

# MASALAH KONTROL OPTIMAL PADA PENYEBARAN COVID-19 DI JAWA TENGAH DENGAN VAKSINASI

*By Yudi Adi*

## MASALAH KONTROL OPTIMAL PADA PENYEBARAN COVID-19 DI JAWA TENGAH DENGAN VAKSINASI

KHOERUNNISA, YUDI ARI ADI\*

Program Studi Matematika,  
Fakultas Sains dan Teknologi Terapan,

Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia

email : khoerunnisa1700015063@webmail.uad.ac.id, yudi.adi@math.uad.ac.id

Diterima 4 Agustus 2021 Direvisi 15 September 2021 Dipublikasikan 21 Oktober 2021

**Abstrak.** COVID-19 merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-Cov-2) yang menyebar hampir ke seluruh penjuru dunia. Pada penelitian ini disusun model epidemik SIVR untuk mengetahui penyebaran COVID-19 dengan menggunakan teori kontrol optimal. Model epidemik SIVR merupakan salah satu pemodelan matematika yang mendeskripsikan interaksi antara populasi rentan, terinfeksi, tervaksin dan populasi yang sembuh. Kontrol dalam penelitian ini bertujuan untuk meminimalkan jumlah populasi terinfeksi agar dapat menekan kasus penyebaran COVID-19. Simulasi pada penelitian ini ditinjau dari dua keadaan  $R_0$  (Bilangan Reproduksi Dasar), dengan  $R_0 > 1$  untuk kasus terjadinya endemik dan  $R_0 < 1$  untuk kasus terjadinya bebas penyakit. Berdasarkan solusi numerik model epidemik SIVR dengan dan tanpa pengontrol menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin metode Runge-Kutta orde 4, diperoleh hasil bahwa semakin tinggi jumlah populasi tervaksin COVID-19 menyebabkan jumlah populasi rentan semakin berkurang, begitupun sebaliknya, yang berarti bahwa vaksin dapat menekan kasus penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah.

**Kata Kunci:** Model epidemik, COVID-19, vaksinasi, kestabilan, kontrol optimal

### 1. Pendahuluan

Virus baru bernama *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-Cov-2) jenis B coronavirus muncul pertama kali di Wuhan, Cina pada Desember 2019 [1]. *World Health Organization/WHO* telah mendeklarasikan penyakit yang disebabkan oleh virus ini sebagai pandemi pada 11 Maret 2020 dengan nama penyakit Coronavirus Disease-19 (COVID-19) [2]. COVID-19 dapat ditularkan melalui kontak fisik maupun droplet (tetesan air liur) yang keluar saat batuk maupun bersin. Gejala klinis yang paling sering terjadi pada pasien COVID-19 yaitu demam (98%), batuk (76%), dan myalgia atau kelemahan (44%). Gejala lain yang terdapat pada pasien, namun jarang ditemukan yaitu produksi sputum (28%), sakit

\* penulis korespondensi

15 kepala 8%, batuk darah 5%, dan diare 3%. Sebanyak 55% dari pasien yang diteliti mengalami dispn<sup>25</sup> [3].

Jawa Tengah merupakan salah satu provinsi<sup>7</sup> Indonesia yang memiliki total kasus cukup tinggi yang menempati urutan kasus peringkat ke-3 setelah DKI Jakarta dan Jawa Timur, pada akhir Agustus 2020 sebanyak 128.776 kasus. Kasus positif Jawa Tengah mengalami kenaikan 4,8% menjadi 84.512 kasus dan angka kesembuh<sup>31</sup> COVID-19 di Jawa Tengah adalah 66,70% [4,5].

14 Salah satu metode untuk mengendalikan<sup>12</sup> sekaligus mencegah penyebaran penyakit COVID-19 yaitu dengan vaksinasi. Sejahter ini lebih dari 40 perusahaan farmasi dan lembaga akademis di seluruh dunia telah melakukan program pengembangan vaksinasi untuk melawan COVID-19 [6]. Sejak 13 Januari 2021, Indonesia telah melakukan program vaksinasi. Program vaksinasi saat ini diperluas ke seluruh daerah di Indonesia, salah satunya Jawa Tengah.

Berbagai model matematika yang membahas mengenai penyakit telah disusun, seperti dalam [7,8,9,10,11,12]. Beberapa dari penelitian tersebut membahas mengenai COVID-19 dengan menerapkan teori kontrol optimal, diantaranya penelitian yang dilakukan oleh Aldila [7] dan Ndi dan Adi [8]. Salah satu metode untuk mencegah peyebaran COVID-19 yaitu dengan adanya vaksinasi. Namun dalam penelitian tersebut tidak melibatkan adanya vaksinasi. Berbeda dengan penelitian yang dilakukan oleh Pertiwi, model yang digunakan adalah model epidemik SIRV yang mempertimbangkan adanya vaksinasi [9].

Pada penelitian ini digunakan persamaan model SIVR untuk menggambarkan pertumbuhan populasi rentan, populasi terinfeksi, populasi tervaksin, dan populasi sembuh dengan menggunakan teori kontrol optimal. Penelitian ini sangat bermanfaat bagi dunia medis sebagai pertimbangan dalam memberikan vaksin yang optimal bagi populasi rentan sehingga populasi terinfeksi dapat ditekan. Artikel ini disusun sebagai berikut. Pada bagian 2 disajikan beberapa teori yang mendasari pemodelan. Selanjutnya<sup>33</sup> pada Bagian 3 dibahas formulasi model dan sifat solusinya, eksistensi dan analisis kestabilan titik ekuilibrium, serta simulasi numerik. Artikel ini diakhiri dengan kesimpulan di Bagian 4.

