
Julan Hernadi
Fondasi
Matematika
dan
Metode
Pembuktian

Fondasi Matematika
&
Metode Pembuktian

Fondasi Matematika & Metode Pembuktian

Julan Hernadi
Prodi Matematika dan Komputasi Saintifik FAST UAD Yogyakarta dan
Prodi Pendidikan Matematika FKIP Unmuh Ponorogo.

PENERBIT ERLANGGA
Jl.H. Baping Raya No. 100
Cirarcas, Jakarta 13740
website:www.erlangga.co.id
(Anggota IKAPI)

Tentang Penulis

Julan HERNADI lahir di Musi Banyuasin, 5 Juli 1967. Menyelesaikan S-1 pendidikan matematika FKIP UNSRI, tamat 1991 atas beasiswa TID dari Depdikbud. Program Pra S-2 tahun 1992 dan S-2 Matematika UGM, tamat 1995 atas beasiswa CTAB. Program S-3 Matematika Komputasi dari UGM with cooperation University of Graz, Austria atas beasiswa TMPD dan Asea-Uninet, tamat 2004.
Program postgraduate (2002/2003, 2004, 2005) dan Program Academic Recharging (PAR) tahun 2010 di Department of Mathematics and Scientific Computing, Univ of Graz, Austria. Aktif pada kegiatan penelitian di bidang pendidikan matematika dan matematika komputasi melalui berbagai program hibah penelitian dari Kemenristek Dikti sampai sekarang. Selain itu penulis juga aktif dalam pendampingan guru dalam pengembangan pembelajaran matematika sekolah.
Sejak 1993 penulis sebagai dosen Kopertis VII Jawa-Timur dpk pada UNMUH Ponorogo dan sejak 2020 penulis mutasi menjadi dosen pada LLDIKTI V Yogyakarta dpk pada Universitas Ahmad Dahlan (UAD) Yogyakarta. Saat ini penulis berdomisili di kota Jogja bersama isteri Sri Purnama Surya dan ananda Ahmad Zhafir HERNADI.

.

.

Persembahan:

Ayahanda Ahmad Ismail (alm), Ibunda Hj Konaria

Sri Purnama Surya (isteri), Ahmad Zhafir HERNADI (anak)

Herri Gusmedi, Aprillina, dan Yuniarni (adik-adik)

Motivasi:

"... Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat" (*QS 58:11*).

"Barang siapa berjalan menuntut ilmu maka Allah akan memudahkan baginya jalan ke Surga" (*HR. Muslim*).

Prakata

Alhamdulillah, atas rahmat dan karunia dari Allah SWT, naskah ini dapat terbit dan hadir di tengah para pembaca sekalian. Penulis sangat berharap buku ini dapat memberikan pencerahan kepada para pembaca sekalian khususnya para mahasiswa dalam membentuk pola penalaran yang benar dalam belajar matematika.

Selama ini sebagian besar siswa di sekolah dan mahasiswa di perguruan tinggi masih menganggap belajar matematika identik dengan aktivitas hitung-hitungan untuk menemukan jawaban terhadap suatu permasalahan matematika. Pola belajar matematika selama ini masih menggunakan pendekatan mekanistik, ini hanya akan melatih kemampuan berpikir algoritma tetapi tidak banyak membantu untuk mengembangkan kemampuan berpikir logis (bernalar). Kemampuan bernalar inilah sebagai modal dasar untuk membangun keterampilan berpikir kritis yang sangat dibutuhkan untuk hidup dalam abad 21 ini.

Keterampilan dalam komputasi teknis atau hitung-hitungan yang diperoleh melalui pola belajar matematika secara mekanistik sudah tidak relevan lagi saat ini karena pekerjaan ini umumnya sudah tergantikan oleh alat siap pakai, seperti mesin kasir, kalkulator saintifik dengan segala macam fiturnya, dan berbagai program aplikasi komputer. Oleh karena itu, orientasi belajar matematika perlu disesuaikan agar lebih menekankan aspek pengembangan kemampuan berpikir logis. Dengan cara ini lulusan dapat diharapkan mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi sesuai dengan bidang keahliannya. Inilah capaian pembelajaran yang diharapkan oleh kurikulum berdasarkan Kerangka Kualifikasi Nasional Indonesia (KKNI).

Materi pembelajaran dalam matematika tersusun dalam hirearki yang sa-ngat ketat dalam arti sebuah topik tidak mungkin dapat dipelajari sebelum menguasai topik-topik prasyaratnya. Semakin tinggi bahan kajiannya semakin banyak prasyarat yang dibutuhkan. Seringnya mahasiswa langsung mempelajari topik tertentu dalam matematika tanpa penguasaan yang baik terhadap konsep-konsep pendukungnya. Selain itu, penalaran mahasiswa masih didominasi oleh intuisi bukan berdasarkan pola argumen yang baku dalam matematika. Inilah penyebab utama kesulitan mahasiswa dalam mempelajari topik-topik lanjutan dalam matematika. Oleh karena itu, dibutuhkan penguasaan yang kuat terhadap konsep-konsep yang paling mendasar sebagai fondasi belajar matematika.

Pada dasarnya terdapat tiga konsep paling fundamental dalam matematika,
yaitu logika matematika, himpunan, dan fungsi. Metode pembuktian dalam mate-matika merupakan penerapan konsep logika matematika. Buku ini mencakup ketiga konsep mendasar tersebut yang disusun dalam enam bab, yaitu Proposisi dan Konektivitas, Fungsi Proposisi dan Kuantifikasi, Aturan Inferensi, Metode Pembuktian dalam Matematika, Konsep Dasar Teori Himpunan, dan Konsep Dasar Relasi dan Fungsi. Buku ini disiapkan untuk membantu mahasiswa dalam dalam membentuk kemampuan penalarannya sehingga lebih mudah mempelajari topik-topik matematika lainnya. Sebuah analogi, kalau ingin membangun rumah besar bertingkat maka fondasinya juga harus kuat. Hal ini juga berlaku di dalam matematika. Penguasaan yang baik terhadap materi fondasi matematika ini akan mempermudah dalam mempelajari topik-topik matematika lainnya, seperti struktur aljabar dan aljabar linear, analisis real dan kompleks, metode and analisis numerik, komputer dan pemrograman, statistika matematika, matematika terapan seperti persamaan diferensial, pemodelan matematika, matematika diskret, matematika keuangan, dan lain-lain.

Buku ini sangat relevan untuk mahasiswa prodi Matematika baik matematika murni (MIPA) maupun matematika pendidikan (FKIP), juga cocok juga untuk prodi serumpun seperti Ilmu Statistika dan Ilmu Komputer. Berbagai nama mata kuliah seperti Logika Matematika, Logika dan Himpunan, Matematika Dasar, Pengantar Matematika, Matematika Pendahuluan, dan sejenisnya akan sangat cocok menjadikan buku ini sebagai referensi utama. Mengingat materi pada buku ini menjadi prasyarat untuk kajian topik matematika lanjutan, idealnya buku ini dipelajari pada kuliah tahun pertama bahkan lebih baik lagi dipelajari pada semester 1. Untuk mempelajari buku ini tidak dibutuhkan pengetahuan prasyarat khusus.

Mudah-mudahan kehadiran buku fondasi matematika ini dan buku-buku teks penulis sebelumnya dapat memberikan kontribusi dalam mempersiapkan ge-nerasi bangsa yang lebih baik. Penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak yang telah membantu penulis dalam memperbaiki naskah ini khususnya kepada kader terbaik penulis yaitu Uki Suhendar, Ceriawan, dan Isnaepi yang telah memberikan koreksi terhadap berbagai kesalahan yang ada. Penulis menyadari kemungkinan masih adanya beberapa ketidaksempurnaan isi buku ini dikarenakan keterbatasan penulis. Oleh karena itu, segala saran dan kritik membangun demi perbaikan buku pada penerbitan berikutnya akan diter-

ima dengan senang hati. Saran dan kritik dapat dikirimkan via email: julan_hernadi@yahoo.com. Akhirnya, semoga karya kecil ini dapat memberikan manfaat bagi orang banyak dan menjadi pemicu lahirnya karya-karya yang lebih besar.

Yogyakarta, 29 Maret 2021

Penulis

Julan HERNADI

BAB 1

Proposisi dan Konektivitas

> *Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang, terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal.*
>
> QS 3:190.

Logika merupakan cabang ilmu filsafat praktis. Menurut Wikipedia, logika berasal dari kata Yunani kuno "logos" yang dapat diartikan sebagai hasil pertimbangan akal pikiran yang diutarakan lewat kalimat dalam suatu bahasa. Sebagai cabang filsafat praktis, logika digunakan dalam membangun ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan adalah seluruh usaha sadar untuk menyelidiki, menemukan, dan meningkatkan pemahaman manusia dari berbagai segi kenyataan dalam alam manusia.

Fakta atau kenyataan yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari dianggap sebagai kebenaran faktual karena dapat dirasakan oleh indera manusia. Pernyataan "air mendidih terasa lebih panas daripada es", "garam rasanya asin", "air mengalir dari tempat yang tinggi ke tempat yang rendah" adalah beberapa contoh kebenaran faktual. Di lain pihak, banyak kebenaran yang tidak dapat diterima langsung melaui indera manusia, melainkan harus melalui sebuah argumen. Sebagai contoh "penggunaan bahan bakar yang berasal dari fosil dapat menyebabkan rusaknya lapisan ozon yang melindungi bumi" adalah sebuah kebenaran yang tidak dapat diterima langsung melainkan harus melalui serangkaian argumen.

Logika tidak dapat dihindari dalam proses hidup mencari kebenaran. Di sisi lain, logika dipandang juga sebagai cabang matematika yang digunakan untuk membangun teori matematika, misalnya dalam menyusun pernyataan-

1. "Ponorogo adalah ibu kota provinsi Jawa Barat". Ini adalah sebuah proposisi karena kebenarannya sudah pasti, yaitu bernilai salah.

2. Kalimat "Ada 5 hari dalam seminggu" juga sebuah proposisi karena sudah pasti, yaitu pasti salah.

3. Pernyataan "$1 + 2 = 3$" adalah proposisi bernilai benar.

4. Pernyataan "$2^3 = 6$" adalah proposisi bernilai salah.

5. "Jam berapakah sekarang?" bukan sebuah proposisi, bahkan kalimat deklaratif pun bukan. Ini bukan pernyataan tetapi pertanyaan.

6. Kalimat "Biarkan aku pergi" bukan sebuah proposisi karena bukan sebuah pernyataan tetapi sebuah permintaan.

7. Pernyataan "$x+2 = 3$" bukan proposisi karena nilai kebenarannya belum pasti, masih bergantung pada nilai x. Ketika diberikan nilai $x = 1$ maka ia menjadi proposisi bernilai benar, tetapi ketika diberikan nilai $x = 0$ maka ia menjadi proposisi bernilai salah. Pernyataan seperti ini biasanya disebut kalimat terbuka.

Dari contoh-contoh ini sangat jelas bahwa proposisi harus berupa kalimat deklaratif atau pernyataan. Kalau bukan pernyataan maka pasti bukan proposisi. Tetapi tidak semua pernyataan berupa proposisi. Sebagai contoh, kalimat terbuka adalah pernyataan yang bukan proposisi. Nilai kebenaran proposisi didasarkan pada kesepakatan atau aturan (hukum) yang berlaku universal. Sebagai contoh kalimat $2^3 = 6$ dinilai salah karena hukum matematika mengatakan $2^3 = 8$. Per- nyataan "Ponorogo adalah ibukota Jawa Barat" dinilai salah berdasarkan hukum negara Republik Indonesia. Pernyataan yang mengatakan "Tuhan itu tunggal" adalah benar menurut hukum agama khusus Islam, tetapi bisa salah jika ditinjau dari hukum agama selain Islam.

Definisi 1.2. [Nilai dan tabel kebenaran] Misalkan $\mathcal{P}$ himpunan semua proposisi maka nilai kebenaran proposisi adalah fungsi bernilai biner $\tau : \mathcal{P} \to \{T, F\}$ dengan T (*true*) untuk nilai benar dan F (*false*) untuk nilai salah. Untuk sebuah proposisi p bernilai benar dinyatakan $\tau(p) = T$, sedangkan proposisi q yang bernilai salah dinyatakan $\tau(q) = F$. Kadangkala digunakan bit $\{0, 1\}$, yaitu $\tau(p) = 1$ jika p proposisi bernilai benar dan $\tau(q) = 0$ jika proposisi p bernilai salah.

kontradiksi adalah dua pernyataan yang saling bertentangan. Untuk memahami paradoks, kita pahami contoh-contoh berikut.

Contoh 1.3. [Paradoks] Selidikilah apakah pernyataan berikut adalah proposisi: "Kalimat ini adalah salah".

PENYELESAIAN. Untuk mengetahui kalimat ini sebuah proposisi atau bukan, kita misalkan κ simbol untuk "Kalimat ini" dalam "Kalimat ini adalah salah".

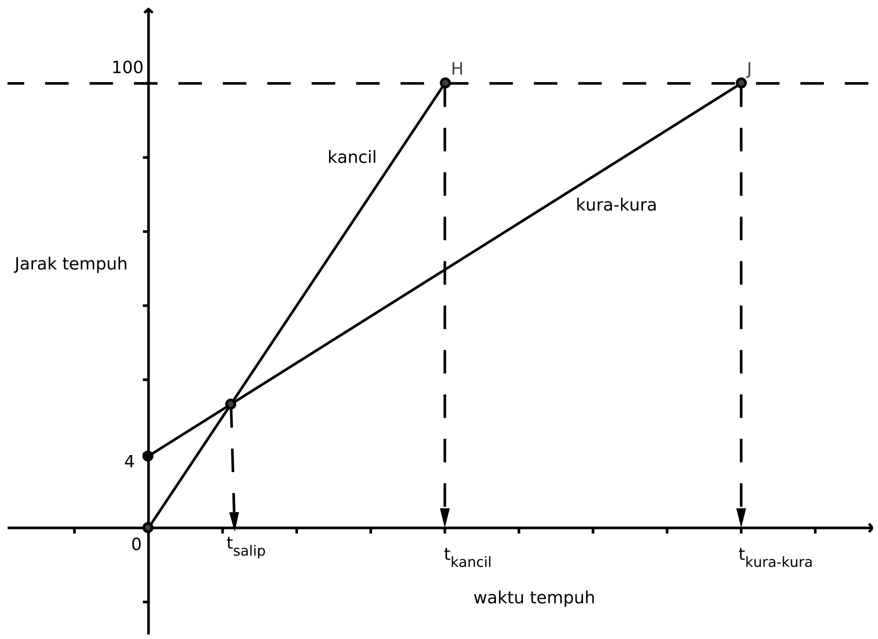
- Kemungkinan pertama, andaikan κ benar diperoleh pernyataan "kalimat ini adalah benar", padahal diketahui "Kalimat ini adalah salah". Ini adalah sebuah kontradiksi.
- Kemungkinan kedua, andaikan κ salah, ini berarti pernyataan "Kalimat ini adalah salah" adalah salah sehingga diperoleh "Kalimat ini adalah benar". Ini juga kontradiksi karena diketahui "Kalimat ini adalah salah".

Dari kedua kemungkinan ini kita simpulkan bahwa pernyataan ini tidak benar dan juga tidak salah. Pernyataan seperti ini dalam logika disebut dengan suatu **paradoks**.

□

Contoh 1.4. [Paradoks kancil dan kura-kura] Pada perayaan 17 Agustus diadakan lomba lari antara kancil dan kura-kura dengan panjang lintasan 100 meter. Pada posisi start, sang kura-kura ditempatkan sedikit di depan sang kancil, misalnya 4 meter. Dengan asumsi bahwa kedua hewan ini mampu mencapai finish, maka kancil tidak dapat memenangkan lomba ini. Bagaimana kebenaran pernyataan ini?

PENYELESAIAN. Kita perhatikan posisi awal kedua hewan, kancil di titik A_0 dan kura-kura di B_0. Untuk memenangkan lomba ini, sang kancil harus menyalip sang kura-kura di suatu titik. Pertama-tama, untuk mencapai jarak 4 meter sang kancil harus menempuh jarak ℓ_1 yang lebih pendek dari 4 meter, misal separuhnya yaitu 2 meter dari posisi awal. Untuk ini dibutuhkan waktu, misalnya selama t_1 detik. Sementara itu, sang kura-kura telah meninggalkan posisi awalnya walaupun dalam jarak yang sangat pendek, katakan r_1 meter. Misalkan posisi kedua hewan setelah t_1 detik adalah di titik A_1 untuk kancil dan B_1 untuk kura-kura seperti ditunjukkan pada Gambar 1.1. Dalam hal ini diperoleh $\ell_1 < 4 + r_1$. Dengan argumen yang sama, untuk mencapai selisih jarak keduanya, yaitu $4 + r_1 - \ell_1 > 0$ sang kancil harus menempuh jarak yang



Gambar 1.2: Grafik waktu dan jarak tempuh oleh kancil dan kura-kura.

Pernyataan penting lainnya dalam matematika adalah konjektur (*conjecture*). Konjektur adalah sebuah proposisi yang diduga sementara bernilai benar. Dugaan ini hanya didasarkan pada informasi awal yang tidak lengkap atau hanya didasarkan pada intuisi para ahli tetapi belum dapat dibuktikan secara formal. Konjektur dalam matematika mirip seperti hipotesis dalam ilmu sosial. Umumnya konjektur dalam matematika telah berusia ratusan tahun karena sangat jarang ada orang yang mampu memecahkannya. Salah satu contohnya adalah konjektur yang dikenal dengan teorema terakhir Fermat seperti contoh berikut.

Contoh 1.5. [Konjektur Fermat] Perhatikan pernyataan "persamaan

$$x^n + y^n = z^n$$

tidak mempunyai solusi bulat untuk semua bilangan bulat $n \geq 3$". Pernyataan ini terkenal dengan istilah teorema terakhir Fermat yang dipublikasikan oleh Pierre-Simon de Fermat pada tahun 1637. Sayangnya, Fermat tidak pernah memberikan bukti kebenarannya sampai dia meninggal tahun 1665. Oleh karena itu, pasca kematiannya pernyataan ini disebut konjektur Fermat.

Untuk $n = 2$, persamaan ini memiliki takberhingga banyak penyelesaian, yaitu bilangan bulat x, y dan z yang merupakan bilangan tripel Pythagoras. Sebagai contoh, $x = 3, y = 4, z = 5$ dan $x = 6, y = 8, z = 10$ adalah dua dari takberhingga penyelesaiannya. Tetapi untuk $n = 3, 4, 5, \cdots$, belum satupun

Definisi 1.3. [NEGASI] Misalkan p suatu proposisi. Negasi p dinyatakan $\neg p$ (kadang-kadang dengan notasi $\sim p$, atau $\widetilde{p}$) adalah pernyataan yang nilai kebenarannya berlawanan dengan p. Negasi $\neg p$ biasanya dibaca "bukan p", atau "ini bukanlah bersifat p". Tabel kebenaran proposisi dan negasinya diberikan sebagai berikut:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Tabel 1.1: Tabel kebenaran proposisi dan negasinya.

Misalkan p sebuah proposisi dan $\neg p$ adalah negasinya maka haruslah berlaku sifat berikut:

$$\tau(\neg(\neg p)) = \tau(p). \tag{1.3.1}$$

Sifat ini nantinya disebut negasi ganda. Negasi dapat pula diperluas untuk pernya- taan deklaratif biasa yang nilai kebenarannya belum pasti.

