

Rima Aksen Cahdriyana
Soffi Widyanesti Priwantoro



LOGIKA DAN HIMPUNAN BERBASIS ETNOMATEMATIKA

**PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN
2020**

KATA PENGANTAR

Buku ini memuat materi logika dan himpunan berbasis etnomatematika dalam konteks Punokawan. Salah satu urgensi pengembangan bahan ajar materi logika dan himpunan berbasis etnomatematika adalah sebagai solusi terhadap pudarnya wawasan kearifan lokal masyarakat melalui pengenalan karakter wayang yang merupakan budaya asli masyarakat Jawa. Selain itu, beragamnya pesan bijak yang terkandung di dalam Tokoh Punokawan dapat menguatkan karakter mahasiswa terlebih bagi seorang calon guru.

Penguatan Pendidikan Karakter (PPK) adalah gerakan pendidikan di sekolah untuk memperkuat karakter siswa melalui harmonisasi olah hati, olah rasa, olah pikir, dan olah raga dengan dukungan pelibatan publik dan kerja sama antara sekolah, keluarga, dan masyarakat. PPK yang digulir sejak tahun 2016 ini tentunya akan berimbas pada pendidikan di Perguruan Tinggi khususnya di lingkungan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) sebagai lembaga pencetak guru. Oleh karena itu, buku ini menjadi salah satu produk pendukung pelaksanaan PPK.

Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu sehingga buku ini dapat diselesaikan. Penulis menyadari bahwa buku ini jauh dari sempurna, sehingga penulis sangat terbuka terhadap kritik, saran, dan masukan dari para pembaca sekalian guna perbaikan dan penyempurnaan selanjutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih.

Yogyakarta, Januari 2021

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Kata Pengantar	ii
Daftar Isi	iii
Pendahuluan	iv
Materi 1. Punokawan	1
Materi 2. Pernyataan/Proposisi	10
Materi 3. Pernyataan Majemuk dan Tabel Kebenaran	12
Materi 4. Tautologi dan Kontradiksi	20
Materi 5. Keabsahan Argumen	25
Materi 6. Kuantifikasi	38
Materi 7. Himpunan	41
Materi 8. Relasi	48
Materi 9. Fungsi	53
Daftar Pustaka	61

PENDAHULUAN

Kompetensi

1. Penguasaan pada pengetahuan tentang definisi dan contoh pernyataan.
2. Penguasaan pada pengetahuan tentang pernyataan majemuk meliputi negasi, konjungsi, disjungsi, dan implikasi.
3. Penguasaan pada pengetahuan tentang tautologi, kontradiksi, dan kontingensi.
4. Penguasaan pada pengetahuan tentang penurunan kesimpulan dan pembuktian keabsahan suatu argumen.
5. Penguasaan pada pengetahuan tentang himpunan.
6. Penguasaan pada pengetahuan tentang relasi.
7. Penguasaan pada pengetahuan tentang fungsi.

Waktu

Penguasaan materi dalam mata kuliah logika dan himpunan membutuhkan waktu minimal 150 menit x 14 minggu.

Petunjuk Penggunaan Modul

1. Bacalah terlebih dahulu Materi 1 yang mengupas tentang pernyataan-pernyataan yang mengandung pesan bijak dari Punokawan. Pernyataan-pernyataan pada Materi 1 digunakan untuk membangun pernyataan majemuk yang ada di Materi 2 hingga Materi 9.
2. Materi Logika Matematika tercakup dalam Materi 2 hingga Materi 6, sedangkan materi himpunan tercakup dalam Materi 7 hingga 9.
3. Kerjakan latihan pada setiap materi. Hal ini akan mengasah keterampilan mahasiswa dalam memahami konsep materi logika dan himpunan.

PERNYATAAN/PROPOSISI

2

Setiap kumpulan kata yang berarti yang disusun menurut aturan tata bahasa disebut kalimat. Kalimat yang dibicarakan dalam logika matematika adalah kalimat-kalimat yang menerangkan (*indicative sentences/declarative sentences*).

Contoh-contoh kalimat yang menerangkan antara lain:

1. Tokoh Punakawan terdiri atas Semar, Gareng, Petruk, dan Bagong.
2. 7 adalah bilangan prima
3. Semar memiliki pusaka ampuh yang bernama *Hyang Jamus Kalimasada*.

Dalam Logika Matematika tidak akan membicarakan kalimat-kalimat seperti contoh-contoh berikut ini.

4. Apakah nama Semar bermakna menguatkan keyakinan pada Allah SWT? (Kalimat tanya)
5. Alangkah bijaknya sosok Semar! (Kalimat yang mengungkapkan perasaan)
6. *Ojo keminter mundak keblinger, ojo cidra mundak ciloko!* (Kalimat perintah)
7. Mudah-mudahan cerita "Semar Mbangun Khayangan" dapat menginspirasi banyak pemimpin di negeri ini. (Kalimat harapan)
8. Semar adalah bilangan prima. (Kalimat yang tidak mempunyai makna)

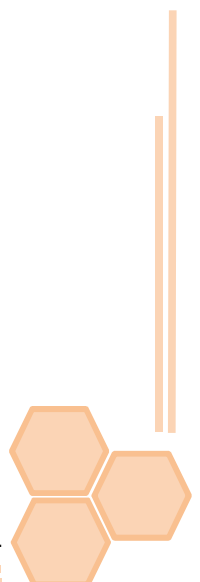
Kalimat 1 dan 3 bernilai benar. Kalimat 2 bernilai salah. Sedangkan kalimat 4,5,6,7,8 tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa **Pernyataan atau Proposisi** adalah:

1. Kalimat yang mempunyai makna.
2. Kalimat yang mempunyai nilai kebenaran, yaitu nilai benar atau nilai salah tetapi tidak kedua-duanya.

Latihan Soal

Selidikilah kalimat berikut, mana yang proposisi atau bukan!

1. Punakawan berarti seseorang yang mengerti teman atau seseorang yang pengertian kepada teman.
2. 9 adalah bilangan genap.
3. Tokoh Punakawan hadir sebagai pamong yang terpercaya bagi para kesatria.
4. Punakawan merupakan karakter yang berperan sebagai perusak suasana.
5. $9 - 5 = 14$
6. Tokoh Punokawan berasal dari India.
7. Apakah tokoh Punokawan diciptakan sebagai refleksi dari kehidupan rakyat biasa?
8. Pinjamkan pusaka *Payung Tunggul Naga!*
9. *Ojo Ketungkul Marang Kalungguhan, Kadonyan lan Kemareman!*
10. Mengapa pada lakon *Petruk Jadi Ratu*, Petruk tidak menunjukkan sifat bersahaja?
11. Semar tidak pernah mengenakan kain jarik motif *Parangku Sumorojo*.
12. Ucapan Petruk setiap kali mengawali dialog selalu dengan kata-kata "*mbergegeg, ugeg-ugeg, hmel-hmel, sak dulito, langgeng*".
13. Nama lain dari Petruk yaitu *kantong bolong*.
14. Mengapa Bagong memiliki bibir yang besar?
15. Lakukanlah pesan bijak dari Semar bahwa *Urip Iku Urup!*
16. *Ojo Milik Barang Kang elok, Ojo Mangro Mundak Kendo!*
17. Bagong berasal dari kata *Baghaa* yang artinya berontak atau membangkang.
18. Ciri fisik Gareng adalah memiliki muka dan perut yang bulat.
19. Petruk ditambah Bagong hasilnya berbahaya.
20. $12 + 7 < 10$