## 2. Lndasan Teori<sup>9</sup>

Pada bagian ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang akan digunakan dalam pembahasan sistem persamaan diferensial, bilangan repro<sup>14</sup>ksi dasar, teori kontrol optimal. Sistem yang dibahas pada subbab ini dalah sistem persamaan diferensial nonlinear autonomous sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.1)$$

dengan  $x$  adalah variabel dependen dan  $t$  adalah variabel independen. Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial *autonomous*, yakni hanya bergantung pada satu variabel  $x$ . Selanjutnya, akan dibahas metode linearisasi sistem nonlinear untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium.

**Teorema 2.1.** [13] Jika  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  memiliki turunan di  $x_0$ , maka turunan

parsial  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  ada pada  $x_0$ , dan untuk setiap  $x \in \mathbb{R}^n$  berlaku

$$Df(\bar{x})x = \sum_{i=1, j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})x_j, \quad (2.2)$$

matriks  $Df(\bar{x})$  atau biasa ditulis dengan  $J$  dinamakan matriks Jacobian.

**Definisi 2.2.** [13] Diberikan matriks Jacobian  $Df(\bar{x})$ . Sistem linear  $\dot{x} = (Df(\bar{x}))x$  disebut linearisasi dari sistem  $\dot{x} = f(x)$  di sekitar titik  $\bar{x}$ .

**Definisi 2.3.** [13] Diberikan suatu sistem persamaan diferensial  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , dengan  $x, f(x) \in \mathbb{R}$ . Titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  disebut titik ekuilibrium jika dan hanya jika  $f(\bar{x}) = 0$ .

Kestabilan titik ekuilibrium Sistem (2.1) diberikan dalam definisi berikut.

**Definisi 2.4.** [14] Sistem linear dikatakan stabil jika semua solusi pada sistem  $t \rightarrow \infty$  dan stabil asimtotik jika semua solusi konvergen ke 0 dengan  $t \rightarrow \infty$ .

Jenis titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dapat ditentukan melalui nilai eigen dari matriks Jacobian  $Df(\bar{x})$  yang diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 2.5.** [14] Sistem persamaan  $\dot{x} = Ax$  dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika semua bagian real nilai eigen dari  $A$  bernilai negatif.

**Teorema 2.6.** [14] Jika terdapat bagian real nilai eigen dari matriks  $A$  yang bernilai positif maka sistem persamaan  $\dot{x} = Ax$  tidak stabil.

Pada teori kontrol optimal, terdapat definisi kontrol optimal dan prinsip maksimum Pontryagin sebagai berikut. Masalah kontrol optimal merupakan suatu masalah yang bertujuan memilih fungsi kontrol  $u(t)$  yang membawa sistem dari kondisi awal  $x(t_0)$  pada waktu  $t_0$  menuju kondisi akhir  $x(t_f)$  pada waktu akhir  $t_f$  sehingga dapat mengoptimalkan (memaksimalkan atau meminimumkan) suatu fungsi tujuan. Kondisi yang bergantung pada fungsi kontrol dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.3)$$

dengan kondisi awal  $x(t_0) = x_0$ . Sistem tersebut bergantung pada fungsi  $u(t)$  yang merupakan fungsi kontrol dari sistem (2.3). Jika nilai  $u(t)$  berubah maka solusi dari sistem (2.3) juga akan berubah. Masalah kontrol yang paling dasar yaitu mencari fungsi kontrol  $u(t)$  dan solusi sistem yang bersesuaian dengan (2.3) sehingga fungsi tujuan (2.4) dapat tercapai, yaitu

$$\max_u \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.4)$$

dengan kendala  $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$  dan  $x(t_f)$  bebas (nilainya tidak dibatasi).

Teknik yang digunakan untuk menyelesaikan kontrol yang optimal dan kondisi yang terkait yaitu teknik pada Prinsip Maksimum Pontryagin. Pontryagin memperkenalkan ide mengenai fungsi adjoint untuk menambahkan persamaan diferensial ke fungsi tujuan. Fungsi tujuan memiliki tujuan yang sama dengan pengganda

1 Lagrange dalam kalkulus multivariat, yang menambahkan kendala pada fungsi beberapa variabel yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan. Misalkan fungsi tujuan dalam persamaan (2.4) dituliskan sebagai berikut.

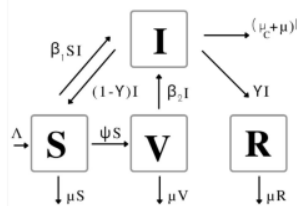
$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt, \tag{2.5}$$

dengan  $\mathbf{x}$  merupakan variabel *state*. Asumsikan bahwa kontrol optimal dari masalah optimal (2.4) ada, yaitu  $\hat{\mathbf{u}}$  dengan  $\hat{\mathbf{x}}$  adalah variabel *state* optimal yang memenuhi persamaan (2.3).

9  
3. Pembahasan

3.1. Formulasi Model

Model matematika yang akan dibahas pada artikel ini melibatkan vaksinasi. Dalam pembahasan ini diamati penyebaran COVID-19 dengan dan tanpa pengontrol oleh vaksin. Dalam pemodelan ini, diperhatikan empat kelompok populasi, yaitu populasi rentan ( $S$ ), populasi terinfeksi ( $I$ ), populasi tervaksin ( $V$ ), dan populasi sembuh ( $R$ ). Diasumsikan bahwa laju rekrutmen konstan, individu yang telah sembuh dari COVID-19 dapat rentan kembali, dan populasi yang telah melakukan vaksinasi dapat terinfeksi jika terjadi kontak dengan virus. Diagram interaksi populasi rentan, populasi terinfeksi, populasi tervaksin, dan populasi sembuh disajikan dalam Gambar 1.