Contoh 1.7. Berikut ini diberikan pernyataan dan negasinya beserta nilai kebenarannya.

1. Misalkan proposisi p : "hari ini adalah Jumat" maka $\neg p$: "hari ini bukan Jumat". Jelas nilai kebenaran kedua proposisi bertolak belakang. Andaikan pada saat pernyataan ini diucapkan kebetulan pada hari Jum'at maka $\tau(p) = T$ dan $\tau(\neg p) = F$. Seandainya diambil $\neg p$: "hari ini Kamis" maka diperoleh $\tau(\neg p) = F$, masih memenuhi sifat negasi. Tetapi negasi gandanya $\neg(\neg p)$ berbunyi "tidak benar bahwa hari ini Kamis", belum tentu Jumat karena dapat saja Sabtu, Minggu, Senin, Selasa, atau Rabu. Ini berarti sifat negasi ganda tidak berlaku. Jadi, "hari ini Kamis" bukanlah negasi dari "hari ini Jumat".

2. Misalkan proposisi p : "x adalah bilangan ganjil" maka negasinya adalah $\neg p$: "x adalah bilangan genap". Dalam hal ini domainnya bersifat dikotomi yakni hanya ada dua kemungkinan yang saling asing, yaitu bilangan ganjil atau bilangan genap sehingga cukup diambil komplemennya.

LATIHAN SELINGAN 1.4. Tentukan negasi dari pernyataan berikut. Selanjutnya berikan contoh pernyataan mirip negasi tapi bukan negasi seperti contoh sebelumnya. Berikan alasannya.

Ada 4 konektivitas utama, yaitu konjungsi ($\wedge$), disjungsi implisit ($\vee$), disjungsi eksplisit ($\oplus$), implikasi ($\rightarrow$), dan bi-implikasi ($\leftrightarrow$).

Definisi 1.5. [KONEKTIVITAS] Misalkan p dan q adalah proposisi.

1. Konjungsi dari p dan q, ditulis $p \wedge q$ adalah proposisi "p dan q", bernilai benar jika kedua p dan q benar, dan salah untuk kasus lainnya. Dengan kata lain $\tau(p \wedge q) = F$ jika ada salah satu proposisi bernilai salah. Konjungsi dapat pula didefinisikan pada pernyataan yang bukan proposisi. Bila minimal salah satu dari p atau q bukan proposisi maka konjungsi $p \wedge q$ juga bukan proposisi.

2. Disjungsi dari p dan q, ditulis $p \vee q$ adalah proposisi "p atau q", bernilai salah jika kedua p dan q salah, dan benar untuk kasus lainnya. Sama halnya dengan konjungsi, disjungsi dapat diperluas untuk pernyataan yang bukan proposisi. Dengan kata lain, $\tau(p \vee q) = T$ bila paling sedikit ada satu proposisi yang benar.

3. Disjungsi eksklusif dari p dan q, ditulis $p \oplus q$ adalah proposisi yang bernilai benar jika tepat satu di antara p atau q bernilai benar, dan bernilai salah untuk kasus lainnya. Notasi disjungsi eksklusif kadang-kala menggunakan XOR. Jadi, $\tau(p \oplus q) = T$ jika tepat satu proposisi bernilai benar atau tepat satu bernilai salah. Penyebutan notasi disjungsi eksklusif $\oplus$ dapat menggunakan ungkapan "atau eksklusif", atau "atau kalau tidak".

4. Implikasi $p \rightarrow q$ adalah proposisi "jika p maka q", bernilai salah jika p benar dan q salah, kasus lainnya bernilai benar. Pernyataan $p \rightarrow q$ disebut juga kalimat bersyarat, dengan p disebut hipotesis (premis) atau *antecedent* dan q disebut kesimpulan (konklusi) atau konsekuensi. Dengan kata lain, $\tau(p \rightarrow q) = F$ jika $\tau(p) = T$ dan $\tau(q) = F$.

5. Bi-implikasi $p \leftrightarrow q$ adalah proposisi "p jika dan hanya jika q", bernilai benar jika kedua p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, kasus lainnya bernilai salah. Pernyataan $p \leftrightarrow q$ merupakan konjungsi dua implikasi $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$; oleh karena itu ia disebut implikasi dua arah atau bi-implikasi. Istilah lain bi-implikasi adalah bi-kondisional atau kalimat bersyarat dua arah. Mudah ditunjukkan bahwa $\tau(p \leftrightarrow q) = \tau\left((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\right)$. Dengan kata lain, $\tau(p \leftrightarrow q) = T$ jika p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama, yaitu keduanya benar semua atau keduanya salah semua.

□

Contoh 1.10. Misalkan p: "mahasiswa yang mengambil kuliah kalkulus dapat masuk kelas ini", q: "mahasiswa yang mengambil kuliah pemrograman komputer dapat masuk kelas ini". Disjungsi dari kedua pernyataan ini adalah $p \vee q$: "mahasiswa yang mengambil kuliah kalkulus atau pemrograman komputer dapat masuk kelas ini". Bila disjungsi $p \vee q$ ditetapkan sebagai peraturan prodi maka ada tiga kelompok mahasiswa yang dapat masuk kelas ini, yaitu:

- mahasiswa yang hanya mengambil kuliah kalkulus saja,
- mahasiswa yang hanya mengambil kuliah ilmu komputer saja,
- mahasiswa yang mengambil kuliah kalkulus dan ilmu komputer sekaligus.

Mahasiswa yang belum mengambil kuliah kalkulus maupun pemrograman komputer tidak boleh masuk kelas ini.

Latihan Selingan 1.5. Identifikasilah termasuk jenis disjungsi apakah pernyataan berikut, inklusif atau eksklusif? Jelaskan alasannya.

1. Hari ini Sabtu atau hujan.
2. x adalah bilangan genap lebih dari 2 atau bilangan prima.
3. Bila Anda belanja di toko XYZ, maka Anda akan mendapat pengembalian (*cashback*) 10% atau mendapat souvenir.
4. Sebuah kata sandi (*password*) harus terdiri atas paling sedikit 3 digit atau paling banyak 8 digit.

Pernyataan berupa implikasi $p \to q$ paling sering muncul dalam matematika teoretis baik dalam bentuk definisi maupun dalam bentuk teorema. Perhatikan kembali tabel kebenaran secara saksama, diperoleh fakta bahwa $p \to q$ bernilai benar dalam kasus:

- p dan q benar (baris 1).
- p salah, tidak masalah apapun nilai kebenaran q (baris 3 dan 4).

Implikasi disebut juga kalimat bersyarat karena $p \to q$ menegaskan bahwa q pasti berlaku asalkan p dipenuhi. Dengan kata lain, terjadinya p merupakan syarat terjadinya q. Istilah lain untuk penyebutan $p \to q$ adalah sebagai berikut: "p mengakibatkan q" (*p implies q*), "p adalah syarat cukup bagi q" (*p is the sufficient condition for q*), "q adalah syarat perlu untuk p"(*q is the neccessary condition of p*), "p hanya jika q" (*p only if q*), "q asalkan p" (*q provided p*), dan "q bilamana p" (*q whenever p*).

Syarat cukup, syarat perlu, dan syarat perlu dan cukup Ketiga ungkapan ini sangat sering muncul dalam pernyataan matematika. Ungkapan "p syarat cukup bagi q" berarti "jika p maka q", yakni cukuplah dipenuhi p untuk memperoleh q. Sebagai ilustrasi, untuk dapat kuliah di universitas seorang calon mahasiwa harus lulus ujian masuk. Ini berarti "lulus ujian masuk" adalah syarat cukup untuk dapat kuliah di universitas. Dalam bentuk implikasi keadaan ini dapat dinyatakan sebagai "Jika Anda lulus ujian masuk maka Anda dapat kuliah di universitas". Jika ada cara lain untuk dapat kuliah di universitas, misal lulus jalur PMDK maka "lulus ujian masuk" bukanlah syarat perlu. Artinya Anda tidak perlu harus lulus ujian masuk untuk dapat kuliah di universitas, tapi boleh juga lewat jalur PMDK.

Ungkapan "r syarat perlu untuk s" berarti "jika tidak r maka tidak s". Ilustrasi berikutnya adalah seorang yang mau mengambil surat ijin mengemudi (SIM). Lulus ujian praktek adalah syarat untuk mendapatkan SIM. Di sini, "lulus ujian praktek" adalah syarat perlu untuk "mendapatkan SIM" sebab kalau tidak lulus ujian praktek maka tidak boleh mendapatkan SIM.

Ungkapan "p syarat perlu dan cukup q" berarti "p syarat cukup q" dan "q syarat perlu p". Sebagai contoh "iman dan taqwa" adalah syarat perlu dan cukup untuk "masuk surga". Pada ilustrasi ini kita mempunyai $p_1 \wedge p_2 \leftrightarrow q$ dengan p_1: "beriman", p_2: "bertaqwa", q: "dapat masuk surga". Pernyataan $p_1 \wedge p_2$ adalah syarat cukup q berarti jika beriman dan bertaqwa maka akan masuk surga. Sebaliknya, q syarat perlu $p_1 \wedge p_2$ berarti tidak akan masuk surga jika tidak beriman ataupun tidak bertaqwa. Kita telah menggunakan aturan bahwa negasi $\neg(p_1 \wedge p_2)$ adalah $\neg p_1 \vee \neg p_2$ yang akan dibahas pada bagian ekuivalensi logis. Aturan ini disebut hukum de Morgan.

Contoh 1.11. Sebuah toko memberikan pernyataan iklan sebagai berikut:, "Jika nilai belanja Anda lebih dari 100 ribu rupiah maka anda mendapat potongan 10%". Jelaskan maksud kalimat ini.

Penyelesaian. Diketahui p: "nilai belanja Anda di atas 100 ribu", q: "Anda mendapat potongan 10%". Pernyataan pada iklan tersebut berbentuk $p \to q$, dianggap sebuah kebenaran. Bila nilai belanja Anda melebihi 100 ribu (p benar), maka Anda dipastikan mendapat potongan 10% (q harus benar atau dipenuhi) agar $p \to q$ benar. Tetapi jika belanja Anda kurang dari 100 ribu (p salah) maka Anda mungkin dapat potongan (q benar) atau mungkin juga tidak dapat potongan (q salah). Dalam kasus pihak toko tidak memberi potongan maka tidak ada yang salah karena syaratnya tidak dipenuhi. Tetapi, dalam kasus pihak toko memberi potongan juga tidak ada yang salah, barangkali

Ilustrasi ini memberikan kelogisan dari sebuah implikasi. Untuk mendapatkan hasil (*output*) yang baik harus dilalui melalui proses yang baik. Walaupun keadaan awal atau masukan (*input*) tidak baik, kalau disentuh oleh proses yang baik maka ada kemungkinan hasilnya baik. Sebaliknya, proses yang tidak baik, yaitu $\tau(p \to q) = F$ akan menghasilkan keluaran yang tidak baik yaitu $\tau(q) = F$ walaupun kondisi awalnya baik yaitu $\tau(p) = T$. Perhatikan pada implikasi tidak ada pola $F\ F\ F$. Pola ini dapat diinterpretasikan sebagai input jelek, yakni $\tau(p) = F$, proses pembelajaran jelek, yakni $\tau(p \to q) = F$, maka hasilnya pasti jelek, yakni $\tau(q) = F$. Oleh karena itu pola ini dianggap tabu dalam dunia pendidikan.

Kebenaran implikasi tidak terletak pada bentuk kalimat sebab akibat atau kausalitas, tetapi ditentukan oleh nilai kebenaran masing-masing kalimat tunggalnya. Untuk itu perhatikan implikasi berikut.

Contoh 1.14. Perhatikan kalimat "jika hari ini cerah maka kita pergi ke pantai". Kalimat ini bernilai benar untuk hampir semua keadaan, kecuali satu keadaan yaitu "kita tidak pergi ke pantai padahal hari ini cerah". Pada implikasi ini hipotesis dan konklusi berhubungan yaitu sebagai hubungan sebab akibat. Perhatikan kalimat "jika hari ini Jumat maka $2 \times 3 = 6$" selalu benar kapanpun diucapkan karena pernyataan kedua q: 2×3 selalu benar. Dalam kasus ini, hipotesis (premis) dan konklusi bukan hubungan sebab akibat dalam persepsi sehari-hari.

Contoh 1.15. Misalkan $a = 3, b = 5$ dan $c = 6$. Tentukan nilai kebenaran implikasi berikut

$$(\neg(a > b)) \wedge (b < c) \to \neg\left[(a \leq b) \vee (b > c)\right].$$

PENYELESAIAN. Misalkan $p_1 : a > b$, $p_2 : b < c$, $q_1 : a \leq b$ dan $q_2 : b > c$. Maka pernyataan ini dapat ditulis sebagai

$$(\neg p_1 \wedge p_2) \to \neg\left(q_1 \vee q_2\right).$$

Untuk $a = 3, b = 5$ dan $c = 6$, $\tau(p_1) = \tau(3 > 5) = F$, $\tau(p_2) = \tau(5 < 6) = T$. Nilai kebenaran premis implikasi ini adalah $\tau(\neg p_1 \wedge p_2) = \tau(T \wedge T) = T$. Selanjutnya, $\tau(q_1) = \tau(3 \leq 5) = T$, $\tau(q_2) = \tau(5 > 6) = F$ sehingga $\tau(q_1 \vee q_2) = T$ atau $\tau\left(\neg(q_1 \vee q_2)\right) = F$. Jadi implikasi ini berbentuk $(\neg p_1 \wedge p_2) \to \neg(q_1 \vee q_2)$ berpola $T \to F$ sehingga disimpulkan bernilai F. $\square$

Latihan Selingan 1.6. Mirip dengan contoh sebelumnya, misalkan $a = 3, b = 5$ dan $c = 6$. Tentukan nilai kebenaran implikasi berikut

$$(a > b) \vee (\neg (b < c)) \to \neg [(a \leq b) \vee (b > c)] .$$

Contoh 1.16. Bahasa pemprogram komputer sering menggunakan bentuk implikasi $p \to q$. Jika premisnya dipenuhi yaitu $\tau(p) = T$ maka konsekuensinya pasti dilakukan, yaitu $\tau(q) = T$. Tetapi jika premisnya tidak dipenuhi yaitu $\tau(p) = F$ maka komputer tidak melakukan apa-apa. Misal-kan sebuah program komputer tipe input/output mempunyai sintaksis sebagai berikut "Jika $x > 2$ maka $x := x + 1$". Tentukan keluarannya jika dimasukkan $x = 1$, 3.

Penyelesaian. Notasi := berarti "didefinisikan sebagai" atau "nilainya sama dengan". Kalimat ini berbentuk implikasi $p \to q$ dengan p: "$x > 2$" dan q: "$x := x + 1$". Bila dimasukkan $x = 3$ maka $\tau(p) = T$ sehingga q pasti dieksekusi, yaitu $x := 3 + 1 = 4$. Jadi x yang baru adalah 4. Bila dimasukkan $x = 1$ maka $\tau(p) = F$ sehingga tidak ada tindakan apapun pada q. Jadi, untuk masukan $x = 1$ maka keluarannya tetap yaitu $x = 1$. □

Latihan Selingan 1.7. Tentukan keluaran program komputer yang mempunyai sintaksis sebagai berikut:

1. Jika (x ganjil $\wedge$ x bilangan kuadrat) maka $x := 2x + 1$. Masukan $x = 3, 4, 9, 12$.
2. Jika (x ganjil $\vee$ x bilangan kuadrat) maka $x := 2x + 1$. Masukan $x = 3, 4, 9, 12$.
3. Jika (x ganjil $\oplus$ x bilangan kuadrat) maka $x := 2x + 1$. Masukan $x = 3, 4, 9, 12$.

Penyebutan lain dari $p \leftrightarrow q$ adalah "p bila dan hanya bila q", "p adalah syarat perlu dan cukup bagi q".

Contoh 1.17. Misalkan p pernyataan "Anda dapat mengikuti kuliah" dan q pernyataan "Anda membayar SPP". Maka pernyataan $p \leftrightarrow q$ adalah "Anda dapat mengikuti kuliah bila dan hanya bila anda telah membayar SPP." Pernyataan ini bernilai benar jika p dan q keduanya benar, atau keduanya salah. Misalkan pernyataan $p \leftrightarrow q$ dianggap suatu peraturan kampus maka peraturan ini dilanggar apabila:

- Anda mengikuti kuliah, tetapi Anda tidak membayar SPP (pelanggaran dilakukan mahasiswa),

7. Tiap orang pasti lulus minimal satu pelajaran.
8. Setiap pelajaran pasti diluluskan oleh paling sedikit satu orang.
9. Banyak pelajaran yang diluluskan Cendy tidak sebanyak pelajaran yang diluluskan oleh kedua saudaranya.

Dari kesembilan pernyataan di atas, dapat dikelompokkan berdasarkan orang dan kelulusan mata pelajaran. Untuk menyingkat kita gunakan lambang A, B, C untuk ketiga orang Ali, Bobi, Cendy; M, E, S untuk Matematika, bahasa Inggris (English), Sejarah

- Pernyataan 1 dan 3 berkenaan dengan pelajaran matematika. Kedua pernyataan digabungkan menjadi "Ali lulus matematika jika dan hanya jika Bobi lulus matematika. Jadi ada 2 kemungkinan berikut.

	M
A	$\surd$
B	$\surd$
C	

atau

	M
A	$\times$
B	$\times$
C	

- Perhatikan pernyataan 2 berkaitan dengan Bahasa Inggris. Untuk pernyataan 2, yaitu "Ali lulus bahasa Inggris jika dan hanya jika Cendy lulus bahasa Inggris", mempunyai dua kemungkinan, yaitu:
  - Ali dan Cendy keduanya lulus bahasa Inggris, atau
  - Ali dan Cendy keduanya tidak lulus bahasa Inggris.

Kombinasi dengan diagram sebelumnya menghasilkan 4 kemungkinan diagram berikut:

	M	E
A	$\surd$	$\surd$
B	$\surd$	
C		$\surd$

I

	M	E
A	$\surd$	$\times$
B	$\surd$	
C		$\times$

II

	M	E
A	$\times$	$\surd$
B	$\times$	
C		$\surd$

III

	M	E
A	$\times$	$\times$
B	$\times$	
C		$\times$

IV

- Pernyataan 6 juga berkaitan dengan bahasa Inggris, yaitu "Jika Bobi tidak lulus bahasa Inggris maka Ali juga tidak lulus bahasa Inggris." Agar im- plikasi ini bernilai benar maka harus berlaku salah satu dari 3 kemungkinan berikut, yaitu

	M	E	S
A	$\surd$	$\surd$	$\times$
B	$\surd$	$\surd$	$\surd$
C		$\surd$	$\times$

I

	M	E	S
A	$\surd$	$\times$	$\times$
B	$\surd$	$\surd$	$\surd$
C	$\surd$	$\times$	$\times$

II

	M	E	S
A	$\times$	$\surd$	$\times$
B	$\times$	$\surd$	$\surd$
C	$\surd$	$\surd$	$\times$

III

- Pernyataan 9 menyatakan banyak pelajaran yang diluluskan Cendy tidak sebanyak yang diluluskan oleh kedua saudaranya maka diagram II dan III harus dibuang. Tersisalah diagram I. Dengan pernyataan 9 lagi, Cendy hanya lulus 1 pelajaran sehingga diperoleh diagram terakhirnya sebagai berikut:

	M	E	S
A	$\surd$	$\surd$	$\times$
B	$\surd$	$\surd$	$\surd$
C	$\times$	$\surd$	$\times$

I

Kesimpulannya: Ali lulus matematika dan bahasa Inggris, Bobi lulus ketiganya dan Cendy hanya lulus bahasa Inggris. $\square$

1.4.1 Konvers, kontraposisi dan invers

Definisi 1.6. [Konvers, kontraposisi, dan invers] Berangkat dari implikasi $p \to q$ dapat dibentuk tiga pernyataan implikasi yang melibatkan operator negasi $\neg$, yaitu $q \to p$ disebut **konvers**, $\neg q \to \neg p$ disebut **kontraposisi**, dan $\neg p \to \neg q$ disebut **invers**.

