PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN
Kampus 4 Jl. Kolektor Ringroad Selatan, Tamanan Banguntapan Bantul Yogyakarta 55164.
www.pmat.uad.ac.id Email : prodi@pmat.uad.ac.id

SURAT KETERANGAN

Nomor: PS.6./026/B.66/VI/2022

Yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	: Uswatun Khasanah, M.Sc.
NIY	: 60020402
Jabatan	: Ketua Program Studi
Unit Kerja	: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Ahmad Dahlan

Dengan ini menerangkan bahwa publikasi karya ilmiah dengan

No	Judul Artikel	Nama Jurnal, Volum, Nomor	Penulis	Tanggal Terbit
1.	Suatu Generalisasi (R, S)-Submodul Prima Gabungan	Jurnal Matematika Integratif Volum 14 Nomor 02	Dian Ariesta Yuwaningsih Syarifah Inayati	7 Januari 2019

Belum pernah digunakan dalam pengajuan jabatan fungsional sebelumnya oleh dosen kami dengan

Nama	: Dian Ariesta Yuwaningsih, M.Sc.
NIY	: 60140768
Jabatan Akademik	: Asisten Ahli
Program Studi	: Pendidikan Matematika FKIP Universitas Ahmad Dahlan

Demikian surat keterangan ini diberikan kepada yang bersangkutan agar dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Yogyakarta, 6 Juni 2022

Ketua Program Studi

Uswatun Khasanah, M.Sc.

NIY. 60020402

JURNAL MATEMATIKA INTEGRATIF
Departemen Matematika FMIPA
Universitas Padjadjaran

Sekretariat: Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21, Gedung D13 Unpad Lantai 2, Jatinangor 45363
Telp.022 7794696, Email: info.jmi@unpad.ac.id, ISSN 1412-6184, e-ISSN 2549-9033

SURAT KETERANGAN
No : 01/SK/JMI/L/II/2019

Pimpinan Redaksi Jurnal Matematika Integratif menerangkan bahwa:

Penerbitan Jurnal Matematika Integratif Volume 14 No. 2 Oktober 2018 baru terbit secara online pada laman http://jurnal.unpad.ac.id/jmi pada tanggal 7 Januari 2019 disebabkan beberapa kendala yaitu proses pengumpulan paper, proses review, dan proses percetakan.

Surat keterangan ini dibuat untuk dipergunakan sebagaimana mestinya.

Jatinangor, 4 Februari 2019

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMIPA Universitas Padjadjaran

Prof. Dr. Asep Kuswandi Supriatna, MS
NIP: 19650110 198902 1 001

Ketua Redaksi,

Dr. Endang Rusyaman, M.S
NIP. 19610408 198601 1 001

Volume 14 No. 2, Oktober 2018

p-ISSN : 1412 - 6184
e-ISSN : 2549 - 9033

Jurnal
MATEMATIKA INTEGRATIF

PENGGUNAAN MS EXCEL UNTUK ESTIMASI MODEL GARCH(1,1)
Oleh: Didit Budi Nugroho, Bambang Susanto, Mince M. M. Rosely

PENERAPAN TEOREMA TITIK TETAP PADA SISTEM PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA
Oleh: Sagita Charolina Sihombing, Linda Lia

PENERAPAN MODEL HARGA OPSI BLACK-SCHOLES DALAM PENETAPAN PREMI ASUSRANSI JIWA BERJANGKA UNIT LINK
Oleh: Felfin Ulfah Annisa, Riaman, Betty Subartini

SUATU GENERALISASI (R,S)-SUBMODUL PRIMA GABUNGAN
Oleh: Dian Ariesta Yuwaningsih, Syarifah Inayati

SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP SUBMODUL PURE PADA MODUL PERKALIAN
Oleh: Yopi Andry Lesnussa

PENGARUH PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) DAERAH TERHADAP PERTUMBUHAN EKONOMI DAN TINGKAT PENGANGGURAN TERBUKA DI PROVINSI DKI JAKARTA
Oleh: Putri Romhadhoni, Dita Zamrotul Faizah, Nada Afifah

