + s\mu + \lambda\mu}$$

$$= \frac{\lambda(s+\mu)}{(s+\lambda)(s+\mu)}$$

$$= \frac{\lambda}{s+\mu}$$

$$G_{10}^*(s) = \frac{M_{10}^*(s)}{1 + M_{00}^*(s)} = \frac{\left(\frac{\mu(s+\lambda)}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}{1 + \left(\frac{\lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\mu(s+\lambda}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}{\left(\frac{s^2 + s\lambda + s\mu + \lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}$$

$$= \frac{\mu(s+\lambda)}{s^2 + s\lambda + s\mu + \lambda\mu}$$

$$= \frac{\mu(s+\lambda)}{(s+\lambda)(s+\mu)}$$

$$= \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$G_{00}^{*}(s) = G_{11}^{*}(s) = \frac{M_{00}^{*}(s)}{1 + M_{00}^{*}(s)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}{1 + \left(\frac{\lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}{\left(\frac{s^2 + s\lambda + s\mu + \lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}\right)}$$

$$= \frac{\lambda\mu}{s^2 + s\lambda + s\mu}$$

$$= \frac{\lambda\mu}{(s + \lambda)(s + \mu)}$$

Ingat bahwa pada **Contoh 4.4**

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Maka

$$F^{*}(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}$$

maka dari kesamaan diatas jika memiliki

$$G_{01}^{*}(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \;\; maka \;\; G_{01}(s) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$G_{10}^{*}(s) = \frac{\mu}{s + \mu} \;\; maka \;\; G_{10}(s) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$G_{00}^{*}(s) = G_{11}^{*}(s) = \frac{\lambda\mu}{(s + \lambda)(s + \mu)}$$

Syarat 1 : jika $\lambda \neq \mu$, maka ubah ke dalam bentuk $(s + \lambda)(s + \mu)$. Maka

$$\frac{\lambda\mu}{(s + \lambda)(s + \mu)} = \frac{\lambda\mu}{(s + \lambda)(s + \mu)} \cdot (1)$$

$$= \frac{-\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)} \cdot (-1)$$

$$= \frac{-\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)} \cdot \frac{\big(-(\lambda-\mu)\big)}{(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{-\lambda\mu\big(-(\lambda-\mu)\big)}{(s+\lambda)(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{-\lambda\mu(-\lambda+\mu)}{(s+\lambda)(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{-\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{-\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu - \lambda s\mu + \lambda s\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{-\lambda\mu(s+\mu) + \lambda\mu(s+\lambda)}{(s+\lambda)(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{-\lambda\mu(s+\mu)}{(s+\lambda)(s+\mu)(\lambda-\mu)} + \frac{\lambda\mu(s+\lambda)}{(s+\lambda)(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{-\lambda\mu}{(s+\lambda)(\lambda-\mu)} + \frac{\lambda\mu}{(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{\lambda\mu}{-(\lambda-\mu)(s+\lambda)} + \frac{\lambda\mu}{(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

$$= \frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)(s+\lambda)} + \frac{\lambda\mu}{(s+\mu)(\lambda-\mu)}$$

ingat bentuk $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ maka $F^*(t) = \frac{a}{s+a}$. Maka

$$= \frac{\mu}{\mu-\lambda} \cdot \frac{\lambda}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \cdot \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$= \frac{\mu}{\mu-\lambda}\big(1 - e^{-\lambda t}\big) + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}(1 - e^{-\lambda t})$$

Jadi $G_{00}(s) = G_{11}(s) = G_{jj}(s)$ untuk syarat $\lambda \neq \mu$ adalah

$$G_{jj}(s) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\big(1 - e^{-\lambda t}\big) + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}(1 - e^{-\lambda t})$$

Syarat 2 : jika $\lambda = \mu$ (konsep seperti 4.3)

$$G_{jj}^*(s) = \frac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\lambda)} = \frac{\lambda\lambda}{(s+\lambda)^2}$$

$$= \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2$$

dapat dilihat dari **Contoh 4.3.** ketika punya

$$F(t) = 1 - (1+\lambda t)e^{-\lambda t}$$

maka

$$F^*(t) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)$$

maka

$$G_{jj}(t) = 1 - (1+\lambda t)e^{-\lambda t}$$

Diperoleh

$$G_{01}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$G_{10}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$G_{jj}(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right) + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\left(1-e^{-\lambda t}\right) & dengan\ \lambda \neq \mu \\ 1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t} & dengan\ \lambda = \mu \end{cases}$$

Mencari $M_{ij}(t)$

$$M_{ij}(t) = G_{ij}^*(s) + G_{ij}^*(s)M_{jj}^*(s)$$

$$M_{00}(s) = M_{00}(s) = G_{00}^*(s) + G_{00}^*(s).M_{00}^*(s)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)} + \frac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)}.\frac{\lambda\mu}{s(s+\lambda+\mu)}$$

$$= \frac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)}.\frac{-s(s+\lambda+\mu)}{-s(s+\lambda+\mu)} + \frac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)}.\frac{\lambda\mu}{s(s+\lambda+\mu)}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s u^2}{(s+\lambda)(s+\mu)\big(s(s+\lambda+\mu)\big)} + \frac{\lambda^2\mu^2}{(s+\lambda)(s+\mu)\big(s(s+\lambda+\mu)\big)}$$

$$= \frac{\lambda^2\mu^2 + \lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s u^2}{s^4 + 2\lambda s^3 + 2s^3\mu + 3\lambda s^2\mu + s^2\mu^2 + \lambda^2 s^2 + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s u^2 - \lambda\mu}{\lambda s + \lambda^2 + 2\lambda\mu + s\mu + \mu^2}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s u^2 - \lambda\mu}{\lambda s + \lambda^2 + \lambda\mu + s\mu + \lambda\mu + \mu^2}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s u^2 - \lambda\mu}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)}$$

$$= \frac{\lambda s\mu(s+\lambda+\mu) - \lambda\mu}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)}$$

$$= \frac{\lambda s\mu\cancel{(s+\lambda+\mu)}}{(\lambda+\mu)\cancel{(s+\lambda+\mu)}} - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)}$$

$$= \frac{\lambda s\mu}{\lambda+\mu} - \left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{s+\lambda+\mu}\right)$$

$$= \frac{\lambda s\mu}{\lambda+\mu} - \left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{s+\lambda+\mu} \cdot 1\right)$$

$$= \frac{\lambda\mu s}{\lambda+\mu} - \left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{s+\lambda+\mu} \cdot \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

$$M_{00}(s) = \frac{\lambda\mu s}{\lambda+\mu} - \left(\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \cdot \frac{(\lambda+\mu)}{s+(\lambda+\mu)}\right)$$

Ingat bentuk $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, F(t) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ dengan parameter λ, maka ketika kita punya

$$\frac{\lambda+\mu}{s+\lambda+\mu}$$

dengan parameter $\lambda + \mu$ maka kita punya :

$$M_{00}(s) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$M_{00}(s) = \frac{\lambda\mu s}{\lambda+\mu} - \left(\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \cdot \left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)\right)$$

$$M_{00}(s) = \frac{\lambda\mu s}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

$$\begin{aligned}
M_{01}(s) &= G_{01}^*(s) + G_{01}^*(s) + M_{11}^*(s) \\
&= \frac{\lambda}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{s+\lambda} + \left(\frac{\lambda}{s(s+\lambda+\mu)}\right) \\
&= \frac{\lambda}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{s+\lambda} + \left(\frac{\lambda}{s(s+\lambda+\mu)}\right) \\
&= \frac{\lambda}{s+\lambda} + \frac{\lambda^2\,\mu}{(s+\lambda)\big(s(s+\lambda+\mu)\big)} \\
&= \frac{\lambda(s+\lambda)\big(s(s+\lambda+\mu)\big) + \lambda^2\mu(s+\lambda)}{(s+\lambda)^2\big(s(s+\lambda+\mu)\big)} \\
&= \frac{(\lambda s+\lambda^2)(s^2+s\lambda+s\mu) + \lambda^2\mu s + \lambda^3\mu}{(s+\lambda)^2\big(s(s+\lambda+\mu)\big)} \\
&= \frac{\lambda s^3 + \lambda^2 s^2 + \lambda s^2\mu + \lambda^2 s^2 + s\lambda^3 + \lambda^2 s\mu + \lambda^2\mu s + \lambda^3\mu}{(s^2+2\lambda s+\lambda^2)(s^2+s\lambda+s\mu)} \\
&= \frac{\lambda s^3 + 2\lambda^2 s^2 + \lambda s^2\mu + s\lambda^3 + 2\lambda^2 s\mu + \lambda^3\mu}{(s^2+2\lambda s+\lambda^2)(s^2+s\lambda+s\mu)} \\
&= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2 + \lambda^2}{\lambda s + \lambda^2 + 2\lambda\mu + s\mu + \mu^2} \\
&= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2 + \lambda^2}{\lambda s + \lambda^2 + \lambda\mu + s\mu + \lambda\mu + \mu^2} \\
&= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2 + \lambda^2}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)} \\
&= \frac{\lambda s\mu(s+\lambda+\mu) + \lambda^2}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)} \\
&= \frac{\lambda s\mu(s+\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)} \\
&= \frac{\lambda s\mu}{\lambda+\mu} + \left(\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)(s+\lambda+\mu)}(1)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda s\mu}{\lambda + \mu} + \left(\frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)(s + \lambda + \mu)} \frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)}\right)$$

$$= \frac{\lambda s\mu}{\lambda + \mu} + \left(\frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2} \frac{(\lambda + \mu)}{(s + \lambda + \mu)}\right)$$