Contoh 1.19. Tentukan konvers, kontraposisi dan invers dari pernyataan “Tim tuan rumah akan menang bilamana hari hujan”.

PENYELESAIAN. Kalimat ini sesungguhnya berupa implikasi $p \to q$ dengan p: ”Hari hujan” dan q: ”Tim tuan rumah menang”. Dengan kata lain dapat ditulis sebagai “Jika hari hujan maka tim tuan rumah menang”. Jadi diperoleh konvers: “Jika tuan rumah menang maka hari hujan”, kontraposisi: “Jika tuan rumah tidak menang maka hari tidak hujan”, dan invers: “Jika hari tidak hujan maka tim tuan rumah tidak menang.” $\square$

yaitu pernyataan $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ selalu benar. Hal ini tidaklah mungkin, sehingga disimpulkan A pembohong.

- Karena A pembohong, maka A mengatakan yang sebaliknya. Karena A mengatakan B penjujur maka sesungguhnya B adalah pembohong. Periksa konsistensinya. Karena B mengatakan bahwa "mereka beroposisi" adalah suatu pernyataan yang salah. Jadi B pembohong. Ini konsisten dengan hasil sebelumnya yaitu A dan B adalah pembohong. Jadi, A dan B keduanya pembohong.

□

Latihan Selingan 1.9. Seorang petualang ditangkap oleh sekelompok kanibal. Mereka berasal dari dua kelompok, yaitu kelompok pembohong dan penjujur (penjelasannya seperti pada puzzle sebelumnya). Para kanibal ini akan menjadikan sang petualang santapan, kecuali petualang tersebut mampu menebak dengan tepat dari golongan mana seorang kanibal berasal. Untuk itu sang petualang hanya diperkenankan mengajukan sebuah pertanyaan kepada seorang kanibal tersebut. Apakah pertanyaan yang dapat diajukan tersebut. (Petunjuk: Coba analisis apa jawaban yang diberikan seorang kanibal yang jujur dan juga yang berbohong jika diajukan pertanyaan "apakah Anda seorang penjujur?, juga pertanyaan "apakah Anda seorang pembohong?" Jika pertanyaan ini tidak dapat menghasilkan kesimpulan, coba cari pertanyaan lain di luar konteks ini!)

1.5 Ekspresi Logika versus Bahasa Indonesia

Pernyataan yang disajikan dalam ekspresi logika yang memuat simbol-simbol ope-rator atau konektivitas logika biasanya sulit dipahami orang awam. Untuk memahami makna pernyataan tersebut kita perlu menerjemahkannya ke dalam kalimat sehari-hari yang tidak lagi memuat lambang logika matematika. Sebaliknya, pada permasalahan yang cukup rumit dalam kehidupan sehari-hari perlu diterjemahkan ke dalam ekspresi logika (logika formal) agar lebih mudah dipecahkan.

Contoh 1.21. Berikut ini adalah pernyataan dalam bahasa Indonesia: "Anda dapat mengakses internet kampus hanya jika anda mahasiswa ilmu komputer atau anda bukan mahasiswa baru". Terjemahkan ke dalam bentuk ekspresi logika.

Setelah kita melakukan translasi dari bahasa logika ke dalam bahasa Indonesia, berikut ini kita bahas cara menerjemahkan bahasa dalam kehidupan sehari-hari ke dalam ekspresi logika.

Contoh 1.23. Misalkan p : "Anda mendapat nilai A pada UAS mata kuliah Fondasi Matematika", q : "Anda mengerjakan semua soal latihan dalam buku ini", dan r : "Anda mendapat A pada mata kuliah Fondasi Matematika". Terjemahkan ke dalam bahasa sehari-hari ekspresi logika sebagai berikut:

1. $p \wedge \neg q$,
2. $r \rightarrow p$,
3. $p \wedge q \rightarrow r$,

PENYELESAIAN. Sebelumnya perlu diketahui bahwa operator konjungsi $\wedge$ yang biasanya dibaca "dan" dapat pula bermakna "tetapi", "walaupun", dan kata sinonim lainnya dalam bahasa Indonesia. Implikasi $\rightarrow$ tidak harus bermakna hubungan sebab akibat.

1. $p \wedge \neg q$ dapat dimaknai sebagai "Anda mendapat nilai A pada UAS Fondasi Matematika walaupun Anda tidak mengerjakan semua soal latihan dalam buku ini".

2. $r \rightarrow p$ diterjemahkan langsung menjadi "Jika Anda mendapatkan A pada mata kuliah Fondasi Matematika maka Anda mendapat A pada UAS". Sepintas lalu kalimat ini terasa tidak logis karena nilai akhir mempengaruhi nilai UAS padahal tidaklah demikian. Kalimat ini dimaknai sebagai berikut: Mendapat nilai A pada UAS adalah syarat perlu untuk mendapat nilai akhir A. Artinya kalau Anda tidak mendapat nilai A pada UAS maka Anda tidak mungkin mendapat nilai A pada mata kuliah ini.

3. $p \wedge q \rightarrow r$ berarti untuk mendapatkan nilai A pada mata kuliah ini cukup Anda kerjakan semua soal latihan pada buku ini dan peroleh nilai A pada UAS.

□

LATIHAN SELINGAN 1.12. Untuk p, q, dan r yang sama seperti contoh sebelumnya, terjemahkan ekspresi logika berikut ke dalam bahasa sehari-hari yang mudah dipahami orang awam

1. $p \wedge \neg q \wedge r$,

bertentangan karena tidak mungkin ada sebuah x yang berada pada dua lokasi yang berbeda. Jadi, jika $\tau(p) = T$ maka $\tau(q) = F$ dan sebaliknya. Berdasarkan definisi konjungsi disimpulkan pernyataan ini selalu salah.

2. "x bilangan ganjil atau x bukan prima lebih dari 2" adalah sebuah tautologi. Pernyataan ini dapat ditulis secara simbolik sebagai berikut: $p \vee q$ dengan p: "x ganjil" dan q : "x bukan prima lebih dari 2". Misalkan $\tau(p) = F$ maka haruslah x genap. Karena bilangan genap tidak mungkin prima kecuali 2 maka diperoleh $\tau(q) = T$. Berdasarkan definisi disjungsi, pernyataan $p \vee q$ ini selalu benar.

Salah satu cara untuk mengidentifikasi tautologi atau kontradiksi adalah dengan menggunakan tabel kebenaran. Jika semua kemungkinan bernilai benar maka disimpulkan kalimat majemuk tersebut adalah tautologi, sebaliknya jika bernilai salah pada semua kemungkinan maka ia merupakan kontradiksi. Selain dari ini disebut kontingensi.

Contoh 1.26. Buktikan $(p \wedge (p \to q)) \to q$ adalah sebuah tautologi.

Bukti. Kita susun tabel kebenaran sebagai berikut:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Tabel 1.5: Tabel kebenaran tautologi.

Oleh karena pada kolom terakhir semua baris bernilai benar maka terbukti kalimat majemuk ini adalah sebuah tautologi. □

Latihan Selingan 1.13. Buktikan dengan tabel kebenaran bahwa

$$(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$$

merupakan sebuah tautologi.

Latihan Selingan 1.14. Jelaskan mengapa pernyataan "p, q adalah prima relatif dan p, q adalah kedua genap" merupakan kontradiksi. (Petunjuk: dua bilangan p dan q dikatakan prima relatif jika mereka tidak mempunyai faktor persekutuan selain 1, sebagai contoh pasangan $(2,3)$, $(4,5)$ adalah prima relatif sedangkan $(3,6)$ bukan).

Definisi 1.8. [Ekuivalen logis] Pernyataan majemuk P dan Q dikatakan **ekui-valen logis** jika $P \leftrightarrow Q$ merupakan sebuah tautologi. Selanjutnya, dalam kasus P dan Q ekuivalen logis ditulis $P \equiv Q$. Dengan kata lain,

$$P \equiv Q \text{ jika dan hanya jika } P \leftrightarrow Q \text{ tautologi.} \tag{1.6.1}$$

Contoh 1.27. Misalkan P adalah implikasi $p \to q$ dan Q adalah kontraposisinya $\neg q \to \neg p$. Buktikan $P \equiv Q$.

Bukti. Langsung diperhatikan tabel berikut:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$P : p \to q$	$Q : \neg q \to \neg p$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Tabel 1.6: Contoh ekuivalensi logis.

Pada kolom terakhir menunjukkan bahwa $P \leftrightarrow Q$ merupakan tautologi sehingga terbukti $P \equiv Q$. □

Lebih lanjut, kontraposisi digunakan sebagai salah satu metode pembuktian dalam matematika. Metode ini termasuk salah satu metode pembuktian taklangsung. Pembahasan lebih lanjut tentang metode pembuktian dalam matematika akan diberika secara khusus pada bab tersendiri.

Contoh 1.28. Buktikan $\neg(p \vee q)$ dan $\neg p \wedge \neg q$ adalah ekuivalen logis. Bentuk ini disebut aturan De Morgan.

Bukti. Langsung gunakan tabel berikut dengan menetapkan P: $\neg(p \vee q)$ dan Q: $\neg p \wedge \neg q$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$P : \neg(p \vee q)$	$Q : \neg p \wedge \neg q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

Tabel 1.7: Contoh ekuivalensi logis De Morgan.

Pada kolom terakhir diperoleh $P \leftrightarrow Q$ membentuk tautologi sehingga terbukti $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. □

Latihan Selingan 1.15. Buktikan bahwa $\neg(p \oplus q)$ dan $p \leftrightarrow q$ ekuivalen logis. Jika diberikan pernyataan p: "x adalah genap" dan q: "x adalah ganjil", berikan tafsiran untuk kedua bentuk ekuivalen ini.

1.6.1 Beberapa bentuk ekuivalensi dasar

Banyak sekali variasi bentuk ekuivalensi pada logika proposisi, namun hanya beberapa saja bentuk dasar yang digunakan sebagai alat justifikasi bentuk-bentuk yang lebih rumit. Bentuk-bentuk dasar tersebut diberikan pada teorema berikut.

Theorem 1. *Misalkan T pernyataan yang selalu bernilai benar dan F pernyataan yang selalu bernilai salah maka berlaku ekuivalensi berikut:*

1. $p \wedge T \equiv p$ *dan* $p \vee F \equiv p$ *(hukum identitas)* .
2. $p \vee T \equiv T$ *dan* $p \wedge F \equiv F$ *(hukum dominasi).*
3. $p \vee p \equiv p$ *dan* $p \wedge p \equiv p$ *(hukum idempoten).*
4. $\neg(\neg p) \equiv p$ *(hukum negasi ganda).*
5. $p \vee q \equiv q \vee p$ *dan* $p \wedge q \equiv q \wedge p$ *(hukum komutatif).*
6. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ *dan* $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ *(hukum asosiatif).*
7. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *dan* $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(hukum distributif).*
8. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ *dan* $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ *(hukum de Morgan).*
9. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ *dan* $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ *(hukum absorpsi atau penyerapan).*
10. $p \vee \neg p \equiv T$ *dan* $p \wedge \neg p \equiv F$ *(hukum negasi).*

Bukti. Di sini hanya dibuktikan hukum (sifat) asosiatif $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dengan menggunakan tabel kebenaran. Bentuk lainnya disisakan sebagai bahan latihan. Untuk sederhananya kita gunakan bentuk biner, yaitu 1 untuk T dan 0 untuk F.

p	q	r	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee r$	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Perhatikan kolom $(p \vee q) \vee r$ dan $p \vee (q \vee r)$ mempunyai pola yang sama sehingga disimpulkan kedua pernyataan ini adalah ekuivalen. □

LATIHAN SELINGAN 1.16. Lengkapilah bukti semua bentuk ekuivalensi logis pada teorema di atas dengan menggunakan tabel kebenaran.

Hukum De Morgan dapat diperluas untuk sejumlah berhingga proposisi, yaitu

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n \tag{1.6.2}$$

dan

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) = \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n \tag{1.6.3}$$

Pembuktian hukum De Morgan bentuk umum ini dilakukan dengan menggunakan induksi matematika. Metode pembuktian induksi matematika akan dibahas pada bab metoda pembuktian dalam matematika.

Penggunaan tabel kebenaran untuk membuktikan sebuah ekuivalensi logis hanya efektif untuk jumlah proposisi dan variasi konektivitas sedikit. Dalam kasus jumlah proposisi cukup besar, maka tabel kebenaran tidak lagi efektif. Sebagai contoh untuk 10 proposisi kita membutuhkan 2^{10} baris dengan kolom yang jauh lebih banyak lagi. Untuk itu, pembuktian ekui-valensi logis dapat dilakukan melalui penjabaran dengan menggunakan bentuk dasar sebelumnya.

Contoh 1.29. [EKUIVALENSI IMPLIKASI] Buktikan bahwa $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

BUKTI. Cara pertama digunakan tabel kebenaran seperti biasa.

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Ekuivalensi terbukti melalui pola pada dua kolom terakhir. Cara kedua adalah menggunakan argumen sebagai berikut. Perhatikan bahwa $p \to q$ dan $\neg p \vee q$ memiliki satu kemungkinan bernilai salah, lihat kembali Tabel 1.2, sedang-kan tiga kemungkinan lainnya bernilai benar. Artinya, jika kita dapat menemukan sebuah kasus di mana keduanya bernilai salah maka kemungkinan lainnya dipastikan sama. Pertama, perhatikan $p \to q$. Nilai kebenaran $\tau(p \to q) = F$ hanya terjadi pada kasus $\tau(p) = T$ dan $\tau(q) = F$. Perhatikan juga $\tau(\neg p \vee q) = F$ ketika $\tau(\neg p) = F$ (atau $\tau(p) = T$) dan $\tau(q) = F$. Fakta ini ternyata sama persis terjadi pada implikasi. Oleh karena itu disimpulkan $p \to q$ dan $\neg p \vee q$ merupakan ekuivalensi logis. □

Contoh 1.30. [Negasi implikasi] Buktikan $\neg(p \to q)$ dan $p \wedge \neg q$ ekuivalen logis tanpa menggunakan tabel kebenaran.

Bukti. Terapkan hukum de Morgan pada bentuk ekuivalensi pada contoh sebelumnya.

$$\begin{aligned}\neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \quad \text{[contoh sebelumnya]}\\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \quad \text{[hukum De Morgan]}\\ &\equiv p \wedge \neg q. \quad \text{[hukum negasi ganda]}\end{aligned}$$

□

Membuktikan sebuah tautologi melalui penjabaran sama saja dengan menunjukkan proposisi tersebut ekuivalen logis dengan proposisi yang selalu benar.

Contoh 1.31. Buktikan $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ adalah tautologi.

Bukti. Berikut ini adalah bukti dengan cara penjabaran berikut justifikasinya.

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \to (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \text{ [ekuivalensi implikasi]}\\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \text{ [de Morgan]}\\ &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee (p \vee q)) \text{ [asosiatif]}\\ &\equiv \neg p \vee ((\neg q \vee p) \vee q) \text{ [asosiatif]}\\ &\equiv \neg p \vee ((p \vee \neg q) \vee q) \text{ [komutatif]}\\ &\equiv \neg p \vee (p \vee (\neg q \vee q)) \text{ [asosiatif]}\\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \text{ [asosiatif]}\\ &\equiv T \vee T \text{ [negasi]}\\ &\equiv T. \text{ [dominasi atau idempoten]}\end{aligned}$$

□

Perlu dicatat bahwa tautologi adalah istilah untuk sebuah proposisi, sedangkan ekuivalensi logis merupakan istilah untuk dua proposisi. Berikut diberikan contoh yang memuat tiga proposisi.

Contoh 1.32. Buktikan $(p \to r) \wedge (q \to r)$ dan $p \vee q \to r$ adalah ekuivalen logis.

Bukti. Kita gunakan bentuk-bentuk ekuivalensi dasar dan fakta yang telah diperoleh sebelumnya, yaitu $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Selanjutnya bentuk pada soal ini diarahkan menjadi bentuk $\neg(p \vee q) \vee r$. Untuk mempersingkat pembuktian, beberapa hukum dapat diterapkan sekaligus pada sebuah baris.

$$\begin{aligned}(p \to r) \wedge (q \to r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)\\ &\equiv [(\neg p \vee r) \wedge \neg q] \vee [(\neg p \vee r) \wedge r]\\ &\equiv [(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)] \vee [r \wedge (r \vee \neg p)]\\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee [(r \wedge \neg q) \vee (r \wedge (r \vee \neg p)]\\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee [r \wedge (\neg q \vee r \vee \neg p)]\\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee [r \wedge (r \vee \neg q \vee \neg p)]\\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee r\\ &\equiv (p \vee q) \to r.\end{aligned}$$

Perhatikan pada baris kedua telah digunakan sifat distributif, baris ketiga sifat distributif dan komutatif, baris keempat sifat asosiatif, baris kelima sifat distributif, baris keenam sifat komutatif, dan baris ketujuh aturan de Morgan dan absorpsi. Baris pertama dan terakhir menggunakan fakta pada contoh sebelumnya. □

LATIHAN SELINGAN 1.17. Buktikan tanpa menggunakan tabel kebenaran bahwa $(p \wedge (p \to q)) \to q$ adalah tautologi.

LATIHAN SELINGAN 1.18. Buktikan tanpa menggunakan tabel kebenaran bahwa $(p \to q) \wedge (p \to r)$ dan $p \to (q \wedge r)$ adalah ekuivalen logis.

1.7 Operasi Bit pada Operator Logika

Sebagaimana diketahui kode pembangun bahasa mesin komputer adalah digit "0" dan "1". Kedua simbol ini disebut bit. Apapun informasi yang diolah dan dihasilkan oleh prosesor komputer dinyatakan dalam bit 0 dan 1. Satuan terkecil file komputer dinyatakan dalam byte dengan 1 byte terdiri atas 8 bit. Sebagai contoh, sebuah data yang tersajikan dalam bentuk 1100101001111100 berukuran 2 byte. Satuan berikutnya adalah kilobyte (KB) sama dengan 1024 byte, megabyte (MB), gigabyte (GB), dan terabyte (TB), dan seterusnya merupakan kelipatan 10^3 dari satuan di bawahnya.

Dalam logika, bit 0 dan 1 juga digunakan untuk menyajikan nilai kebenaran sebuah pernyataan x dengan $\tau(x) = 1$ untuk benar (T) dan $\tau(x) = 0$ untuk salah (F). String bit adalah barisan yang terdiri atas para bit. Sebagai contoh 110011101 adalah string bit dengan panjang 9, yaitu banyaknya bit yang ada. Tiga operator pada string bit adalah *bitwise OR* ($\vee$), *bitwise AND* ($\wedge$) dan *bitwise XOR* ($\oplus$). Dua string bit x dan y dapat dioperasikan jika panjangnya sama.