"PRIMATHRIC": APLIKASI ALGORTIME PRIM UNTUK OPTIMASI PENYEDIAAN AKSES ENERGI LISTRIK DI KABUPATEN ALOR
Oleh: Yudasril, Imas Saumi Amalia, Alfiyah Hasanah

KLASIFIKASI STATUS KINERJA BANK YANG TERDAFTAR DI BEI DENGAN PENDEKATAN WINSORIZED MODIFIED ONE-STEP M-ESTIMATOR
Oleh: Milani Destriana, Nurul Gusriani, Iin Irianingsih

Diterbitkan Oleh :
JMI Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
http://jurnal.unpad.ac.id/jmi dan e-mail: info.jmi@unpad.ac.id

EDITORIAL BOARD

Jurnal Matematika Integratif

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Padjadjaran
Jalan Raya Bandung – Sumedang Km 21 Jatinangor, Sumedang 45363, Indonesia
Phone/Fax: +62 22 7794696
E-mail: info.jmi@unpad.ac.id Website: http:/ / jurnal.unpad.ac.id/jmi

Jurnal Matematika Integratif (p-ISSN:1412-6184 | e-ISSN:2549-9033) diterbitkan oleh Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran. Terindeks oleh Google Scholar, CrossReff, Indonesian Publication Index (IPI), SINTA 4, dan Directory of Open Access Journal (DOAJ).

DAFTAR ISI

Volume 14 No. 2, Oktober 2018

p-ISSN : 1412 - 6184
e-ISSN : 2549 - 9033

Jurnal MATEMATIKA INTEGRATIF

Volume 14 No 2 (Oktober 2018)
Daftar Isi

PENGGUNAAN MS EXCEL UNTUK ESTIMASI MODEL GARCH(1,1) 71-81
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.17680.71-82
Didit Budi Nugroho, Bambang Susanto, Mince M. M. Rosely

PENERAPAN TEOREMA TITIK TETAP PADA SISTEM PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA 83-90
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.17891.83-90
Sagita Charolina Sihombing, Linda Lia

PENERAPAN MODEL HARGA OPSI BLACK-SCHOLES DALAM PENETAPAN PREMI ASURANSI JIWA BERJANGKA UNIT LINK 91-97
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.18057.91-97
Felfin Ulfah Annisa, Riaman, Betty Subartini

SUATU GENERALISASI (R,S)-SUBMODUL PRIMA GABUNGAN 99-104
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.18088.99-104
Dian Ariesta Yuwaningsih, Syarifah Inayati

SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP SUBMODUL PURE PADA MODUL PERKALIAN 105-112
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.18399.105-112
Yopi Andry Lesnussa

PENGARUH PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) DAERAH TERHADAP PERTUMBUHAN EKONOMI DAN TINGKAT PENGANGGURAN TERBUKA DI PROVINSI DKI JAKARTA 113-120
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.19262.115-121
Putri Romhadhoni, Dita Zamrotul Faizah, Nada Afifah

"PRIMATHRIC": APLIKASI ALGORTIME PRIM UNTUK OPTIMASI PENYEDIAAN AKSES ENERGI LISTRIK DI KABUPATEN ALOR 121-132
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.19271.123-134
Yudasril, Imas Saumi Amalia, Alfiyah Hasanah

KLASIFIKASI STATUS KINERJA BANK YANG TERDAFTAR DI BEI DENGAN PENDEKATAN WINSORIZED MODIFIED ONE-STEP M-ESTIMATOR 133-140
DOI : 10.24198/jmi.v14.n2.18543.135-142
Milani Destriana, Nurul Gusriani, Iin Irianingsih

Diterbitkan Oleh :
JMI Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
http://jurnal.unpad.ac.id/jmi dan e-mail: info.jmi@unpad.ac.id

ARTIKEL

Jurnal Matematika Integratif. p-ISSN:1412-6184, e-ISSN:2549-903
Vol. 14, No. 2 (2018), pp. 99–104. doi:10.24198/jmi.v14.n2.2018.99-104