- b. Semar berasal dari kata *simaar*.
 - c. Mata Gareng juling.
 - d. Ada sosok Punokawan yang memiliki mata sipit.
 - e. Ada Punokawan yang memiliki anggota tubuh serba panjang.
 - f. Nama lain Gareng adalah *Pancalpamor*.
 - g. Petruk merupakan sosok yang menggambarkan sikap *mursid*.
 - h. Bagong memiliki dahi yang lebar.
 - i. Semua Punakawan memiliki watak pamomong.
 - j. Tidak ada Punokawan yang menyampaikan petuah bijak.
2. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan ini!
- a. Jika Semar memiliki mata sipit, maka mata sipit melambangkan keberanian.
 - b. Jika Semar memiliki tangan yang selalu menunjuk, maka simbol tangan menunjuk berarti bersyukur.
 - c. Tidak benar bahwa Semar sering bernasehat dengan *mbergegeg ugeg-ugeg hmel-hmel sak ndulito* atau *mbergegeg ugeg-ugeg hmel-hmel sak ndulito* berarti diam dengan cobaan hidup.
 - d. Benar bahwa Gareng memiliki mata juling dan mata juling kebawah berarti berlomba-lomba dalam kebaikan.
 - e. Tidak benar bahwa jika Gareng memiliki tangan ceko, maka tangan ceko menunjukkan manusia tidak sempurna atau tangan ceko berarti tidak boleh mengambil hak orang lain.
 - f. Jika Semar dijuluki Badranaya maka tidak benar bahwa Badra berarti wajah bila dan hanya bila Naya berarti rembulan.
3. Diketahui bahwa nilai kebenaran dari $a \Rightarrow b$ adalah S (salah). Apakah yang dapat Anda katakan tentang nilai kebenaran dari $\neg a \wedge b \Rightarrow a \vee b$?
4. Tentukanlah negasi dari setiap pernyataan majemuk berikut dan tuliskan negasi itu dalam bentuk yang paling sederhana!
- a. Jika Petruk menyindir para penguasa, maka Petruk jauh dari pusaka Jamus Kalimasada dan Petruk lupa akan tugasnya sebagai pemimpin.
 - b. Jika Semar meminjam pusaka Payung Tunggul Naga, maka jika Semar memiliki peran mengayomi maka Semar melindungi rakyatnya.

- c. Jika Semar meminjam pusaka Jamus Kalimasada dan Kalimasada bermakna kalimat syahadat, maka jika Semar meminjam pusaka Jamus Kalimasada maka Pemimpin harus selalu ingat dengan Sang Pencipta.
5. Tentukanlah invers, konvers, dan kontraposisi dari pernyataan berbentuk implikasi berikut!
- Jika Bagong bukan berasal dari kata *Baghaa* maka *Baghaa* berarti membangkang.
 - Jika Petruk memiliki hidung yang panjang dan Petruk tidak sedikit bicara maka Petruk tidak memiliki hidung yang panjang.
 - Jika Petruk berasal dari kata *Fatruk* maka *Fatruk* berarti meninggalkan dan Petruk meninggalkan larangan Allah SWT
 - Jika Gareng berasal dari kata *Qariin* atau *Qariin* berarti memperoleh banyak teman maka Gareng berasal dari kata *Qariin*.

majemuk yang ditunjukkan pada nomor 5, diperoleh nilai kebenaran B dan S yang terlihat pada kolom 8. Suatu pernyataan majemuk yang kadang-kadang bernilai B dan kadang-kadang bernilai S untuk substitusi nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya disebut kontingensi.

Selain menggunakan tabel kebenaran seperti pada contoh di atas, untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk dapat dilakukan analisis terhadap masing-masing pernyataan tunggal dengan memisalkan satu pernyataan tunggal bernilai B dan S, dan bagaimana akibatnya terhadap nilai kebenaran dari pernyataan majemuknya. Jika untuk pemisalan satu pernyataan tunggal bernilai S dan B menghasilkan pernyataan majemuk bernilai B, maka pernyataan majemuk tersebut adalah suatu tautologi.

Contoh

Manakah dari pernyataan majemuk berikut yang merupakan tautologi?

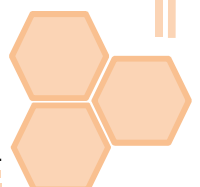
1. Jika Bagong diposisikan sebagai *bolo tengen* atau Bagong dipercaya oleh para kesatria, maka Bagong dipercaya oleh para kesatria atau Bagong diposisikan sebagai *bolo tengen*.
2. Jika Petruk merupakan sosok yang menggambarkan sikap *momor* dan Petruk tidak mudah sakit hati dengan kritikan orang lain, maka Petruk merupakan sosok yang menggambarkan sikap *momor* atau Petruk tidak mudah bangga dengan sanjungan orang lain.

Penyelesaian

1. Misalkan p adalah Bagong diposisikan sebagai *bolo tengen* sedangkan q adalah Bagong dipercaya oleh para kesatria. Oleh karena itu pernyataan di atas dapat kita tulis menjadi $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$.

Untuk p bernilai B maka implikasi dari pernyataan majemuk akan bernilai B. Jika p bernilai S dan q bernilai S maka $(p \vee q)$ bernilai S. Hal ini akan berakibat pernyataan majemuk $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$ bernilai B. Karena untuk nilai kebenaran B dan S pada pernyataan tunggal p menghasilkan pernyataan majemuk bernilai B, maka dapat disimpulkan bahwa $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$ tautologi.

2. Misalkan p adalah Petruk merupakan sosok yang menggambarkan sikap *momor*, q adalah Petruk tidak mudah sakit hati dengan kritikan orang lain,



dan r adalah Petruk tidak mudah bangga dengan sanjungan orang lain. Oleh karena itu pernyataan di atas dapat kita tulis menjadi $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$.

Untuk p bernilai B maka konsekuen dari pernyataan majemuk akan bernilai B. Hal ini berakibat implikasi pada pernyataan majemuk bernilai B. Jika p bernilai S maka anteseden dari pernyataan majemuk bernilai S. Hal ini akan berakibat pernyataan majemuk bernilai B. Karena untuk nilai kebenaran B dan S pada pernyataan tunggal p menghasilkan pernyataan majemuk bernilai B, maka dapat disimpulkan bahwa $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ tautologi.

Menentukan Nilai Kebenaran Suatu Pernyataan Majemuk dengan Aritmetika

Cara lain untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk selain dengan menggunakan tabel kebenaran adalah dengan mengubah pernyataan majemuk ke dalam prosedur aritmetika sesuai dengan aturan berikut.

Tabel 4.2

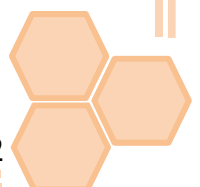
Pernyataan Majemuk	Prosedur Aritmetika
$\neg a$	$1 + a$
$a \wedge b$	$a + b + ab$
$a \vee b$	ab
$a \Rightarrow b$	$(1 + a)b$
$a \Leftrightarrow b$	$a + b$

Selain aturan di atas, perlu diketahui tentang aturan operasi dalam prosedur aritmetika seperti (1) $a + a = 0$, dan (2) $a \cdot a = a^2 = a$. Jika suatu pernyataan majemuk mempunyai nilai kebenaran B atau S, maka hasil perhitungan dengan prosedur aritmetika diperoleh berturut-turut 0 atau 1.

Contoh

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut dengan menggunakan prosedur aritmetika.

1. Jika nama lain Petruk adalah kantong bolong maka nama lain Petruk bukan kantong bolong atau Petruk memiliki watak suka memberi.



Misalkan p = nama lain Petruk adalah kantong bolong, sedangkan q = Petruk memiliki watak suka memberi. Oleh karena itu, pernyataan majemuk di atas dapat ditulis menjadi $p \Rightarrow (-p \vee q)$. Prosedur aritmetiknya adalah sebagai berikut.

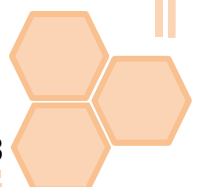
$$\begin{aligned}
 & p \Rightarrow (-p \vee q) \\
 & (1+p)(-p \vee q) \\
 & (1+p)((1+p) \vee q) \\
 & (1+p)(1+p)q \\
 & (1+p)q \\
 & q + pq
 \end{aligned}$$

Karena hasil perhitungan dengan prosedur aritmetika tidak menunjukkan 0 atau 1 maka pernyataan majemuk $p \Rightarrow (-p \vee q)$ merupakan suatu kontingensi.