Contoh 1.33. Diberikan string bit $x = 10010101001$ dan $y = 01100110011$ tentukan $x \vee y$, $x \wedge y$, dan $x \oplus y$.

PENYELESAIAN. Dengan aturan seperti pada konektivitas biasa, diperoleh

1. $x \vee y = (1\vee0)(0\vee1)(0\vee1)(1\vee0)(0\vee0)(1\vee1)(0\vee1)(1\vee0)(0\vee0)(0\vee1)(1\vee1) = 11110111011$.
2. $x \wedge y = 00000100001$.
3. $x \oplus y = 11110011010$.

□

String bit dalam kalkulus proposisi dipandang sebagai barisan nilai kebenaran proposisi, sedangkan bentuk proposisinya tidak diketahui. Model representasi ini banyak diaplikasikan pada pemrograman komputer.

1.8 Soal-soal Latihan Bab 1

1. Perhatikan kalimat berikut, tentukan mana yang berupa proposisi dan mana yang bukan proposisi. Bila ia proposisi, tentukan nilai kebenarannnya.

   (a) Madura terletak di pulau Jawa.

   (b) $2 + 5 = 6$.

   (c) $a + 2 = 11$.

   (d) Jawablah pertanyaan berikut.

   (e) π adalah bilangan rasional.

   (f) Apakah benar bahwa $3 + \cos\theta$?

   (g) $x + y = y + x$ untuk setiap pasangan bilangan real x dan y.

   (h) Jangan melintas.

   (i) $x + 1 = 5$ jika $x = 1$.

   (j) 2^x bernilai positif untuk setiap bilangan real x.

2. Tentukan negasi untuk masing-masing pernyataan berikut ini.

   (a) Warna bendera RI adalah merah putih.

   (b) Musim panas di Miami tidak panas dan tidak cerah.

   (c) Tidak ada polusi udara di Yogyakarta.

   (d) Melalui dua titik berlainan selalu dapat dibuat sebuah garis lurus.

   (e) Persamaan $f(x) = 0$ memiliki paling sedikit dua akar.

   (f) $2 + x \leq 5$.

   (g) $2 \leq x < 3$.

   (h) $x < -3$ atau $x > 2$.

3. Diberikan pernyataan p : "saya mengikuti kuliah dengan serius" dan q : "masa depan saya lebih baik". Nyatakan proposisi berikut dalam bahasa Indonesia.

(a) $p \to q$

(b) $\neg p \to \neg q$

(c) $\neg p \wedge \neg q$

(d) $\neg p \vee (p \wedge q)$

4. Misalkan p, q dan r adalah proposisi dengan p: "Anda terserang flu", q: "Anda tidak dapat ikut ujian", r: "Anda lulus mata kuliah". Nyatakan proposisi berikut dalam bahasa Indonesia.

   (a) $\neg q \leftrightarrow r$

   (b) $q \to \neg r$

   (c) $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$

   (d) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$.

5. Misalkan p, q dan r adalah proposisi dengan p: kamu mendapat nilai A pada UAS, q: "Anda mengerjakan semua soal latihan", r: "Anda lulus mata kuliah ini dengan nilai A". Nyatakan proposisi berikut dalam p, q dan r beserta dengan simbol konektivitasnya.

   (a) Kamu lulus mata kuliah dengan nilai A, tetapi kamu tidak mengerjakan semua soal latihan.

   (b) Kamu mendapat A pada UAS, kamu mengerjakan semua latihan, dan kamu lulus dengan nilai A.

   (c) Untuk mendapatkan nilai A pada mata kuliah ini, perlu bagi kamu untuk mendapatkan nilai A pada UAS.

   (d) Kamu tidak mendapat A pada UAS, tetapi kamu tidak mengerjakan semua soal latihan, namun kamu lulus mata kuliah dengan nilai A.

   (e) Mendapat A pada UAS dan mengerjakan semua soal latihan adalah syarat cukup untuk lulus mata kuliah dengan nilai A.

6. Tuliskan pernyataan yang ekuivalen secara logis dengan pernyataan berikut (boleh lebih dari satu macam).

   (a) Jika saya lulus kuliah maka saya akan berwirausaha.

   (b) Jika saya lulus ujian masuk PT dan saya mendapat beasiswa maka saya akan melanjutkan kuliah.

(c) Jika saya pergi ke Eropa maka saya akan mengunjungi kota Paris atau Roma.

(d) Jika saya menang PILKADA maka saya akan membebaskan biaya berobat dan biaya pendidikan.

(e) Jika saya memiliki kekuasaan dan kekayaan maka saya akan menyantuni kaum dhuafa dan membasmi kemaksiatan.

7. Pada spesifikasi sistem telepon ditemukan pernyataan berikut: "Jika direktori database terbuka, maka monitor diposisikan dalam keadaan tertutup jika sistem tidak dalam keadaan awal (*initial state*)". Tentunya kalimat ini cukup sulit dipahami karena memuat dua pernyataan bersyarat. Coba temukan pernyataan yang ekuivalen tetapi lebih mudah dipahami. (petunjuk: gunakan disjungsi dan negasi, hindari penggunaan implikasi).

8. Nyatakan konvers, kontraposisi dan invers pernyataan dalam bentuk implikasi berikut.

   (a) Jika London ada di Perancis maka Paris ada di Inggris.

   (b) Jika kalkulator bekerja dengan baik maka baterainya bagus.

   (c) Jika malam ini hujan maka saya akan tetap tinggal di rumah.

   (d) Suatu bilangan positif adalah prima hanya jika ia tidak mempunyai pembagi selain 1 dan dirinya sendiri.

   (e) Ketika saya begadang, perlu bagi saya untuk tidur sampai tengah hari.

   (f) Saya pergi ke pantai bilamana hari cerah.

9. Tentukan kontraposisi, invers dan konvers dari implikasi berikut. Kemudian, tentukan nilai kebenaran dari masing-masing pernyataan tersebut.

   (a) Jika $x + y = 1$ maka $x^2 + y^2 \geq 1$.

   (b) Jika $x > 0$ maka $x^2 > 0$.

   (c) Jika x habis dibagi oleh 2 dan 3 maka x habis dibagi oleh 6.

   (d) Jika segitiga sama sisi maka ia sama kaki.

   (e) Jika n prima maka n ganjil atau 2.

(a) $p \oplus p$.

(b) $(p \oplus q) \oplus r$.

(c) $(p \oplus p) \oplus p$.

14. Hampir semua pernyataan dalam matematika dapat dinyatakan ke dalam bentuk implikasi. Sebagai contoh, Di dalam segitiga siku-siku ABC dengan sudut siku-siku di B berlaku hukum Pythagoras $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ dapat dinyatakan dalam bentuk kalimat implikasi sebagai berikut: Jika $\triangle ABC$ siku-siku di B maka berlaku $|AB|^2+|BC|^2 = |AC|^2$. Ubahlah pernyataan berikut ke dalam bentuk implikasi.

    (a) Sebuah segitiga yang semua sudutnya sama besar adalah sama sisi.

    (b) Garis-garis yang tegak lurus terhadap garis yang sama adalah sejajar.

    (c) Persamaan kuadrat memiliki akar yang diskriminannya kurang dari nol tidak memiliki akar real.

    (d) $x^2 = 16$ adalah syarat perlu bagi $x = 4$.

    (e) $x = 1$ adalah syarat cukup untuk $x^2 = 1$.

15. Program komputer sering menggunakan kalimat dalam bentuk implikasi. Bila hipotesisnya dipenuhi maka komputer mengeksekusi perintah yang dibe-rikan. Sebaliknya, bila hipotesisnya tidak dipenuhi maka komputer tidak melakukan tindakan apa-apa. Tentukan nilai x setelah pernyataan berikut dalam suatu program komputer dimasukkan nilai $x = 2$.

    (a) Jika $(1 + 1 = 3) \vee (2 + 2 = 3)$ maka $x := x + 1$.

    (b) Jika $(1 + 1 = 2) \oplus (2 + 2 = 4)$ maka $x := x + 1$.

    (c) Jika $x < 2$ maka $x := x + 1$.

    (d) Jika x bilangan genap positif maka $x := x + 1$.

16. Seperti soal sebelumnya, pernyataan berikut merupakan sintaksis program komputer. Tentukan keluaran (*outputnya*) jika diberikan masukan (*input*): $i = 2, j = 3, k = 6, x = 0$ dan $y = 0$.

    (a) Jika $(i < 3) \wedge (j > 4)$ maka $x := x + 1$, lainnya $y := y + 1$.

    (b) Jika $(i < j) \vee (k > 4)$ maka $x := x - 1$, lainnya $y := y - 1$.

(e) $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to F$.

(f) $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r$.

23. Tunjukkan pada operasi string bit berlaku $(\tau(x) \vee \tau(y)) \wedge \tau(z) = (\tau(x) \wedge \tau(z)) \vee (\tau(y) \wedge \tau(z))$. Kemudian, temukan bentuk identitas dari $(\tau(x) \wedge \tau(y)) \vee \tau(z)$.

24. Selesaikan operasi string bit berikut ini:

(a) $(1101) \wedge (0110 \vee 1110)$.

(b) $(010100 \oplus 100101) \oplus 110010$.

(c) $(010100 \wedge 100101) \oplus 110010$.

(d) $010100 \wedge (100101 \oplus 110010)$

25. [Puzzle] Di saat sedang berlayar, seorang pelaut bernama Silas mengalami kecelakaan karena kapalnya menghantam batu karang. Untuk menyelamatkan diri Silas berenang ke pulau terdekat dan tibalah ia di suatu pesisir. Karena terlalu capek, tertidurlah ia di pesisir tersebut. Dalam tidurnya, Silas bermimpi didatangi dua orang yang mempunyai kesamaan dalam semua aspek sehingga tidak dapat dibedakan. Tetapi mereka berdua berasal dari dua kampung yang berbeda, yang satu berasal dari kampung Jujur di mana penduduknya selalu berkata benar dan yang lainnya berasal dari kampung Bohong di mana penduduknya selalu berkata salah. Ketika terbangun, Silas benar-benar bertemu dengan dua orang mirip tersebut seperti dalam mimpinya. "Di mana saya berada", kata Silas bertanya. "Di pulau Hamlock", balas orang pertama. "Saya adalah Glog dan dia adalah Glum", sambung orang pertama lagi. "Tidak, saya Glog dan dia Glum", kata orang kedua. Tiba-tiba muncul orang ketiga. Sambil menunjuk kedua orang tadi, Silas bertanya kepada orang ketiga "Siapa di antara mereka yang dapat saya percaya?" "Dia dan Saya berasal dari kampung yang sama", kata orang ketiga sambil menunjuk orang pertama. "Itu benar, mereka memang berasal dari kampung yang sama", kata orang kedua. Nah, siapa yang berkata benar dan siapa yang berbohong.

26. [Puzzle] Menyambung cerita soal sebelumnya, akhirnya, Silas memilih untuk hidup menetap di pulau tersebut. Selama 6 tahun tinggal di sana, Silas tetap sulit membedakan secara visual mengenai asal kampung mereka karena mereka semuanya mirip satu sama lainnya. Suatu hari Silas bertemu dua orang. Orang pertama mengatakan bahwa

bersama korban pada hari pembunuhan, dan salah satu dari Semprul atau Jedul mesti membunuh korban. Dapatkah pembunuh tersebut ditemukan jika salah satu dari tiga tersangka adalah bersalah, dua orang tidak bersalah lainnya berkata jujur, tetapi pernyataan orang bersalah bisa bohong, bisa jujur. (Petunjuk: Gunakan kombinasi (tidak bersalah, jujur), (tidak bersalah, tidak jujur), (bersalah, jujur), dan (bersalah, tidak jujur). Buatlah tabel kebenaran untuk merangkum kemungkinan ketiga tersangka, gunakan 1 untuk tersangka tidak bersalah dan 0 untuk tersangka bersalah. Kemudian, terjemahakan pernyataan ketiga tersangka ke dalam ekspresi logika dan temukan pernya-taan kuncinya, misalnya dua pernyataan yang saling bertentangan. Sebagai contoh, pernyataan Semprul bahwa "korban adalah teman Jedul" adalah bertentangan dengan pernyataan Jedul yang mengatakan bahwa "ia tidak kenal dengan korban", dan seterusnya.)

31. Seorang logikawan mengultimatum anak laki-lakinya: "Jika kamu tidak menyelesaikan makan malammu, kamu tidak boleh berdiri maupun menonton TV". Anak tersebut menyelesaikan makan malamnya dan langsung digiring ke kamar tidur. Apa yang terjadi pada keluarga tersebut, diskusikan. Apakah sang ayah telah melakukan kesalahan terhadap anaknya?

32. Seorang dosen berinisial JH sangat konsen dengan kejujuran mahasiswa dalam mengerjakan soal ujian. Berdasarkan analisis jawaban mahasiswa, Sang dosen mencurigai 4 mahasiswa kerjasama karena jawabannya sama persis dan tempat duduk mereka berdekatan. Ke-empat mahasiswa tersebut, katakan A, B, C, dan D dipanggil oleh Sang dosen untuk memberikan pernyataan. Pernyataan mereka adalah sebagai berikut:

    - A: D tidak menyontek; B: A menyontek; C: B menyontek; D: C tidak menyontek.

    Dapatkah sang dosen mengidentifikasi siapa yang menyontek dan siapa yang menjadi narasumber?

33. Pada sebuah persidangan di sebuah pengadilan telah terjadi adu pendapat antara Hakim, Jaksa, Pengacara, dan Panitera. Sang Hakim mengatakan bahwa Jaksa benar, Pengacara benar, dan Panitera benar. Sedangkan Sang Panitera mengatakan bahwa tidak mungkin Jaksa dan Pengacara kedua-duanya benar. Pertanyaan: Pernyataan siapakah yang benar?

BAB 2

Fungsi Proposisi dan Kuantifikasi

Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) perjalan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu).

QS 10:5.

Pada Bab 1 telah dibahas kalimat majemuk yang tersusun atas beberapa kalimat tunggal yang dihubungkan oleh konektivitas $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow$, dan $\leftrightarrow$. Berbagai konektivitas ini memberikan kemudahan dalam penalaran manusia khususnya dalam menganalisis nilai kebenaran kalimat majemuk. Namun demikian masih banyak pernyataan dalam matematika atau dalam bahasa komunikasi sehari-hari yang maknanya tidak dapat dianalisis dengan bentuk-bentuk konektivitas ini. Perhatikan dua contoh berikut.

Contoh 2.1. Misalkan kita dihadapkan pada pernyataan "Setiap komputer kampus berfungsi dengan baik". Misalkan "MATH2" adalah nama salah satu komputer kampus maka belum ada aturan baku yang dapat digunakan untuk menyimpulkan kebenaran pernyataan "MATH2 berfungsi dengan baik". Dalam kasus CS1 terserang hacker dengan CS1 adalah salah satu komputer kampus, maka belum ada aturan baku untuk menyimpulkan bahwa "ada komputer kampus yang terserang hacker". Selama ini kesimpulan-kesimpulan tersebut dianggap benar secara intuitif atau hanya berdasarkan perasaan semata, namun belum berdasarkan aturan logika formal.

Selanjutnya, penggunaan istilah predikat dan fungsi proposisi secara bergantian adalah untuk maksud yang sama.

Contoh 2.3. Misalkan $P(x)$: "x lebih dari 2". Diperoleh $P(1)$: "1 lebih dari 2" merupakan proposisi yang salah, sedangkan $P(3)$: "3 lebih dari 2" merupakan proposisi yang benar. Misalkan fungsi proposisi dua variabel $Q(x, y)$ menyatakan "$x = y + 1$" maka mudah diperiksa bahwa $\tau\left(Q(2,1)\right) = T$ dan $\tau\left(Q(1,2)\right) = F$.

Contoh 2.4. Misalkan $A(c, n)$ menyatakan pernyataan "komputer c terhubung dengan jaringan n". Di sini c menyatakan variabel yang merujuk nama komputer, sedangkan n adalah variabel untuk jaringan. Misalkan komputer M1 terhubung dengan jaringan kampus1, tetapi tidak terhubung dengan jaringan kampus2 maka diperoleh A(M1,kampus1) bernilai benar, sedangkan A(M1,kampus2) bernilai salah.

Secara umum, predikat yang memuat n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ di-sajikan dalam bentuk $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, yaitu nilai fungsi proposisi P di pasangan $n-$*tuple* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Permasalahan dalam fungsi proposisi adalah bagaimana mengidentifikasi himpunan bagian dari semesta pembicaraan D sehingga $P(x)$ bernilai benar. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.5. Misalkan $P(x)$: "$x^2 > x$" dengan $x \in D := \mathbb{R}$. Amati beberapa fakta berikut:

$$\begin{aligned} P(-1) &: \text{"}(-1)^2 > -1\text{" yaitu "}1 > -1\text{" (benar)} \\ P(-2) &: \text{"}(-2)^2 > -2\text{" yaitu "}4 > -2\text{" (benar)} \\ P\left(\frac{1}{2}\right) &: \text{"}\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}\text{" yaitu "}\frac{1}{4} > \frac{1}{2}\text{"(salah).} \end{aligned}$$

Jadi, fungsi proposisi dapat bernilai benar dan dapat pula bernilai salah pada sebuah domain. Beberapa kemungkinan yang dapat terjadi adalah proposisi dapat benar untuk semua $x \in D$, benar untuk sebagian atau beberapa $x \in D$, atau salah untuk semua $x \in D$. Dalam kuantifikasi, kita hanya memperhatikan bagian domain yang membuat fungsi proposisi bernilai benar. Bagian domain yang bersifat seperti ini disebut himpunan pembenar (*truth set*). Berikut ini definisi formalnya.

Definisi 2.2. [Himpunan pembenar] Misalkan $P(x)$ sebuah predikat dengan variabel x di dalam domain D maka himpunan pembenar (*truth set*) dari

1. Kuantifikasi universal, yaitu proposisi yang berbunyi "$P(x)$ untuk semua x di dalam semesta pembicaraan D" atau "untuk semua $x \in D$, berlaku $P(x)$", ditulis
$$\forall x \in D,\ P(x). \tag{2.2.1}$$
Bila domain D sudah terpahami dengan baik maka cukup ditulis $\forall x,\ P(x)$. Notasi $\forall$ disebut **kuantor universal**. Di samping berarti "untuk semua" dan "untuk setiap", kuantor universal $\forall$ juga bermakna "untuk sebarang", "diberikan sebarang", "diberikan apapun".

2. Kuantifikasi eksistensial, yaitu proposisi yang berbunyi "$P(x)$ untuk suatu x di dalam semesta pembicaraan D" atau "ada $x \in D$, berlaku $P(x)$", ditulis
$$\exists x \in D,\ P(x). \tag{2.2.2}$$
Bila domain D sudah terpahami dengan baik maka cukup ditulis $\exists x,\ P(x)$. Notasi $\exists$ disebut **kuantor eksistensial**. Di samping berarti "ada" atau "terdapat", kuantor eksistensial $\exists$ juga bermakna "terdapat beberapa", "ada paling sedikit satu".

Definisi 2.4. [Nilai kebenaran kuantifikasi] Misalkan $P(x)$ sebuah predikat dengan D domain untuk x.