Ingat bentuk $F^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ maka $F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$ dengan parameter λ maka

$$M_{01}(s) = \frac{\lambda s\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2}(1 - e^{-(\lambda+\mu)s})$$

$$M_{01}(t) = \frac{\lambda \mu t}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

$$M_{10}(s) = G_{10}^*(s) + G_{10}^*(s) + M_{11}^*(s)$$

$$= \frac{\mu}{s + \mu} + \frac{\mu}{s + \mu} + \left(\frac{\lambda\mu}{s(s + \lambda + \mu)}\right)$$

$$= \frac{\mu}{s + \mu} + \frac{\lambda^2\,\mu}{(s + \mu)\big(s(s + \lambda + \mu)\big)}$$

$$= \frac{\mu}{s + \mu} + \frac{\lambda\mu^2}{(s + \lambda)(s^2 + \lambda s + \mu s)}$$

$$= \frac{\mu(s + \mu)(s^2 + \lambda s + \mu s) + (s + \mu)\lambda\mu^2}{(s + \mu)^2(s^2 + \lambda s + \mu s)}$$

$$= \frac{(\mu s + \mu^2)(s^2 + \lambda s + \mu s) + s\lambda\mu^2 + \lambda\mu^3}{(s + \mu)^2(s^2 + \lambda s + \mu s)}$$

$$= \frac{\mu s^3 + \mu s^2\lambda + \mu^2 s^2 + \mu^2 s^2 + \mu^2\lambda s + \mu^3 s + \mu^2\lambda s + \lambda\mu^3}{(s + \mu)^2(s^2 + \lambda s + \mu s)}$$

$$= \frac{\mu s^3 + \mu s^2\lambda + 2\mu^2 s^2 + 2\mu^2\lambda s + \mu^3 s + \lambda\mu^3}{(s + \mu)^2(s^2 + \lambda s + \mu s)}$$

$$= \frac{\mu s^3 + \mu s^2\lambda + 2\mu^2 s^2 + 2\mu^2\lambda s + \mu^3 s + \lambda\mu^3}{(s^2 + 2s\mu + \mu^2)(s^2 + \lambda s + \mu s)}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2 + \mu^2}{\lambda s + \lambda^2 + 2\lambda\mu + s\mu + \mu^2}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2 + \mu^2}{\lambda s + \lambda^2 + \lambda\mu + s\mu + \lambda\mu + \mu^2}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2 + \mu^2}{\lambda s + \lambda^2 + \lambda\mu + s\mu + \lambda\mu + \mu^2}$$

$$= \frac{\lambda s^2\mu + \lambda^2 s\mu + \lambda s\mu^2 + \mu^2}{(\lambda + \mu)(s + \lambda + \mu)}$$

$$= \frac{\lambda s\mu(s + \lambda + \mu) + \lambda^2}{(\lambda + \mu)(s + \lambda + \mu)}$$

$$= \frac{\lambda s\mu(s + \lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)(s + \lambda + \mu)} + \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)(s + \lambda + \mu)}$$

$$= \frac{\lambda s\mu}{\lambda + \mu} + \left(\frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)(s + \lambda + \mu)}(1)\right)$$

$$= \frac{\lambda s\mu}{\lambda + \mu} + \left(\frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)(s + \lambda + \mu)}\frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)}\right)$$

$$= \frac{\lambda s\mu}{\lambda + \mu} + \left(\frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2}\frac{(\lambda + \mu)}{(s + \lambda + \mu)}\right)$$

Ingat bentuk $F^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ maka

$$F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$$

dengan parameter λ maka

$$M_{10}(s) = \frac{\lambda s\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2}(1 - e^{-(\lambda+\mu)s})$$

$$M_{10}(t) = \frac{\lambda\mu t}{\lambda + \mu} + \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

Mencari $P_{00}^*(s) \rightarrow$ maka $j = 0$

Mencari $H_j * (s)$

$$H_j * (s) = \sum_{i=0}^{m} Q_{ij}^*(s)$$

$$H_j * (s) = \sum_{i=0}^{m} Q_{i0}^{*}(s)$$

$$H_j * (s) = Q_{01}^{*}(s) + Q_{11}^{*}(s)$$

Diketahui

$$H_j * (s) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\lambda}{s+\lambda} \\ \dfrac{\mu}{s+\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{00}^{*}(s) = 0$$

$$Q_{11}^{*}(s) = 0$$

$$Q_{01}^{*}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

$$Q_{10}^{*}(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$H_0^{*}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

Mencari $P_{jj}^{*}(s), j = 0$

$$P_{jj}^{*}(s) = 1 - Hj^{*}(s) = 1$$

$$P_{00}^{*}(s) = \frac{1 - H_0^{*}(s)}{1 - G_{00}^{*}(s)}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)}\right)}$$

$$= \frac{\frac{s+\lambda-\lambda}{s+\lambda}}{\frac{(s+\lambda)(s+\mu)-\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)}}$$

$$= \frac{s(s+\mu)}{(s+\lambda)(s+\mu)-\lambda\mu}$$

$$P_{00}^{*}(s) = \frac{s(s+\mu)}{s^2 + s\lambda + s\mu + \lambda\mu - \lambda\mu}$$

$$= \frac{s(s+\mu)}{s^2 + s\lambda + s\mu}$$

$$= \frac{s(s+\mu)}{s(s+\lambda+\mu)}$$

$$P_{00}^*(s) = \frac{s+\mu}{s+\lambda+\mu}$$

Mencari $P_{11}^*(s)$

$$H_j^*(s)$$

$$H_j^*(s) \ = \sum_{i=0}^{m} Q_{ij}^*(s)$$

$$= Q_{0j}^*(s) + Q_{1j}^*(s)$$

$$H_j^*(s) \ = Q_{00}^*(s) + Q_{10}^*(s)$$

Diketahui

$$\boldsymbol{Q}^*(s) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\lambda}{s+\lambda} \\ \dfrac{\mu}{s+\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_{00}^*(s) = 0$$

$$\boldsymbol{Q}_{10}^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

Maka

$$H_j^*(s) = 0 + \frac{\mu}{s+\mu} = \frac{\mu}{s+\mu}$$

Mencari $P_{jj}^*(s)$

$$P_{jj}^*(s) = \frac{1 - H_j^*(s)}{1 - G_{jj}^*(s)} = \frac{1 - \dfrac{\mu}{s+\mu}}{1 - \dfrac{\lambda\mu}{(s+\mu)s+\mu}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{s+\mu-\mu}{\cancel{s+\mu}}\right)}{\left(\dfrac{(s+\lambda)(s+\mu)-\lambda\mu}{\cancel{(s+\mu)}}\right)}$$

$$= \frac{s(s+\lambda)}{(s+\lambda)(s+\mu) - \lambda\mu}$$

$$= \frac{s(s+\lambda)}{s^2 + s\lambda + s\mu + \lambda\mu - \lambda\mu} = \frac{s(s+\lambda)}{s^2 + s\lambda + s\mu}$$

$$= \frac{s(s+\lambda)}{s(s+\lambda+\mu)}$$

$$P_{11}^*(s) = \frac{s+\lambda}{s+\lambda+\mu}$$

Mencari $P_{10}^*(s)$

$$P_{ij}^*(s) = G_{ij}^*(s)P_{jj}^*(s)$$

$$P_{10}^*(s) = G_{10}^*(s)P_{00}^*(s)$$

$$= \frac{\mu}{s+\mu} \cdot \frac{s+\mu}{s+\lambda+\mu}$$

$$P_{10}^*(s) = \frac{\mu}{s+\lambda+\mu}$$

Mencari $P_{01}^*(s)$

$$P_{ij}^*(s) = G_{ij}^*(s)P_{jj}^*(s)$$

$$P_{01}^*(s) = G_{01}^*(s)P_{11}^*(s)$$

$$= \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot \frac{s+\lambda}{s+\lambda+\mu}$$

$$P_{01}^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda+\mu}$$

Jadi, diperoleh

$$P_{11}^*(s) = \frac{s+\lambda}{s+\lambda+\mu}$$

$$P_{01}^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda+\mu}$$

$$P_{10}^*(s) = \frac{\mu}{s+\lambda+\mu}$$

$$P_{00}^*(s) = \frac{s+\mu}{s+\lambda+\mu}$$

BAB VIII

MODEL RELIABILITAS

8.1. Pendahuluan

Pada bab ini akan didiskusikan model realibilitas. Pada subab 8.2, akan dikenalkan konsep yang disebut rata-rata kerusakan untuk distribusi daya tahan dari sebuah item. Pada subab 8.3, akan dikembangkan teori untuk sistem satu unit yang diasumsikan keadaan ‘naik’ dan ‘turun’. Pada subab 8.4, akan didiskusikan model pergantian. Dua model, yaitu model pergantian usia dan model pergantian blok. Pada subab 8.5, akan dikembangkan model pemesanan yang merupakan perluasan dari model pergantian.

8.2. Distribusi Daya Tahan dan Rata-rata Kerusakan

Definisi 8.1. Item adalah sebuah bentuk yang tidak spesifik yang digunakan untuk menotasikan setiap produk, termasuk sistem, bahan-bahan, bagian-bagian, sub perangkat, peralatan, asessoris, dll.

Definisi 8.2. Kerusakan adalah kejadian atau keadaan yang tidak bisa di kendalikan, yang mana setiap item atau bagian dari item tidak sesuai seperti yang ditentukan sebelumnya.

Definisi 8.3. Kerusakan acak yaitu kerusakan yang dapat diprediksi hanya pada pengertian probabilistik dan stokastik.

Misalkan X daya tahan dari sebuah sistem atau item, distribusi dari daya tahan ke kerusakan diberikan oleh

$$F(t) = P\{X \leq t\} \qquad (t \geq 0)$$

Probabilitas bertahan dari X diberikan oleh

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = P\{X > t\} \qquad (t \geq 0)$$

yang merupakan probabilitas sebuat item bertahan sampai waktu t dan disebut dengan fungsi reabilitas dari item.

Tingkat kerusakan didefinisikan oleh

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \qquad (t \geq 0)$$

dengan $\bar{F}(t) > 0$. Diasumsikan bahwa $F(0) = 0$, sehingga $\bar{F}(t) = 1$. Maka

$$\bar{F}(t) = \exp\left[-\int_0^t r(x)dx\right]$$

dan

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

$$f(t) = r(t)\bar{F}(t) = r(t)\exp\left[-\int_0^t r(x)dx\right]$$

yang mana berturut-turut merupakan fungsi realibilitas dan probablitas kepadatan dengan tingkat kerusakan $r(t)$. Sedangkan $\int_0^t r(x)dx$ disebut fungsi hazard.

Definisi 8.4. Jika tingkat kerusakan $r(t)$ tidak menurun, distribusi daya tahan $F(t)$ disebut IFR (tingkat kerusakan meningkat). Jika $r(t)$ tidak meningkat, maka $F(t)$ disebut DFR (tingkat kerusakan menurun).

8.3. Distribusi Kontinu

8.3.1 Distribusi Seragam $X \sim U(a, b)$

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Maka

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a} = \frac{b-a-t+a}{b-a} = \frac{b-t}{b-a}$$

Sehingga tingkat kerusakan $r(t)$ diberikan oleh

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\frac{1}{b-a}}{\frac{b-t}{b-a}} = \frac{1}{b-t} \qquad (a < t < b)$$

yang mana fungsi tersebut meningkat, jadi distribusi seragam adalah IFR.

8.3.2 Distribusi Eksponensial $X \sim EXP(\lambda)$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Maka

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - 1 + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

Sehingga tingkat kerusakan $r(t)$ diberikan oleh

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \qquad (t \geq 0)$$

yang mana fungsi tersebut konstan. Tingkat kerusakan konstan jika hanya jika $F(t)$ adalah distribusi eksponensial. Oleh karena itu, berdasarkan definisi 8.2.4, distribusi eksponensial termasuk keduanya IFR dan DFR.