2. Jika Semar selalu mengenakan kain jarik motif Parangku Sumorojo maka Semar menegakkan keadilan di muka bumi dan jika Semar menegakkan kebenaran di muka bumi maka Semar selalu mengenakan kain jarik motif Parangku Sumorojo, maka Jika Semar selalu mengenakan kain jarik motif Parangku Sumorojo atau Semar menegakkan kebenaran di muka bumi maka Semar menegakkan keadilan di muka bumi.

Misalkan a = Semar selalu mengenakan kain jarik motif Parangku Sumorojo, b = Semar menegakkan keadilan di muka bumi, dan c = Semar menegakkan kebenaran di muka bumi. Oleh karena itu, pernyataan majemuk di atas dapat ditulis menjadi $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow b) \Rightarrow (a \vee c \Rightarrow b)$. Prosedur aritmetiknya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & (a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow b) \Rightarrow (a \vee c \Rightarrow b) \\
 & (1+a)b \wedge (1+c)b \Rightarrow (1+ac)b \\
 & (1+a)b + (1+c)b + (1+a)b(1+c)b \Rightarrow (1+ac)b \\
 & (1+(1+a)b + (1+c)b + (1+a)b(1+c)b)(1+ac)b \\
 & (1+b+ab+b+bc+b+ab+bc+abc)(b+abc) \\
 & (1+b+abc)(b+abc) \\
 & ((b+abc) + (b+abc))^2 \\
 & ((b+abc) + (b+abc)) = 0
 \end{aligned}$$



Karena hasil perhitungan dengan prosedur aritmetika menunjukkan 0 maka pernyataan majemuk $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow b) \Rightarrow (a \vee c \Rightarrow b)$ merupakan suatu tautologi.

Latihan Soal

Tentukanlah apakah pernyataan majemuk berikut tautologi, kontradiksi, atau kontingensi, tanpa menggunakan tabel kebenaran!

1. Jika Tombak Yudhistira melambangkan keadilan atau Tombak Yudhistira tidak melambangkan keseimbangan, maka Tombak Yudhistira tidak melambangkan keadilan.
2. Jika Petruk menyindir para penguasa dan Petruk tidak menunjukkan sifat bersahaja, maka Petruk tidak menyindir para penguasa atau Petruk menunjukkan sifat bersahaja.
3. Petruk tidak menunjukkan sifat bersahaja bila dan hanya bila Petruk menjadi ratu.
4. Jika Cerita "Semar Mbangun Khayangan" mengisahkan Semar ingin membantu Amarta yang sedang mengalami situasi kritis, maka jika para punggawa Kerajaan Amarta mengalami degradasi moral maka cerita "Semar Mbangun Khayangan" mengisahkan Semar ingin membantu Amarta yang sedang mengalami situasi kritis dan para punggawa Kerajaan Amarta mengalami degradasi moral.
5. Jika Punokawan memiliki watak pamomong maka Punokawan memiliki watak pamomong atau Punokawan memiliki watak bijaksana atau esensi Punokawan diterapkan dalam kehidupan sehari-hari.

PEMBUKTIAN KEABSAHAN SUATU ARGUMEN

5

Dalam penurunan kesimpulan, ditentukan suatu himpunan pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang semuanya bernilai benar. Kita akan merangkaikan pernyataan-pernyataan tunggal atau pernyataan-pernyataan majemuk dengan aturan-aturan yang berlaku sehingga diturunkan pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk yang bernilai benar pula. Pernyataan tunggal atau pernyataan majemuk hasil penurunan itu dinamakan **kesimpulan/konklusi**. Sedangkan pernyataan-pernyataan tunggal atau pernyataan-pernyataan majemuk yang dirangkaikan itu masing-masing dinamakan **premis**. Kumpulan premis dan kesimpulan dinamakan **argumen**.

Berikut ini adalah kumpulan tautologi yang sangat penting digunakan dalam penurunan kesimpulan atau pembuktian keabsahan argumen.

1. Aturan detasemen (*Law of detachment*)/ Modus Ponendo Ponens

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

2. Modus tollendo tollens

$$\neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$$

3. Aturan negasi rangkap

$$p \Rightarrow \neg(\neg p)$$

4. Modus tollendo ponens

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

5. Aturan penyederhanaan

- a. $p \wedge q \Rightarrow p$

- b. $p \wedge q \Rightarrow q$

6. Aturan hipotetik silogisme

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

7. Aturan eksportasi

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

8. Aturan importasi

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

9. Aturan kemustahilan

$$(p \Rightarrow q \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

10. Aturan penambahan

$$p \Rightarrow p \vee q$$

11. Aturan kontraposisi

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$$

12. Aturan-aturan De Morgan

a. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

b. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

13. Aturan Ekuivalen dari Implikasi dan Disjungsi

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

14. Aturan-aturan komutatif

a. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

b. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

15. Aturan negasi implikasi

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

16. Aturan-aturan untuk biimplikasi

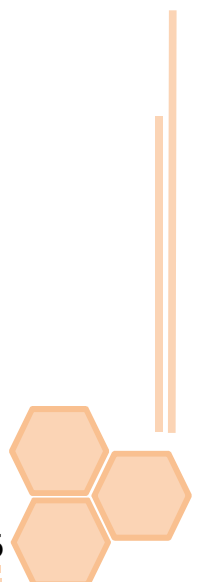
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

17. Law of Exclude Middle

$$p \vee \neg p$$

18. Aturan kontradikasi

$$\neg(p \vee \neg p)$$



19. $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow b) \Rightarrow (a \wedge c \Rightarrow b)$
20. $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b \wedge c)$
21. $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow b \vee c)$
22. $(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \vee c \Rightarrow b)$
23. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge [p \vee r] \Rightarrow [q \vee s]$
24. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge [-q \vee -s] \Rightarrow [-p \vee -r]$

Contoh 1

Premis 1: Apabila seorang pemimpin mempunyai Pusaka *Jamus Kalimasada* maka pemimpin tersebut selalu ingat dan berpegang pada Islam dengan menjalankan syariat-syariatnya (B)

Premis 2: Seorang pemimpin mempunyai Pusaka *Jamus Kalimasada* (B)

Misal: " p " adalah seorang pemimpin mempunyai Pusaka *Jamus Kalimasada*, sedangkan " q " adalah seorang pemimpin yang selalu ingat dan berpegang pada Islam dengan menjalankan syariat-syariatnya.

Kita dapat menuliskan kedua premis di atas menjadi:

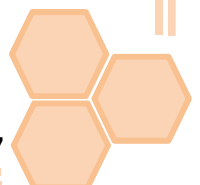
$$\begin{array}{ll}
 p \Rightarrow q & \text{(premis)} \\
 p & \text{(premis)} \\
 \hline
 q & \text{(kesimpulan)}
 \end{array}$$

Dari kedua premis di atas (dengan menggunakan **aturan detasemen**) dapat diturunkan pernyataan baru (kesimpulan) yaitu "seorang pemimpin yang selalu ingat dan berpegang pada Islam dengan menjalankan syariat-syariatnya".

Secara ringkas bentuk penyimpulan ini (argumen) dituliskan sebagai:

$$p \Rightarrow q, p \vdash q$$

(tanda koma adalah penghubung antara premis satu dengan yang lainnya, sedangkan simbol \vdash adalah penghubung antara premis dan kesimpulan).