Suatu Generalisasi (R, S)-Submodul Prima Gabungan

Dian Ariesta Yuwaningsih[1], **Syarifah Inayati**[2]

[1]Prodi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Ahmad Dahlan
Jalan Ring Road Selatan, Tamanan, Bantul, Daerah Istimewa Yogyakarta
Email : dian.ariesta@pmat.uad.ac.id

[2]Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
Karangmalang, Depok, Sleman, Daerah Istimewa Yogyakarta
Email : syarifah.inayati@uny.ac.id

ABSTRAK

Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, serta suatu (R, S)-modul M. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap ideal I di R, ideal J di S, dan (R, S)-submodul N di M dengan $INJ \subseteq P$ berakibat $IMJ \subseteq P$ atau $N \subseteq P$. Pada paper ini akan disajikan pendefinisian salah satu generalisasi dari (R, S)-submodul prima gabungan, yang selanjutnya disebut (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri. Selanjutnya, disajikan pula beberapa sifat terkait hubungan antara (R, S)-submodul prima lemah kiri dengan (R, S)-submodul prima gabungan.

Kata Kunci: (R, S)-submodul, submodul prima lemah, (R, S)-submodul prima gabungan

ABSTRACT

Let R and S be commutative rings with unity and M be an (R, S)-module. A proper (R, S)-submodule P of M is called a jointly prime (R, S)-submodule if for each ideal I of R, ideal J of S, and (R, S)-submodule N of M satisfy $INJ \subseteq P$ implies $IMJ \subseteq P$ or $N \subseteq P$. In this paper, we will present the definition of one generalization of jointly prime (R, S)-submodules, that is called left weakly jointly prime (R, S)-submodules. Furthermore,we will show some properties about the relationship between left weakly jointly prime (R, S)-submodules and jointly prime (R, S)-submodules.

Keywords : *(R, S)-submodule, weakly prime submodule, jointly prime (R, S)-submodule*

1. Pendahuluan

Diberikan ring R dan ring S sebarang. Suatu R-modul telah mengalami generalisasi menjadi suatu (R, S)-bimodul. Konsep terkait bimodul ini dapat ditemukan di dalam buku Adkins [1].

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, konsep (R, S)-bimodul telah diperumum menjadi suatu struktur aljabar baru, yang disebut dengan (R, S)-modul. Konsep terkait (R, S)-modul ini telah diperkenalkan oleh Khumprapussorn, dkk.,[9]. Di dalam paper [9], dijelaskan bahwa suatu (R, S)-bimodul itu merupakan (R, S)-modul, namun tidak berlaku sebaliknya.

2000 Mathematics Subject Classification: 16D10; 16D80
Received: 2018-07-30, accepted: 2018-11-03

Suatu (R, S)-modul dapat menjadi (R, S)-bimodul jika ring R memuat suatu elemen idempoten sentral.

Di sisi lain, konsep tentang keprimaan di dalam suatu R-modul telah diperkenalkan oleh Dauns [8]. Seperti halnya di dalam R-modul, di dalam (R, S)-modul juga dapat didefinisikan keprimaan (R, S)-submodulnya. Salah satunya adalah (R, S)-submodul prima gabungan. Khumprapussorn, dkk., dalam paper [9] menyebutkan bahwa suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap ideal kiri I di R, ideal kanan J di S, dan (R, S)-submodul N di M dengan $INJ \subseteq P$ maka berakibat $IMJ \subseteq P$ atau $N \subseteq P$. Lebih lanjut, penelitian terkait (R, S)-submodul prima gabungan ini telah dikembangkan ke radikal prima gabungan oleh Yuwaningsih, dkk.,[10].

Seiring berjalannya waktu, definisi keprimaan di dalam suatu R-modul mengalami suatu generalisasi. Salah satu bentuk generalisasinya adalah submodul prima lemah. Konsep terkait submodul prima lemah telah banyak dibahas dalam paper Ansari-Toroghy dan Farshadifar [2], Atani dan Farzalipour [3], Azizi [4], Azizi [5], Behboodi dan Koohy [6], dan Behboodi [7], .