1. Kuantifikasi universal $\forall x \in D,\ P(x)$ bernilai benar jika $P(x)$ benar untuk setiap $x \in D$, dan bernilai salah jika ditemukan paling sedikit satu $x \in D$ yang membuat $P(x)$ salah. Nilai $x \in D$ sehingga $P(x)$ salah disebut contoh pengingkar (*counter example*).

2. Kuantifikasi eksistensial $\exists x \in D,\ P(x)$ bernilai benar jika ada minimal satu $x \in D$ yang membuat $P(x)$ benar, dan bernilai salah jika $P(x)$ salah untuk setiap $x \in D$.

Contoh 2.7. Misalkan domain D adalah himpunan semua bilangan real. Tentukan nilai kebenaran kuantifikasi berikut.

1. $\forall x,\ P(x)$ dengan $P(x)$: "$x + 1 > x$".

2. $\forall x\,(x^2 \geq x)$.

3. $\exists x,\ Q(x)$ dengan $Q(x)$: "$x^2 = x$".

4. $\exists x\,(x = x + 1)$.

Penyelesaian. Di sini diketahui $D := \{1, 2, 3, 4\}$ sebuah himpunan diskret berhingga.

1. Dapat diperiksa bahwa $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ semuanya benar, sedangkan $P(4)$ salah. Karena ada salah satu $P(x)$ yang salah yaitu $P(4)$ maka $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_4)$ juga bernilai salah, disimpulkan $\tau\,(\forall x \in D, P(x)) = F$.

2. Ambil $1 \in D$, diperoleh $P(1)$: "$1 < 10$" sebuah pernyataan yang benar. Karena ada salah satu $P(x)$ benar yaitu $P(1)$ maka $P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee P(x_4)$ juga benar, sehingga disimpulkan $\tau\,(\exists x \in \Omega, P(x)) = T$.

$\square$

Latihan Selingan 2.2. Diketahui $P(x)$: "$x^2 > x$" dan $Q(x)$: "$x^2 = x$". Tentukan nilai kebenaran kuantifikasi berikut jika domain D adalah himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

1. $\forall x \in D, \neg P(x)$.
2. $\exists x \in D, \neg P(x)$.
3. $\exists x \in D, [P(x) \wedge Q(x)]$.
4. $\forall x \in D, [P(x) \wedge Q(x)]$.
5. $\exists x \in D, [P(x) \vee Q(x)]$.
6. $\forall x \in D, [P(x) \vee Q(x)]$.

2.3 Negasi Kuantifikasi

Sebagai ilustrasi, misalkan diberikan pernyataan "Semua matematikawan berkacamata". Perhatikan pernyataan berikut ini:

1. Tidak ada matematikawan berkacamata.
2. Ada matematikawan yang tidak berkacamata.

Kita ingin menentukan pernyataan mana di antara pernyataan 1 dan pernyataan 2 yang merupakan negasi dari pernyataan "Semua matematikawan berkacamata". Kuncinya adalah jika dua pernyataan saling bernegasi maka nilai kebenaran keduanya bertolak belakang apapun bentuk redaksi kedua pernyataan tersebut. Coba kita analisis pernyataan 1: andaikan dalam sebuah razia ditemukan ada seorang matematikawan berkacamata maka pernyataan 1 maka berdasarkan hukum De Morgan, diperoleh

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in D, P(x)) &\equiv \neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)) \\ &\equiv \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}\neg(\exists x \in D, P(x)) &\equiv \neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)) \\ &\equiv \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Contoh 2.9. Tentukan negasi dari kuantifikasi berikut dan periksa nilai kebenarannya. Bandingkan dengan kebenaran kuantifikasi aslinya.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \geq x\right).$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \left(x^2 = 2\right).$

Penyelesaian. Gunakan aturan pada penjelasan sebelumnya, yaitu (2.3.1) dan (2.3.2).

1. Kita periksa dulu nilai kebenaran kuantifikasi aslinya. Bila diambil $x = \frac{1}{2}$ maka diperoleh pernyataan "$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$" sebuah pernyataan yang salah sehingga diperoleh $\tau\left(\forall x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \geq x\right)\right) = F$. Berdasarkan formula negasi kuantifikasi (2.3.1) diperoleh

   $$\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \geq x\right)\right) = \exists x \in \mathbb{R}, \left(x^2 < x\right).$$

   Kita perhatikan untuk $x = \frac{1}{2}$, diperoleh pernyataan "$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$" sebuah pernyataan yang benar sehingga $\tau\left(\exists x \in \mathbb{R}, \left(x^2 < x\right)\right) = T$. Terlihat bahwa nilai kebenaran keduanya bertolak belakang.

2. Kita cek dulu kebenaran kuantifikasi $\exists x \in \mathbb{R}, \left(x^2 = 2\right)$. Karena $x = \pm\sqrt{2}$ memenuhi $x^2 = 2$ maka $\tau\left(\exists x \in \mathbb{R}, \left(x^2 = 2\right)\right) = T$. Berdasarkan formula (2.3.2), diperoleh

   $$\neg\left(\exists x, \left(x^2 = 2\right)\right) = \forall x, \left(x^2 \neq 2\right).$$

   Untuk $x = \sqrt{2}$ maka pernyataan "$x^2 \neq 2$" adalah salah, sehingga $\tau\left(\forall x, \left(x^2 \neq 2\right)\right) = F$. Benar bahwa nilai kebenaran kedua pernyataan ini bertolak belakang.

Contoh 2.10. Perhatikan bahwa kuantifikasi eksistensial $\exists x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \geq 0\right)$ bernilai benar karena dipenuhi oleh semua bilangan real x. Jadi, kuantifikasi universal $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x^2 \geq 0\right)$ juga bernilai benar.

Diperoleh sebuah fakta trivial bahwa jika kuantifikasi universal bernilai benar maka begitu juga dengan kuantifikasi eksistensial, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku.

2.4.2 Restriksi domain suatu kuantifikasi

Sebagai ilustrasi perhatikan pernyataan berikut: untuk semua mahasiswa baru Unmuh wajib menggunakan seragam putih-hitam, khusus mahasiswa prodi pendidikan matematika harus memakai dasi kupu-kupu. Misalkan pada awalnya domain sebuah kuantifikasi adalah Ω, kemudian kita perhatikan lebih khusus himpunan bagian $D \subset \Omega$. Dalam ilustrasi ini, Ω adalah himpunan semua mahasiswa baru sedangkan D adalah himpunan mahasiswa baru prodi pendidikan matematika. Definisikan dua predikat $P(x)$: "x mahasiswa baru prodi pendidikan matematika" dan $Q(x)$: "x memakai seragam hitam-putih dan dasi kupu-kupu" dengan $x \in \Omega$. Pernyataan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk kuantifikasi implikasi berikut:

$$\forall x \in \Omega, (P(x) \to Q(x)),$$

yang bermakna setiap mahasiswa baru, jika ia mahasiswa prodi pendidikan mate-matika maka ia harus memakai seragam putih-hitam dengan dasi kupu-kupu. Jika semesta pembicaraan hanya dibatasi pada D himpunan mahasiswa baru prodi pendidikan matematika maka bentuk kuantifikasi ini dapat disingkat menjadi

$$\forall x \in D, Q(x).$$

Secara umum keadaan ini dapat diformalkan sebagai berikut: jika $D = \{x \in \Omega : P(x)\}$ maka berlaku

$$\forall x \in D, Q(x) \equiv \forall x \in \Omega, (P(x) \to Q(x)). \tag{2.4.2}$$

Kita sebut himpunan D ini sebagai restriksi (pembatasan) domain Ω. Ini berarti restriksi domain sebuah kuantifikasi universal berupa kuantifikasi universal dari sebuah implikasi. Selain dari itu, restriksi domain sebuah kuantifikasi eksistensial berupa kuantifikasi eksistensial dari sebuah konjungsi, yaitu:

prima adalah ganjil, juga salah karena ada bilangan prima genap yaitu 2. Dari penjelasan ini, disimpulkan bahwa

$$\tau\left[(\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))\right] = F.$$

2. Pernyataan $\forall x \in D, (P(x) \vee Q(x))$ berarti setiap bilangan prima, ia sama dengan 2 atau ia bilangan ganjil, sebuah kebenaran. Kesimpulannya adalah
$$\tau\left(\forall x \in D, (P(x) \vee Q(x))\right) = T.$$

Jadi secara umum $(\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$ dan $\forall x, (P(x) \vee Q(x))$ tidak ekui-valen. Oleh karena itu sebuah konsensus menyatakan bahwa kuantor memiliki kekuasaan lebih tinggi dari konektivitas. Untuk kuantifikasi $\forall x, P(x) \vee Q(x)$ dimaknai sebagai $\forall x, (P(x) \vee Q(x))$, yaitu

$$\forall x, P(x) \vee Q(x) \equiv \forall x, (P(x) \vee Q(x)) \,. \tag{2.4.4}$$

Aturan yang sama berlaku untuk kuantor eksistensial dan konektivitas lainnya. Permasalahan yang lebih kompleks ketika melibatkan fungsi proposisi dua variabel atau lebih dengan satu kuantor atau lebih. Prinsip dasarnya adalah kuantor diterapkan terlebih dahulu, baru konektivitas. Beberapa variasi model ini adalah sebagai berikut:

- $\exists x \in D, Q(x, y)$. Dalam hal ini variabel x dikatakan terbatas oleh kuantor eksistensial $\exists$, sedangkan variabel y bebas. Sebagai contoh, $\exists x \in \mathbb{R}, (x + y = 1)$ dapat dipastikan benar karena untuk y berapapun, $x = 1 - y$ adalah bilangan real. Tapi, jika domainnya dipersempit, yaitu $\exists x \in \mathbb{Z}, (x + y = 1)$ maka nilai kebenarannya tidak pasti. Karena y bebas maka dapat diambil $y = \frac{1}{2}$. Dalam hal ini $\tau\left(\exists x \in \mathbb{Z}, (x + \frac{1}{2} = 1)\right) = F$. Jika y diambil bulat, misalkan $y = 2$ maka $\tau\left(\exists x \in \mathbb{Z}, (x + 2 = 1)\right) = T$.

- $\exists x, (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x, R(x)$. Dalam hal ini variabel x terbatas oleh dua kuantor, yaitu kuantor eksistensial $\exists$ membatasi x pada $P(x) \wedge Q(x)$ dan kuantor universal $\forall$ membatasi x pada $R(x)$. Sebagai contoh kalimat yang relevan dengan ekspresi ini adalah "ada mahasiswa yang memiliki laptop dan sepeda motor, atau setiap mahasiswa memiliki telepon genggam".

- Dalam kasus domain D dan E tidak tumpang tindih, ekspresi $\exists x \in D, (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x \in E, R(x)$ dapat ditulis dalam bentuk dua

2. $\exists z > 0\,\big(z^2 = 2\big)$.

Penyelesaian. Makna dari ekspresi logika $\forall x < 0\,\big(x^2 > 0\big)$ adalah "kuadrat dari bilangan real negatif adalah positif", sedangkan ekspresi $\exists z > 0\,\big(z^2 = 2\big)$ berarti "ada bilangan positif yang kuadratnya sama dengan dua". □

Pernyataan $\forall x < 0\,\big(x^2 > 0\big)$ memiliki makna yang sama dengan kuantifikasi implikasi $\forall x \in \mathbb{R}, \big(x < 0 \to x^2 > 0\big)$, yaitu setiap bilangan real, jika ia negatif maka kuadratnya adalah positif. Untuk pernyataan $\exists z > 0\,\big(z^2 = 2\big)$ memiliki makna yang sama dengan kuantifikasi konjungsi $\exists z \in \mathbb{R}\,\big(z > 0 \wedge z^2 = 2\big)$, yaitu ada bilangan real yang bersifat ia positif dan juga kuadratnya sama dengan 2.

Contoh 2.15. Nyatakan pernyataan berikut dalam bentuk predikat dan kuantifikasi.

1. Setiap mahasiswa di kelas ini sudah mempelajari kalkulus.
2. Semua segitiga memiliki tiga sisi.
3. Tidak ada anjing yang mempunyai sayap.

Penyelesaian. Kita perlu mendefinisikan domain di mana variabel fungsi proposisi (predikat) terdefinisi.

1. Pada soal ini kita mempunyai domain D himpunan mahasiswa di kelas ini. Definisikan predikat $C(x)$: "x sudah mempelajari kalkulus", maka kita dapat menyajikan kalimat ini sebagai $\forall x \in D, C(x)$. Cara lainnya adalah dengan menggunakan kuantifikasi implikasi, yaitu "untuk semua orang, jika orang tersebut mahasiswa di kelas ini maka ia telah mempelajari kalkulus". Dalam hal ini domain diperluas menjadi Ω yaitu himpunan semua orang, kemudian definisikan satu lagi predikat $S(x)$: "x mahasiswa di kelas ini. Jadi, $\forall x \in \Omega, (S(x) \to C(x))$. Bahkan kita dapat menyajikan pernya-taan ini dalam predikat dua variabel. Misalkan $Q(x, y)$: "x telah mempelajari y" dengan domain y himpunan semua mata kuliah, maka diperoleh $\forall x \in D, Q(x, \text{kalkulus})$ atau $\forall x \in \Omega, (S(x) \to Q(x, \text{kalkulus}))$.
2. Misalkan D menyatakan himpunan semua segitiga dan $T(x)$: "segitiga x mempunyai tiga sisi. Maka pernyataan ini dapat disajikan sebagai $\forall x \in D, T(x)$. Silakan untuk mencoba bentuk penyajian lainnya.

Penyelesaian. Kedua kuantifikasi ini mirip namun hanya berbeda urutan kuantornya.

1. Pada kuantifikasi pertama $\forall x \exists y, (x + y = 0)$, jika diberikan sebarang x selalu terdapat y (dalam hal ini $y = -x$) sehingga berlaku $x + y = 0$. Jadi, setiap x kita selalu dapat menemukan y yang memenuhi $x + y = 0$. Jadi, $\tau\left(\forall x \exists y,\ (x + y = 0)\right) = T$.

2. Untuk kuantifikasi kedua $\exists x \forall y, (x + y = 0)$, misalkan ada x yang memenuhi, katakan x_0. Diperoleh pernyataan $\forall y, (x_0 + y = 0)$. Pernyataan ini salah, yaitu dengan mengambil $y = -x_0 + 1$ maka $x_0 + y = x_0 - x_0 + 1 = 1 \neq 0$. Jadi $y = -x_0 + 1$ sebagai contoh pengingkarnya.

□

Berdasarkan contoh ini maka jelas bahwa urutan kuantor mempengaruhi nilai kebenaran kuantifikasi. Dalam kasus jenis kuantornya sama maka urutan tidak menjadi soal karena bersifat komutatif.

Kriteria nilai kebenaran kuantifikasi bersusun. Misalkan D_1 domain untuk x dan D_2 domain untuk y.

1. $\forall x \forall y,\ P(x, y)$ bernilai **benar** jika ia benar untuk setiap pasangan $(x, y) \in D_1 \times D_2$, dan bernilai **salah** jika ada pasangan $(x_0, y_0) \in D_1 \times D_2$ yang membuat $P(x_0, y_0)$ salah.

2. $\forall x \exists y,\ P(x, y)$ bernilai **benar** jika setiap $x \in D_1$ terdapat y_0 sehingga $P(x, y_0)$ benar, dan bernilai **salah** jika terdapat $x_0 \in D_1$ sehingga $P(x_0, y)$ salah untuk setiap $y \in D_2$.

3. $\exists x \forall y,\ P(x, y)$ bernilai **benar** jika ada $x_0 \in D_1$ sehingga $P(x_0, y)$ bernilai benar untuk setiap $y \in D_2$, dan bernilai **salah** jika untuk setiap $x \in D_1$, terdapat $y_0 \in D_2$ sehingga $P(x, y_0)$ salah.

4. $\exists x \exists y,\ P(x, y)$ bernilai benar jika ada pasangan $(x_0, y_0) \in D_1 \times D_2$ sehingga $P(x_0, y_0)$ benar.

Contoh 2.17. Misalkan semesta pembicaraan berupa himpunan semua bilangan real dan diberikan kuantifikasi berikut:

$$\forall x \forall y, \left((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0)\right).$$

Sebaliknya, kita perhatikan contoh translasi dari bahasa sehari-hari ke simbol logika.

Contoh 2.20. Ubahlah pernyataan "perkalian dua bilangan positif sebarang adalah positif" ke dalam bentuk kuantifikasi.

PENYELESAIAN. Kalimat ini dapat dinyatakan dalam bentuk "untuk setiap dua bilangan positif, perkaliannya adalah positif". Misalkan x dan y menyatakan variabel untuk bilangan real sebagai semesta pembicaraan maka kalimat di atas dapat ditulis dalam bentuk kuantifikasi berikut:

$$\forall x \forall y \left((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (xy > 0) \right).$$

□

Contoh 2.21. Ubahlah pernyataan "Setiap orang mempunyai tepat satu telepon genggam" ke dalam bentuk kuantifikasi.

PENYELESAIAN. Di sini kita mempunyai dua variabel, x untuk variabel orang dan y untuk variabel telepon genggam. Fungsi proposisi yang berse-suaian didefinisikan sebagai $B(x, y)$:"x memiliki y" atau "y adalah telepon genggam milik x". Pernyataan "x mempunyai tepat satu telepon genggam" dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\exists y \left(B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z) \right).$$

Kalimat ini dibaca "ada telepon genggam y sehingga jika x memiliki y dan setiap telepon genggam z selain y maka x tidak memiliki z. Karena berlaku untuk setiap x maka kalimat yang dimaksud dalam soal ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\forall x \exists y \left(B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z) \right).$$

□

Contoh 2.22. Misalkan semesta pembicaraan adalah semua bilangan real. Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut:

1. $\forall x \exists y, \big(x = y^2\big)$.
2. $\exists x \forall y, (xy = 0)$.

2. $\exists x \forall y, \, (x + y = 0)$.

PENYELESAIAN. Sudah diketahui dari contoh soal sebelumnya bahwa $\tau\,(\forall x \exists y, \, x + y = 0) = T$ dan $\tau\,(\exists x \forall y, \, x + y = 0) = F$.

1. $\neg\,(\forall x \exists y, \, x + y = 0) \equiv \exists x \forall y, (x + y \neq 0)$. Untuk melihat nilai kebenarannya, misalkan x_0 adalah elemen eksistensial. Diperoleh $\forall y, (x_0 + y \neq 0)$. Selanjutnya ambil $y = -x_0$ diperoleh $x_0 + y = 0$. Karena ada contoh pengingkar y_0 pada pernya-taan $\forall y$ maka disimpulkan negasi kuantifikasi ini bernilai salah. Hasil ini konsisten dengan nilai kebenaran kuantifikasi aslinya yaitu benar.

2. $\neg\,(\exists x \forall y, \, x + y = 0) \equiv \forall x \exists y, (x + y \neq 0)$. Untuk sebarang x, ambil $y := 1 - x$. Diperoleh $x + y = x + (1 - x) = 1 \neq 0$. Jadi, negasi kuantifikasi ini bernilai benar konsisten dengan negasi kuantifikasi aslinya yaitu salah.

$\square$

LATIHAN SELINGAN 2.9. Tentukan negasi kuantifikasi berikut dan periksa nilai kebenarannya. Bandingkan dengan nilai kebenaran kuantifikasi aslinya. Semesta pembicaraan adalah bilangan real.

1. $\forall x \exists y, \left(x = y^2\right)$.

2. $\exists x \forall y, (xy = 0)$.