Contoh 2

Premis 1: Jika Semar berucap "*mbergegeg, ugeg-ugeg, hmel-hmel, sak dulito, langgeng*" maka ucapan Semar bermakna "daripada diam (*mbergegeg*) lebih baik berusaha untuk lepas (*ugeg-ugeg*) dan mencari makan (*hmel-hmel*) walaupun hasilnya sedikit (*sak ndulit*) tapi akan terasa abadi (*langgeng*) (B)

Premis 2: Ucapan Semar **tidak** bermakna "daripada diam (*mbergegeg*) lebih baik berusaha untuk lepas (*ugeg-ugeg*) dan mencari makan (*hmel-hmel*) walaupun hasilnya sedikit (*sak ndulit*) tapi akan terasa abadi (*langgeng*) (B)

Misal: "*p*" adalah Semar berucap "*mbergegeg, ugeg-ugeg, hmel-hmel, sak dulito, langgeng*", sedangkan "*q*" adalah ucapan Semar bermakna "daripada diam (*mbergegeg*) lebih baik berusaha untuk lepas (*ugeg-ugeg*) dan mencari makan (*hmel-hmel*) walaupun hasilnya sedikit (*sak ndulit*) tapi akan terasa abadi (*langgeng*).

Kita dapat menuliskan kedua premis di atas menjadi:

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{(premis)} \\ -q & \text{(premis)} \\ \hline -p & \text{(kesimpulan)} \end{array}$$

Dari kedua premis di atas (dengan menggunakan **aturan modus tollendo tollens**) dapat diturunkan pernyataan baru (kesimpulan) yaitu Semar tidak berucap "*mbergegeg, ugeg-ugeg, hmel-hmel, sak dulito, langgeng*".

Secara ringkas bentuk penyimpulan ini (argumen) dituliskan sebagai:

$$p \Rightarrow q, -q \vdash -p.$$

Contoh 3

Konstruksikan penurunan kesimpulan dalam argumen berikut.

Gareng adalah anggota Punokawan. Gareng berasal dari kata *Qariin*. Jika Petruk dan Gareng adalah anggota Punokawan maka Gareng tidak berasal dari kata *Qariin*. Kesimpulan: Petruk bukan anggota Punokawan.



Dengan memisalkan "p" adalah Gareng adalah anggota Punokawan, "r" adalah Gareng berasal dari kata *Qariin*, dan "q" adalah Petruk adalah anggota Punokawan.

Sehingga bentuk argumennya adalah: $p, r, (q \wedge p) \Rightarrow \neg r \vdash \neg q$

Konstruksi penurunan kesimpulan dalam argumen itu adalah sebagai berikut.

1) Tuliskan ketiga premis dalam 3 (tiga) baris.

- | | | |
|----|-----------------------------------|-----|
| 1. | p | p |
| 2. | r | p |
| 3. | $(q \wedge p) \Rightarrow \neg r$ | p |

2) Dengan modus tollendo tollens (dapat dilihat dalam kumpulan tautologi), kita dapat menyimpulkan suatu pernyataan baru (langkah ke-4) melalui premis ke-2 dan ke-3.

$$(2,3) \quad 4. \quad \neg q \vee \neg p \qquad 2,3 \text{ t (Modus tollendo tollens)}$$

NB:

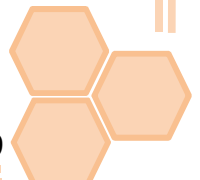
- ✓ Tulis pernyataan baru di langkah ke-4.
- ✓ Keterangan di sebelah kanan dibaca 2,3 tautologi, dan disingkat menjadi 2,3t, menunjukkan bahwa langkah ke-4 diturunkan dari langkah ke-2 dan 3 menggunakan modus tollendo tollens.
- ✓ Keterangan di sebelah kiri menunjukkan asal premis.

3) Kita dapat mengubah bentuk pernyataan pada langkah ke-4, dari pernyataan berbentuk disjungsi menjadi pernyataan berbentuk implikasi.

$$(2,3) \quad 5. \quad q \Rightarrow \neg p \qquad 4t \text{ (bentuk ekuivalen)}$$

4) Kita ubah kembali bentuk pernyataan pada langkah ke-5 menjadi bentuk kontraposisinya.

$$(2,3) \quad 6. \quad p \Rightarrow \neg q \qquad 5t \text{ (kontraposisi)}$$



Gareng yang bermata juling kebawah berarti bersyukur atau fisik Gareng yang memiliki jari tangan terbuka lebar berarti mau menerima kritikan maka perut buncit Gareng berarti kenyang akan pengalaman yang baik. Kesimpulan: jika Gareng berasal dari kata *Qariin* berarti mempunyai banyak teman maka perut buncit Gareng berarti kenyang akan pengalaman yang baik.

Dengan memisalkan "a" adalah Gareng berasal dari kata *Qariin* berarti mempunyai banyak teman, "b" adalah *Nala* Gareng yang berarti hati yang bersih, "c" adalah fisik Gareng yang berdahi lebar berarti wawasan yang luas, "d" adalah fisik Gareng yang bermata juling kebawah berarti bersyukur, "e" adalah fisik Gareng yang memiliki jari tangan terbuka lebar berarti mau menerima kritikan, dan "f" adalah perut buncit Gareng berarti kenyang akan pengalaman yang baik.

Sehingga bentuk argumennya adalah: $a \vee b \Rightarrow c \wedge d, d \vee e \Rightarrow f \vdash a \Rightarrow f$

Konstruksi penurunan kesimpulan dalam argumen itu adalah sebagai berikut.

1) Tuliskan kedua premis dalam 2 (dua) baris.

$$1. \quad a \vee b \Rightarrow c \wedge d \quad p$$

$$2. \quad d \vee e \Rightarrow f \quad p$$

2) Ambil pendahulu/anteseden pada kesimpulan (a) dan letakkan pada langkah ke-3 sebagai premis tambahan.

$$3. \quad a \quad p \text{ (tambahan)}$$

3) Dengan tautologi ke-22, ubah pernyataan ke-1 menjadi pernyataan berikut.

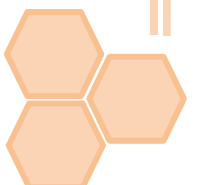
$$(1) \quad 4. \quad (a \Rightarrow c \wedge d) \wedge (b \Rightarrow c \wedge d) \quad 1t$$

4) Dengan aturan penyederhanaan, ambil salah satu pernyataan di langkah ke-4.

$$(1) \quad 5. \quad a \Rightarrow c \wedge d \quad 4t \text{ (aturan penyederhanaan)}$$

5) Melalui pernyataan ke-3 dan 5 diperoleh kesimpulan dengan aturan detasemen.

$$(1,3) \quad 6. \quad c \wedge d \quad 3,5t \text{ (aturan detasemen)}$$



- 4) Pada langkah terakhir, ambil premis tambahan sebagai pendahulu/anteseden dan kesimpulan akhir (hasil penurunan kesimpulan) sebagai pengikut/konsekuensi.

Contoh 5

Konstruksikan penurunan kesimpulan dalam argumen berikut menggunakan bukti tak langsung/reductio ad absurdum!

Jika Punokawan berarti seseorang yang mengerti teman atau seseorang yang berperan sebagai penetralisir suasana maka Punokawan hadir sebagai pamong yang terpercaya bagi para kesatria. Jika Punokawan hadir sebagai pamong yang terpercaya bagi para kesatria maka Semar yang berasal dari kata *simaar* berarti menguatkan atau Semar yang memiliki mata sipit melambangkan ketelitian dalam bertindak. Jika Semar yang memiliki mata sipit melambangkan ketelitian dalam bertindak maka ciri fisik Semar yang lain melambangkan keserasian hidup. Semar tidak berasal dari kata *simaar* yang berarti menguatkan dan ciri fisik Semar yang lain tidak melambangkan keserasian hidup. Kesimpulan: Punokawan bukan berarti seseorang yang mengerti teman.

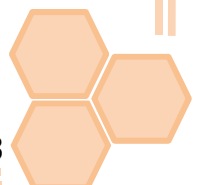
Dengan memisalkan "a" adalah Punokawan berarti seseorang yang mengerti teman, "b" adalah Punokawan berarti seseorang yang berperan sebagai penetralisir suasana, "c" adalah Punokawan hadir sebagai pamong yang terpercaya bagi para kesatria, "d" adalah Semar yang berasal dari kata *simaar* berarti menguatkan, "e" adalah Semar yang memiliki mata sipit melambangkan ketelitian dalam bertindak, "f" adalah ciri fisik Semar yang lain melambangkan keserasian hidup.