8.3.3 Distribusi Gamma $X \sim GAM(\lambda, k)$

8.3.4 Distribusi Weibull $X \sim WEI(\alpha, \beta)$

$$F(t) = 1 - e^{-(\alpha t)^{\beta}}$$

$$f(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^{\beta}}$$

Maka

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - 1 + e^{-(\alpha t)^{\beta}} = e^{-(\alpha t)^{\beta}}$$

Sehingga tingkat kerusakan $r(t)$ diberikan oleh

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^{\beta}}}{e^{-(\alpha t)^{\beta}}} = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1} = \beta\alpha^{\beta} t^{\beta-1} \qquad (t \geq 0)$$

Jika $0 < \beta \leq 1$, maka $F(t)$ adalah DFR. Jika $\beta \geq 1$, maka $F(t)$ adalah IFR. Sedangkan jika $\beta = 1$, maka $F(t)$ konstan.

8.3.5 Distribusi Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Domain dari distribusi normal adalah $(-\infty, \infty)$, jika diaplikasikan ke distribusi daya tahan $[0, \infty)$. Sehingga disebut dengan distribusi normal yang dipotong.

$$f(t) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (t \geq 0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0)$$

dimana

$$a = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Misalkan $\mu = 3\sigma$, maka

$$a = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3\sigma}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-3\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}-\frac{6x}{\sigma}+9\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{6x}{2\sigma}-\frac{9}{2}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\left(-\frac{x}{\sigma^2}+\frac{3}{\sigma}\right)} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{6x}{2\sigma}-\frac{9}{2}\right)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sigma^2}{(3\sigma - x)} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{6x}{2\sigma}-\frac{9}{2}\right)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{(-4.5)} = 0.9987$$

Jika $\mu = 2.5\sigma$, maka

$$a = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2.5\sigma}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-2.5\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{5x}{\sigma} + 6.25\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{5x}{2\sigma} - \frac{6.25}{2}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\left(-\frac{x}{\sigma^2} + \frac{2.5}{\sigma}\right)} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{5x}{2\sigma} - \frac{6.25}{2}\right)} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sigma^2}{(2.5\sigma - x)} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{5x}{2\sigma} - \frac{6.25}{2}\right)} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2.5\sqrt{2\pi}} e^{(-3.125)} = 0.9938$$

Sehingga jika $\mu \geq 2.5\sigma$, diasumsikan $a = 1$. Jadi, $F(t)$ pada distribusi ini IFR.

8.3.6 Distribusi Lognormal $X \sim LOG\ N(\mu, \sigma^2)$

Distribusi lognormal memiliki tingkat kerusakan meningkat (IFR) di fase awal dan menurun (DFR) di fase setelahnya.

8.4. Distribusi Diskrit

Fungsi kepadatan probabilitas (*pmf*) dari distribusi diskrit diberikan oleh $p(k)$ $(k = 1,2,3,\cdots)$. Fungsi reliabilitas $\bar{F}(k)$ diberikan oleh

$$\bar{F}(k-1) = \sum_{j=k}^{\infty} p(j) \qquad (k = 1,2,3,\cdots)$$

Tingkat kerusakan didefinisikan dengan

$$r(k) = \frac{p(k)}{\bar{F}(k-1)} = \frac{p(k)}{\sum_{j=k}^{\infty} p(j)}$$

Catatan bahwa

$$1 - r(k) = 1 - \frac{p(k)}{\sum_{j=k}^{\infty} p(j)} = \frac{\sum_{j=k}^{\infty} p(j)}{\sum_{j=k}^{\infty} p(j)} - \frac{p(k)}{\sum_{j=k}^{\infty} p(j)} = \frac{\sum_{j=k+1}^{\infty} p(j)}{\sum_{j=k}^{\infty} p(j)}$$

$$\bar{F}(k-1)=\sum_{j=k}^{\infty}p(j)=\prod_{j=1}^{k-1}[1-r(j)]$$

Sehingga

$$r(k)=\frac{p(k)}{\bar{F}(k-1)}$$

$$p(k)=r(k)\bar{F}(k-1)=r(k)\prod_{j=1}^{k-1}[1-r(j)]$$

Definisi 8.5. Jika tingkat kerusakan $r(k)$ tidak menurun di k, distribusi daya tahan diskrit $F(k)$ disebut IFR (tingkat kerusakan meningkat). Jika $r(k)$ tidak meningkat, maka $F(k)$ disebut DFR (tingkat kerusakan menurun).

8.4.1 Distribusi Seragam $\boldsymbol{X \sim U(C+L, C+NL)}$

$$p(C+kL)=\frac{1}{N}$$

Sehingga fungsi reliabilitasnya

$$\bar{F}(k-1)=\bar{F}(C+(k-1)L)=\frac{N-k+1}{N}$$

Tingkat kerusakan $r(k)$ diberikan oleh

$$r(k)=\frac{p(k)}{\bar{F}(k-1)}=\frac{\frac{1}{N}}{\frac{N-k+1}{N}}=\frac{1}{N-k+1}$$

yang mana fungsi tersebut meningkat di k (IFR).

Untuk distribusi bernoulli dan distribusi binomial sangat jarang di aplikasikan di distribusi daya tahan.

8.4.2 Distribusi Geometrik $\boldsymbol{X \sim GEO(p)}$

$$p(k)=pq^{k-1}$$

Sehingga fungsi reliabilitas $\bar{F}(k-1)$ diberikan oleh

$$\bar{F}(k-1)=\sum_{j=k}^{\infty}p(j)=\sum_{j=k}^{\infty}pq^{j-1}=q^{k-1}$$

Tingkat kerusakan $r(k)$ diberikan oleh

$$r(k) = \frac{p(k)}{\bar{F}(k-1)} = \frac{pq^{k-1}}{q^{k-1}} = p$$

yang mana fungsi tersebut konstan di k.

8.4.3 Distribusi Binomial Negatif $\boldsymbol{X \sim N\ B(p, r)}$

8.4.4 Distribusi Poisson $\boldsymbol{X \sim POI(\lambda)}$

8.5. Teori Ketersediaan

Definisi 8.6. Perbaikan yaitu semua kegiatan yang cukup untuk mempertahankan sebuah item atau memulihkan ke kondisi yang sudah di tentunkan.

Definisi 8.7. Pemeliharaan adalah perhitungan dari kemampuan sebuah item mempertahankan atau memulihkan ke kondisi yang sudah di tentunkan ketika perawatan dilakukan oleh orang dengan kemampuan tertentu, menggunakan prosedur yang telah di deskripsikan sebelumnya.

Definisi 8.8. Pemeliharaan korektif yaitu semua kegiatan yang dilakukan karena hasil dari kerusakan, untuk memulihkan sebuah item ke kondisi yang sudah di tentunkan. Pemeliharaan korektif bisa termasuk setiap atau semua step : lokalisasi, isolasi, membongkar, menukar tempat, perakitan kembali, keselarasan, dan pemeriksaan.

Definisi 8.9. Pemeliharaan preventif adalah semua kegiatan yang dilakukan pada sebuah percobaan untuk mempertahankan item pada kondisi yang sudah di tentunkan dengan memberikan inspeksi, deteksi, dan prevensi sistematik dari kerusakan.

Definisi 8.10. Pemeliharaan terjadwal adalah pemeliharaan preventif yang di deskripsikan sebelumnya pada masa hidup item.

Definisi 8.11. Waktu naik : Periode waktu selama sebuah item melakukan fungsi yang diperlukan.

Definisi 8.12. Waktu turun : Periode waktu selama sebuah item tidak pada kondisi melakukan fungsi yang di perlukan.

Misalkan X_i dan Y_i $(i = 1,2,\cdots)$ dinotasikan sebagai daya tahan (up time/waktu naik) dan pemeliharaan (down time/waktu turun) dari sebuah item. Maka

$$F(t) = P\{X_i \leq t\} \qquad (t \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots)$$

$$G(t) = P\{Y_i \leq t\} \qquad (t \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots)$$

Definisi 8.13. Reliabilitas $R(t)$ adalah probabilitas dari sebuah item melakukan fungsi yang diperlukan untuk periode yang diharapkan pada waktu $[0, t]$.

Fungsi realibilitas diberikan oleh

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (t \geq 0)$$

Waktu rata-rata kerusakan (MTTF) diberikan oleh

$$MTTF = \int_0^\infty t\, dF(t) = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt = \int_0^\infty R(t)\, dt$$

jika $R(0) = 1$.

Definisi 8.14. Interval reliabilitas $R(x, t)$ adalah probabilitas bahwa pada waktu yang telah ditentukan t, sebuah item mengoperasikan dan akan terus beroperasi untuk interval durasi x.

Definisi 8.15. Interval terbatas reliabilitas $R(x, \infty)$ didefinisikan sebagai

$$R(x, \infty) = \lim_{t \to \infty} R(x, t)$$

Definisi 8.16. Ketersediaan $A(t)$ adalah probabilitas bahwa sebuah item beroperasi pada waktu yang di tentukan t.

Definisi 8.17.

Ketersediaan terbatas

$$A = \lim_{t\to\infty} A(t)$$

Ketersediaan rata-rata di $[0, T]$

$$A_{av}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\, dt$$

Ketersediaan terbatas rata-rata

$$A_{av}(\infty) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\, dt$$

Definisi 8.18. Ketersediaan bersama $A_{joint}(x,t)$ pada waktu t dan $t + x$ adalah probabilitas bahwa sistem beroperasi pada t dan beroperasi lagi pada $t + x$. Ketersediaan bersama terbatas didefinisikan dengan

$$A_{joint}(x, \infty) = \lim_{t\to\infty} A_{joint}(x, t)$$

Konvolusi Stieltjes dari $F(t)$ dan $G(t)$ yaitu

$$H(t) = F * G(t)$$

yang merupakan distribusi dari penjumlahan semua waktu naik dan waktu turun.

Fungsi pembaruan dengan distribusi antar kedatangan $H(t)$ yaitu

$$M_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)}(t)$$

8.6. Model Pergantian

Pada subbab ini diasumsikan bahwa daya tahan sebuah item di atur oleh distribusi waktu kontinu $F(t)$ $(t \geq 0)$ dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Kita akan meminimalkan tingkat biaya (yaitu ekspektasi biaya per unit waktu pada keadaan stabil) atau memaksimalkan batasan ketersediaan.

8.6.1 Model Pergantian Usia

Definisi 8.19. Pergantian usia adalah sebuah item yang digantikan karena kerusakan atau pada usia t_0 yang pertama.

Definisi 8.20. Pergantian blok adalah sebuah item di operasi yang digantikan karena kerusakan dan pada waktu $T, 2T, 3T, \cdots$.