2.8 Soal-soal Latihan Bab 2

1. Tuliskan pengertian atau definisi istilah-istilah berikut beserta contoh atau ilustrasi yang dapat memperjelasnya.

   (a) Predikat, fungsi proposisi, domain dan variabel fungsi proposisi.

   (b) Kalkulus proposisi dan kalkulus predikat.

   (c) Kuantifikasi, kuantor, nilai kebenaran kuantifikasi, dan contoh pengingkar.

   (d) Nilai pembenar (*truth set*) kuantifikasi, negasi kuantifikasi.

   (e) Kuantifikasi tunggal, kuantifikasi implikasi dan kuantifikasi konjungsi.

   (f) Kuantifikasi bersusun, nilai kebenaran kuantifikasi bersusun, negasi kuantifikasi bersusun.

(a) Seorang penumpang pesawat masuk kelas elit jika ia terbang lebih dari 25 ribu mil dalam setahun atau terbang lebih dari 25 kali dalam tahun tersebut.

(b) Terdapat mahasiswa yang mengambil lebih dari 21 sks per semester dan mendapat nilai A semua.

(c) Untuk mencapai gelar master, seorang mahasiswa harus mengambil pa-ling sedikit 60 sks kulaih, atau 45 sks kuliah dan menulis tesis, dan mendapat nilai tidak kurang dari B pada semua mata kuliah.

(d) Paling sedikit satu *router* berfungsi normal jika data masuk antara 100 kbps dan 500 kbps dan *server* proksi tidak dalam mode diagnostik.

(e) Tidak ada direktori dalam sistem *file* yang dapat dibuka dan tidak ada file yang dapat ditutup ketika sistem *error* terdeteksi.

(f) Sistem *file* tidak dapat di *backup* jika ada user yang sedang *log on.*

6. Negasi dari suatu kuantifikasi secara formal hanya satu, yaitu berdasarkan formula (2.3.1) atau (2.3.2). Namun secara informal, negasi dari sebuah kuantifikasi dapat sangat beragam. Kuncinya adalah kuantifikasi dan negasinya mempunyai nilai kebenaran yang bertolak belakang. Misalkan diketahui kuantifikasi "semua anjing adalah setia". Identifikasilah pernyataan berikut yang merupakan negasi pernyataan ini.

   (a) Semua anjing tidak setia.
   (b) Tidak ada anjing yang setia.
   (c) Beberapa anjing tidak setia.
   (d) Beberapa anjing setia.
   (e) Terdapat seekor hewan tidak setiap tetapi bukan anjing.
   (f) Terdapat seekor anjing yang tidak setia.
   (g) Tidak ada hewan selain anjing yang setiap.
   (h) Beberapa hewan selain anjing yang setia.

7. Berikan contoh pengingkar untuk membuktikan bahwa kuantifikasi universal berikut adalah salah. Domainnya adalah himpunan bilangan real.

   (a) $\forall x, (x^2 \geq x)$.

11. Kuantifikasi null adalah kuantifikasi yang memuat pernyataan yang tidak melibatkan variabel. Pernyataan "setiap bilangan bukan prima dapat disajikan dalam bentuk perkalian bilangan prima atau logika matematika adalah ilmu cara bernalar" dapat dinyatakan dalam bentuk $\forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x)) \vee A$ dengan $P(x)$: "x bilangan prima", $Q(x)$: "x dapat disajikan dalam bentuk perkalian bilangan prima", domain untuk x adalah bilangan real, A: "logika matematika adalah ilmu cara bernalar". Di sini variabel x tidak muncul pada pernyataan A. Misalkan pernyataan A tidak memuat variabel x, buktikan ekuivalensi logis berikut ini:

    (a) $(\forall x, P(x)) \vee A \equiv \forall x, (P(x) \vee A)$.
    (b) $(\exists x, P(x)) \wedge A \equiv \exists x, (P(x) \wedge A)$.
    (c) $\forall x, (A \rightarrow P(x)) \equiv A \rightarrow \forall x, P(x)$.
    (d) $\exists x, (A \rightarrow P(x)) \equiv A \rightarrow \exists x, P(x)$.

12. Misalkan $P(x, y)$: "mahasiswa x mengambil mata kuliah y". Domain untuk y adalah semua mahasiswa dalam kelas ini dan domain untuk y adalah semua mata kuliah yang ditawarkan pada semester ini. Buatlah sebanyak mungkin kuantifikasi bersusun yang melibatkan kuantor $\forall$ dan $\exists$. Kemudian terjemahkan kuantifikasi-kuantifikasi tersebut ke dalam Bahasa Indonesia (bahasa sehari-hari).

13. Tentukan negasi dari setiap kuantifikasi bersusun yang Anda peroleh pada soal sebelumnya, kemudian terjemahkan ke dalam Bahasa Indonesia.

14. Misalkan $T(x, y)$: "mahasiswa x pernah mengunjungi kota y". Domain untuk x adalah semua mahasiswa di kelas ini dan domain untuk y adalah semua kota yang ada di dunia. Nyatakan pernyataan berikut ke dalam Bahasa Indonesia sederhana dan mudah dipahami.

    (a) $T(\text{Santi, Berlin})$.
    (b) $\exists x, T(x, \text{Wonosari})$.
    (c) $\exists y, T(\text{Budi}, y)$.
    (d) $\exists y\, [T(\text{Ahok}, y) \wedge T(\text{Joko}, y)]$.
    (e) $\exists y \forall z\, [y \neq (\text{David}) \wedge T(\text{David}, z) \rightarrow T(y, z)]$.
    (f) $\exists x \exists y \forall z\, [(x \neq y) \wedge (T(x, z) \leftrightarrow W(y, z))]$.

(b) $\exists x \exists y, P(x,y)$.
(c) $\exists x \forall y, P(x,y)$.
(d) $\forall x \exists y, P(x,y)$.

19. Ekspresikan negasi kuantifikasi berikut sehingga lambang negasi $\neg$ diletakkan sebelum fungsi proposisi.

(a) $(\forall x \exists y, P(x,y)) \vee (\forall x \exists y, Q(x,y))$.
(b) $(\forall x \exists y, P(x,y)) \wedge (\exists z, R(x,y,z))$.
(c) $\forall x \exists y, (P(x,y) \to Q(x,y))$.

20. Dengan asumsi domain untuk kedua kuantor $\forall$ dan $\exists$ pada masing-masing variabel x dan y adalah sama, buktikan bahwa:

(a) $\neg (\exists x \forall y, P(x,y)) \equiv \forall x \exists y, \neg P(x,y)$.
(b) $\neg (\forall x \exists y, P(x,y))$ tidak ekuivalen dengan $\exists x \exists y, P(x,y)$.
(Petunjuk: temukan sebuah kasus di mana nilai kebenaran kedua kuantifikasi bertolak belakang).

21. Rumuskan negasi pernyataan berikut ini:

(a) Terdapat $M > 0$ sehingga setiap $x \in A$ berlaku $|f(x)| \leq M$.
(b) Jika $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = 0$ maka $c_k = 0$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$.
(c) Setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.
(d) Setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

BAB 3

Aturan Inferensi

Katakanlah, apakah sama antara orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui. Sesungguhnya orang-orang berakal sajalah yang dapat menerima pelajaran.

QS 39:9.

Di dalam matematika, argumen bukanlah sebuah perdebatan atau adu pendapat. Argumen merupakan sekumpulan pernyataan yang diakhiri sebuah kesimpulan. Di dalam argumen terdapat dua kelompok pernyataan, yaitu hipotesis yang terdiri atas premis-premis dan kesimpulan. Kebenaran sebuah pernyataan dalam matematika didasarkan pada bentuk argumennya bukan susunan kalimatnya. Pernyataan "jika $2+3=4$ maka Tuhan tidak ada" adalah benar walaupun konklusinya "Tuhan tidak ada" adalah salah. Pernyataan ini berupa implikasi $p \to q$ dengan premis p: "$2+3=4$" salah dan kesimpulan q: "Tuhan tidak ada" juga salah. Dalam ilustrasi ini, sebuah argumen yang benar atau valid tidak terjamin menghasilkan kesimpulan yang benar karena bergantung pada premis-premis yang digunakan.

Untuk menghindari munculnya kesimpulan yang fatal maka perlu kepastian bahwa semua premis yang digunakan adalah benar. Pada bab ini dibahas berbagai bentuk argumen yang digunakan sebagai aturan infe-rensi. Aturan inferensi adalah aturan yang digunakan dalam pengambilan kesimpulan.

3.1 Argumen dan Validitasnya

Secara umum, argumen berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array}\right\} \text{hipotesis} \\ \hline \therefore q \text{ kesimpulan} \end{array} \tag{3.1.1}$$

Notasi "$\therefore$" dapat dibaca "jadi" atau "diperoleh". Jadi, argumen merupakan media dalam pengambilan kesimpulan. Jadi, setiap aturan inferensi berbentuk sebuah argumen. Bentuk argumen yang paling sederhana adalah implikasi $p \to q$. Pada argumen ini hanya ada sebuah premis yaitu p dan sebuah kesimpulan yaitu q. Secara umum, argumen (3.1.1) dapat pula disajikan dalam bentuk implikasi sebagai berikut:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q. \tag{3.1.2}$$

Penyajian argumen dalam bentuk (3.1.2) akan sangat berguna dalam melakukan analisis validitas argumen.

Definisi 3.1. [ARGUMEN] Argumen adalah serangkaian pernyataan yang terdiri atas premis-premis sebagai hipotesis dan sebuah kesimpulan. Argumen dinyatakan dalam bentuk (3.1.1) atau (3.1.2).

Untuk memahami proses pengambilan sebuah kesimpulan melalui beberapa premis, kita perhatikan argumen sederhana dalam contoh berikut.

Contoh 3.1. Misalkan diketahui dua premis, yaitu p_1: "jika Socrates manusia maka ia akan punah" dan p_2: "Socrates adalah manusia". Berdasarkan kedua premis ini kita peroleh kesimpulan "Socrates akan punah". Ini adalah sebuah kesimpulan yang masuk akal. Bila disajikan ke dalam bentuk argumen maka diperoleh

$$\begin{array}{l} p_1\text{: jika Socrates manusia maka ia akan punah.} \\ p_2\text{: Socrates adalah manusia.} \\ \hline \therefore q\text{: Socrates akan punah.} \end{array}$$

Pertanyaannya, mengapa melalui premis p_1 dan p_2 diperoleh kesimpulan

	p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$(p \to q) \wedge p \to q$
1	T	T	T	T	T
2	T	F	F	F	T
3	F	T	T	F	T
4	F	F	T	F	T

Karena $(p \to q) \wedge p \to q$ merupakan tautologi maka disimpulkan argumen ini valid. □

Untuk membuktikan validitas sebuah argumen, sesungguhnya cukup diperiksa kasus di mana masing-masing premis $p_1, p_2, \cdots, p_n$ bernilai benar, karena untuk kasus di mana ada salah satu premis ini salah, katakan $\tau(p_k) = F$ maka $\tau(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) = F$ sehingga $\tau[(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q] = T$, yakni argumennya valid. Dalam contoh di atas cukup diperiksa baris pertama, yaitu $\tau(p \to q) = T$ dan $\tau(p) = T$. Argumen ini dapat dijelaskan sebagai berikut: diketahui $p \to q$ bernilai benar dan p bernilai benar, maka haruslah disimpulkan q bernilai benar. Bila disimpulkan q salah maka $p \to q$ menjadi salah (kontradiksi).

Contoh 3.3. Apakah argumen berikut valid?

$$\begin{array}{l} p \to q \vee \neg r \\ q \to p \wedge r \\ \hline \therefore r \end{array}$$

Penyelesaian. Argumen ini melibatkan tiga pernyataan p, q, dan r dengan dua premis, yaitu $p_1 : p \to q \vee \neg r$ dan $p_2 : q \to p \wedge r$, dan sebuah kesimpulan, yaitu $p \to r$. Kita susun tabel kebenaran sebagai berikut:

No	p	q	r	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	$p_1 : p \to q \vee \neg r$	$p_2 : q \to p \wedge r$	$p_1 \wedge p_2 \to r$
1	T	T	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	F	T	F	
3	T	F	T	F	T	F	T	
4	T	F	F	T	F	T	T	**F**
5	F	T	T	T	F	T	F	
6	F	T	F	T	F	T	F	
7	F	F	T	F	F	T	T	T
8	F	F	F	T	F	T	T	**F**

sederhana adalah modus ponens, modus tollens, dan silogisme. Selain dari ketiga bentuk dasar argumen ini juga diperkenalkan bentuk-bentuk lainnya yang bagi sebagian orang masih agak asing seperti silogisme disjungtif, resolusi, generalisasi, simplifikasi, dan eliminasi.

3.2.1 Modus ponens dan modus tollens

Modus ponens adalah argumen yang berbentuk:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus ponens berasal dari bahasa Latin yang berarti "metoda afirmasi atau penetapan". Bentuk argumen modus ponens ini sudah diberikan pada contoh dan pembahasan sebelumnya. Kita juga telah membuktikan validitas argumen ini dengan menunjukkan bahwa $(p \wedge (p \to q)) \to q$ merupakan sebuah tautologi.

Contoh 3.4. Misalkan implikasi "jika belanja anda lebih dari 100 ribu maka anda mendapat diskon 10%" dan faktanya "belanja anda 125 ribu". Maka dengan modus ponens, disimpulkan bahwa "anda mendapat diskon 10%".

Contoh berikut ini adalah argumen valid dengan premis yang salah menghasilkan kesimpulan yang salah.

Contoh 3.5. Diperhatikan argumen berikut, selidikilah nilai kebenaran kesimpulannya.

> "Jika $\sqrt{2} > \frac{1}{2}$ maka $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$; kita tahu bahwa $\sqrt{2} > \frac{1}{2}$; konsekuensinya $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$."

PENYELESAIAN. Argumen ini berbentuk modus ponens dengan p: "$\sqrt{2} > \frac{1}{2}$" dan q: "$\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$". Tetapi kesimpulannya $2 > \frac{9}{4}$ salah. Argumen ini valid, tetapi premis $p \to q$ salah karena $\tau(p) = T$ dan $\tau(q) = F$. □

Modus tollens adalah argumen yang berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Contoh 3.7. Jika New York kota besar maka New York memiliki gedung-gedung pencakar langit. New York memang memiliki gedung-gedung pencakar langit. Kesimpulannya, New York adalah kota besar. Pada contoh ini kelihatannya tidak ada aneh dan terasa logis saja. Padahal kalau diperhatikan argumen ini berbentuk

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \therefore p \end{array}$$

Dapat ditunjukkan bahwa argumen ini tidak valid, silakan dicoba.

3.2.2 Silogisme hipotetik dan silogisme disjungtif

Silogisme hipotetik (silogisme) adalah argumen yang berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r \qquad} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Silogisme ini dapat diilustrasikan pula sebagai sifat transitif, yakni jika kedua implikasi $p \to q$ dan $q \to r$ benar maka berlaku implikasi langsung $p \to r$.

Latihan Selingan 3.3. Tunjukkan validitas argumen silogisme hipotetik dengan tabel kebenaran.

Cara lain untuk membuktikan validitas silogisme hipotetik adalah dengan penjabaran, misalnya menggunakan kontraposisi.

Contoh 3.8. Buktikan validitas silogisme hipotetik tanpa tabel kebenaran.

Bukti. Dengan asumsi silogisme ini valid, kita mempunyai bentuk implikasi beri-kut: jika $\tau(p \to q) = T$ dan $\tau(q \to r) = T$ maka $\tau(p \to r) = T$. Kita buktikan melalui kontraposisinya dan aturan de Morgan, yaitu jika $\tau(p \to r) = F$ maka $\tau(p \to q) = F$ atau $\tau(q \to r) = F$. Diketahui $\tau(p \to r) = F$ maka hanya ada satu kemungkinan, yaitu ketika $\tau(p) = T$ dan $\tau(r) = F$. Ada dua kemungkinan nilai kebenaran q.

- Untuk $\tau(q) = T$ diperoleh $\tau(p \to q) = T$, $\tau(q \to r) = F$.
- Untuk $\tau(q) = F$ diperoleh $\tau(p \to q) = F$, $\tau(q \to r) = T$.

Argumen ini dapat dijelaskan bahwa sebuah pernyataan yang bernilai benar bila digabungkan dengan pernyataan lain dengan menggunakan operator disjungsi maka terbentuk pernyataan baru yang tetap benar.

Kebalikan dari argumen generalisasi adalah **simplifikasi**, yaitu penyederhanaan. Dua bentuk simplifikasi dari konjungsi ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \text{ dan } \frac{p \wedge q}{\therefore q}.$$

Argumen ini dapat dijelaskan sebagai berikut: jika pada sebuah pernyataan berbentuk konjugsi bernilai benar maka dapat disimpulkan masing-masing pernyataan adalah benar. Simplifikasi dapat juga berasal dari implikasi, yaitu

$$\frac{p \leftrightarrow q}{\therefore p \rightarrow q} \text{ dan } \frac{p \leftrightarrow q}{\therefore q \rightarrow p}.$$

Sedangkan **konjungsi** adalah argumen berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Argumen ini dapat dijelaskan sebagai berikut: jika dua pernyataan bernilai benar maka konjungsinya bernilai benar. Fakta ini sudah dijelaskan pada materi konektivitas.

3.2.5 Eliminasi

Ada dua bentuk argumen eliminasi sebagaimana diberikan berikut ini:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array} \quad \text{dan} \quad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Argumen ini dapat dijelaskan bahwa pada sebuah kalimat majemuk disjungsi yang bernilai benar, jika salah satu pernyataannya salah maka pernyataan lainnya pasti benar.

3.2.6 Divisi kasus

Argumen divisi kasus ini memilik bentuk sebagai berikut:

Aturan inferensi dasar	***Nama***
$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$	modus ponens
$\begin{array}{l} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	modus tollens
$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$	silogisme hipotetik
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	silogisme disjungtif
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$	resolusi
$\dfrac{p}{\therefore p \vee q}\ , \quad \dfrac{q}{\therefore p \vee q}$	generalisasi
$\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}\ , \quad \dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$	simplifikasi konjungsi
$\dfrac{p \leftrightarrow q}{\therefore p \to q}\ , \quad \dfrac{p \leftrightarrow q}{\therefore q \to p}$	simplifikasi bi-implikasi
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$ dan $\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	eliminasi
$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \to r \\ q \to r \\ \hline \therefore r \end{array}$	divisi kasus

Tabel 3.1: Bentuk-bentuk aturan inferensi dasar

Latihan Selingan 3.7. Berikut argumen yang menghasilkan "$1 = 2$". Misalkan diketahui a dan b dua bilangan positif yang sama.

Langkah	Alasan dan keterangan
1. $a = b$	diketahui
2. $a^2 = ab$	kedua ruas pada (1) dikalikan dengan a
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	kedua ruas (2) dikurangi oleh b^2
4. $(a + b)(a - b) = (a - b)b$	kedua ruas (3) difaktorkan
5. $a + b = b$	kedua ruas (4) dibagi oleh $(a - b)$
6. $2b = b$	substitusi a dengan b (diketahui)
7. $2 = 1$	kedua ruas dibagi dengan b

Pada argumen ini diperoleh kesimpulan yang salah $2 = 1$. Apakah argumen ini valid? Identifikasilah semua premis-premisnya. Apakah ada premis yang salah?