Sehingga bentuk argumennya adalah: $a \vee b \Rightarrow c, c \Rightarrow d \vee e, e \Rightarrow f, -d \wedge -f$
 $\vdash -a$

Konstruksi penurunan kesimpulan dalam argumen itu adalah sebagai berikut.

- 1) Tuliskan keempat premis dalam 4 (empat) baris.

- | | | |
|----|--------------------------|---|
| 1. | $a \vee b \Rightarrow c$ | p |
| 2. | $c \Rightarrow d \vee e$ | p |
| 3. | $e \Rightarrow f$ | p |
| 4. | $-d \wedge -f$ | p |



2) Negasikan kesimpulan ($\neg a$) dan letakkan pada langkah ke-5 sebagai premis tambahan.

5. a p (tambahan)

3) Dengan aturan penyederhanaan, ambil salah satu pernyataan tunggal di langkah ke-4.

(4) 6. $\neg f$ 4t (aturan penyederhanaan)

4) Dengan menggunakan modus tollendo tollens, diperoleh kesimpulan baru melalui pernyataan di langkah ke-3 dan 6.

(3,4) 7. $\neg e$ 3,6t (modus tollendo tollens)

5) Dengan aturan penyederhanaan, ambil salah satu pernyataan tunggal di langkah ke-4.

(4) 8. $\neg d$ 4t (aturan penyederhanaan)

6) Karena pernyataan tunggal di langkah ke-7 dan 8 merupakan suatu tautologi, maka kita dapat menggabungkannya menjadi pernyataan majemuk berbentuk konjungsi.

(3,4) 9. $\neg e \wedge \neg d$ 7,8t

7) Mengubah bentuk pernyataan majemuk yang ada di langkah ke-9.

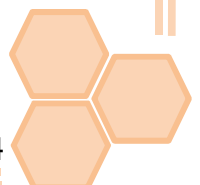
(3,4) 10. $\neg(e \vee d)$ 9t

8) Dengan menggunakan modus tollendo tollens, diperoleh kesimpulan baru melalui pernyataan di langkah ke-2 dan 10.

(2,3,4) 11. $\neg c$ 2,10t (modus tollendo tollens)

9) Dengan menggunakan modus tollendo tollens, diperoleh kesimpulan baru melalui pernyataan di langkah ke-1 dan 11.

(1,2,3,4) 12. $\neg(a \vee b)$ 1,11t (modus tollendo tollens)



Latihan 4

Buktikanlah bawa argumen-argumen berikut absah, dengan menyusun konstruksi penurunan kesimpulan dari premis-premisnya. Mahasiswa dapat menggunakan *aturan p dan t*, *aturan cp*, atau *bukti tak langsung* dalam membuktikan keabsahan argumen berikut.

1. Tokoh Punokawan yang memiliki watak pamomong. Esensi Punokawan yang luhur diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Jika seorang pendidik memiliki watak seperti Punokawan dan tokoh Punokawan yang memiliki watak pamomong, maka esensi Punokawan yang luhur tidak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Kesimpulan: seorang pendidik tidak memiliki watak seperti Punokawan.
2. Jika Petruk berasal dari kata *Fatruk* yang berarti meninggalkan, maka Petruk selalu meninggalkan larangan Gusti Allah SWT. Tidak benar bahwa Petruk selalu meninggalkan larangan Gusti Allah SWT atau Petruk mengambil *Jamus Kalimasada* yang membuat dirinya menjadi raja. Kesimpulan: Petruk bukan berasal dari kata *Fatruk* yang berarti meninggalkan.
3. Jika Petruk memiliki kesabaran yang sangat tinggi, maka Raut muka Petruk selalu tersenyum. Jika Petruk memiliki hidung yang panjang hingga menutupi mulutnya, maka Raut muka Petruk selalu tersenyum. Jika Petruk berujar bahwa menjadi manusia harusnya sedikit bicara, maka Petruk memiliki kesabaran yang sangat tinggi atau Petruk memiliki hidung yang panjang hingga menutupi mulutnya. Petruk berujar bahwa menjadi manusia harusnya sedikit bicara. Kesimpulan: Raut muka Petruk selalu tersenyum.
4. Jika Bagong berasal dari kata *Baghaa*, maka *Baghaa* tidak berarti memberontak segala macam kebatilan. Jika *Baghaa* tidak berarti memberontak segala macam kebatilan, maka ciri fisik Bagong tidak memiliki dahi yang lebar. Bentuk dahi yang lebar menunjukkan wawasan yang sangat luas dan Bagong memiliki dahi yang lebar. Kesimpulan: Bagong bukan berasal dari kata *Baghaa*.
5. Jika ciri fisik Bagong adalah memiliki mata yang lebar, maka tidak benar bahwa mata yang lebar menggambarkan pandangan yang luas tentang makna kehidupan dan bentuk mulut yang lebar menggambarkan jujur dalam berbicara. Jika mata yang lebar tidak menggambarkan pandangan yang luas tentang makna kehidupan atau bentuk mulut yang lebar tidak menggambarkan jujur dalam berbicara, maka Bagong tidak memiliki bibir yang lebar. Raut muka yang selalu tersenyum membuat Bagong selalu

mendapat tempat di hati para kesatria atau Bagong memiliki bibir yang lebar.
Kesimpulan: ciri fisik Bagong tidak memiliki mata yang lebar atau Raut muka yang selalu tersenyum membuat Bagong selalu mendapat tempat di hati para kesatria.

HIMPUNAN

7

Definisi Himpunan

Himpunan adalah kumpulan benda atau objek yang didefinisikan (diterangkan) dengan jelas. Yang dimaksud diterangkan dengan jelas adalah benda atau objeknya jelas mana yang merupakan anggota dan mana yang bukan anggota dari himpunan itu. Himpunan dilambangkan dengan huruf kapital misalnya A, B, C, D, ..., Z. Sedangkan objek-objek dari himpunan itu ditulis diantara dua kurung kurawal dan dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh

A adalah himpunan petuah bijak Semar.

$A = \{\text{Ngluruk Tanpo Bolo, Menang Tanpo Ngasorake, Sekti Tanpo Aji-Aji, Sugih Tanpo Bondho}\}.$

Keanggotaan Suatu Himpunan

Misalkan himpunan $G = \{\text{Pancalpamor, Pegatwaja}\}$ merupakan himpunan nama lain dari Gareng, maka Pancalpamor merupakan anggota himpunan G, ditulis $\text{Pancalpamor} \in G$. Sedangkan Dawala bukan anggota himpunan G, ditulis $\text{Dawala} \notin G$, karena Dawala merupakan nama lain dari Petruk. Lambang \in dibaca anggota atau elemen, sedangkan lambang \notin dibaca bukan anggota atau bukan elemen. Banyaknya anggota himpunan G dilambangkan dengan $n(G)$, sehingga $n(G) = 2$.

Notasi Himpunan

Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan 2 (dua) cara, meliputi (1) dengan cara mendaftar anggota-anggotanya di antara kurung kurawal dan setiap dua anggota dipisahkan dengan tanda koma; atau (2) dengan notasi pembentuk himpunan, yaitu dengan menuliskan satu huruf sebarang sebagai peubah anggota dan syarat keanggotaannya serta tanda garis tegak di antara peubah dan syarat keanggotaan, yang semua tulisan itu berada di antara kurung kurawal.

Contoh

1. Notasi pembentuk himpunan dari $P = \{\text{Semar, Gareng, Petruk, Bagong}\}$ adalah $P = \{p \mid p \text{ adalah nama anggota Punokawan}\}$.
2. Notasi pembentuk himpunan dari $S = \{\text{Jamus Kalimasada, Payung Tunggul Naga, Tombak Yudhistira}\}$ adalah $S = \{x \mid x \text{ adalah pusaka Semar}\}$.