Sebuah proses pembaruan menjadi proses pembaruan yang terpotong dengan waktu antar kedatangan $\{X_k, t_0\}$ $(k = 1,2, \cdots)$. Misalkan c_1 dan c_2 dinotasikan sebagai biaya kerusakan (pemeliharaan korektif) dan pergantian terjadwal (pemeliharaan preventif). Diasumsikan bahwa

$$c_1 > c_2$$

Tingkat biaya yang di ekspektasi

$$C(t_0) = \frac{c_1 P\{X_k \le t_0\} + c_2 P\{X_k > t_0\}}{E[\min\{X_k, t_0\}]}$$

karena siklus berakhir pada $\min\{X_k, t_0\}$ $(k = 1,2, \cdots)$ dan berulang. Catatan bahwa

$$E[\min\{X_k, t_0\}] = \int_0^{t_0} t\, dF(t) + t_0 \bar{F}(t_0) = \int_0^{t_0} \bar{F}(t)\, dt$$

dimana $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = P\{X_k > t\}$. Sehingga

$$C(t_0) = \frac{c_1 F(t_0) + c_2 \bar{F}(t_0)}{\int_0^{t_0} \bar{F}(t)\, dt}$$

Teorema 8.1.

(i) Jika $r(\infty) = \lim_{t \to \infty} r(t)$ ada dan $r(\infty) > K$, terdapat berhingga t_0 yang mana $C(\infty) > C(t_0)$, dimana $K = \frac{\lambda c_i}{(c_1 - c_2)}$

(ii) Jika $r(t)$ kontinu dan monoton naik dengan $r(\infty) > K$, maka terdapat t_0^* berhingga dan unik yang sesuai dengan persamaan berikut :

$$r(t_0) \int_0^{t_0} \bar{F}(t)\, dt - F(t_0) = \frac{c_2}{c_1 - c_2}$$

dan

$$C(t_0^*) = (c_1 - c_2) r(t_0^*)$$

(iii) Jika $r(t)$ kontinu dan motonon naik dengan $r(\infty) > K$, maka terdapat $\overline{t_0}$ berhingga dan unik yang sesuai $r(t_0) = K$, dimana $\overline{t_0} > t_0^*$ dan $\overline{t_0}$ adalah batas atas dari titik optimal t_0^*.

Contoh 8.1. Distribusi daya tahan diasumsikan berdistribusi gamma dengan order 2, yaitu $X_k \sim GAM(2\lambda, 2)$:

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{1} \frac{(2\lambda t)^i}{i!} e^{-2\lambda t}$$

$$= 1 - \left(\frac{(2\lambda t)^0}{0!} e^{-2\lambda t} + \frac{(2\lambda t)^1}{1!} e^{-2\lambda t} \right)$$

$$= 1 - \left(e^{-2\lambda t} + 2\lambda t e^{-2\lambda t} \right)$$

$$= 1 - (1 + 2\lambda t) e^{-2\lambda t}$$

dimana $\frac{1}{\lambda}$ adalah rata-rata daya tahan. Tingkat kerusakan diberikan oleh

$$r(t) = \frac{\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}}{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{\frac{2\lambda(2\lambda t)^{2-1} e^{-2\lambda t}}{(2-1)!}}{(1 + 2\lambda t) e^{-2\lambda t}}$$

$$= \frac{2\lambda(2\lambda t)^1 e^{-2\lambda t}}{(1)!} \cdot \frac{1}{(1 + 2\lambda t) e^{-2\lambda t}}$$

$$= \frac{4\lambda^2 t}{(1)!} \cdot \frac{1}{(1 + 2\lambda t)}$$

$$= \frac{4\lambda^2 t}{1 + 2\lambda t}$$

dan $r(\infty) = 2\lambda$. Jika $r(\infty) = \lim_{t \to \infty} r(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{4\lambda^2 t}{1 + 2\lambda t} = 2\lambda$ dengan $K = \frac{\lambda c_1}{(c_1 - c_2)}$, maka

$$r(\infty) > K$$

$$2\lambda > \frac{\lambda c_1}{(c_1 - c_2)}$$

$$2\lambda c_1 - \lambda c_1 > 2\lambda c_2$$

$$\frac{\lambda c_1}{2\lambda} > c_2$$

$$\frac{c_1}{2} > c_2$$

Kemudian terdapat titik t_0^* berhingga dan unik yang memenuhi teorema 8.4.1 dan

$$C(t_0^*) = (c_1 - c_2)r(t_0^*) = (c_1 - c_2)\frac{4\lambda^2 t_0^*}{1 + 2\lambda t_0^*}$$

Tetapi, jika $\frac{c_1}{2} \leq c_2$, maka $t_0^* = \infty$. Yang berarti tidak ada pemeliharaan terjadwal (hanya pemeliharaan korektif).

8.4.2. Model Pergantian Blok

Untuk model pergantian blok tidak membutuhkan pengamatan usia sebuah item, tetapi menggantikan pada $T, 2T, 3T, \cdots$ yang lebih mudah diberikan dalam bentuk umum. Terdapat tiga variasi model pergantian blok :

a) Item yang gagal digantikan secara langsung pada saat kerusakan
b) Item yang gagal tetap ada tidak dapat di operasikan sampai pergantian terjadwal selanjutnya
c) Item yang gagal mengalami perbaikan minimal

Model I

Item yang gagal digantikan oleh item baru selama interval pergantian T dan pergantian terjadwal untuk item yang tidak gagal dilakukan pada $T, 2T, 3T, \cdots$.

Tingkat ekspektasi biaya

$$C_1(T) = \frac{c_1 M(T) + c_2}{T} = \frac{c_1 \int_0^T m(t)\, dt + c_2}{T}$$

dimana

$$M(T) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(T)$$

merupakan fungsi pembaruan, $m(t) = \frac{dM(t)}{dt}$ adalah kepadatan pembaruan, c_1 adalah biaya pergantian untuk item yang rusak, c_2 adalah biaya pergantian terjadwal untuk item yang tidak rusak. Untuk meminimalkan tingkat ekspektasi biaya, dapat dengan menselisihkan dan menyamadengankan ke 0

$$C_1(T) = \frac{c_1 \int_0^T m(t)\, dt + c_2}{T}$$

$$c_1 T m(T) = c_1 \int_0^T m(t)\, dt + c_2$$

$$c_1 T m(T) - c_1 \int_0^T m(t)\, dt = c_2$$

$$c_1 \left(T m(T) - \int_0^T m(t)\, dt \right) = c_2$$

$$T m(T) - \int_0^T m(t)\, dt = \frac{c_2}{c_1}$$

Ini merupakan kondisi cukup untuk terdapat T^*, sehingga menghasilkan tingkat ekspektasi biaya

$$C_1(T^*) = c_1 m(T^*)$$

Contoh 8.2. Distribusi daya tahan diasumsikan berdistribusi gamma dengan order 2 yaitu $X_k \sim GAM(2\lambda, 2)$. Berdasarkan contoh 4.2,

$$M(t) = \frac{\lambda t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\lambda t}$$

$$M(t) = \frac{2\lambda t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-4\lambda t}$$

$$M(t) = \lambda t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-4\lambda t}$$

dan

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \lambda - \frac{4\lambda}{4} e^{-4\lambda t} = \lambda(1 - e^{-4\lambda t})$$

$$m(T) = \lambda(1 - e^{-4\lambda T})$$

Sehingga

$$T m(T) - \int_0^T m(t)\, dt = \frac{c_2}{c_1}$$

$$Tm(T) - M(t) = T\left(\lambda\left(1 - e^{-4\lambda T}\right)\right) - \left(\lambda t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-4\lambda t}\right)$$

$$= T\lambda\left(1 - e^{-4\lambda T}\right) - \lambda t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4\lambda t}$$

$$= T\lambda\left(1 - e^{-4\lambda T}\right) - \lambda t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4\lambda t}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-4T\lambda e^{-4\lambda T} + 1 - e^{-4\lambda t}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\lambda t} - 4T\lambda e^{-4\lambda T}\right)$$

$$= \frac{c_2}{c_1}$$

Jika $\frac{c_2}{c_1} \geq \frac{1}{4}$, maka menunjukkan pergantian tidak terjadwal (yaitu sebuah item digantikan hanya saat kerusakan). Jika $\frac{c_2}{c_1} < \frac{1}{4}$, maka terdapat T^* yang berhingga dan unik yang merupakan peminimal dari $C_1(T)$ dan menghasilkan ekspektasi biaya

$$C_1(T^*) = c_1 m(T^*) = c_1\lambda\left(1 - e^{-4\lambda T^*}\right)$$

Model II

Diasumsikan bahwa kerusakan terdeteksi hanya pada $T, 2T, 3T, \cdots$. Sebuah item selalu digantikan pada $T, 2T, 3T, \cdots$, tetapi tidak digantikan pada waktu kerusakan, dan tetap ada tidak dapat di operasikan untuk durasi waktu dari kejadian kerusakan sampai terdeteksi.

Ekspektasi durasi per siklus diberikan oleh

$$\int_0^T (T - t)\, dF(t) = \int_0^T F(t)\, dt$$

Ekspektasi rata-rata biaya

$$C_2(T) = \frac{c_1 \int_0^T F(t)\, dt + c_2}{T}$$

dimana c_1 adalah biaya kerusakan per unit waktu dan c_2 adalah biaya pergantian untuk item yang tidak gagal.