Ketika R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, penulis akan mendefinisikan kembali pengertian (R, S)-submodul prima gabungan serta menyelidiki beberapa sifat-sifatnya. Lebih lanjut, akan disajikan bagaimana pendefinisian salah satu generalisasi dari (R, S)-submodul prima gabungan lemah, yaitu (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri. Kemudian akan disajikan beberapa sifat terkait hubungan antara (R, S)-submodul prima lemah kiri dengan (R, S)-submodul prima gabungan. Tanpa mengurangi perumuman, dalam keseluruhan tulisan ini ring yang digunakan merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, kecuali didefinisikan selain itu.

2. (R, S)-Submodul Prima Gabungan

Dalam keseluuhan tulisan ini, ring R dan ring S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Sifat ring komutatif dengan elemen satuan ini dapat digunakan untuk menggantikan sifat "untuk setiap $a \in M$ $a \in RaS$" pada Proposisi 2.1. pada paper Khumprapussorn, dkk.,[9] menjadi sifat berikut.

Proposisi 2.1. *Diberikan R dan S merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, serta (R, S)-modul M dan (R, S)-submodul N di M. Jika X dan Y masing-masing merupakan himpunan tak kosong di R dan S, maka berlaku sifat:*

(1) (a) Jika $(RX)MS \subseteq N$, maka $XMS \subseteq N$.
(b) $XMS \subseteq (XR)MS$.
(2) (a) Jika $RM(YS) \subseteq N$, maka $RMY \subseteq N$.
(b) $RMY \subseteq RM(SY)$.
(3) Untuk sebarang himpunan $W \subseteq M$, berlaku $W \subseteq RWS$. Lebih lanjut, $W = RWS$ jika dan hanya jika W merupakan (R, S)-submodul di M.

Apabila ring R dan ring S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, maka (R, S)-submodul prima gabungan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2. *Diberikan (R, S)-modul M dengan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap ideal I di R, ideal J di S, dan (R, S)-submodul N di M dengan $INJ \subseteq P$ berakibat $IMJ \subseteq P$ atau $N \subseteq P$.*

Berikut diberikan sifat terkait (R, S)-submodul prima gabungan yang merupakan modifikasi dari Teorema 2.7. di dalam paper Khumprapussorn, dkk.,[9].

Proposisi 2.3. *Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, serta (R, S)-modul M. Pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen:*

(1) P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan di M.
(2) Jika untuk setiap ideal I di R, $m \in M$, dan ideal J di S memenuhi $ImJ \subseteq P$, maka berakibat $IMJ \subseteq P$ tau $m \in P$.

(3) Jika untuk setiap $a \in R$, $m \in M$, dan $b \in S$ memenuhi $amb \in P$, maka berakibat $aMb \subseteq P$ atau $m \in P$.

(4) Jika untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$ memenuhi $amS \subseteq P$, maka berakibat $aMS \subseteq P$ atau $m \in P$.