Himpunan Kosong

Himpunan Kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota, dan dilambangkan dengan $\{\}$ atau ϕ .

Contoh

1. $D = \{d \mid d \text{ adalah anggota Punokawan yang memiliki sifat Gumunan}\}$
2. $F = \{f \mid f \text{ adalah anggota Punokawan yang memiliki senjata Kuku Pancanaka}\}$

Hubungan Dua Himpunan

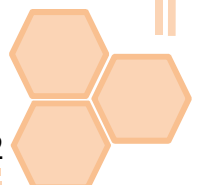
Himpunan Bagian

A adalah himpunan bagian dari himpunan B apabila setiap anggota himpunan A juga menjadi anggota himpunan B. Misalkan $S = \{\text{momong, momot, momor, mursid, murakabi}\}$ adalah himpunan semesta yaitu himpunan sifat-sifat Petruk, sedangkan himpunan $A = \{\text{momong, mursid, murakabi}\}$, dan $B = \{\text{mursid, adigang, adigung, adiguna}\}$, maka himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan S, ditulis $A \subset S$, sedangkan himpunan B bukan merupakan himpunan bagian dari himpunan S, ditulis $B \not\subset S$.

Jika suatu himpunan mempunyai anggota sebanyak $n(A)$ maka banyaknya himpunan bagian dari A adalah sebanyak $2^{n(A)}$.

Contoh

Banyaknya himpunan bagian dari himpunan $A = \{\text{Semar, Gareng, Petruk, Bagong}\}$ adalah $2^{n(A)} = 2^4 = 16$, yaitu ϕ , $\{\text{Semar}\}$, $\{\text{Gareng}\}$, $\{\text{Petruk}\}$, $\{\text{Bagong}\}$, $\{\text{Semar, Gareng}\}$, $\{\text{Semar, Petruk}\}$, $\{\text{Semar, Bagong}\}$, $\{\text{Gareng, Petruk}\}$, $\{\text{Gareng, Bagong}\}$, $\{\text{Petruk, Bagong}\}$, $\{\text{Semar, Gareng, Petruk}\}$, $\{\text{Semar, Gareng, Bagong}\}$, $\{\text{Semar, Petruk, Bagong}\}$, $\{\text{Gareng, Petruk, Bagong}\}$, $\{\text{Semar, Gareng, Petruk, Bagong}\}$.



Himpunan Lepas (Saling Asing)

Dua himpunan yang tidak kosong dikatakan saling lepas jika kedua himpunan itu tidak mempunyai satupun anggota yang sama.

Contoh

P adalah himpunan pusaka Semar, yaitu $P = \{\text{Jamus Kalimasada, Payung Tunggul Naga, Tombak Yudhistira}\}$, dan Q adalah himpunan petuah bijak Semar, yaitu $Q = \{\text{Urip Iku Urup, Memayu Hayuning Bawono, Ambrasto dhur Angkoro}\}$. Karena tidak ada anggota himpunan P dan Q yang sama maka himpunan P dan Q adalah dua himpunan yang saling lepas, jadi $P \cap Q = \emptyset$.

Himpunan Sama (Kesamaan Dua Himpunan)

Dua himpunan dikatakan sama apabila setiap anggota kedua himpunan itu sama bentuk dan jumlahnya.

Contoh

$P = \{\text{Jamus Kalimasada, Payung Tunggul Naga, Tombak Yudhistira}\}$

$Q = \{\text{Payung Tunggul Naga, Tombak Yudhistira, Jamus Kalimasada}\}$

Karena kedua himpunan P dan Q anggota-anggotanya sama yaitu Tombak Yudhistira, Jamus Kalimasada dan Payung Tunggul Naga, maka himpunan $A = B$.

Himpunan Ekuivalen

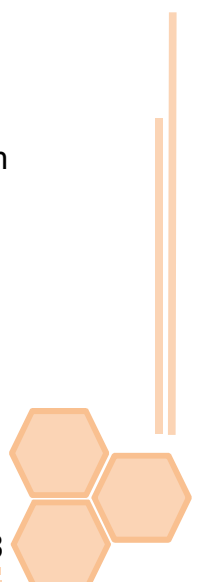
Dua himpunan dikatakan ekuivalen apabila jumlah anggota kedua himpunan itu sama tetapi bendanya ada yang tidak sama.

Contoh

$P = \{\text{Jamus Kalimasada, Payung Tunggul Naga, Tombak Yudhistira}\}$

$Q = \{\text{Urip Iku Urup, Memayu Hayuning Bawono, Ambrasto dhur Angkoro}\}$

Kedua himpunan P dan Q anggota-anggotanya tidak sama tetapi jumlah anggotanya sama maka himpunan P ekuivalen dengan Q, dilambangkan $P \sim Q$.



Himpunan Kuasa (*Power Set*)

Himpunan kuasa dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A. Himpunan kuasa dilambangkan dengan $P(A)$ atau 2^A .

Contoh

Himpunan G merupakan himpunan ciri fisik Gareng, ditulis $G = \{\text{mata juling, tangan ceko, perut buncit}\}$. Anggota G berjumlah 3, sedangkan himpunan bagian dari G berjumlah $2^3 = 8$, yaitu $\{\}, \{\text{mata juling}\}, \{\text{tangan ceko}\}, \{\text{perut buncit}\}, \{\text{mata juling, tangan ceko}\}, \{\text{mata juling, perut buncit}\}, \{\text{tangan ceko, perut buncit}\}, \{\text{mata juling, tangan ceko, perut buncit}\}$. Himpunan kuasa dari G adalah $\{\{\}, \{\text{mata juling}\}, \{\text{tangan ceko}\}, \{\text{perut buncit}\}, \{\text{mata juling, tangan ceko}\}, \{\text{mata juling, perut buncit}\}, \{\text{tangan ceko, perut buncit}\}, \{\text{mata juling, tangan ceko, perut buncit}\}\}$.

Operasi Pada Himpunan

Irisan (*Intersection*)

Irisan himpunan A dan B (ditulis $A \cap B$) adalah himpunan semua objek yang menjadi anggota himpunan A sekaligus menjadi anggota himpunan B.

Notasi : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Contoh

Misalkan S adalah himpunan ciri fisik Semar, ditulis $S = \{\text{rambut kuncung, mata sendu, mulut tersenyum}\}$, G adalah himpunan ciri fisik Gareng, ditulis $G = \{\text{dahi lebar, mata juling, tangan ceko}\}$, dan B adalah himpunan ciri fisik Bagong, ditulis $B = \{\text{dahi lebar, mata lebar, bibir besar}\}$, maka $S \cap G = \{\}$, sedangkan $G \cap B = \{\text{dahi lebar}\}$.

Gabungan (*Union*)

Gabungan himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan semua objek yang menjadi anggota himpunan A atau menjadi anggota himpunan B.

Notasi : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Contoh

Misalkan S adalah himpunan ciri fisik Semar, ditulis $S = \{\text{rambut kuncung, mata sendu, mulut tersenyum}\}$, G adalah himpunan ciri fisik Gareng, ditulis $G = \{\text{dahi lebar, mata juling, tangan ceko}\}$, dan B adalah himpunan ciri fisik Bagong, ditulis $B = \{\text{dahi lebar, mata lebar, bibir besar}\}$, maka $S \cup G = \{\text{rambut kuncung, mata sendu, mulut tersenyum, dahi lebar, mata juling, tangan ceko}\}$, sedangkan $G \cup B = \{\text{dahi lebar, mata juling, tangan ceko, mata lebar, bibir besar}\}$.

Komplemen suatu Himpunan

Misalkan S adalah suatu himpunan semesta, maka komplemen dari himpunan A (ditulis: A^c , dibaca: A komplemen) adalah himpunan dari semua anggota himpunan semesta S yang bukan merupakan anggota A .