Contoh 3.13. [Mencari kacamata] Pada pagi hari ketika hendak berangkat kuliah Anda tidak menemukan kacamata karena lupa tempat menaruhnya. Beberapa kilas balik peristiwa yang dapat Anda ingat adalah sebagai berikut:

1. Jika saya membaca koran di ruang makan pagi maka kacamata tertinggal di meja makan.
2. Jika kacamata tertinggal di meja makan maka saya pasti melihatnya ketika sarapan pagi.
3. Saya tidak melihat kacamata itu ketika sarapan pagi.
4. Saya telah membaca koran di ruang keluarga atau di ruang makan.
5. Jika saya membaca koran di ruang keluarga maka kacamata ada di meja kopi.

Apakah Anda dapat menemukan posisi kacamata tersebut?

Penyelesaian. Kumpulkan terlebih dulu pernyataan dan premis-premis yang ada. Misalkan p: "saya membaca koran di ruang makan", q: "kacamata tertinggal di meja makan", r: "saya melihat kacamata ketika sarapan pagi", s: "saya membaca koran di ruang keluarga", t: "kacamata tertinggal di meja kopi". Maka diperoleh hipotesis sebagai berikut:

1. $p \to q$

Kesimpulannya, Carol adalah seorang bayi. □

Dua permasalahan berikut adalah sedikit aneh tapi nyata dan sering muncul pada matematika rekreasi.

Contoh 3.15. Tiga orang sahabat menyewa kamar hotel secara patungan sebesar \$30 dibayar pada saat masuk (*check in*). Setelah mereka keluar (*check out*), sang bendahara hotel sadar bahwa sewa kamar hanya sebesar \$25 sehingga ketiga tamu tersebut kelebihan bayar sebesar \$5. Kelebihan \$5 ini dikembalikan \$3 dan \$2-nya disimpan sendiri oleh bendahara. Jadi, sewa kamar sesungguhnya adalah $\$30 - \$3 = \$27$ ditambah \$2, sama dengan \$29. Karena mereka sudah membayar \$30, di mana selisih uang sebesar \$1 tersebut?

Penyelesaian. Sepintas lalu kejadian ini cukup aneh. Perhatikan analisis berikut.

$$\begin{aligned} \text{Sewa kamar sesungguhnya} &= \text{terbayar-sisa bayar} \\ &= \text{terbayar-(dikembalikan+disimpan bendahara)} \\ \$25 &= \$30 - (\$3 + \$2) \end{aligned}$$

Nilai terbayar \$30 seharusnya diperoleh dari $\$25 + \$3 + \$2$, bukan dari $\$30 - \$3 + \$2$ seperti pada argumen di atas. Perhitungan ini berbentuk

$$\begin{aligned} \text{terbayar - dikembalikan+disimpan} &\neq \text{terbayar} \\ \$30 - \$3 + \$2 &\neq 30. \end{aligned}$$

Pada kasus ini, sisa \$5 tersebut dibagi menjadi dua bagian (x, y) dengan x dikembalikan dan y disimpan. Coba buat tabel nilai $30 - x + y$ untuk pasangan $(0, 5), (1, 4)$, $(2, 3), (3, 2)$,$(4, 1)$, dan $(5, 0)$.

x	y	$30 - x + y$
0	5	35
1	4	33
2	3	31
3	2	29
4	1	27
5	0	25

Pada kombinasi $(2, 3)$ persis kasus pada contoh. Tidak akan pernah nilai $30 - x + y$ sama dengan 30 karena sisa \$5 merupakan bilangan ganjil tidak dapat dibagi rata karena kita hanya memperhatikan bilangan bulat. Kombinasi ketiga anak mendapat kerbau utuh. Apa yang terjadi jika sisa pembagian diambil kembali oleh ahli sodaqoh tadi. Jelaskan keadaan ini melalui argumen secara matematis.

3.3.1 Kesalahan dalam inferensi

Ada dua bentuk kesesatan (*fallacious*) dalam inferensi, yaitu:

1. Kesalahan dalam menerima kesimpulan (*fallacy of affirming the conclusion*), yaitu sebuah kesimpulan yang didasarkan pada argumen $[(p \to q) \wedge q] \to p$, padahal ini bukan sebuah tautologi (silakan periksa). Sebagai contoh: jika x prima lebih dari 2 maka x ganjil. Diketahui x ganjil, disimpulkan x prima. Jelas ini sebuah kesesatan. Contoh lainnya, jika Ibu dapat arisan maka ia akan membeli televisi baru. Ter-nyata di rumahnya ditemukan televisi baru, disimpulkan Ibu tersebut dapat arisan. Ini juga kesimpulan yang belum tentu benar. Kesalahan ini sama saja menganggap konvers dan implikasi adalah ekuivalen, padahal tidak.

2. Kesalahan dalam menolak hipotesis (*fallacy of denying the hypothesis*), yaitu bertumpu pada argumen $[(p \to q) \wedge \neg p] \to q$, padahal ini bukanlah sebuah tautologi (silakan periksa). Sebagai contoh: jika belanja Anda lebih dari 100 ribu maka Anda mendapat diskon 10%. Ketika nilai belanja Anda kurang dari 100 ribu, misalnya 99 ribu maka disimpulkan Anda tidak mendapat diskon. Kesalahan ini sama saja mengganggap invers dan implikasi adalah ekuivalen, padahal tidak.

3.4 Argumen yang Memuat Kuantifikasi

Didasarkan pada dua macam bentuk kuantifikasi maka terdapat 4 aturan inferensi untuk kuantifikasi. Keempat aturan ini sering digunakan dalam penalaran matematika, yaitu:

1. **Instantisasi universal**, yaitu aturan yang digunakan untuk menyimpulkan $P(c)$ dari premis $\forall x \in D,\ P(x)$, dengan c anggota khusus semesta pembicaraan D. Aturan ini ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\forall x \in D, P(x)}{\therefore P(c)}.$$

Sebagai contoh, jika ditemukan kasus seseorang kena wabah demam berdarah di suatu kampung ABC maka pemerintah membuat pernyataan bahwa telah terjadi wabah demam berdarah di kampung ABC.

5. **Modus ponens universal**, yaitu modus ponens yang terjadi pada kuantifikasi universal. Aturan ini dinyatakan sebagai:

$$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \rightarrow Q(x)] \\ P(c) \text{ untuk suatu } c \in D \\ \hline \therefore Q(c). \end{array}$$

6. **Modus tollens universal**, yaitu modus tollens yang terjadi pada kuantor universal. Aturan ini dinyatakan sebagai:

$$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \rightarrow Q(x)] \\ \neg Q(c) \text{ untuk suatu } c \in D \\ \hline \therefore \neg P(c). \end{array}$$

Untuk memudahkan dalam mengingat keenam aturan inferensi ini, kita rangkum pada tabel berikut.

Aturan inferensi	***Nama***
$\dfrac{\forall x, P(x)}{\therefore P(c)}$	Instantisasi universal
$\dfrac{P(c) \text{ untuk sebarang } c}{\therefore \forall x, P(x)}$	Generalisasi universal
$\dfrac{\exists x, P(x)}{\therefore P(c) \text{ untuk suatu } c}$	Instantisasi eksistensial
$\dfrac{P(c) \text{ untuk suatu c}}{\therefore \exists x, P(x)}$	Generalisasi eksistensial
$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \rightarrow Q(x)] \\ P(c) \text{ untuk suatu } c \in D \\ \hline \therefore Q(c). \end{array}$	Modus ponens universal
$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \rightarrow Q(x)] \\ \neg Q(c) \text{ untuk suatu } c \in D \\ \hline \therefore \neg P(c). \end{array}$	Modus tollens universal

Tabel 3.2: Aturan inferensi pada kuantifikasi

T. Karena $A \cap B = \emptyset$ maka sistem persamaan kuadrat ini tidak mempunyai penyelesaian sehingga

$$\tau\left[\exists x, (P(x) \wedge Q(x))\right] = F.$$

Latihan berikut menunjukkan bahwa kedua kuantifikasi $(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$ dan $\exists x, (P(x) \wedge Q(x))$ seolah-olah ekuivalen padahal sesungguhnya tidak.

Latihan Selingan 3.10. Diketahui premis $(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$ bernilai benar. Ditunjukkan bahwa $\exists x, (P(x) \wedge Q(x))$ juga bernilai benar. Perhatikan langkah-langkah beserta alasannya sebagai berikut:

Tahap	**Keterangan dan alasan**
1. $(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$	premis (diketahui)
2. $\exists x, P(x)$	simplifikasi 1
3. $P(c)$	instantisasi 2
4. $\exists x, Q(x)$	simplifikasi 1
5. $Q(c)$	instantisasi 4
6. $P(c) \wedge Q(c)$	konjungsi 3 dan 5
9. $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	generalisasi eksistensial

Jelas ada yang salah dengan argumen ini. Amati langkah-langkahnya, di mana letak kesalahannya? Jelaskan.

(c) Hipotesis: “Semua manusia adalah fana”, “Socrates adalah manusia”. Kesimpulan: “Socrates adalah fana”.

(d) Hipotesis: “Bayi tidak logis”, “tidak ada orang pemarah yang dapat mengendalikan buaya”, “orang yang tidak logis adalah pemarah”. Kesimpulan: “Bayi tidak dapat mengendalikan buaya”.

(e) Hipotesis: “tidak ada orang menjadi jin”, “Daasim adalah jin”. Kesimpulan: “Daasim bukanlah manusia”.

8. Rumuskan sebuah kesimpulan dari premis-premis yang ada. Gunakan aturan inferensi (bentuk argumen) yang dapat dipertanggungjawabkan.

   (a) “Jika saya mengambil cuti maka hari hujan atau bersalju”. “Saya mengambil cuti hari Rabu atau Kamis”. “Hari Rabu cerah”. “Kamis tidak bersalju”.

   (b) “Jika saya makan pedas maka saya mendapat mimpi aneh”. Saya mendapat mimpi aneh jika ada halilintar ketika saya tidur”. “Saya tidak memdapat mimpi aneh”.

   (c) “Setiap mahasiswa Ilmu Komputer mempunyai laptop”. “Rudi tidak mempunyai laptop”. “Ana mempunyai laptop”.

   (d) “Apa yang baik untuk perusahaan adalah baik untuk negara”. “Apa yang baik untuk negara adalah baik untuk rakyat”. “Apa yang baik untuk perusahaan adalah untukmu mampu membeli banyak barang”.

   (e) “Semua serangga mempunyai enam kaki”. “Capung adalah serangga”. “Laba-laba tidak mempunyai enam kaki”. “Laba-laba memakan capung”.

   (f) “Semua makanan sehat tidak enak dirasa” “Tahu adalah makanan sehat”. “Anda hanya makan makanan yang rasanya enak”. “Anda tidak makan tahu”. “Burger tidak sehat untuk dimakan”.

9. Periksalah apakah argumen berikut valid atau tidak. Jika valid, tentukan bentuk argumen yang digunakan. Jika tidak, tunjukkan letak kesalahannya.

   (a) Jika x bilangan real dengan $x > 1$ maka $x^2 > 1$. Andaikan $x^2 > 1$. Diperoleh, $x > 1$.

(a) Modus ponens universal:
$$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \to Q(x)] \\ P(c) \text{ untuk suatu } c \in D \\ \hline \therefore Q(c). \end{array}$$

(b) Modus tollens universal:
$$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \to Q(x)] \\ \neg Q(c) \text{ untuk suatu } c \in D \\ \hline \therefore \neg P(c). \end{array}$$

(c) Transitif universal:
$$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \to Q(x)] \\ \forall x \in D\,[Q(x) \to R(x)] \\ \hline \therefore \forall x \in D\,[P(x) \to R(x)]. \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \to (Q(x) \wedge S(x))] \\ \forall x \in D\,[P(x) \wedge R(x)] \\ \hline \therefore \forall x \in D\,[R(x) \wedge S(x)]. \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{l} \forall x \in D\,[P(x) \vee Q(x)] \\ \forall x \in D\,[(\neg P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)] \\ \hline \therefore \forall x \in D\,[\neg R(x) \to P(x)]. \end{array}$$

13. [Mencari harta karun]. Di belakang lemari tua ditemukan surat wasiat dari bekas bajak laut terkenal tentang penyimpanan harta karun yang sangat banyak. Pada surat itu dituliskan 5 pernyataan sebagai petunjuk untuk menemukan harta karun yang dimaksud. Kelima pernyataan tersebut adalah sebagai berikut:

    (a) Jika rumah ini di samping danau maka harta karun tidak di dapur.
    (b) Jika pohon di halaman depan adalah palm maka harta karun ada di dapur.
    (c) Rumah ini di samping danau.
    (d) Pohon di halaman depan adalah palm atau harta karun terkubur di bawah tiang bendera.
    (e) Jika pohon di depan rumah adalah kelapa maka harta karun ada di garasi.

    Di mana harta karun tersebut tersembunyi?

14. Andaikan Anda berkunjung ke sebuah daerah terpencil yang dihuni oleh dua jenis manusia, yaitu satria (orang baik, bicara jujur) dan bajingan (orang jahat, bicara bohong).

BAB 4

Metode Pembuktian dalam Matematika

Dan Dialah yang menjadikan bintang-bintang bagimu, agar kamu menjadikannya petunjuk dalam kegelapan di darat dan di laut. Sesungguhnya Kami telah menjelaskan tanda-tanda kebesaran (Kami) kepada orang-orang yang mengetahui.

QS 6:97.

Pada kebanyakan bidang ilmu seperti fisika, biologi, ekonomi dan lainnya, pengetahuan diperoleh melalui jalan panjang dan berliku, misalnya melalui observasi disertai dengan penerapan penalaran, metode dan teori-teori terkait yang relevan. Pada bidang-bidang ilmu ini, teori saintifik diterima karena kesesuaiannya dengan hasil observasi, sehingga kelak akan akan timbul keraguan manakala sebuah observasi baru tidak sesuai dengan teori yang sudah ada.

Pada mulanya aktivitas yang sama juga terjadi pada matematika. Misalnya, pada masyarakat Mesir Kuno, Babilonia dan Cina Kuno, mate-matika berupa kumpulan aturan untuk pengukuran lahan, perhitungan pajak, dan prediksi gerhana. Metode-metode ini dipelajari dari observasi, kemudian diterapkan secara umum. Kemudian, terjadi perubahan cara pendekatan dalam matematika. Orang-orang Yunani kuno menemukan bahwa di dalam aritmetika dan geometri banyak fakta atau kebenaran yang ada sangat mungkin dapat dibuktikan secara umum. Mereka menemukan beberapa kebenaran dalam matematika dapat dibuktikan secara jelas dan sederhana (*obvious*) atau trivial, sedangkan sebagian lainnya harus dibuktikan melalui fakta lainnya yang sudah matematika lainnya. Selanjutnya, semua informasi dan fakta yang terkumpul secara individual ini dibangun suatu koherensi untuk kemudian disusun sebuah konjektur. Setelah konjektur dapat dibuktikan kebenarannya maka selanjutnya ia menjadi suatu proposisi atau teorema. Jadi teorema merupakan pernyataan yang kebenarannya dapat dibuktikan.

Pernyataan-pernyataan matematika seperti definisi, teorema, lemma, akibat, dan lainnya pada umumnya berbentuk kalimat majemuk, dapat berupa implikasi, bi-implikasi, negasi, atau berupa kalimat berkuantor. Operator logika seperti konjungsi $\wedge$, disjungsi $\vee$, negasi $\neg$, dan disjungsi eksklusif $\oplus$ juga sering termuat dalam pernyataan matematika. Jadi, membuktikan kebenaran suatu teorema tidak lain adalah membuktikan kebenaran suatu kalimat majemuk. Dasarnya adalah logika matematika yang telah diberikan pada bab-bab awal buku ini.

Materi logika sudah diberikan sejak di bangku SLTA. Namun selama ini, sebagian siswa atau guru masih menganggap logika sebagai materi hapalan seperti menghapal tabel kebenaran dan pola pernyataan. Mereka belum memahami lebih dalam mengapa dan untuk apa logika dipelajari. Tanpa menguasai logika maka sulit untuk membangun kemampuan berpikir logis (*logically thinking*) siswa dalam pembelajaran matematika. Selama ini pola berpikir siswa masih didominasi oleh pola mekanistik mengikuti langkah-langkah atau algoritma (*algorithm thinking*). Pola berpikir algoritma dalam belajar matematika ini ditekankan pada memahami langkah-langkah dalam menyelesaikan suatu soal, kemudian mengikutinya untuk menyelesaikan soal yang mirip, tanpa melihat lebih dalam mengapa langkah-langkah tersebut dapat dilakukan.

Bila pendekatan berpikir ini terus mendominasi pembelajaran matematika di sekolah maka kelak siswa hanya akan menjadi "robot matematika". Mereka mampu dan cepat menyelesaikan soal yang mirip dengan contoh sebelumnya, tetapi tidak mampu lagi ketika soal tersebut dimodifikasi sedikit, sekalipun konsepnya tetap sama. Pembelajaran matematika yang lebih didominasi oleh dril soal menghitung (angka) daripada pembuktian (pernyataan) dapat menghambat pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis di kalangan siswa. Idealnya, kedua pola berpikir tersebut yaitu berpikir logis dan berpikir algoritma dapat berkembang bersama. Inilah salah satu pertimbangan akademik kurikulum 2013 yang menekankan pembelajaran dengan pendekatan saintifik agar kemampuan penalaran ilmiah siswa terbentuk sejak dini.

Pada tahap awal, aktivitas membuktikan bukanlah pekerjaan yang menarik karena lebih banyak bekerja dengan simbol dan kalimat logika daripada bekerja dengan angka-angka. Selain itu, pekerjaan membuktikan lebih sulit dan dianggap tidak penting oleh sebagian besar orang. Padahal banyak sekali manfaat yang dapat diperoleh dari aktivitas membuktikan, antara lain *to establish a fact with certainty, to gain understanding, to communicate an idea to others, for the challenge, to create something beautiful, to construct a large mathematical theory* (Making Mathematics, http:/www2.edc.org/makingmath).

To establish a fact with certainty merupakan motivasi paling dasar mengapa orang perlu membuktikan suatu pernyataan matematika, yaitu untuk meyakinkan bahwa apa yang selama ini dianggap benar adalah memang benar. Tidak dapat dipungkiri selama ini banyak kebenaran dan fakta di dalam matematika hanya dipercaya begitu saja tanpa merasa perlu membuktikannya lagi, termasuk fakta-fakta yang sangat sederhana. Misalnya, kebanyakan orang tidak tertarik untuk membuktikan mengapa $\sqrt{2}$ bilangan irrasional, atau bagaimana cara memperoleh rumus abc $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ untuk akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, rumus derivatif $y' = nx^{n-1}$ untuk fungsi $y = x^n$, dan lain sebagainya.

Pembuktian tidak hanya menunjukkan suatu fakta tetapi pada setiap langkahnya juga memberikan penjelasan tentang fakta-fakta lain yang terkait. Di sinilah pembuktian teorema berfungsi untuk mendapatkan pemahaman konsep yang terkait (*to gain understanding*). Seorang pemenang “medal field” dalam mate-matika, Pierre Deligne meyatakan bahwa:

> *“I would be grateful if anyone who has understood this demonstration would explain it to me”* (Pierre Deligne).