Gambar 1: Diagram model epidemik SIVR

Berdasarkan skema pada Gambar 1 model interaksi populasi rentan, populasi terinfeksi, populasi tervaksin, dan populasi sembuh dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \Lambda - \beta_1 SI - \psi S - \mu S + (1 - \gamma)I, \\ \dot{I} &= \beta_1 SI + \beta_2 I - (\mu_c + \mu)I - \gamma I - (1 - \gamma)I, \\ \dot{V} &= \psi S - \beta_2 I - \mu V, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R, \end{aligned} \tag{3.1}$$

yang memenuhi kondisi awal

$$S(0), I(0), V(0), R(0) \geq 0,$$

dan domain

$$\Omega = \{(S, I, V, R) \in \mathbb{R}_+^4 \mid S + I + V + R = N, N(0) = N_0 \leq \frac{\Lambda - \mu_c I}{\mu}\},$$

dengan:

- $S$  : Jumlah populasi rentan,
- $I$  : Jumlah populasi terinfeksi,
- $V$  : Jumlah populasi tervakasin,
- $R$  : Jumlah populasi sembuh,
- $\Lambda$  : Laju rekrutmen,
- $\beta_1$  : Laju infeksi,
- $\beta_2$  : Laju infeksi setelah vaksinasi,
- $\mu$  : Laju kematian alami,
- $\mu_c$  : Laju kematian karena COVID-19,
- $\psi$  : Laju vaksinasi,
- $\gamma$  : Laju kesembuhan,

$(1 - \gamma)$  : Laju kesembuhan yang terinfeksi kembali.

Pada model (3.1), jumlah populasi rentan,  $S$  akan bertambah mengikuti model logistik, dengan laju rekrutmen sebesar  $\Lambda$  dan penambahan dari populasi terinfeksi yang telah sembuh menjadi rentan kembali sebesar  $(1\gamma)$ . Populasi rentan yang tidak terinfeksi dan populasi terinfeksi akan menjadi infeksi yaitu  $\beta_1 SI$  dan  $\beta_2 I$ , dengan  $\beta_1, \beta_2$  adalah laju penularan dan laju penularan populasi tervakasin. Adapun jumlah populasi rentan dapat berkurang karena adanya populasi yang tervakasin sebesar  $\psi$ . Setiap kompartemen pada model SIVR berkurang, yang disebabkan oleh kematian sebesar  $\mu$ , dan untuk kompartemen terinfeksi mengalami kematian yang disebabkan oleh COVID-19 sebesar  $\mu_c$ . Populasi terinfeksi dapat sembuh sebesar  $\gamma$ .

Selanjutnya agar sistem (3.1) memiliki makna secara biologi, maka perlu ditunjukkan kepositifan dan keterbatasan solusinya. Kepositifan dan keterbatasan diberikan dalam Teorema berikut.

**Teorema 3.1.** Untuk setiap kondisi awal  $S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, V(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ , maka solusi model (3.1) selalu nonnegatif untuk setiap  $t > 0$ .

**Bukti.** Dari model (3.1) diperoleh,

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)e^{-\int_0^t (\beta_1 I + \psi + \mu) dt} \geq 0, \\ I(t) &= I(0)e^{-\int_0^t (\beta_1 S + \beta_2 - \mu_c - \mu - 1) dt} \geq 0, \\ V(t) &= V(0)e^{-\int_0^t \mu dt} \geq 0, \\ R(t) &= R(0)e^{-\int_0^t \mu dt} \geq 0, \end{aligned}$$

dengan demikian,  $S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, V(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ , untuk setiap  $t \geq 0$ .  $\square$

**Teorema 3.2.** Solusi sistem (3.1) dengan kondisi awal  $S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, V(0) \geq 0, R(0) \geq 0$  terbatas untuk setiap  $t \geq 0$ .

**Bukti.** Akan ditunjukkan terdapat  $K > 0$  sehingga  $S(t) \leq K$ ,  $I(t) \leq K$ ,  $V(t) \leq K$ ,  $R(t) \leq K$  untuk setiap  $t > 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \dot{S} + \dot{I} + \dot{V} + \dot{R}, \\ &= (\Lambda - \beta_1 SI - \psi S - \mu S + (1 - \gamma)I) + (\beta_1 SI + \beta_2 I - (\mu_c + \mu)I \\ &\quad - \gamma I - (1 - \gamma)I) + (\psi S - \beta_2 I - \mu V) + (\gamma I - \mu R), \\ &= \Lambda - \mu S - (\mu_c + \mu)I - \mu V - \mu R, \\ &= \Lambda - \mu_c I - \mu(S + I + V + R), \\ &= \Lambda - \mu_c I - \mu N.\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\dot{N} \leq \Lambda - \mu N.$$

Jadi,

$$0 < \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} = K,$$

sehingga solusi dari persamaan (3.1) terbatas.  $\square$

### 3.2. Eksistensi dan Kestabilan Titik Ekuilibrium

Model (3.1) memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu:

- (1) Titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1 = \left( \frac{\Lambda}{\psi + \mu}, 0, \frac{\psi \Lambda}{\mu(\psi + \mu)}, 0 \right)$  yang menyebabkan COVID-19 hilang dari tubuh sehingga tidak terjadi penyakit.  $E_1$  ini eksis untuk  $\Lambda \beta_1 < (\psi + \mu)(1 + \mu_c + \mu - \beta_2)$ .
- (2) Titik ekuilibrium endemik  $E_2 = (S^*, I^*, V^*, R^*)$ , dengan

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{\Lambda}{R_0(\psi + \mu)} \\ I^* &= \frac{\Lambda(R_0 - 1)}{R_0 q} \\ V^* &= \frac{\Lambda \psi}{R_0 \mu(\psi + \mu)} - \frac{\Lambda \beta_2 (R_0 - 1)}{R_0 q \mu} \\ R^* &= \frac{\Lambda \gamma (R_0 - 1)}{\mu R_0 q},\end{aligned}$$

dengan  $R_0 = \frac{\Lambda \beta_1}{(\psi + \mu)(1 + \mu_c + \mu - \beta_2)}$  adalah bilangan reproduksi dasar yang dapat dicari dengan metode Next Generatin Matrix. Dengan demikian titik ekuilibrium endemik eksis jika  $R_0 > 1$  dan  $\gamma + \mu + \mu_c > \beta_2$ . Titik ekuilibrium  $E_2$  ini menunjukkan terjadinya penyebaran COVID-19.