Contoh 8.3. Berdasarkan persamaan berikut,

$$Tm(T) - \int_0^T m(t)\, dt = \frac{c_2}{c_1}$$

maka

$$TF(T) - \int_0^T F(t)\,dt = \int_0^T [F(T) - F(t)]\,dt$$

Diasumsikan $T \to \infty$, maka

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T [F(T) - F(t)]\,dt = \int_0^\infty \left[F(\infty) - \left(1 - \bar{F}(t)\right)\right] dt = \int_0^\infty \bar{F}(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

Jika $\frac{1}{\lambda} > \frac{c_2}{c_1}$, terdapat T^* yang optimal yang mana merupakan solusi terbatas dan unik untuk

$$\int_0^T [F(T) - F(t)]\,dt = \frac{c_2}{c_1}$$

Jika diasumsikan distribusinya sama dengan contoh 8.4.2, maka

$$F(t) = 1 - (1 + 2\lambda t)e^{-2\lambda t}$$

$$F(T) = 1 - (1 + 2\lambda T)e^{-2\lambda T}$$

$$\begin{aligned} F(T) - F(t) &= 1 - (1 + 2\lambda T)e^{-2\lambda T} - \left(1 - (1 + 2\lambda t)e^{-2\lambda t}\right) \\ &= 1 - (1 + 2\lambda T)e^{-2\lambda T} - 1 + (1 + 2\lambda t)e^{-2\lambda t} \\ &= (1 + 2\lambda t)e^{-2\lambda t} - (1 + 2\lambda T)e^{-2\lambda T} \\ &= e^{-2\lambda t} + 2\lambda t e^{-2\lambda t} - (1 + 2\lambda T)e^{-2\lambda T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T [F(T) - F(t)]\,dt &= \int_0^T \left[e^{-2\lambda t} + 2\lambda t e^{-2\lambda t} - (1 + 2\lambda T)e^{-2\lambda T}\right] dt \\ &= \left[-\frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda t} - te^{-2\lambda t} - \frac{e^{-2\lambda t}}{\lambda} - t(1 + 2\lambda T)e^{-2\lambda T}\right]_0^T \\ &= \left[-\frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda t} - te^{-2\lambda t} - \frac{e^{-2\lambda t}}{\lambda} - te^{-2\lambda T} - t2\lambda Te^{-2\lambda T}\right]_0^T \\ &= -\frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda T} - Te^{-2\lambda T} - \frac{e^{-2\lambda T}}{\lambda} - Te^{-2\lambda T} - T^2 2\lambda e^{-2\lambda T} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} \\ &= -\frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda T} - 2Te^{-2\lambda T} - \frac{e^{-2\lambda T}}{\lambda} - T^2 2\lambda e^{-2\lambda T} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\left[-e^{-2\lambda T} - 4\lambda T e^{-2\lambda T} - 2e^{-2\lambda T} - T^2 4\lambda^2 e^{-2\lambda T} + 1 + 2\right]$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\left[2 - e^{-2\lambda T}(2 + 4\lambda T + 4\lambda^2 T^2)\right]$$

$$= \frac{c_2}{c_1}$$

dan ekspektasi biayanya adalah

$$C_2(T^*) = c_1 F(T^*) = c_1\left[1 - (1 + 2\lambda T^*)e^{-2\lambda T^*}\right]$$

Model III

Diasumsikan bahwa perbaikan minimal dilakukan ketika item rusak dan rata-rata kerusakan tidak terganggu oleh setiap perbaikan. Jika proses stokastik mempresentasikan jumlah minimal perbaikan sampai waktu ke t, proses $\{N(t), t \geq 0\}$ diatur oleh proses poisson nonhomogen dengan fungsi rata-rata

$$\Lambda(t) = \int_0^t r(x)dx$$

yang merupakan fungsi hazard.

Ekspektasi biaya untuk Model III yaitu

$$C_3(T) = \frac{c_1 \int_0^T r(t)\, dt + c_2}{T}$$

dimana c_1 adalah biaya kerusakan per unit waktu dan c_2 adalah biaya pergantian untuk item yang tidak gagal

Contoh 8.4. Jika diasumsikan bahwa distribusinya sama dengan contoh 8.2 dan contoh 8.1, yaitu $X_k \sim GAM(2\lambda, 2)$, maka

$$r(t) = \frac{4\lambda^2 t}{1 + 2\lambda t}$$

Terdapat T^* yang unik yang memenuhi

$$Tr(T) - \int_0^T r(t)\, dt = \frac{c_2}{c_1}$$

dengan

$$r(T) = \frac{4\lambda^2 T}{1 + 2\lambda T}$$

Dan

$$\int_0^T r(t)\, dt = \int_0^T \frac{4\lambda^2 t}{1 + 2\lambda t}\, dt$$

$$= 4\lambda^2 \int_0^T \frac{t}{1 + 2\lambda t}\, dt$$

$$= 4\lambda^2 \left[-\frac{\ln(2\lambda t + 1) - 2\lambda t}{4\lambda^2} \right]_0^T$$

$$= [-\ln(2\lambda t + 1) + 2\lambda t]_0^T$$

$$= -\ln(2\lambda T + 1) + 2\lambda T$$

Maka

$$Tr(T) - \int_0^T r(t)\, dt = T\left(\frac{4\lambda^2 T}{1 + 2\lambda T}\right) + \ln(2\lambda T + 1) - 2\lambda T$$

$$= \frac{4\lambda^2 T^2}{1 + 2\lambda T} + \ln(2\lambda T + 1) - 2\lambda T$$

$$= \frac{4\lambda^2 T^2}{1 + 2\lambda T} + \ln(2\lambda T + 1) - \frac{2\lambda T(1 + 2\lambda T)}{1 + 2\lambda T}$$

$$= \ln(2\lambda T + 1) + \frac{4\lambda^2 T^2}{1 + 2\lambda T} - \frac{2\lambda T + 4\lambda^2 T^2}{1 + 2\lambda T}$$

$$= \ln(2\lambda T + 1) - \frac{2\lambda T}{1 + 2\lambda T}$$

$$= \frac{c_2}{c_1}$$

Ekspektasi biayanya adalah

$$C_3(T^*) = \frac{c_1 \int_0^T r(t)\, dt + c_2}{T} = \frac{4c_1 \lambda^2 T^*}{1 + 2\lambda T^*}$$

8.7. Model Pemesanan

Disini di asumsikan bahwa sebuah item untuk setiap pergantian hanya dapat di gantikan dengan urutan yang ditempuh. Variabel random X dinotasikan sebagai daya tahan sebuah item yang beroperasi dengan distribusi $F(t)$ $t \geq 0$ dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$.

Model I

Misalkan sebuah siklus dari awal item beroperasi sampai item digantikan. Maka terdapat tiga ekspektasi biaya yang diberikan, yaitu

(i) Ekspektasi biaya kekurangan

$$k_1 \left[\int_0^{t_0} L dF(t) + \int_{t_0}^{t_0+L} (t_0 + L - t) dF(t) \right] = k_1 \int_{t_0}^{t_0+L} F(t) dt$$

(ii) Ekspektasi biaya inventaris

$$k_2 \int_{t_0+L}^{\infty} (t - t_0 - L) dF(t) = k_2$$

(iii) Ekspektasi biaya pemesanan

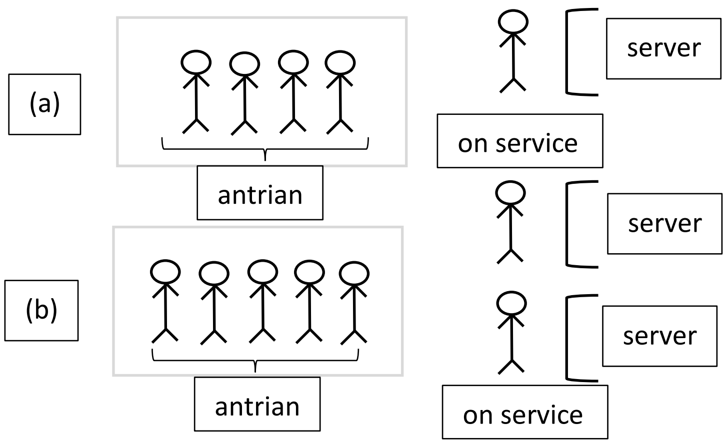
BAB IX

MODEL ANTRIAN

9.1. Pendahuluan

Telah diamati bahwa banyak orang menunggu layanan. Contoh dari menunggu dapat ditemukan di supermarket, restoran, bank, dan sebagainya. Seperti menunggu adalah garis tunggu nyata yang dapat diamati secara langsung. Namun, ada beberapa garis tunggu yang tidak dapat diamati secara langsung. Misalnya, sering gagal menyambungkan panggilan telepon karena saluran sibuk.

Model antrian adalah model stokastik yang timbul dari antrian atau menunggu layanan. Pada bab ini diperkenalkan beberapa istilah seperti pelanggan, layanan, dan server Misalnya, teori lalu lintas atau teori kemacetan pelanggan digantikan oleh panggilan, waktu layanan oleh waktu penahanan, dan server melalui saluran telepon.



Gambar 9.1. (a) Antrian server tunggal, dan (b) antrian server multiple

Untuk menjelaskan model antrian, kita harus menentukan enam item berikut :

1) **Populasi**
   Populasi (atau sumber) pelanggan potensial terbatas atau tidak terbatas. Sebagian besar model antrian diasumsikan memiliki populasi yang tak terbatas, di mana pelanggan dari populasi yang tidak terbatas dapat tiba di fasilitas layanan. Namun, jika mempertimbangkan masalah perbaikan, masalah seperti itu memiliki populasi terbatas sejak jumlah mesin (yang merupakan pelanggan potensial) terbatas.

2) **Distribusi Waktu antar Kedatangan**

Untuk menggambarkan pola kedatangan antrian, kita dapat mempertimbangkan waktu interarrival distribusi untuk pelanggan yang tiba. Beberapa distribusi waktu interarrival dapat dipertimbangkan. Kami menyajikan distribusi waktu kedatangan antar berikut.

a. **Kedatangan Poisson (Notasi : M)**

Pelanggan potensial tiba di fasilitas layanan dengan kedatangan Poisson. Distribusi waktu antarkedatangan untuk kedatangan pelanggan menurut distribusi eksponensial :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \ (t \geq 0),$$

di mana λ adalah parameter dari proses Poisson (tingkat kedatangan di teori antrian) dan $\frac{1}{\lambda}$ adalah rata-rata waktu kedatangan untuk setiap pelanggan. Parameter λ disebut nilai kedatangan dalam teori antrian.

b. **Distribusi k-Erlang (Notasi : E_k)**

Distribusi waktu interarrival untuk pelanggan yang tiba mematuhi Distribusi k-Erlang :

$$F(t) = \int_0^t \frac{k\lambda\,(k\lambda x)^{k-1} e^{-k\lambda x}}{(k-1)!}\,dx \ (t \geq 0, \qquad \lambda > 0),$$

Dengan k : bilangan bulat positif

Yang merupakan distribusi gamma dari jenis khusus yaitu, $T \sim GAM(k\lambda, k)$. Rata-rata dan varians distribusi k-Erlang diberikan oleh

$$E[T] = \frac{1}{\lambda}\ Var(T) = \frac{1}{k\lambda^2}.$$

c. **Distribusi Degenerate (Notasi : D)**

Distribusi waktu interarrival untuk pelanggan yang tiba adalah pelanggan reguler, yaitu setiap pelanggan tiba secara teratur di $t = \frac{1}{\lambda}$:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < \frac{1}{\lambda}\right) \\ 1 & \left(t \geq \frac{1}{\lambda}\right) \end{cases}$$

di mana rata-rata dan varians distribusi degenerate diberikan oleh

$$E[T] = \frac{1}{\lambda},\ \ Var(T) = 0$$

d. **Distribusi Umum (Notasi : G atau GI)**

Diberikan bahwa waktu interarrival untuk pelanggan yang tiba adalah variabel acak independen dan didistribusikan secara identik dengan distribusi terpenuhi $F(t)$ $(t \geq 0)$. Digunakan notasi G atau GI yang menunjukkan distribusi umum atau distribusi umum independen. Artinya, pelanggan yang tiba mematuhi proses perpanjangan dengan distribusi waktu antar kedatangan $F(t)$.