Bukti. (1) $\Rightarrow$ (2). Ambil sebarang ideal I di R, $m \in M$, dan ideal J di S dengan $ImJ \subseteq P$. Dari sini, diperoleh $RImJS \subseteq RPS \subseteq P$, sehingga $R^2ImJS^2 \subseteq RPS \subseteq P$. Karena R dan S merupakan ring komutatif, maka diperoleh $(RI)(RmS)(JS) \subseteq P$. Karena P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan, maka $(RI)M(JS) \subseteq P$ atau $RmS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $ImJ \subseteq P$ atau $m \in P$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Ambil sebarang $a \in R$, $m \in M$, dan $b \in S$ dengan $amb \in P$ tetapi $m \notin P$. Dari sini, diperoleh $(Ra)m(bS) \subseteq RPS \subseteq P$. Karen Ra merupakan ideal di R dan bS merupakan ideal di S, maka berdasarkan hipotesis diperoleh $(Ra)M(bS) \subseteq P$ atau $m \in P$. Namun, karena $m \notin P$, maka diperoleh $aMb \subseteq (Ra)M(bS) \subseteq P$.
(3) $\Rightarrow$ (4). Diambil sebarang $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $amS \subseteq P$. Berarti untuk setiap $b \in S$ memenuhi $amb \in P$. Berdasarkan hipotesis, maka diperoleh $aMb \subseteq P$ atau $m \in P$. Akibatnya, diperoleh $aMS \subseteq P$ atau $m \in P$.
(4) $\Rightarrow$ (1). Ambil sebarang ideal I di R, (R, S)-submodul K di M, dan ideal $J = S$ di S dengan $IKJ = IKS \subseteq P$ tetapi $K \nsubseteq P$. Ambil sebarang $n \in K \setminus P$ dan $a \in I$. Dari $IKS \subseteq P$, diperoleh $anS \subseteq P$. Berdasarkan hipotesis maka diperoleh $aMS \subseteq P$ atau $n \in P$. Namun, karena $n \notin P$, maka diperoleh $aMS \subseteq P$. Selanjutnya, karena pengambilan elemen $a \in I$ sebarang, maka diperoleh $IMS \subseteq P$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan di M. ■

Khumprapussorn, dkk. [9] telah mendefinisikan himpunan annihilator dari suatu (R, S)-modul faktor sebagai berikut.

Definisi 2.4. *Diberikan (R, S)-modul M dan (R, S)-submodul N di M. Didefinisikan*

$$(N :_R M) = \{r \in R \mid rMS \subseteq N\} = Ann_R(M/N).$$

Di dalam paper Khumprapussorn, dkk.,[9] dijelaskan bahwa $(N :_R M)$ membentuk ideal di R jika ring S memenuhi sifat $S^2 = S$. Namun, sifat $S^2 = S$ ini bisa digantikan dengan sifat komutatif dengan elemen satuan dari masing-masing ring R dan ring S, seperti dijelaskan dalam sifat berikut.

Proposisi 2.5. *Diberikan (R, S)-modul M dan (R, S)-submodul N di M. Jika R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, maka $(N :_R M)$ merupakan ideal di R.*

Bukti. Diambil sebarang $a, b \in (N :_R M)$, maka jelas bahwa $a - b \in (N :_R M)$. Ambil $a \in (N :_R M)$ dan $r \in R$, maka $aMS \subseteq N$ dan

$$raMS = raMS1 \subseteq raMSS = r(aMS)S \subseteq rNS \subseteq N.$$

Jadi, $ra \in (N :_R M)$. Selanjutnya,

$$arMS = (ar)MS = (ra)MS \subseteq (ra)MSS = r(aMS)S \subseteq rNS \subseteq N.$$

Jadi, $ar \in (N :_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(N :_R M)$ merupakan ideal di R. ■

3. (R, S)-Submodul Prima Gabungan Lemah Kiri

Pada bagian ini akan didefinisikan salah satu generalisasi dari (R, S)-submodul prima gabungan, yaitu (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri.

Definisi 3.1. *Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, serta (R, S)-modul M. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri jika untuk setiap (R, S)-submodul N di M dan elemen $a, b \in R$ dengan $abNS \subseteq P$ berakibat $aNS \subseteq P$ atau $bNS \subseteq P$.*

Diperhatikan bahwa kata "kiri" di dalam penamaan (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri ini relatif terhadap ring R. Adapun pendefinisian dan penyelidikan sifat-sifat dari (R,S)-submodul prima lemah "kanan" yang relatif terhadap ring S dapat dilakukan dengan cara yang sama.

Berikut diberikan sifat dari (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri, yang selanjutnya dapat digunakan sebagai pendefinisian lain dari (R,S)-submodul lemah kiri yang melibatkan ideal-ideal di dalam ring R.