Selanjutnya akan dilihat kestabilan lokal dari titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_1$ ) dan endemik ( $E_2$ ). Kestabilan lokal titik ekuilibrium ditentukan melalui nilai eigen matriks Jacobian model (3.1). Selengkapnya diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 3.3.** Titik ekuilibrium endemik COVID-19  $E_1$  stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ .

**Bukti.** Matriks Jacobian Sistem (3.1) di titik  $E_1$  adalah

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\psi - \mu & -\beta_1 \left( \frac{\Lambda}{\psi + \mu} \right) + (1 - \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \left( \frac{\Lambda}{\psi + \mu} \right) + \beta_2 - (\mu_c + \mu) - 1 & 0 & 0 \\ \psi & -\beta_2 & -\mu & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

yang memiliki persamaan karakteristik berbentuk

$$(\lambda + \psi + \mu) \left( \lambda - \frac{\Lambda \beta_1}{\psi + \mu} - \beta_2 + (\mu_c + \mu) + 1 \right) (\lambda + \mu)^2 = 0. \quad (3.3)$$

Akar-akar persamaan karakteristik persamaan (3.3) memiliki bagian real negatif jika  $\Lambda \beta_1 < (\psi + \mu)(1 + \mu_c + \mu - \beta_2)$ . Dengan kata lain, terbukti bahwa  $E_1$  stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ .  $\square$

Selanjutnya untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium endemik, diberikan teorema berikut.

**Teorema 3.4.** Titik ekuilibrium endemik COVID-19  $E_2$  stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$ .

**Bukti.** Matriks Jacobian sistem ((3.1)) di titik  $E_2$  adalah

$$J_2 = \begin{bmatrix} - \left( \frac{\Lambda \beta_1 (R_0 - 1)}{R_0 q} + (\psi + \mu) \right) & 1 - \frac{\Lambda \beta_1}{R_0 (\psi + \mu)} & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda \beta_1 (R_0 - 1)}{R_0 q} & \frac{\Lambda \beta_1}{R_0 (\mu + \psi)} + \beta_2 - (\mu_c + \mu) - 1 & 0 & 0 \\ \psi & -\beta_2 & -\mu & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

yang memiliki persamaan karakteristik berbentuk

$$(\lambda + \mu)^2 \left( \lambda^2 + \frac{\Lambda \beta_1 (R_0 - 1)}{R_0 q} + (\psi + \mu) \right) \lambda + \frac{\Lambda \beta_1 (R_0 - 1)}{R_0} = 0. \quad (3.5)$$

Dari Persamaan (3.5) diperoleh  $\lambda_{1,2} = \mu$  yang jelas bernilai negatif, dan kedua nilai eigen lainnya akan memiliki bagian real negatif jika  $R_0 > 1$ . Dengan kata lain terbukti bahwa  $E_2$  stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$ .  $\square$

### 3.3. Masalah Kontrol Optimal

Untuk masalah kontrol optimal, digunakan variabel kontrol  $u(t) \in U$  yang merepresentasikan jumlah individu rentan yang diberikan vaksin pada saat  $t$ . Berikut model



epidemik SIVR dengan kontrol  $u$ , yaitu:

$$\begin{aligned} S^* &= \Lambda - \beta_1 SI - (\psi + \mu)S - \mu S + (1 - \gamma)I, \\ I^* &= \beta_1 SI + \beta_2 I - (\mu_c + \mu)I - \gamma I - (1 - \gamma)I, \\ V^* &= (\psi + \mu)S - \beta_2 I - \mu V, \\ R^* &= \gamma I - \mu R, \end{aligned} \tag{3.6}$$

dan  $t_0 < t < t_f$  dan  $0 \leq u \leq 1$ .

Penyelesaian kontrol optimal di sini bertujuan untuk meminimumkan populasi yang terinfeksi yaitu dengan meminimumkan  $u(t)$  pada fungsi tujuan berikut.

$$\max J = \int_{t_0}^{t_f} \left( V + \frac{1}{2} \alpha u^2 \right) dt, \tag{3.7}$$

dengan kendala sistem persamaan (3.6) dengan  $\alpha$  adalah bobot parameter positif ( $\psi$ ), dengan  $t \in [0, t_f]$ . Kemudian akan ditentukan kontrol optimal  $u^*$  sehingga berlaku

$$J(u) = \max\{J(u) | u \in U\}, \tag{3.8}$$

dengan

$$U = \{u(t) | 0 \leq u \leq 1, t \in [0, t_f]\}.$$

Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan memenuhi kondisi-kondisi pada Prinsip Minimum Pontryagin. Terlebih dahulu didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut.

$$\begin{aligned} H(x, u, t, y) &= V + \frac{1}{2} \alpha u^2 + y_1(\Lambda - \beta_1 SI - (\psi + u)S) - \mu S + (1 - \gamma)I \\ &+ y_2(\beta_1 SI + \beta_2 I - (\mu + \mu)c)I - \gamma I - (1 - \gamma)I + y_3 \\ &((\psi + u)S - \beta_2 I - \mu V) + y_4(\gamma I - \mu R). \end{aligned} \tag{3.9}$$

dengan  $y_1 = y_1(t)$ ,  $y_2 = y_2(t)$ ,  $y_3 = y_3(t)$ ,  $y_4 = y_4(t)$  adalah variabel *co-state*. Menurut Prinsip Maksimum Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

(1) Kondisi stasioner.