Notasi: $A^c = \{x \mid x \in S \text{ dan } x \notin A\}$

Contoh

Misalkan S adalah himpunan ciri fisik anggota Punokawan sebagai semesta, ditulis $S = \{\text{rambut kuncung, mata sendu, mulut tersenyum, dahi lebar, mata juling, tangan ceko, perut buncit, kaki pincang, hidung panjang, kaki panjang, tangan panjang, mata lebar, bibir besar}\}$, G adalah himpunan ciri fisik Gareng, ditulis $G = \{\text{dahi lebar, mata juling, tangan ceko, perut buncit, kaki pincang}\}$, maka $G^c = \{\text{rambut kuncung, mata sendu, mulut tersenyum, hidung panjang, kaki panjang, tangan panjang, mata lebar, bibir besar}\}$.

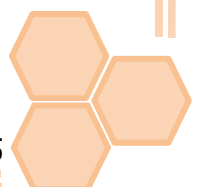
Selisih Dua Himpunan

Himpunan A dikurangi himpunan B (ditulis $A - B$, dibaca: A kurang B) adalah himpunan dari anggota-anggota himpunan A yang bukan merupakan anggota B .

Notasi: $A - B$ (atau $A \setminus B$) = $\{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

Contoh

Misalkan B adalah himpunan makna fisik Bagong, ditulis $B = \{\text{pengayom, jujur, pandangan luas, wawasan luas, suci}\}$, dan G adalah himpunan makna fisik Gareng, ditulis $G = \{\text{wawasan luas, tawadhu', berbuat baik}\}$, maka $B - G = B \setminus G = \{\text{pengayom, jujur, pandangan luas, suci}\}$, sedangkan $G - B = G \setminus B = \{\text{tawadhu', berbuat baik}\}$.



Perkalian Kartesius

Perkalian kartesius dari himpunan A dan himpunan B (ditulis: $A \times B$, dibaca: A kali B) adalah suatu himpunan pasangan terurut yang komponen pertamanya elemen A dan komponen keduanya elemen B.

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

Contoh

Apabila B adalah himpunan ciri fisik Bagong, ditulis $B = \{\text{dahi lebar, mata lebar, bibir besar}\}$, sedangkan S adalah himpunan sifat Bagong, ditulis $S = \{\text{wawasan luas, pandangan luas}\}$, maka $B \times S = \{(\text{dahi lebar, wawasan luas}), (\text{dahi lebar, pandangan luas}), (\text{mata lebar, wawasan luas}), (\text{mata lebar, pandangan luas}), (\text{bibir besar, wawasan luas}), (\text{bibir besar, pandangan luas})\}$, sedangkan $S \times B = \{(\text{wawasan luas, dahi lebar}), (\text{wawasan luas, mata lebar}), (\text{wawasan luas, bibir besar}), (\text{pandangan luas, dahi lebar}), (\text{pandangan luas, mata lebar}), (\text{pandangan luas, bibir besar})\}$.

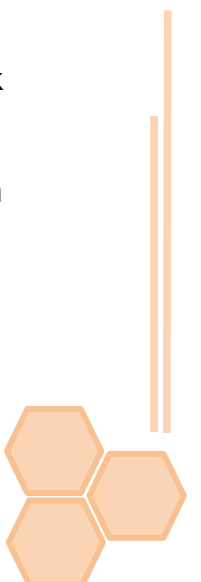
Latihan Soal

1. Dalam sebuah survei yang dilakukan kepada 25 siswa SMA ditemukan 3 (tiga) kategori siswa yang menyukai cerita Punokawan, yaitu Semar membangun Khayangan, Semar dan senjata kentutnya, dan Petruk jadi ratu. Berdasarkan survei tersebut didapatkan informasi bahwa:

- ✓ 15 siswa menyukai cerita Semar membangun Khayangan
- ✓ 12 siswa menyukai cerita Semar dan senjata kentutnya
- ✓ 11 siswa menyukai cerita Petruk jadi ratu
- ✓ 5 siswa menyukai cerita Semar membangun Khayangan juga cerita Semar dan senjata kentutnya
- ✓ 9 siswa menyukai cerita Semar membangun Khayangan dan cerita Petruk jadi ratu
- ✓ 4 siswa menyukai cerita Semar dan senjata kentutnya juga cerita Petruk jadi ratu

Temukan berapa siswa yang:

- a. Hanya menyukai cerita Semar membangun Khayangan saja
- b. Hanya menyukai cerita Semar dan senjata kentutnya saja



- c. Hanya menyukai cerita Petruk jadi ratu saja
- d. Menyukai cerita Semar dan senjata kentutnya juga cerita Petruk jadi ratu, tetapi tidak menyukai cerita Semar membangun Khayangan
- e. Menyukai cerita Semar membangun Khayangan dan cerita Petruk jadi ratu, tetapi tidak menyukai cerita Semar dan senjata kentutnya

2. Manakah dari himpunan berikut yang sama?

$$A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

$$E = \{1,2\}$$

$$B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

$$F = \{1,2,1\}$$

$$C = \{x \mid x < 3, x \in P\}$$

$$G = \{3,1\}$$

$$D = \{x \mid x < 5, x \text{ adalah bilangan ganjil}, x \in P\}$$

$$H = \{1,1,3\}$$

3. Buktikan bahwa $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$!

4. Misalkan $B = \{\phi, \{1\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$. Tentukan benar atau salah pernyataan berikut!

a. $1 \in B$

c. $\{1\} \in B$

e. $\{\{2,3\}\} \subset B$

g. $\phi \subset A$

b. $\{1\} \subset B$

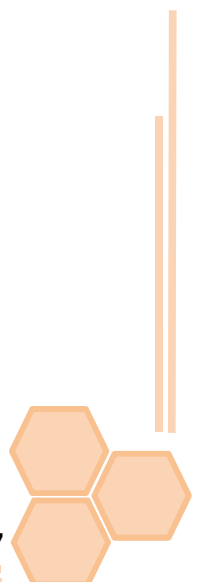
d. $\{2,3\} \subset B$

f. $\phi \in A$

h. $\{\phi\} \subset A$

5. Tunjukkan bahwa: A. $A = (B^c \cap A) \cup (A \cap B)$

$$B. (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = S$$



RELASI

8

Definisi Relasi

Himpunan semua anggota A yang berelasi R dengan anggota B dinyatakan sebagai:

$$R = \{(x,y) \mid xRy, x \in A, y \in B\}$$

Jika $x \in A$ berelasi $y \in B$, maka dituliskan sebagai $(x,y) \in R$ dan jika $x \in A$ tidak berelasi dengan $y \in B$, maka dituliskan $(x,y) \notin R$.

Contoh

Misalkan B adalah himpunan ciri fisik Bagong, ditulis $B = \{\text{dahi lebar, mata lebar, bibir besar}\}$ dan S adalah himpunan sifat Bagong, ditulis $S = \{\text{wawasan luas, pandangan luas}\}$, sedangkan R merupakan relasi dari B ke S yang menyatakan "bermakna", maka relasi ini dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut (dahi lebar, wawasan luas), ditulis $(\text{dahi lebar, wawasan luas}) \in R$. Untuk relasi D yang merupakan relasi dari S ke B yang menyatakan "disimbolkan dengan", maka relasi ini dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut (wawasan luas, dahi lebar), ditulis $(\text{wawasan luas, dahi lebar}) \in D$.

Domain dan Range Suatu Relasi

Misalkan R suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Domain (daerah asal) D dari relasi R adalah himpunan semua komponen pertama dari semua pasangan terurut dalam R, yaitu $D = \{a \in A \mid (a,b) \in R\}$, sedangkan Range (daerah hasil) E dari relasi R adalah himpunan semua komponen kedua dari semua pasangan terurut dalam R, yaitu $E = \{b \in B \mid (a,b) \in R\}$.