Proposisi 3.2. *Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, serta (R,S)-modul M. Suatu (R,S)-submodul sejati P di M merupakan (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri jika dan hanya jika untuk setiap (R,S)-submodul N di M serta ideal I dan J di R dengan $IJNS \subseteq P$, berakibat $INS \subseteq P$ atau $JNS \subseteq P$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri di M. Diambil sebarang (R,S)-submodul N di M serta ideal I dan J di R dengan $IJNS \subseteq P$. Ambil sebarang $a \in I$ dan $b \in J$, maka diperoleh $abNS \subseteq IJNS \subseteq P$. Karena P diketahui merupakan (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri, maka diperoleh $aNS \subseteq P$ atau $bNS \subseteq P$. Karena pengambilan elemen $a \in I$ dan $b \in J$ sebarang, maka diperoleh $INS \subseteq P$ atau $JNS \subseteq P$.
$(\Leftarrow)$. Akan dibuktikan bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri di M. Diambil sebarang (R,S)-submodul N di M dan elemen $a,b \in M$ dengan $abNS \subseteq P$. Diperhatikan bahwa dari $abNS \subseteq P$ diperoleh $R^2abNSS^2 \subseteq RPS \subseteq P$, sehingga $(Ra)(Rb)NS^3 \subseteq P$. Karena S merupakan ring dengan elemen satuan, maka diperoleh $(Ra)(Rb)NS \subseteq P$. Akibatnya, berdasarkan hipotesis maka diperoleh $(Ra)NS \subseteq P$ atau $(Rb)NS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $aNS \subseteq P$ atau $bNS \subseteq P$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri di M. ■

Berikut diberikan beberapa contoh (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri.

Contoh 3.3. *Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-modul. Dapat ditunjukkan bahwa $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-submodul $6\mathbb{Z}$ merupakan $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-submodul prima gabungan lemah kiri di $\mathbb{Z}$. Misalkan, diambil ideal $I = 2k\mathbb{Z}$ dan ideal $J = 2l\mathbb{Z}$ di $2\mathbb{Z}$ serta $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-submodul $N = x\mathbb{Z}$, untuk suatu $k,l,x \in \mathbb{Z}^+$. Diketahui bahwa*

$$IJNS = (12klx)\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$$

sehingga diperoleh

$$INS = (6kx)\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$$

atau

$$JNS = (6lx)\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}.$$

Jadi, terbukti bahwa $6\mathbb{Z}$ merupakan $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-submodul prima gabungan lemah kiri di $\mathbb{Z}$.

Contoh 3.4. *Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan R dan S dengan:*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b \in 2\mathbb{Z} \right\} \text{ dan } S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Misalkan diberikan (R,S)-modul M dengan

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in 2\mathbb{Z} \right\},$$

maka dapat ditunjukkan bahwa (R,S)-submodul X di M dengan

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x,y \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

merupakan (R,S)-submodul prima gabungan lemah kiri di M.

Contoh 3.5. *Diberikan* $\mathbb{Z}$ *sebagai* $(4\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z})$*-modul. Dapat ditunjukkan bahwa* $(4\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z})$*-submodul* $12\mathbb{Z}$ *merupakan* $(4\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z})$*-submodul prima gabungan lemah kiri di* $\mathbb{Z}$*. Misalkan, diambil ideal* $I = 4k\mathbb{Z}$ *dan ideal* $J = 4l\mathbb{Z}$ *di* $4\mathbb{Z}$ *serta* $(4\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z})$*-submodul* $N = x\mathbb{Z}$*, untuk suatu* $k, l, x \in \mathbb{Z}^+$*. Diketahui bahwa*

$$IJNS = (96klx)\mathbb{Z} \subseteq 12\mathbb{Z}$$

sehingga diperoleh

$$INS = (24kx)\mathbb{Z} \subseteq 12\mathbb{Z}$$

atau

$$JNS = (24lx)\mathbb{Z} \subseteq 12\mathbb{Z}.$$

Jadi, terbukti bahwa $12\mathbb{Z}$ *merupakan* $(4\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z})$*-submodul prima gabungan lemah kiri di* $\mathbb{Z}$*.*