Kondisi stasioner untuk kontrol  $u(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 &\Leftrightarrow \alpha \dot{u} - y_1 S + y_3 S = 0, \\ &\Leftrightarrow \alpha \dot{u} = y_1 S - y_3 S, \\ &\Leftrightarrow \alpha \dot{u} = (y_1 - y_3) S, \\ &\Leftrightarrow \dot{u} = \frac{(y_1 - y_3) S}{\alpha} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Karena didefinisikan solusi  $u^*$  adalah

$$u = \begin{cases} \frac{(y_1 - y_3) S}{\alpha}, & 0 < \frac{(y_1 - y_3) S}{\alpha} < 1, \\ 0, & \frac{(y_1 - y_3) S}{\alpha} \leq 0, \\ 1, & \frac{(y_1 - y_3) S}{\alpha} \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal  $u^*$  dapat dinyatakan sebagai

$$u = \max\{0, \min\{\frac{(y_1 - y_3)S}{\alpha}, 1\}\}.$$

(2) Persamaan *state*

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial y_1} &= \Lambda - \beta_1 SI - (\psi + u)S - \mu S + (1 - \gamma)I, \\ \frac{\partial H}{\partial y_2} &= \beta_1 SI + \beta_2 I - (\mu_c + \mu)I - \gamma I - (1 - \gamma)I, \\ \frac{\partial H}{\partial y_3} &= (\psi + u)S - \beta_2 I - \mu V, \\ \frac{\partial H}{\partial y_4} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\tag{3.11}$$

(3) Persamaan *co-state*

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial S} &= -(y_1(-\beta_1 I - (\psi + u) - \mu + y_2 \beta_1 I + y_3(\psi + u)), \\ &= y_1(\beta_1 I + (\psi + u) + \mu - y_2 \beta_1 I - y_3(\psi + u)), \\ \frac{\partial H}{\partial I} &= -(y_1(-\beta_1 S + (1 - \gamma)) + y_2(\beta_1 S + \beta_2 - (\mu + \mu_c) - 1) + y_3(-\beta_2) + y_4 \gamma, \\ &= y_1(\beta_1 S - (1 - \gamma)) - y_2(\beta_1 S + \beta_2 - (\mu + \mu_c) - 1) + y_3(\beta_2) - y_4 \gamma, \\ \frac{\partial H}{\partial V} &= -(1 - y_3 \mu), \\ &= y_3 \mu - 1, \\ \frac{\partial H}{\partial R} &= y_4 \mu.\end{aligned}\tag{3.12}$$

### 3.4. Simulasi Numerik

Untuk memverifikasi hasil teoritis pada sub bab sebelumnya, pada bagian ini diberikan simulasi numerik menggunakan software R. Berikut diberikan simulasi lintasan kestabilan model SIVR.

Pada Gambar 2 diberikan parameter untuk  $\Lambda = 1$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mu_c = 2$ ,  $\psi = 1$ , dan  $\gamma = 1,5$ , sehingga  $R_0 = 0,333 < 1$ ; maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_1$  akan stabil menuju  $\bar{S}_1, \bar{I}_1 = (0,5, 0)$ .

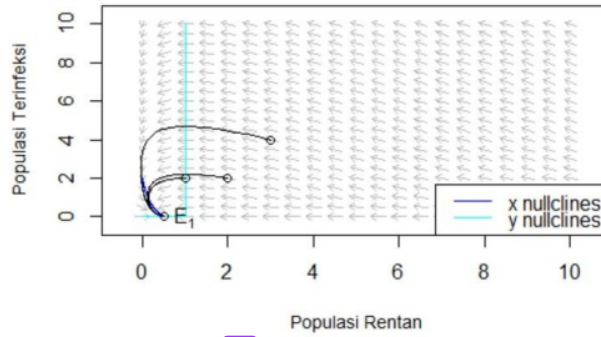
Sedangkan pada Gambar 3, sistem akan stabil menuju  $\bar{S}_2, \bar{I}_2 = (1,5, 1,018519)$  karena titik tersebut merupakan titik ekuilibrium endemik  $E_2$  dengan  $\Lambda = 5$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mu_c = 2$ ,  $\psi = 0,5$ , dan  $\gamma = 0,7$  sehingga  $R_0 = 2,222 > 1$ .

Nilai-nilai parameter yang digunakan untuk simulasi diambil dari referensi [10, 11] untuk formula parameternya, sementara data diperoleh dari [6,7,8]. Untuk kondisi awal, diberikan (14 Januari 2021):

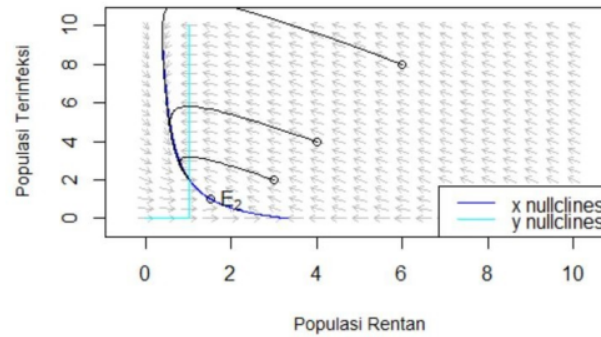
$$S(0) = 36.351.920, I(0) = 97.059, V(0) = 978, \text{ dan } R(0) = 66.078.$$

Untuk menunjukkan kestabilan titik ekuilibrium  $E_1$ , dipilih nilai-nilai parameter

$$\begin{aligned}\Lambda &= 1.095, 89, \beta_1 = 5, 501773 \times 10^8, \beta_2 = 0, \\ \psi &= 0, \mu = 3, 68 \times 10^5, \mu_c = 0, 0477, \gamma = 0, 05555556,\end{aligned}\tag{3.13}$$



Gambar 2: Kestabilan Untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit



Gambar 3: Kestabilan Untuk Titik Ekuilibrium Endemik

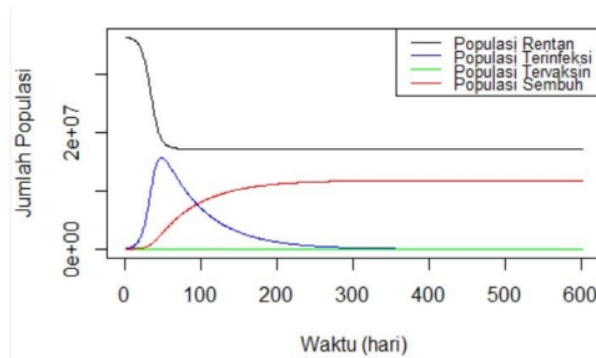
dengan laju vaksinasi dan laju penularan dari terinfeksi diasumsikan bernilai nol. Nilai-nilai parameter (3.13) diperoleh titik ekuilibrium  $E_2 = ((19.043.621), (3.824, 917), 0, (5.774.332, 301))$  dan  $R_0 = 1,563758 > 1$  yang memenuhi kondisi Teorema 3.4. Dengan demikian  $E_2$  stabil asimtotik lokal seperti terlihat pada Gambar 4.