3) **Distribusi Waktu Layanan**
Distribusi waktu layanan, menggunakan tarif layanan μ bukannya tingkat kedatangan λ. Kami mencatat bahwa kedatangan Poisson berarti bahwa pelanggan tiba satu per-satu dengan mengikuti proses Poisson. Namun, jika kita mempertimbangkan distribusi waktu layanan sebagai proses Poisson, distribusi waktu layanan mematuhi distribusi eksponensial untuk pelanggan yang tiba jika setidaknya ada satu pelanggan yang tiba. Dengan demikian, kami menyebut distribusi waktu layanan seperti itu sebagai Layanan eksponensial.

4) **Kapasitas Sistem Antrian Maksimum**
Kita dapat mempertimbangkan dua kategori kapasitas sistem antrian maksimum: kapasitas maksimum diasumsikan tidak terbatas, yaitu semua pelanggan yang tiba dapat diperbolehkan menunggu layanan terlepas dari panjang antrean. Atau, kapasitas maksimum diasumsikan terbatas, yaitu jika pelanggan tiba ketika maksimum kapasitas telah tercapai (yaitu, tidak ada ruang untuk mengantri), pelanggan ditolak. Secara khusus, jika tidak ada ruang antrian, kita berbicara tentang "sistem kerugian," contoh yang mengantri model dalam teori lalu lintas.

5) **Jumlah Saluran Layanan**
Diberikan model antrian server tunggal sebagai salah satu model antrian paling sederhana. Jika ada lebih dari satu server, disebut model antrian *multiple server*.

6) **Disiplin Antrian**
Aturan yang menentukan urutan layanan disebut disiplin antrian. Antrian paling populer dan terkenal disiplin First Come First Served (FCFS). Terdapat disiplin antrian lainnya seperti Last Come First Served (LCFS) dan Random Selection for Service (RSS).

Notasi *Kendall* untuk model antrian :

$$A/B/c/K/m/Z$$

A menyatakan pola kedatangan, B menyatakan pola layanan, c menyatakan jumlah saluran layanan, K menyatakan kapasitas system antrian maksimum, m menyatakan ukuran dari populasi, dan Z menyatakan disiplin antrian. $M, E_k, D, G, dan\ GI$ untuk $A\ dan\ B$. Kapasitas sistem antrian maksimum mengacu pada jumlah maksimum pelanggan dalam antrian dan saluran layanan.

Misalnya, model antrian $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ adalah model dengan kedatangan poisson, layanan eksponensial, server tunggal, kapasitas tidak terbatas, populasi tidak terbatas dan kedatangan pertama, disiplin antrian pelayanan pertama.

9.2. Model Antrian Server Tunggal

Perhatikan model antrian server tunggal dengan kedatangan Poisson dan layanan eksponensial. Diasumsikan bahwa populasi dari calon pelanggan tidak terbatas dan disiplin antrian adalah FCFS.

Misalkan $F(t) = 1 - e^{\lambda t}$ menjadi distribusi waktu interarrival untuk pelanggan yang tiba. Untuk kecil $h > 0$, maka

$$F(h) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$$

Artinya, tingkat kedatangan (kelahiran) untuk proses kelahiran dan kematian diberikan oleh

$$\lambda_k = \lambda \ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

yang konstan terlepas dari berbagai k. Perhatikan rata-rata waktu interarrival adalah diberikan oleh $\frac{1}{\lambda}$.

Misalkan $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$ menjadi distribusi waktu layanan untuk pelanggan yang tiba. Seperti dengan Persamaan 9.2.1, diperoleh

$G(h) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h),$

untuk kecil $h > 0$, yang menyiratkan tingkat layanan (kematian)

$\mu_{k+1} = \mu \ (k = 0, 1, 2, \dots).$

Perhatikan bahwa waktu layanan rata-rata diberikan oleh $1/\mu$.

9.2.1. Model Antrian $M/M/1/\infty$

Seperti yang dijelaskan di atas, kita asumsikan bahwa

$$\lambda_k = \lambda, \quad \mu_{k+1} = \mu \quad (k = 0, 1, 2, \quad \dots),$$

Untuk model antrian $M/M/1/\infty$.

diasumsikan bahwa

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \ atau \ \lambda < \mu$$

($\rho < 1$ agar sistem antrian stabil. Karena bila $\rho \geq 1$ jumlah antrian akan mendekati tak hingga), dimana

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{[\text{tingkat kedatangan}]}{[\text{tingkat layanan}]} = \frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{[\text{rata} - \text{rata waktu layanan}]}{[\text{rata} - \text{rata waktu interarrival}]}$$

Dari **Teorema 6.4** dan **Contoh 6.7**, diperoleh

$$P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j P_0 = \rho^j P_0 \;\; dimana \;\; P_0 = 1 - \rho$$

Sehingga

$$p_j = (1 - \rho)\rho^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

yang merupakan distribusi geometri $X \sim GEO(1 - \rho)$. Perhatikan bahwa p_j berarti probabilitas pembatas bahwa ada pelanggan j dalam sistem, yaitu, $(j - 1)$ pelanggan yang menunggu layanan dan pelanggan yang dilayani dalam keadaan stabil, sehingga diperoleh rata-rata :

$$L = E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} j(1 - \rho)\,\rho^j = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

$$\begin{aligned}
L &= E[X] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} jP_j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j(1 - \rho) = (1 - \rho)\sum_{j=0}^{\infty} \rho\left(j\rho^{j-1}\right) \\
&= (1 - \rho)\sum_{j=0}^{\infty} \rho\left(\rho^j\right)' = \rho(1 - \rho)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\rho^j\right)' \\
&= \rho(1 - \rho)\left(\frac{1}{1 - \rho}\right)' \\
&= \frac{\rho}{1 - \rho}
\end{aligned}$$

Artinya, rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem antrian diberikan oleh L.

L_q merupakan jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian yang belum dilayani. Jika pelanggan j berada di sistem, maka jumlah pelanggan yang menunggu layanan adalah $j - 1$, sehingga diperoleh :

$$L_q = \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)p_j = \sum_{j=1}^{\infty} jp_j - \sum_{j=1}^{\infty} p_j = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$L_q = \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)P_j$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} nP_j - \sum_{j=1}^{\infty} P_j$$

$$= L - (1 - P_0)$$

$$= L - (1 - (1 - \rho))$$

$$= L - \rho$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Dimana

$$P\,\{pelayanan\ menganggur\ dalam\ keadaan\ stabil\} = p_0 = 1 - \rho,$$

$$P\,\{pelayanan\ sibuk\ dalam\ keadaan\ stabil\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j = \rho$$

Rata-rata waktu tunggu dalam antrian diberikan oleh :

$$W_q = E[U] = \int_0^{\infty} t dP\{U \leq t\} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Diketahui bahwa waktu layanan V tidak independen dari waktu tunggu U dan memenuhi distribusi eksponensial $P\{V \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}$, maka distribusi waktu yang dihabiskan dalam sistem sebagai konvolusi Stieltjes berikut :

$$P\{U + V \leq t\} = \int_0^{t} P\{U \leq t - x\} dP\{V \leq x\}$$

$$= \int_0^t \left[1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)(t-x)}\right] \mu e^{-\mu x} \, dx$$

$$= 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}$$

yang merupakan distribusi eksponensial dengan parameter $\mu(1-\rho)$. Rata-rata waktu yang dihabiskan dalam sistem diberikan oleh

$$W = E[U + V] = \frac{1}{\mu(1-\rho)},$$

Jumlah kumulatif pelanggan yang telah tiba dan pelanggan yang menyelesaikan layanan λT dan $\lambda\,(T - W)$ pada waktu t, masing-masing, di mana L pada rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem, W adalah waktu rata-rata dihabiskan dalam sistem, dan jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian L_q, dan rata-rata waktu tunggu W_q, Kami memiliki jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem setelah mengurangi $\lambda(T - W)$ dari λT :

$$L = \lambda T - \lambda(T - W\} = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

yang merupakan Formula Little. Kami harus mencatat Formula Little untuk memvariasikan λ. Artinya, jika tingkat kedatangan λ_k tergantung pada negara k, kita harus menerapkan tingkat kedatangan aktual λ_a:

$$\lambda_a = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k p_k$$

di mana p_k adalah probabilitas pembatas. Misalnya, jika kita mempertimbangkan antrian dengan populasi terbatas, karena tingkat kedatangan λ_k tergantung pada state k (pada Bagian 9.4).

Contoh 9.1. Pemrosesan kata di kantor kecil bisa dirumuskan dalam istilah model antrian $M/M/1/\infty$. Asumsikan bahwa rata-rata waktu kedatangan untuk kata pemrosesan adalah 25 menit dan waktu layanan rata-rata untuk pemrosesan kata adalah 15 Menit. Hitung yang berikut ini :

(i) Probabilitas bahwa pengolah kata sibuk.
(ii) Rata-rata waktu tunggu.
(iii) Jika permintaan pemrosesan kata meningkat dan rata-rata waktu yang dihabiskan dalam sistem lebih dari 45 menit, kita harus memperkenalkan pengolah kata lain. Bagaimana caranya kami memutuskan waktu kedatangan rata-rata kritis?

Solusi :

(i) Perhatikan bahwa ${}^{1}/_{\lambda} = 25$ menit dan ${}^{1}/_{\mu} = 15$ menit. Kita mempunyai traffic intensitas $\rho = \lambda/\mu = 3/5$. Dengan demikian, $P\{sibuk\} = \rho = 3/5$.

(ii) $W_q = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = 22{,}5$ menit.

(iii) Dengan asumsi itu λ tidak diketahui, kami memiliki ketidaksetaraan berikut :

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{{}^{1}/_{\mu}}{1 - {}^{\lambda}/_{\mu}} = \frac{15}{1 - 15\lambda} \geq 45$$

yang menyiratkan ${}^{1}/_{\lambda} \leq 22.5$ menit. Artinya, jika waktu kedatangan rata-rata untuk pemrosesan kata kurang dari atau sama dengan 22.5 menit., kita harus memperkenalkan kata lain prosesor.

9.2.2. Model Antrian $M/M/1/N$

Dalam subbagian sebelumnya, kami telah berasumsi bahwa sistem antrian maksimum kapasitas tak terbatas. Diasumsikan di sini bahwa maksimum kapasitas sistem antrian adalah N terbatas. Artinya, ada maksimum $(N - 1)$ pelanggan yang menunggu untuk layanan ditambah pelanggan yang dilayani.

Untuk model antrian $M/M/1/N$, semua parameter positif :

$$\lambda_k = \lambda > 0, \qquad \mu_{k+1} = \mu > 0 \; (k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1)$$

Dari Teorema 6.5 dan Contoh 6.9, kami memiliki probabilitas pembatas :

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{N+1}} & (\rho \neq 1; j = 0, 1, 2, \ldots, N) \\ \\ \dfrac{1}{N+1} & (\rho = 1; j = 0, 1, 2, \ldots, N) \end{cases}$$

di mana $\rho = {}^{\lambda}/_{\mu}$ adalah intensitas lalu lintas.