Dalam R-modul M, jika P merupakan submodul prima di M maka $(P :_R M)$ merupakan ideal prima di R dan tidak berlaku sebaliknya. Namun, di dalam (R, S)-modul sifat ini dapat berlaku dua arah sebagaimana disajikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.6. *Diberikan* R *dan* S *masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, serta* (R, S)*-modul* M*. Suatu* (R, S)*-submodul sejati* N *di* M *merupakan* (R, S)*-submodul prima gabungan lemah kiri di* M *jika dan hanya jika untuk setiap* (R, S)*-submodul* K *di* M *dengan* $K \nsubseteq N$ *memenuhi* $(N :_R K)$ *ideal prima di* R*.*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Ambil sebarang (R, S)-submodul K di M dengan $N \subset K$, serta ideal I dan ideal J di R dengan $IJ \subseteq (N :_R K)$. Berarti $IJKS \subseteq N$. Karena N merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri, maka $IKS \subseteq N$ atau $JKS \subseteq N$. Akibatnya, diperoleh $I \subseteq (N :_R K)$ atau $J \subseteq (N_R K)$. Jadi, terbukti bahwa $(N :_R K)$ merupakan ideal prima di R.
$(\Leftarrow)$. Ambil sebarang ideal I dan ideal J di R dan (R, S)-submodul L di M dengan $IJLS \subseteq N$ sehingg $IJ(L + N)S \subseteq N$. Berarti $IJ \subseteq (N :_R L + N)$, Karena $(N :_R L + N)$ merupakan ideal prima, maka diperoleh $I \subseteq (N :_R L + N)$ atau $J \subseteq (N :_R L + N)$. Akibatnya, diperoleh $I(L + N)S \subseteq N$ atau $J(L + N)S \subseteq N$. Terbukti bahwa $ILS \subseteq N$ atau $JLS \subseteq N$. Dengan demikian, terbukti bahwa N merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri di M. ■

Berikut diberikan hubungan antara (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri dengan (R, S)-submodul prima gabungan.

Proposisi 3.7. *Diberikan* R *dan* S *masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan,* (R, S)*-modul* M*, serta* (R, S)*-submodul sejati* P *di* M*. Jika* P *merupakan* (R, S)*-submodul prima gabungan di* M *maka* P *merupakan* (R, S)*-submodul prima gabungan lemah kiri di* M*.*

Bukti. Ambil sebarang ideal I, J di R dan (R, S)-submodul N di M dengan $IJNS \subseteq P$. Karena $S^2 \subseteq S$, maka diperoleh $I(JNS)S \subseteq IJNS \subseteq P$. Karena N merupakan (R, S)-submodul di M, maka JNS juga merupakan (R, S)-submodul di M. Akibatnya, karena P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan di M maka diperoleh $IMS \subseteq P$ atau $JMS \subseteq P$. Dengan demikian diperoleh $INS \subseteq IMS \subseteq P$ atau $JNS \subseteq P$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri di M. ■

Selanjutnya, apabila diketahui P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri di M maka belum tentu P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan. Misal diambil sebarang ideal I di R, ideal K di S serta (R, S)-submodul N di M sedemikian hingga memenuhi $INK \subseteq P$ tetapi $N = RNS \nsubseteq P$. Dari sini diperoleh $(RI)N(KS) \subseteq (RI)NS \subseteq RPS \subseteq P$. Karena P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri maka diperoleh $INS \subseteq P$. Dari $INS \subseteq P$, tidak dapat disimpulkan $IMS \subseteq P$, sehingga $IMK \nsubseteq P$. Akibatnya, P belum tentu merupakan (R, S)-submodul prima gabungan di M. Dengan demikian, konvers dari Proposisi 3.7 belum tentu berlaku.

Konvers dari Proposisi 3.7 akan berlaku jika diberikan suatu syarat tambahan. Namun, sebelum membahas lebih lanjut tentang konvers dari Proposisi 3.7, didefinisikan terlebih dahulu (R, S)-submodul utama kiri (*left primary* (R, S)*-submodule*) sebagai berikut.