Gambar 4 merupakan solusi terhadap waktu yang menunjukkan populasi terinfeksi pada akhirnya akan selalu ada. Hal tersebut terlihat bahwa untuk populasi rentan stabil di 19.043.621 jiwa, dan populasi terinfeksi 3.824, 917 jiwa pada saat  $t$  tertentu.

Untuk menunjukkan kestabilan titik ekuilibrium  $E_2$ , dipilih nilai-nilai parameter:

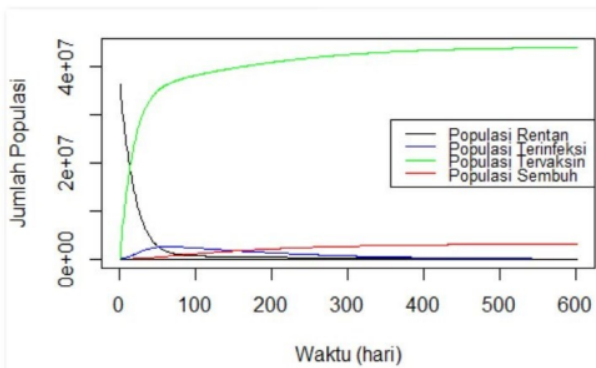
$$\Lambda = 1.095, 89, \beta_1 = 5, 501773 \times 10^8, \beta_2 = 0, 00204499$$

$$\psi = 2, 69037 \times 10^5, \mu = 3, 68 \times 10^5, \mu_c = 0, 0477, \gamma = 0, 05555556. \quad (3.14)$$



Gambar 4: Kasus COVID-19 Jawa Tengah ( $R_0 > 1$ )

Dengan nilai-nilai parameter pada persamaan (3.14), diperoleh titik ekuilibrium  $E_1 = (17.202.925, 0, 12.576.694, 0)$  dan  $R_0 = 0,9051098 < 1$  yang memenuhi kondisi Teorema 3.3. Dengan demikian  $E_1$  stabil asimtotik lokal seperti terlihat pada Gambar 5.

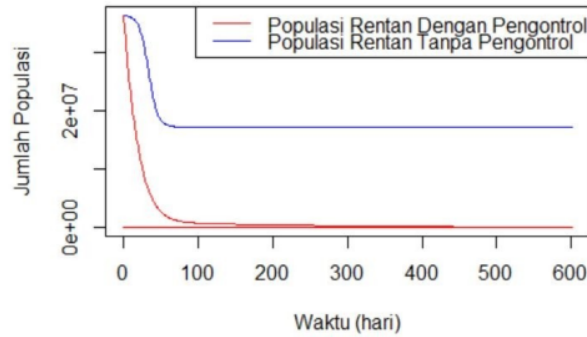


Gambar 5: Kasus COVID-19 Jawa Tengah ( $R_0 < 1$ )

Gambar 5 merupakan solusi terhadap waktu yang menunjukkan populasi terinfeksi pada akhirnya akan hilang. Hal tersebut terlihat bahwa untuk populasi terinfeksi nol pada saat  $t$  tertentu dengan populasi rentannya 17.202.925 jiwa.

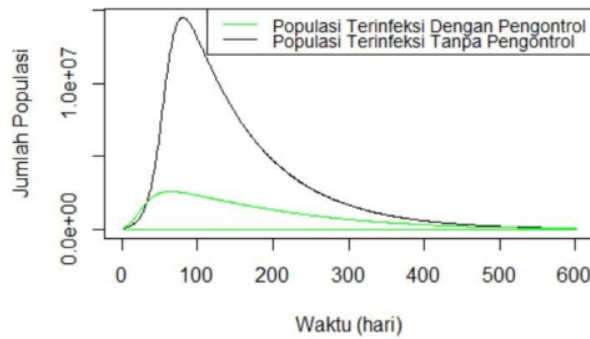
3.4.1. Perbedaan Model SIVR Dengan dan Tanpa Pengontrol

Berikut grafik perbandingan model SIVR tanpa pengontrol dan dengan pengontrol. Berdasarkan Gambar 6, terlihat bahwa populasi rentan mengalami penurunan.



Gambar 6: Kompartemen Susceptible Kasus COVID-19 Jawa Tengah

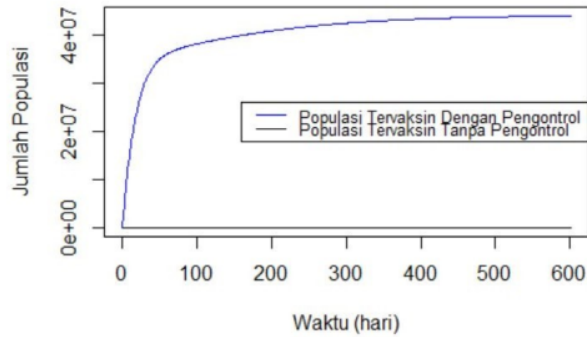
Penurunan ini dikarenakan populasi rentan terinfeksi COVID-19 dan berpindah ke populasi terinfeksi. Populasi rentan dengan pengontrol, bergerak lebih cepat dibanding tanpa pengontrol.