Contoh

Misalkan $B = \{\text{dahi lebar, mata lebar, bibir besar}\}$, $S = \{\text{wawasan luas, pandangan luas}\}$, dan relasi R merupakan relasi dari B ke S yang menyatakan "bermakna", maka $R = \{(\text{dahi lebar, wawasan luas}), (\text{mata lebar, pandangan luas})\}$.

luas}). Domain dari relasi R adalah {dahi lebar, mata lebar}, sedangkan Range dari relasi R adalah {wawasan luas, pandangan luas}.

Invers Suatu Relasi

Jika A dan B dua himpunan yang tidak kosong dan relasi R dari a ke B dengan $R = \{(x,y) \mid xRy, x \in A, y \in B\}$, maka invers dari relasi R ditulis R^{-1} adalah suatu relasi dari B ke A yang didefinisikan sebagai:

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid xRy, x \in A, y \in B\}.$$

Contoh

1. Misalkan $P = \{\text{Semar, Gareng, Petruk, Bagong}\}$ dan $K = \{\text{Ismarun, Qaariin, Fatruk, Baghaa}\}$ serta $R = \{(\text{Semar,Ismarun}), (\text{Gareng,Qaariin}), (\text{Petruk,Fatruk}), (\text{Bagong,Baghaa})\}$ adalah suatu relasi dari P ke K, maka $R^{-1} = \{(\text{Ismarun,Semar}), (\text{Qaariin,Gareng}), (\text{Fatruk,Petruk}), (\text{Baghaa,Bagong})\}$ yaitu suatu relasi dari B ke A.
2. Jika $R = \{(x,y) \mid x = y + 2\}$ dan $T = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ masing-masing adalah relasi dalam himpunan bilangan real, maka invers dari relasi-relasi itu adalah $R^{-1} = \{(x,y) \mid y = x + 2\}$ dan $T^{-1} = \{(x,y) \mid x = y^2\}$.

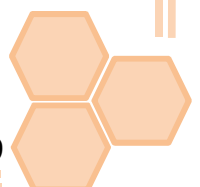
Jenis-Jenis Relasi

Relasi Refleksif

Misalkan S adalah suatu himpunan yang tidak kosong, dan R suatu relasi dalam S. Relasi R dikatakan refleksif jika untuk setiap $a \in S$, $(a,a) \in R$. Relasi R dalam S tidak refleksif, apabila ada elemen $a \in S$, sedemikian sehingga, $(a,a) \notin R$.

Contoh

1. Apabila B adalah himpunan semua bilangan bulat dan relasi R dalam B menyatakan "sama dengan", maka relasi R dalam B adalah suatu relasi refleksif. Relasi F dalam B yang menyatakan "faktor dari" juga merupakan relasi refleksif.
2. Misalkan P adalah himpunan semua pesan bijak Semar dan relasi S dalam P menyatakan "simbol dari", maka relasi S dalam P **bukan** suatu relasi refleksif.



- Misalkan G adalah himpunan segitiga dalam bidang Euclid dan relasi R dalam G menyatakan "kongruen dengan", maka relasi R dalam G merupakan suatu relasi refleksif.

Relasi Simetris

Misalkan S adalah suatu himpunan yang tidak kosong, dan R suatu relasi dalam S . Relasi R dikatakan simetris, apabila untuk setiap $a, b \in S$, jika $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$. Relasi R dalam S tidak simetris, apabila ada elemen $a, b \in S$, sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \notin R$.

Contoh

- Misalkan P adalah himpunan nama anggota Punokawan, ditulis $P = \{\text{Semar, Gareng, Petruk, Bagong, Badranaya, Nayantaka, Pancal pamor, Pegatwaja, Dawala}\}$ dan relasi N dalam P menyatakan "nama lain", maka relasi N dalam P merupakan suatu relasi simetris.
- Misalkan G adalah himpunan semua garis lurus pada suatu bidang Euclid dan R adalah suatu relasi dalam G yang menyatakan "sejajar dengan", maka R adalah suatu relasi simetris. Relasi T dalam G yang menyatakan "tegak lurus pada" juga merupakan relasi simetris.
- Misalkan $S = \{\text{Jamus Kalimasada, Payung Tunggul Naga, Pengayom Rakyat, Payung Yudhistira, Kalimat Syahadat, Keselamatan}\}$ dan relasi R dalam S yang menyatakan "melambungkan" dan didefinisikan sebagai $R = \{(\text{Jamus Kalimasada, Kalimat Syahadat}), (\text{Payung Tunggul Naga, Pengayom Rakyat}), (\text{Payung Yudhistira, Keselamatan})\}$, maka R adalah **bukan** relasi simetris dalam S . sebab $(\text{Jamus Kalimasada, Kalimat Syahadat}) \in R$, namun $(\text{Kalimat Syahadat, Jamus Kalimasada}) \notin R$.
- Apabila A adalah himpunan semua bilangan asli dan R suatu relasi dalam A yang menyatakan "membagi habis", maka R **bukan** relasi simetris dalam A .

Relasi Transitif

Misalkan S adalah suatu himpunan yang tidak kosong, dan R suatu relasi dalam S . Relasi R dikatakan transitif, apabila untuk setiap $a, b, c \in S$, jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$.

Contoh

merupakan pemetaan bijektif karena pemetaan f bukan pemetaan injektif, yaitu ada satu elemen dari daerah hasil (Payung Yudhistira) yang mempunyai lebih dari satu prapeta.

3. Misalkan $A = \{\text{Kekuasaan Rakyat, Suara Rakyat}\}$, dan $K = \{\text{Kentut Semar, Batuk Semar}\}$, sedangkan pemetaan $f: A \rightarrow K$ didefinisikan oleh "disimbolkan dengan senjata" bukan merupakan bijektif karena pemetaan f bukan pemetaan surjektif, yaitu ada satu elemen dari daerah kawan (Batuk Semar) yang bukan merupakan peta.

Latihan Soal

1. Apabila $f: A \rightarrow B$ dengan A , B , dan definisi f yang ditentukan berikut ini. Apakah f menyatakan suatu fungsi? Berikan alasan jika f bukan suatu fungsi (pemetaan)!
 - a. A adalah himpunan petuah bijak Semar, ditulis $A = \{\text{Memayu Hayuning Bawono, Ambrasto dhur Angkoro, Suro Diro Joyoningrat Lebur Dening Pangastuti, Ngluruk Tanpo Bolo, Menang Tanpo Ngasorake, Sekti Tanpo Aji-Aji}\}$, B adalah himpunan makna petuah bijak Semar, ditulis $B = \{\text{berjuang tanpa membawa massa, memberantas keserakahan, menang tanpa merendahkan, kaya tanpa harta, keburukan bisa dikalahkan oleh kebaikan, mengusahakan keselamatan, berwibawa tanpa kekuasaan}\}$, dan $f(x) = \text{makna dari } x, \forall x \in A$.
 - b. A adalah himpunan ciri fisik Gareng, ditulis $A = \{\text{dahi lebar, kaki pincang, mata juling, tangan ceko, jari tangan terbuka lebar, perut buncit}\}$, B adalah himpunan makna ciri fisik Gareng, ditulis $B = \{\text{wawasan luas, pengetahuan luas, meningkatkan kebaikan, selalu bersyukur, tidak mengambil barang bukan milik, pemikiran terbuka, mau menerima kritik/saran, kenyang pengalaman baik, berhati-hati dalam melangkah}\}$, dan $f(x) = \text{makna dari } x, \forall x \in A$.
 - c. A adalah himpunan ciri fisik Petruk, ditulis $A = \{\text{hidung panjang, tangan panjang, kaki panjang, muka tersenyum}\}$, B adalah himpunan makna ciri fisik Petruk, ditulis $B = \{\text{mempunyai banyak kelebihan, mempunyai kesabaran tinggi, pemikiran terbuka, tidak mengambil barang bukan milik}\}$, dan $f(x) = \text{makna dari } x, \forall x \in A$.