Definisi 3.8. *Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, dan (R, S)-modul M. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul utama kiri apabila untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rmS \subseteq P$ maka berakibat $r^n mS \subseteq P$ atau $m \in P$, untuk suatu bilangan bulat positif n.*

Adapun konvers dari Proposisi 3.7 disajikan dalam proposisi di bawah ini.

Proposisi 3.9. *Diberikan R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, (R, S)-modul M, serta (R, S)-submodul utama kiri P di M. Jika P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri maka P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan di M.*

Bukti. Diberikan P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri dan (R, S)-submodul utama di M. Diambil sebarang $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $amS \subseteq P$ tetapi $m \notin P$. Karena P merupakan (R, S)-submodul utama kiri di M, maka terdapat bilangan bulat positif n sedemikian hingga untuk setiap $y \in M \setminus P$ memenuhi $a^n yS \subseteq P$. Berarti diperoleh $a^n \in (P :_R y)$. Karena P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri, maka menurut Proposisi 3.6 diperoleh bahwa $(P :_R y)$ merupakan ideal prima di R. Akibatnya, $a \in (P :_R y)$ sehingga $ayS \subseteq P$. Dari sini, diperoleh $aMS \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima gabungan di M. ■

4. Simpulan

Suatu (R, S)-submodul sejati P disebut (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri jika untuk setiap (R, S)-submodul N di M dan elemen $a, b \in R$ dengan $abNS \subseteq P$ berakibat $aNS \subseteq P$ atau $bNS \subseteq P$. Dapat ditunjukkan bahwa suatu (R, S)-submodul sejati N di M merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri jika dan hanya jika untuk setiap (R, S)-submodul K di M dengan $K \nsubseteq N$ memenuhi $(N :_R K)$ ideal prima di R. Selanjutnya, dapat ditunjukkan juga bahwa suatu (R, S)-submodul prima gabungan P pasti merupakan (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri, tetapi sebaliknya akan berlaku jika P merupakan suatu (R, S)-submodul utama kiri.

Penelitian terkait (R, S)-modul masih jarang dilakukan. Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat memotivasi penelitian lebih lanjut terkait sifat-sifat (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri, radikal prima gabungan lemah kiri pada (R, S)-modul, serta pendefinisian dual dari (R, S)-submodul prima gabungan lemah kiri.

Daftar Pustaka

[1] Adkins, W.A., *Algebra "An Approach via Module Theory"*, Springer-Verlag, New York, Inc., USA, 1992.

[2] Ansari-Toroghy, H. dan Farshadifar, F., 2011, The Dual Notion of Some Generalizations of Prime Submodules, *Communication in Algebra*, Vol.39 No.7 hal.2396-2416.

[3] Atani, S.E. dan Farzalipour, F., 2007, On Weakly Prime Submodules, *Tamkang Journal Of Mathematics*, Vol.38 No.3 hal.247-52.

[4] Azizi, A., 2006, Weakly Prime Submodules and Prime Modules, *Glasgow Mathematics Journal*, No.48 hal.343-346.

[5] Azizi, A., 2008, On Prime and Weakly Prime Submodules, *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol.36 No.3 hal.315-325.

[6] Behboodi, M. dan Koohy, H., 2004, Weakly Prime Modules, *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol.32 No.2 hal.185-195.

[7] Behboodi, M., 2006, On Weakly Prime Radical of Modules and Semi-Compatible Modules, *Acta Math. Hungarian*, Vol.113 No.3 hal.243-254.

[8] Dauns, J., 1978, Prime Modules, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, No.298 hal.156-181.

[9] Khumprapussorn, T., Pianskool, S., dan Hall, M., 2012, (R, S)-Modules and Theri Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematical Forum*, Vol.7 No.33 hal.1631-1643.

[10] Yuwaningsih, D.A. dan Wijayanti, I.E., 2015, On Jointly Prime Radicals of (R, S)-Modules, *Journal of Indonesian Mathematical Society*, Vol.21 No.1 hal.25-34.

p-issn
1412 6185
e-issn
9 772549 903005