Gambar 7: Kompartemen Infected Kasus COVID-19 Jawa Tengah

Pada Gambar 7 terlihat bahwa laju pertumbuhan populasi terinfeksi naik. Hal ini dikarenakan populasi rentan yang terinfeksi COVID-19 berpindah ke populasi terinfeksi. Namun, laju pertumbuhan populasi terinfeksi perlahan menurun, hal ini dikarenakan laju kematian populasi terinfeksi lebih besar dari laju penambahan populasi terinfeksi dan populasi yang terinfeksi ada yang berpindah ke rentan kembali dan populasi sembuh. Laju pertumbuhan populasi terinfeksi kemudian perlahan akan naik turun sampai pada waktu  $t$  tertentu dan akan terlihat dalam kondisi setimbang (di titik ekuilibrium).

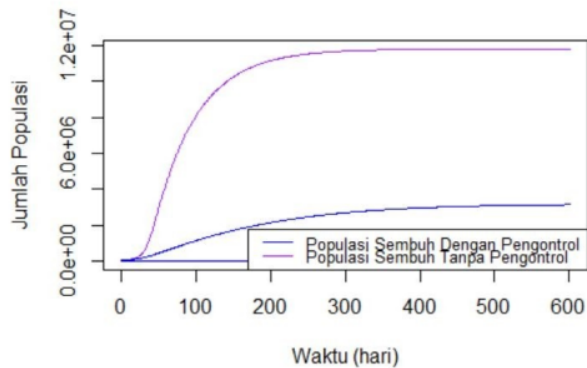
Laju pertumbuhan populasi tervaksin meningkat pada kasus COVID-19 dengan pengontrol (lihat Gambar 8).



Gambar 8: Kompartemen Vaccinated Kasus COVID-19 Jawa Tengah

Berbeda dengan populasi tervaksin tanpa pengontrol konstan di 978 jiwa. Hal ini dikarenakan asumsi dari tidak adanya laju vaksinasi dan laju penularan dari populasi tervaksin.

Laju pertumbuhan populasi sembuh meningkat ditunjukkan pada Gambar 9, meskipun populasi sembuh tanpa vaksinasi lebih besar dibanding dengan vaksinasi (pengontrol). Hal ini dikarenakan pada kasus COVID-19 dengan pengontrol, populasi terinfeksi semakin menurun dan populasi tervaksin meningkat.



Gambar 9: Kompartemen Recovered Kasus COVID-19 Jawa Tengah

Dari seluruh hasil yang diperoleh, secara garis besar bentuk pengontrol vaksin dapat menekan penyebaran COVID-19 di Jawa Tengah dalam jangka waktu kurang lebih 0 sampai dengan 600 hari, sehingga dapat mengurangi populasi yang terinfeksi dan meningkatkan jumlah populasi sehat dalam waktu tersebut.

#### 4. Kesimpulan

Pada artikel ini dipelajari model penyebaran COVID-19, yang terdiri dari populasi rentan, populasi terinfeksi, populasi tervaksin, dan populasi sembuh. Diperhatikan juga kontrol optimal pada vaksin sebagai upaya pencegahan terinfeksi COVID-19. Dari model yang disusun, selanjutnya dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Untuk penelitian selanjutnya perlu dipelajari lebih mendalam mengenai penyebaran COVID-19, dilakukan pengujian untuk analisis kestabilan global, dan adanya interferensi pengobatan yang mungkin dilakukan.

#### Daftar Pustaka

- [1] Fitriani, N. I. (2020). Tinjauan pustaka Covid-19: virologi, patogenesis, dan manifestasi klinis. *Jurnal Medika Malahayati*, 4(3)
- [2] WHO (2020). WHO Director-Generals opening remarks at the media briefing on COVID-19, 11 March 2020, <https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19-11-march-2020>, 17 Desember 2020
- [3] Huang, C., Wang, Y., Li, X., Ren, L., Zhao, J., Hu, Y., , Cao, B. (2020). Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China. *The Lancet*, 395(10223), 497-506
- [4] Rembulan, G. D., Wijaya, T., Palullungan, D., Alfina, K. N., Qurthuby, M. (2020). Kebijakan Pemerintah Mengenai Coronavirus Disease (COVID-19) di Setiap Provinsi di Indonesia Berdasarkan Analisis Klaster. *Journal of Industrial Engineering and Management Systems* 13(2)
- [5] Tim Satgas Penanganan COVID-19 (2021). Analisis Data COVID-19 Indonesia update per 03 Januari 2021, <https://covid19.go.id/>, 08 April 2021
- [6] Makmun, A., Hazhiah, S. F. (2020). Tinjauan Terkait Pengembangan Vaksin Covid 19. *Molucca Medica*, 52-59
- [7] Aldila, D. (2020). Cost-effectiveness and backward bifurcation analysis on COVID-19 transmission model considering direct and indirect transmission. *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, 2020, Article-ID
- [8] Ndi, M. Z., Adi, Y. A. (2020). Modelling the transmission dynamics of COVID-19 under limited resources. *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, 2020, Article-ID.
- [9] Pertiwi, J. I., Putri, A. R., Efendi, E. (2020). Analisis Perilaku Model Sir Tanpa dan dengan Vaksinasi. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 14(2), 217-226
- [10] Kurnia N.P. (2014). Analisis Stabilitas Model Epidemik Seiv (Susceptible-exposed-infected-vaccinated) Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B di Kabupaten Jember, *Tesis*. Universitas Jember
- [11] Adi, Y. A., Ndi, M. Z. (2020). Modeling and Prediction of COVID-19 with a Large Scale Social Distancing. *Journal of Mathematics and Mathematics Education* (20190), 9(1)
- [12] Ndi, M. Z. (2018). Pemodelan Matematika Dinamika Populasi Dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, Dan Numerik. Deepublish
- [13] Lawrence, P. (1991). *Differential equations and dynamical systems*
- [14] Teschl, G. (2004). *Ordinary differential equations and dynamical systems*