Sarana jumlah pelanggan dalam sistem dan dalam antrean diberikan oleh

$$L = \sum_{j=0}^{N} j p_j = \rho \frac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$L_q = \sum_{j=1}^{N} (j-1) p_j = L - (1 - p_0)$$

masing-masing, untuk $\rho \neq 1$. Untuk $\rho = 1$, kami telah mempunyai

$$L = \sum_{j=0}^{N} jp_j = \frac{N}{2}$$

$$L_q = \sum_{j=1}^{N} (j-1)p_j = L - (1 - p_0) = \frac{N(N-1)}{2(N+1)}$$

Probabilitas bersyarat yang ada j pelanggan dalam sistem mengingat bahwa pelanggan dapat bergabung dengan sistem diberikan oleh

$$q_j = \frac{p_j}{1 - P_N} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

karena kita tidak dapat bergabung dengan sistem jika ada N pelanggan dalam sistem. Probabilitas bahwa pelanggan bergabung dengan antrian sebelum $(n+1)$ pelanggan telah selesai dilayanani sampai waktu t diberikan oleh

$$1 - \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \qquad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

yang merupakan probabilitas kelangsungan hidup dari distribusi gamma $GAM\ (\mu, n + 1)$. Distribusi $U + V$ diberikan

$$P\{U + V \leq t\} = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} q_j \sum_{k=0}^{j} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}$$

Kami memiliki distribusi U :

$$P\{U \leq t\} = 1 - \sum_{j=0}^{N-2} q_{j+1} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}$$

Rata-rata waktu yang dihabiskan dalam sistem diberikan

$$W = E[U + V] = \sum_{j=0}^{N-1} q_j \frac{j+1}{\mu}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^N)}, & (\rho \neq 1) \\ \\ \dfrac{N+1}{2\mu}, & (\rho = 1) \end{cases}$$

Kami memiliki rata-rata waktu tunggu :

$$W_q = E[U] = \sum_{j=0}^{N-2} q_{j+1} \frac{j+1}{\mu}$$

$$= \begin{cases} \rho \dfrac{1 - N\,\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N}{\mu(1-\rho)(1-\rho^N)}, & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{N-1}{2\mu}, & (\rho = 1) \end{cases}$$

Mari kita verifikasi Formula Little untuk model antrian $M/M/1/N$. Perhatikan bahwa tidak mungkin untuk bergabung dengan antrian ketika antrian penuh {yaitu, negara bagian N}, kita telah tingkat kedatangan aktual berikut

$$\lambda_a = \sum_{j=0}^{N-1} p_j \lambda = (1 - p_N)\lambda$$

Menggunakan tingkat kedatangan aktual λ_a, kami memiliki Formula Little berikut :

$$L = \lambda_a W$$

$$L_q = \lambda_a W_q$$

9.3. Model Antrian Beberapa Server

Diberikan model antrian beberapa server di mana ada satu antrian dan beberapa server. Jika pelanggan dalam antrian menemukan server kosong, kepala pelanggan dalam antrian mengisi saluran layanan yang kosong, dimana pertama datang lebih dulu aturan yang ditayangkan diterapkan. Pada bagian ini kita membahas tiga kelipatan berikut model antrian server :

- **(i)** Model Antrian $M/M/c/\infty$
- **(ii)** Model Antrian $M/M/c/c$
- **(iii)** Model Antrian $M/M/\infty/\infty$

9.3.1. Model antrian $M/M/c/\infty$

Diasumsikan untuk model antrian $M/M/c/\infty$ adalah sebagai berikut :

$$\lambda_k = \lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & (k = 0, 1, 2, \dots, c) \\ c\mu, & (k = c, c+1, c+2, \dots) \end{cases}$$

Mengacu pada Teorema 6.4, kita memiliki kondisi yang diperlukan dan cukup agar batas probabilitas yang ada :

$$\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \sum_{j=0}^{c-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left[1 + \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right) + \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{c-1}\frac{u^j}{j!} + \frac{u^c}{c!}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n$$

$$= \sum_{j=0}^{c-1}\frac{u^j}{j!} + \frac{u^c}{c!\,(1-\rho)} < \infty$$

yang berarti $\rho < 1$, di mana $u = \lambda/\mu$ dan $\rho = u/c = \lambda/(c\mu)$. Dengan asumsi $\rho < 1$, kita memiliki probabilitas yang membatasi :

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{u^j}{j!} + \frac{u^c}{c!\,(1-\rho)}\right]^{-1}$$

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{u^j}{j!}p_0, & (j = 1, 2, \dots, c) \\ \dfrac{u^c}{c!}\left(\dfrac{u}{c}\right)^{j-c}p_0, & (j = c, c+1, \dots) \end{cases}$$

Mari kita hitung L_q, jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian. jumlah saluran layanan adalah c, kami mempunyai

$$L_q = \sum_{j=c}^{\infty}(j-c)\,p_j = p_0\frac{u^c}{c!}(0 + 1\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots) = \frac{p_0u^c\rho}{c!\,(1-\rho)^2}$$

Dengan menerapkan Rumus Little, kita memiliki rata-rata waktu tunggu :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Perhatikan bahwa rata-rata waktu layanan adalah $\frac{1}{\mu}$, kami memiliki rata-rata waktu yang dihabiskan di system :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Sekali lagi menerapkan Rumus Little, kita memiliki $L = \lambda W$, jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem.

Probabilitas pelanggan baru datang harus menunggu layanan adalah diberikan oleh :

$$P\{\,pelanggan\ yang\ datang\ menunggu\ layanan\} = \sum_{j=c}^{\infty} p_j = \frac{u^c}{c!\,(1-\rho)}\, p_0$$

Itu berarti waktu tunggu diberikan oleh

$$W_q = \frac{C\,(c,u)/_{\mu}}{c(1-\rho)}$$

9.3.2. Model Antrian $M/M/c/c$

Perhatikan model antrian $M/M/c/c$ di mana sistem antriannya maksimal kapasitas sama dengan jumlah saluran layanan.

Mengacu pada Teorema 6.5, kita memiliki probabilitas pembatas terlepas dari $\rho = {}^{u}/_{c} = {}^{\lambda}/_{c\mu}$:

$$p_j = \frac{u^j}{j!} p_0 \qquad (j = 1, 2, \quad \ldots, \quad c),$$

dimana

$$p_0 = \left[1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^c}{c!}\right]^{-1}$$

Kita mempunyai

$$p_j = \frac{\frac{u^j}{j!} e^{-u}}{\sum_{j=0}^{c} \frac{u^j}{j!} e^{-u}} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, c)$$

yang dapat dengan mudah dihitung dengan tabel distribusi Poisson. Khususnya,

$$p_c = \frac{u^c/_{c!}}{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^c}{c!}} = B(c,u)$$

yang disebut Formula B Erlang atau Formula Loss Erlang dan merupakan probability bahwa pelanggan harus berpaling tanpa layanan.

Tarif kedatangan sebenarnya diberikan oleh

$$\lambda_a = \lambda (1 - p_c) = \lambda [1 - B(c, u)].$$

Perhatikan bahwa $L_q = W_q = 0$ karena tidak ada antrian nyata dalam model antrian $M/M/c/c$, kami memiliki jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem:

$$L = \sum_{j=0}^{c} j p_j = u p_0 \sum_{j=0}^{c-1} \frac{u^j}{j!} = u[1 - B(c, u)]$$

Kami dapat dengan mudah memverifikasi Rumus Little :

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{1}{\mu}$$

di mana $\frac{1}{\mu}$ adalah waktu layanan rata-rata untuk model antrian $M/G/c/c$. Sistem antrian seperti itu disebut sistem yang kokoh.

9.3.3 Model Antrian $M/M/\infty/\infty$

Untuk model antrian $M/M/\infty/\infty$, semua pelanggan yang datang dapat dilayani segera karena jumlah saluran layanan tidak terbatas. Mengacu pada Contoh 6.4.3, kami memiliki probabilitas pembatas :

$$p_j = \frac{u^j}{j!} e^{-u} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots.)$$

yang merupakan distribusi Poisson $X \sim POI\ (u)$.

Menggunakan fakta bahwa $X \sim POI\ (u)$, kami memiliki jumlah rata-rata pelanggan dalam system :

$$L = u$$

Menerapkan Formula Little, kami mempunyai

$$W = \frac{u}{\lambda} = \frac{1}{\mu},$$

yang secara alami merupakan rata-rata waktu layanan. Perhatikan bahwa tidak ada antrian, kami memiliki $L_q = W_q = 0$.

Seperti yang ditunjukkan pada Contoh, kami telah memperoleh hasil analitik untuk sebuah Model antrian $M/M/\infty/\infty$. Artinya, kemungkinan ada j pelanggan dilayani pada waktu t mengingat tidak ada pelanggan pada $t = 0$ diberikan oleh

$$P\,\{j\ pelanggan\ dilayani\ pada\ waktu\ t\} = \frac{(p\,\lambda t)^j}{j!}e^{-p\lambda t} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

yaitu, probabilitas bahwa j pelanggan dilayani pada waktu t mengikuti non-homogen proses Poisson dengan fungsi nilai rata-rata

$$p\lambda t = \lambda \int_0^t [1 - G(x)]dx$$

dimana $G(t)$ adalah distribusi waktu yang berubah-ubah. Jika $t \to \infty$, kita mempunyai

$$P\,\{j\ pelanggan\ dilayani\ dalam\ kondisi\ siap\} = \frac{u^j}{j!}e^{-u} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

Dimana

$$\lim_{t\to\infty} p\lambda t = \lambda \int_0^\infty [1 - G(x)]dx = \frac{\lambda}{\mu} = u$$

Secara khusus, jika kita mengasumsikan distribusi waktu pelayanan eksponensial $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$, kami mempunyai

$$p\lambda t = \lambda \int_0^t [1 - G(x)]dx = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$$

yang merupakan fungsi nilai rata-rata dari proses Poisson non-homogen. Di mana $\lambda_k = \lambda, \mu_{k+1} = (k+1)\mu,\ P_\infty(0) = 1,$ dan $P_{0j}(0) = 0\ (j \geq 1)$.

9.4. Antrian dengan Populasi Terbatas

Telah dianggap bahwa kegagalan (kedatangan) tingkat adalah λ untuk setiap mesin dan perbaikan (service) nilai μ untuk setiap tukang. Jika ada n mesin yang beroperasi, di mana $n = 1, 2, \dots, K$, maka probabilitas bahwa salah satu dari n mesin rusak kecil interval $h > 0$ diberikan oleh

$$\binom{n}{1}\left(1 - e^{-\lambda h}\right)e^{-(n-1)\lambda h} = n\lambda h + o(h)$$

Artinya , tingkat kegagalan bervariasi tergantung pada jumlah mesin yang beroperasi.

Pada bagian ini kita membahas model antrian berikut dengan populasi terbatas. yaitu:

- Model Antrian $M/M/1/K/K$
- Model Antrian $M/M/c/K/K$
- Model Antrian $M/M/c/c/c$

9.4.1 Model Antrian $M/M/1/K/K$

Misalkan j menjadi jumlah mesin yang gagal, di mana $j = 1, 2, \ldots, K$. Perhatikan itu tingkat kegagalan adalah λ untuk setiap mesin dan tingkat perbaikan adalah μ untuk setiap tukang, kita mempunyai

$$\lambda_j = (K - j)\lambda \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, K - 1)$$

$$\mu_j = \mu \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, K)$$

Mengacu pada Teorema 6.5, kita mempunyai

$$p_j = \frac{K!}{(K-j)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j p_0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, K),$$

Dimana

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{K} \frac{K!}{(K-j)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}$$

Probabilitas bahwa setidaknya ada mesin yang diperbaiki diberikan oleh

$$\begin{aligned} P\{setidaknya\ mesin\ diperbaiki\} &= \sum_{j=1}^{K} p_j \\ &= 1 - p_0 \\ &= 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{K} \frac{K!}{(K-j)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} \\ &= 1 - B\left(K, {}^{\mu}/_{\lambda}\right) \end{aligned}$$

dimana $B\left(K, {}^{\mu}/_{\lambda}\right)$ adalah Formula B Erlang

Tingkat kegagalan (kedatangan) sebenarnya diberikan oleh

$$\lambda_a = \sum_{j=0}^{K-1} \lambda_j p_j = (1 - p_0)\mu$$

Kita juga bisa mendapatkan tingkat kegagalan aktual sebagai berikut: ${}^{1}/_{\lambda}$ adalah chine gagal, W_q adalah menunggu perbaikan, dan ${}^{1}/_{\mu}$ adalah diperbaiki. Memperhatikan bahwa ada K mesin, kita mempunyai

$$\lambda_a = \frac{K}{{}^{1}/_{\lambda} + W_q + {}^{1}/_{\mu}}$$

$$\lambda_a = \frac{K}{{}^{1}/_{\lambda} + W_q + {}^{1}/_{\mu}}$$

$$(1 - p_0)\mu = \frac{K}{{}^{1}/_{\lambda} + W_q + {}^{1}/_{\mu}}$$

$$\left({}^{1}/_{\lambda} + W_q + {}^{1}/_{\mu}\right)(1 - p_0)\mu = K$$

$$\left({}^{1}/_{\lambda} + W_q + {}^{1}/_{\mu}\right) = \frac{K}{(1 - p_0)\mu}$$

$$W_q = \frac{K}{(1 - p_0)\mu} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

Waktu rata-rata yang dihabiskan dalam sistem diberikan oleh

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{K}{(1 - p_0)\mu} - \frac{1}{\lambda}$$

Menggunakan λ_a dalam Persamaan. (9.4.7) dan Rumus Little, kita mempunyai

$$L = \lambda_a W$$

$$L_q = \lambda_a W_q$$

9.4.2 Model Antrian $M/M/c/K/K$

Diberikan model antrian serupa dengan tukang reparasi. Kami kembali mendefinisikan state j sedemikian rupa sehingga jumlah mesin yang gagal adalah j, dimana $j = 0, 1, 2, \dots, K$. Semua parameter diberikan oleh

$$\lambda_j = (K - j)\lambda \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, K - 1),$$

Mengacu pada Teorema 6.5, kita mempunyai

$$p_j = \begin{cases} \binom{K}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j p_0, & (j = 0, 1, 2, \dots, c) \\ \frac{j!}{c!\, c^{j-c}}\binom{K}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j p_0, & (j = c, c+1, \dots, K) \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c}\binom{K}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=c+1}^{K}\frac{j!}{c!\, c^{j-c}}\binom{K}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}$$

Jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem dan dalam antrian masing-masing diberikan oleh

$$L = \sum_{j=0}^{K} j p_j,$$

$$L_q = \sum_{j=c}^{K}(j-c)p_j$$

Namun, kami dapat memperoleh waktu tunggu rata-rata W_q seperti yang telah kami tunjukkan dalam Persamaan berikut :

Tingkat kegagalan aktual diberikan oleh

$$\lambda_a = \frac{K}{1/_{\lambda} + W_q + 1/_{\mu}}$$

Menggunakan Rumus Little, kami memiliki waktu tunggu rata-rata :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_a} = \left(\frac{1}{\lambda} + W_q + \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{L_q}{K}\right) = \frac{L_q\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}{K - L_q}$$

Artinya, W_q bisa diturunkan dari L_q, begitu pula sebaliknya. Waktu rata-rata yang dihabiskan di sistem diberikan oleh

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

yang menyiratkan

$$L = \lambda_a W$$

dari Formula Little.

Kami memperkenalkan kuantitas yang berikut tentukan masalah tukang :

- Jumlah rata-rata mesin yang sedang diperbaiki

$$L_r = \sum_{j=0}^{c} jp_j + c \sum_{j=c+1}^{K} p_j$$

- Rata-rata jumlah tukang yang menganggur

$$L_i = \sum_{j=0}^{c} (c-j)p_j$$

- Koefisien kerugian untuk mesin

$$M_q = \frac{[jumlah\ rata - rata\ mesin\ dalam\ antrian]}{[jumlah\ mesin]} = \frac{L_q}{K}$$

- Koefisien perbaikan mesin

$$M_r = \frac{[jumlah\ rata - rata\ mesin\ sedang\ diperbaiki]}{[jumlah\ mesin]} = \frac{L_r}{K}$$

- Koefisien kerugian bagi tukang reparasi

$$R_i = \frac{[rata - rata\ jumlah\ tukang\ yang\ menganggur]}{[jumlah\ tukang]} = \frac{L_i}{c}$$

- Koefisien operasi untuk mesin

$$M_w = \frac{[rata - rata\ jumlah\ tukang\ yang\ beroperasi]}{[jumlah\ tukang]} = 1 - \frac{L}{K}$$

Dimana

$$M_q + M_r + M_w = 1$$

9.4.3 Model Antrian $M/M/c/c/c$

Menerapkan hasil di sub-bagian sebelumnya dengan mengasumsikan $K = c$, kita mempunyai

$$p_j = \binom{c}{j}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{c-j} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, c)$$

yang merupakan distribusi binomial $X \sim B\left(c, > \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. Jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem diberikan oleh

$$L = \frac{c\lambda}{\lambda+\mu}$$

Tingkat kegagalan sebenarnya diberikan oleh

$$\lambda_a = \sum_{j=0}^{c-1} p_j \lambda_j = \frac{c\lambda\mu}{\lambda + \mu}$$

dan waktu rata-rata yang dihabiskan dalam sistem diberikan oleh

$$W = \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda_a}$$

yang memverifikasi Rumus Little.

Diperoleh hasil analisis, yaitu transien solusi untuk model antrian $M/M/c/c/c$ secara umum sebagai berikut: Mengacu pada Contoh 6.10, kami mempunyai

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

yang merupakan kemungkinan bahwa mesin sedang beroperasi dan diperbaiki pada waktunya t, masing-masing, mengingat beroperasi pada $t = 0$. Karena ada c mesin di paralel, dan dengan asumsi bahwa semua mesin c beroperasi pada $t = 0$, kita memiliki berikut kemungkinan bahwa mesin j sedang diperbaiki pada waktu t:

$$Q_{0j}(t) = \binom{c}{j} [P_{00}(t)]^{c-j} [P_{01}(t)]^{j} \qquad (j = 0,1,2,\ldots,c),$$

yang merupakan solusi transien untuk model antrian $M/M/c/c/c$. Tentu saja, jika $t \to \infty$, kita mempunyai

$$p_j = \lim_{t\to\infty} Q_{0j}(t) \qquad (j = 0,1,2,\ldots,c),$$

Dalam teori antrian, itu adalah sangat sulit atau tidak mungkin untuk mendapatkan transien solusi secara analitis. Untungnya, kami berhasil mendapatkan transient tersebut solusi dari sudut pandang yang berbeda. Kami juga telah menunjukkan solusi transien untuk model antrian $M/G/\infty$ dari sudut pandang proses Poisson.

DAFTAR PUSTAKA

Feller, William. 1957. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, New York: John Wiley.

Fisz, Marek. 1963. *Probability Theory and Mathematical Statistics*, New York: John Wiley.

Parzen, Emanuel. 1960. *Modern Probability Theory and Its Applications*, New York: John Wiley.

S. Ross. 2010. *A First Course in Probability* (Eighth Edition), New Jersey: Prentice Hall.

Chung, Kai-Lai. 1960. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Berlin: Springer.

Karlin, Samuel dan H. Taylor. 1975. *A First Course in Stochastic Processes* (Second Edition). New York: Academic Press.

Kemeny, John George dan J. L. Snell. 1960. *Finite Markov Chains*. New Jersey: Van Nostrand Reinhold Princeton.

Ross, Sheldon M. 1996. *Stochastic Processes* (Second Edition). New York: John Wiley.

Cramér, Harald and M. Leadbetter. 1996. *Stationary and Related Stochastic Processes*. New York: John Wiley.

Cox, D R and H. D. Miller. 1965. *The Theory of Stochastic Processes*. Methuen, London.

Drake, A W. 1967. *Fundamentals of Applied Probability Theory*. New York: McGraw-Hill.

Parzen, Emanuel. 1962. *Stochastic Processes*. Holden-Day, San Francisco, California.

Ross, Sheldon M. 1996. *Stochastic Processes* (Second Edition). New York: John Wiley.

Modica, Giuseppe dan Laura Poggiolini. 2013. *A First Course in Probability and Markov Chains*. United Kingdom: John Wiley&Sons Ltd.

Capasso, Vincenzo dan David Bakstein. 2015. *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes* (Third Edition). New York: Springer.

Girardin, Valerie dan Nikolaos Limnios. 2018. *Applied Probability From Random Sequences to Stochastic Processes*. Swiss: Springer.

Beichelt, Frank. 2016. *Applied Probability and Stochastic Processes* (Second Edition). London: CRC Press.

Takacs, L. 1962. *Introduction to the Theory of Queues*. London and New York: Oxford University Press.

Wolff. 1989. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. New Jersey: Prentice Hall.

Barlow, R E and F. Proschan. 1975. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. New York: Holt.

Collet, Jean-Francois. 2018. *Discrete Stochastic Processes and Applications*. Prancis: Springer

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models* (Tenth Edition). United States of America: Elseiver

Wibisono, Yusuf. 2015. *Metode Statistik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press