- [15] Martcheva, M. (2015). An introduction to mathematical epidemiology (Vol. 61). New York: Springer
- [16] Lenhart, S., Workman, J. T. (2007). *Optimal control applied to biological models*. Chapman and Hall/CRC
- [17] Corona Statistics (2021). <http://datastudio.google.com/reporting/fda876a7-3eb2-4080-92e8-679c93d6d1bd/page/h6oVB?feature=opengraph>, 7 Juni 2021
- [18] Vaksin KemKes (2021). <https://vaksin.kemkes.go.id/#/detail> data, 15 Juni 2021
- [19] Dinas Kesehatan Jawa Tengah (2021). Hasil Sensus Penduduk 2020, <https://dinkesjatengprov.go.id/v2018/storage/2021/01/BRS-Hasil-Sensus-Penduduk-2020-Jawa-Tengah.pdf>, 7 Juni 2021



# MASALAH KONTROL OPTIMAL PADA PENYEBARAN COVID-19 DI JAWA TENGAH DENGAN VAKSINASI

---

ORIGINALITY REPORT

---

22%

SIMILARITY INDEX

---

## PRIMARY SOURCES

---

1	<a href="https://repository.unhas.ac.id">repository.unhas.ac.id</a> Internet	183 words — 5%
2	<a href="https://jurnal.stmikasia.ac.id">jurnal.stmikasia.ac.id</a> Internet	62 words — 2%
3	<a href="https://repository.uin-suska.ac.id">repository.uin-suska.ac.id</a> Internet	36 words — 1%
4	<a href="https://jurnal.uns.ac.id">jurnal.uns.ac.id</a> Internet	33 words — 1%
5	<a href="https://eprints.uny.ac.id">eprints.uny.ac.id</a> Internet	30 words — 1%
6	<a href="https://journal.uinsgd.ac.id">journal.uinsgd.ac.id</a> Internet	30 words — 1%
7	<a href="https://www.kompasiana.com">www.kompasiana.com</a> Internet	27 words — 1%
8	<a href="https://journal.upgris.ac.id">journal.upgris.ac.id</a> Internet	26 words — 1%
9	<a href="https://docplayer.info">docplayer.info</a> Internet	22 words — 1%

10	<a href="http://journal2.um.ac.id">journal2.um.ac.id</a> Internet	22 words — 1%
11	<a href="http://www.its.ac.id">www.its.ac.id</a> Internet	20 words — 1%
12	<a href="http://123dok.com">123dok.com</a> Internet	19 words — 1%
13	<a href="http://digilib.uin-suka.ac.id">digilib.uin-suka.ac.id</a> Internet	19 words — 1%
14	<a href="http://ojs3.unpatti.ac.id">ojs3.unpatti.ac.id</a> Internet	18 words — 1%
15	<a href="http://repository.poltekkes-denpasar.ac.id">repository.poltekkes-denpasar.ac.id</a> Internet	17 words — < 1%
16	<a href="http://rsupsoeradji.id">rsupsoeradji.id</a> Internet	16 words — < 1%
17	<a href="http://eprints.uad.ac.id">eprints.uad.ac.id</a> Internet	15 words — < 1%
18	<a href="http://repository.usd.ac.id">repository.usd.ac.id</a> Internet	13 words — < 1%
19	<a href="http://text-id.123dok.com">text-id.123dok.com</a> Internet	13 words — < 1%
20	<a href="http://repository.its.ac.id">repository.its.ac.id</a> Internet	12 words — < 1%
21	<a href="http://www.ensmp.fr">www.ensmp.fr</a> Internet	12 words — < 1%

[etd.repository.ugm.ac.id](http://etd.repository.ugm.ac.id)

22	Internet	11 words — < 1%
23	journal.walisongo.ac.id Internet	11 words — < 1%
24	jurnal.unigal.ac.id Internet	10 words — < 1%
25	repo.itera.ac.id Internet	10 words — < 1%
26	ejournal.balitbangham.go.id Internet	9 words — < 1%
27	prosiding.upgris.ac.id Internet	9 words — < 1%
28	repositori.usu.ac.id Internet	9 words — < 1%
29	repository.ub.ac.id Internet	9 words — < 1%
30	Khozin Mu`tamar, Supriadi Putra, Sukma Adi Perdana. "ANALISIS PENYEBARAN COVID-19 DENGAN MENGGUNAKAN MODEL SIR DAN VAKSINASI SERTA ESTIMASI PARAMETER", BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 2021 Crossref	8 words — < 1%
31	covid19.go.id Internet	8 words — < 1%
32	Aan Febriani, Yollanda Ardhitya Putri, Sharah Ayuni, Saryono Saryono. "Kesehatan mental	7 words — < 1%

# masyarakat selama pandemi covid-19: Literatur review", Riset Informasi Kesehatan, 2021

Crossref

- 
- 33 [caridokumen.com](http://caridokumen.com) 7 words — < 1%  
Internet
- 
- 34 [e-jurnal.unisda.ac.id](http://e-jurnal.unisda.ac.id) 7 words — < 1%  
Internet
- 
- 35 Miftahul Jannah, Muhammad Ahsar Karim, Yuni Yulida. "ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIR UNTUK PENYEBARAN COVID-19 DENGAN PARAMETER VAKSINASI", BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 2021 6 words — < 1%  
Crossref
- 
- 36 Muhammad Nurul Huda, Titin Purwaningsih, Hammam. "Nonalam Disaster Management Policy for The Spread of Covid-19 in The Framework of Regional Autonomy (Central Java Provincial Government Case Study)", JKMP (Jurnal Kebijakan dan Manajemen Publik), 2021 6 words — < 1%  
Crossref
- 
- 37 Raden Muhammad Ali Satria, Resty Varia Tutupoho, Djazuly Chalidyanto. "Analisis Faktor Risiko Kematian dengan Penyakit Komorbid Covid-19", Jurnal Keperawatan Silampari, 2020 6 words — < 1%  
Crossref
- 
- 38 Walter Alt, Robert Baier, Frank Lempio, Matthias Gerds. "Approximations of linear control problems with bang-bang solutions", Optimization, 2013 6 words — < 1%  
Crossref