Pernyataan ini mengandung makna bahwa bilamana seseorang dapat menjelaskan kembali apa yang sudah dijabarkan oleh Pierre Deligne maka dapat dipastikan bahwa orang tersebut telah memahaminya. Inilah sebagai indikator keberhasilan metode komunikasi matematika melalui pembuktian. Seperti telah dijelaskan sebelumnya bahwa pembuktian adalah metode komunikasi sebuah kebenaran matematika kepada orang lain yang juga memahami bahasa matematika (*to communicate an idea to others*).

Menyusun konjektur yang berkualitas dalam matematika tidaklah mudah. Membuktikan konjektur lebih sulit lagi. Sebagaimana telah diilustrasikan pada awal Bab 1, hanya sebagian kecil saja konjektur dapat dibutikan itu pun setelah usianya ratusan tahun. Untuk mehamami bukti yang sudah ditemukan dan disusun orang lain saja tidak mudah apalagi menyusun sendiri. Oleh karena itulah membuktikan merupakan tantangan (*for the challenge*),

2. [Segitiga sama kaki] Sebuah segitiga dikatakan sama kaki jika ada dua sisinya yang sama panjang.

3. [Kesamaan pasangan terurut] Pasangan terurut (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dikatakan sama dan ditulis $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Istilah takterdefinisi (*Undefined terms*) Tidak semua istilah di dalam mate-matika mempunyai definisi. Pemberian definisi pada istilah-istilah tertentu seharusnya dapat memperjelas pemahaman akan makna istilah tersebut, bukan malah mengaburkan. Euclid pernah berusaha mendefinisikan semua istilah yang ada di geometri. Sebagai contoh, Euclid pernah mendefinisikan "titik" sebagai sesuatu yang tidak mempunyai bagian. Definisi ini malah mengaburkan pemahaman akan makna titik itu sendiri. Oleh karena itu "titik" ditetapkan sebagai istilah takterdefinisi.

Contoh 4.3. Istilah-istilah seperti titik, garis, bidang, dan himpunan ditetapkan sebagai istilah takterdefinisi.

Konjektur (*Conjecture*) Konjektur adalah pernyataan yang diduga benar berdasarkan data empiris (*evidence*), argumen heuristik, atau intuisi para ahli, tetapi belum berdasarkan argumen yang valid. Bila konjektur dapat dibuktikan melalui argumen yang valid maka ia berubah menjadi sebuah teorema atau proposisi.

Contoh 4.4. [Konjektur] Untuk n bilangan asli, $p = n^2 + n + 41$ adalah prima. Pernyataan ini merupakan konjektur didasarkan pada studi kasus berikut:

$$\begin{aligned}
n = 1 &\to p = 43 \text{ (prima)} \\
n = 2 &\to p = 47 \text{ (prima)} \\
n = 3 &\to p = 53 \text{ (prima)} \\
n = 4 &\to p = 61 \text{ (prima)} \\
n = 5 &\to p = 71 \text{ (prima)} \\
n = 6 &\to p = 83 \text{ (prima)}.
\end{aligned}$$

Tetapi ketika diambil $n = 41$, diperoleh

$$p = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43$$

bilangan bulat a dan b berlaku $\text{KPK}(a,b) = ab$ jika dan hanya jika a dan b prima relatif.

Berdasarkan uraian di atas, pernyataan yang perlu dibuktikan adalah teorema dan sejenisnya termasuk lemma dan akibat. Sedangkan konjektur tidak wajib dibuktikan karena masih berupa dugaan. Dalam penelitian matematika, konjektur yang dirumuskan harus dibuktikan kebenaran atau ketidakbenarannya. Konjektur sama halnya seperti hipotesis dalam penelitian eksperimen. Aksioma dan definisi tidak membutuhkan pembuktian.

4.3 Membuktikan Kesamaan dan Ketaksamaan

Pada banyak kasus, kita diminta untuk menentukan berlakunya hubungan kesamaan atau ketaksamaan dua ekspresi matematika. Ekspresi matematika dapat berupa bilangan, atau bentuk aljabar yang memuat variabel. Kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 4.8. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000000}.$$

Bukti. Strateginya sederhanakan ruas kiri hingga mirip dengan ruas kanan, kemudian dibandingkan.

$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} = \frac{1001 - 1000}{(1000)(1001)} = \frac{1}{1001000}.$$

Bagaimana kita membandingkannya? Kita sudah tahu bahwa $1001000 > 1000000$, sehingga jika dibalik tandanya ketaksamaannya berubah arah, yaitu

$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} = \frac{1}{1001000} < \frac{1}{1000000}.$$

□

Dalam pembuktian ini ada dua tahap, yaitu pertama menyederhanakan bentuk pecahan $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001}$ menjadi $\frac{1}{1001000}$. Kemudian, membandingkan dua bilangan pecahan yang mana masing-masing pembilangnya sama. Kita sesungguhnya dapat menggunakan kalkulator atau komputer untuk memeriksa kebenaran relasi ini. Namun, apa yang dihasilkan oleh komputer tidak memberikan buktikan, kita lakukan strategi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
s + s &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) + (100 + 99 + 98 + \cdots + 1)\\
2s &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (100 + 1)\\
&= \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101}_{\text{sebanyak } 100 \text{ suku}}\\
2s &= 100(101) \to s = 50(101) = 5050.
\end{aligned}$$

□

Keuntungan dari strategi ini adalah kita dapat mengembangkan formula umum untuk jumlah n bilangan asli pertama, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

Bahkan lebih umum, formula jumlah deret aritmatika $s_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 1)b)$ dapat ditemukan dengan mudah dengan mengikuti prosedur yang sama.

$$\begin{aligned}
s_n + s_n &= [a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 1)b)] + [a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots\\
&\quad + (a + (n - 1)b)]\\
2s_n &= [a + a + (n - 1)b] + [a + b + a + (n - 2)b] + \cdots + [a + (n - 1)b + a]\\
&= \underbrace{[2a + (n - 1)b] + [2a + (n - 1)b] + \cdots + [2a + (n - 1)b]}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2s_n &= n\,[2a + (n - 1)b]\,,\\
s_n &= \frac{n}{2}\,(a + a + (n - 1)b) = \frac{n}{2}\,(a + u_n)
\end{aligned}$$

dengan $u_n = a + (n - 1)b$ adalah suku ke-n barisan aritmatika.

Contoh 4.10. Buktikan bahwa $1 = 0.999\cdots$. Notasi "$\cdots$" menyatakan bahwa pola desimal ini berlangsung sampai takberhingga.

BUKTI. Misalkan $x = 0.999\cdots$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
10x &= 9.999\cdots\\
&= 9 + 0.999\cdots\\
&= 9 + x.
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh $10x = 9 + x$. Diselesaikan untuk x diperoleh $x = 1$. □

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8$. Diperoleh

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8) \cdots (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8)}_{8 \text{ kali}} \cdot \underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 9}_{8 \text{ kali}} \\ &> \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8) \cdots (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8)}_{8 \text{ kali}} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8) \\ &= \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8) \cdots (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 8)}_{9 \text{ kali}} := x. \end{aligned}$$

□

Dua kunci keberhasilan pembuktian di atas adalah memecah bentuk perkali-an suku-suku ruas kanan menjadi bentuk suku sebelah kiri, kemudian mengidentifikasi suku yang sama dan membandingkan suku-suku yang berbeda pada kedua ruas.

Penyajian bukti seperti di atas tidak memiliki prosedur standar karena disesuaikan dengan pernyataan yang akan dibuktikan. Sebuah prinsip pada gaya pembuktikan matematika ialah harus mengomunikasikan hasil yang dapat dipercaya dengan cara seefisien mungkin. Sama halnya seperti ketika membuktikan sebuah kesamaan, kita tidak boleh berangkat dari asumsi bahwa ketaksamaan ini benar kemudian memperoleh sebuah identitas. Jadi pembuktikan ketaksamaan harus berakhir pada ekspresi yang ingin dibuktikan.

Notasi pada akhir pembuktian. Biasanya setiap akhir pembuktian ditaruhkan tanda □ atau ■ atau dengan tiga huruf Q.E.D. sebagai singkatan dari "quod erat demonstratum", dengan terjemahan "yang sudah didemonstrasikan/ditunjukkan" (*which was to be demonstrated*).

4.3.1 Strategi membuktikan kesamaan dan ketaksamaan

Prinsip dasar dalam membuktikan kesamaan adalah menerapkan aksioma dan sifat-sifat yang berlaku pada bilangan real, yaitu sifat komutatif dan asosiatif baik pada penjumlahan maupun perkalian, sifat distributif, sifat elemen negatif dan elemen invers. Prinsip lainnya adalah menggunakan sifat bahwa persamaan tidak berubah jika kedua ruas ditambahkan dengan bila-ngan yang sama. Untuk membuktikan kesamaan, kita dapat menggunakan strategi berikut:

Contoh 4.12. Misalkan x, y bilangan real positif dengan $x \neq y$. Buktikan

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2.$$

BUKTI. Karena $x \neq y$ maka dengan sifat trikotomi berlaku $x < y$ atau $x > y$. Akibatnya, berlaku $(x-y)^2 > 0$. Tambahkan kedua ruas dengan $2xy$ untuk memperoleh $(x-y)^2 + 2xy \geq 2xy$. Mengingat kedua x dan y positif maka $\frac{1}{xy} > 0$ sehingga dengan sifat perkalian skalar negatif diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ &= \frac{(x-y)^2 + 2xy}{xy} \\ &> \frac{2xy}{xy} = 2.\end{aligned}$$

Kunci sukses pembuktian ini adalah identitas aljabar $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$. □

LATIHAN SELINGAN 4.1. Buktikan kesamaan dan ketaksamaan berikut.

1. Buktikan $\sqrt{1002} - \sqrt{1001} < \frac{1}{2\sqrt{1001}}$. Apakah secara umum berlaku $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$, untuk n bilangan asli?

2. Buktikan $\sqrt[7]{7!} > \sqrt[6]{6!}$. Apakah secara umum berlaku bahwa $\sqrt[n+1]{(n+1)!} > \sqrt[n]{n!}$, untuk setiap n bilangan asli?

4.4 Membuktikan Pernyataan Bentuk Implikasi

Banyak sekali proposisi dalam matematika yang tersaji dalam bentuk implikasi $p \to q$. Bahkan Greenberg (1994) menyatakan bahwa semua teorema dalam matematika adalah pernyataan bersyarat atau implikasi, atau paling tidak dapat diterjemahkan ke dalam bentuk implikasi. Sebagai contoh teorema yang berbunyi "sudut-sudut alas sebuah segitiga sama kaki adalah kongruen (sama besar)" dapat diinterpretasikan sebagai "jika sebuah segitiga mempunyai dua sisi yang kongruen, maka sudut-sudut yang berhadapan pada sisi tersebut adalah kongruen". Begitu juga pernyataan pada contoh sebelumnya dapat dinyatakan sebagai "jika x dan y positif dengan $x \neq y$ maka $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$.

$y > 0$, diperoleh $xy < y^2$. Dengan sifat transitif ketaksamaan: $x^2 < xy$ dan $xy < y^2$ maka disimpulkan $x^2 < y^2$. □

Contoh 4.15. Buktikan, jika n ganjil maka ia dapat ditulis sebagai selisih dua bilangan kuadrat.

BUKTI. Perhatikan beberapa kasus berikut: $1 = 1^2 - 0^2, 3 = 2^2 - 1^2, 5 = 3^2 - 2^2, 7 = 4^2 - 3^2$. Untuk beberapa kasus ini, pernyataan selalu benar. Tapi pembuktian belum terjadi karena belum bersifat umum. Melalui pola ini kita dapat menyusun pola umum. Diketahui n ganjil, yaitu ia dapat ditulis sebagai $n = 2k + 1$ atau $n = 2k - 1$ untuk suatu bilangan bulat k. Kita gunakan saja bentuk pertama yaitu $n = 2k + 1$. Diperoleh identitas berikut:

$$\begin{aligned} 2k+1 &= 2k+1+k^2-k^2 \\ &= (k^2+2k+1)-k^2 \\ &= (k+1)^2-k^2. \end{aligned}$$

Jadi, kita dapat menyajikan $n = (k + 1)^2 - k^2$ yaitu selisih dua bilangan kuadrat. □

Keberhasilan pembuktian terletak pada berhasilnya membangun identitas umum melalui kasus-kasus khusus. Jadi, pencermatan pola kasus-kasus khusus dapat dijadikan sebuah strategi untuk menemukan bentuk umum.

4.4.2 Bukti taklangsung

Sebagaimana diketahui bahwa nilai kebenaran implikasi $p \to q$ ekuivalen dengan nilai kebenaran kontraposisinya $\neg q \to \neg p$. Jadi, membuktikan kebenaran pernyataan implikasi ekuivalen dengan membuktikan kontraposisinya. Inilah bukti taklangsung. Dengan kata lain, bukti taklangsung adalah pembuktian implikasi melalui kontraposisinya.

Contoh 4.16. Buktikan, jika x^2 bilangan ganjil maka x bilangan ganjil.

BUKTI. Pernyataan ini sulit dibuktikan dengan metode langsung. Mari kita coba buktikan secara langsung. Karena x^2 ganjil maka dapat ditulis $x^2 = 2m+1$ untuk suatu bilangan bulat m. Diperoleh $x = \sqrt{2m+1}$. Bentuk terakhir ini tidak dapat disimpulkan apakah ia ganjil atau genap, bahkan kita tidak dapat menyimpulkan apakah x bilangan bulat atau bukan. Jadi, bukti langsung tidak dapat diterapkan. Kontraposisi dari pernyataan ini adalah "jika x genap

Contoh 4.18. Buktikan, jika $0 < x < 1$ maka $0 < \frac{x^2+1}{|x|+1}$.

Bukti. Karena pernyataan q: $0 < \frac{x^2+1}{|x|+1}$ selalu benar untuk setiap x bilangan real (karena penyebut dan pembilangnya positif) termasuk untuk $0 < x < 1$ maka secara otomatis kebenaran pernyataan ini terbukti. □

Latihan Selingan 4.2. Buktikan kebenaran implikasi berikut:

1. Jika n bilangan bulat positif lebih dari 1 maka $n^2 > n$.
2. Jika n bilangan bulat positif kurang dari 1 maka $n^2 < n$.
3. Ubahlah pernyataan berikut ke dalam bentuk implikasi, kemudian buktikan kebenarannya.
   (a) Jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.
   (b) Setiap bilangan ganjil merupakan selisih dari dua bilangan kuadrat.
   (c) Perkalian antara bilangan rasional taknol dengan bilangan irrasional menghasilkan bilangan irrasional.
4. Jika pada sebuah segitiga siku-siku ABC dengan panjang sisi-sisinya a dan b, dan panjang hipotenusa c, mempunyai luas $\frac{c^2}{4}$ maka segitiga tersebut sama kaki.

4.5 Bukti Ekuivalensi

Bentuk paling sederhana dari ekuivalensi adalah implikasi dua arah (bi-implikasi) $p \leftrightarrow q$. Untuk membuktikan bi-implikasi, kita cukup terapkan pembuktian implikasi dua arah, yaitu $p \to q$ dan $q \to p$. Permasalahan yang agak serius adalah ketika harus membuktikan ekuivalensi tiga atau lebih pernyataan. Untuk ekui-valensi tiga pernyataan $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$, seharusnya kita membuktikan 2 bi-implikasi (4 implikasi), yaitu $p \leftrightarrow q$ dan $q \leftrightarrow r$. Beberapa rute yang dapat ditempuhkan untuk membuktikan ekuivalensi $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$ adalah sebagai berikut:

1. $p \to q \to r \to p$.
2. $p \to q \leftrightarrow r \to p$.
3. $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \to p$.
4. $p \leftrightarrow q$ dan $p \leftrightarrow r$.

Metode ini dikenal juga dengan istilah *reductio ad absurdum* (RAA). Dalam membuktikan kebenaran implikasi $p \to q$ kita berangkat dengan mengasumsikan $\neg(p \to q)$, yaitu dengan mengasumsikan p dan $\neg q$ karena $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$. Berangkat dari dua asumsi ini kita temukan sebuah kontradiksi. Perlu dingatkan kembali bahwa suatu kontradiksi terjadi bilamana ada satu atau lebih pernyataan yang bertentangan. Dengan kata lain, kontradiksi menolak sebuah kebenaran yang sudah diketahui. Beberapa contoh kontradiksi diberikan sebagai berikut:

- Pernyataan "$1 = 2$" adalah kontradiksi karena di pihak lain berlaku $1 \neq 2$,
- Pernyataan "ada a sehingga $-1 < a < 0$ dan $0 < a < 1$" adalah kontradiksi, sebab tidak mungkin ada a yang memenuhi keadaan ini.
- Pernyataan "m dan n dua bilangan bulat yang prima relatif", dan "m dan n keduanya bilangan genap" adalah kontradiksi sebab tidak mungkin ada dua bilangan genap yang prima relatif.
- Pernyataan "$a = 0$ atau $a \geq 0$" bukanlah sebuah kontradiksi karena selalu bernilai benar.

Bila langkah-langkah pembuktian menerapkan argumen yang valid dan ditemukan sebuah kontradiksi maka dipastikan pengandaian awal adalah salah, sehingga harus diingkari. Mengingkari pengandaian sama artinya dengan menyatakan bahwa negasi pernyataan semula adalah salah sehingga disimpulkan peryataan semula adalah benar. Singkatnya, pada metode ini dilakukan dengan mengingkari kebenaran suatu pernyataan, temukan kontradiksi, dan simpulkan bahwa pernyataan tersebut benar.

Contoh 4.20. Buktikan dengan metode kontradiksi, jika n genap maka $n^2 + 1$ ganjil.

BUKTI. Pernyataaan ini berupa implikasi $p \to q$, negasinya adalah $p \wedge \neg q$. Andaikan n genap dan $n^2 + 1$ genap. Kita dapat memperoleh kontradiksi melalui dua cara. Pertama, berangkat dari n genap sehingga dapat ditulis $n = 2k$ untuk sebuah bilangan bulat k. Diperoleh $n^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1$ sebuah bilangan ganjil. Kontradiksi dengan per-nyataan $n^2 + 1$ genap. Cara kedua, berangkat dari $n^2 + 1$ genap, ditulis $n^2 + 1 = 2p \to n^2 = 2p - 1$. Jadi, n^2 sebuah bilangan ganjil. Akibatnya, n bilangan ganjil (lihat kembali contoh sebelumnya). Bertentangan dengan diketahui bahwa n genap. $\square$

khusus dari metode kontradiksi. Kalau metode kontraposisi hanya berlaku untuk implikasi, sedangkan metode kontradiksi dapat dite-rapkan untuk sebarang bentuk pernyataan.

Contoh 4.22. Buktikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

BUKTI. Karena pernyataan ini bukan implikasi maka tidak satupun metode pembuktian implikasi dapat diterapkan di sini. Hanya metode kontradiksi yang dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan ini. Andaikan $\sqrt{2}$ sebuah bilangan rasional, maka ia dapat ditulis sebagai $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan a, b bulat dan $b \neq 0$. Kita ambil a dan b dalam bentuk yang paling sederhana atau prima relatif. Misalnya kita mempunyai bilangan rasional $\frac{12}{8}$; disederhanakan $\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, diambil $a = 3$ dan $b = 2$. Diperoleh pernyataan pertama yaitu "a dan b tidak mungkin keduanya genap". Kuadratkan kedua suku $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ diperoleh $2 = \frac{a^2}{b^2}$ yaitu $a^2 = 2b^2$. Ini menunjukkan a^2 adalah genap. Akibatnya a juga genap. Oleh karena itu dapat ditulis $a = 2p$ untuk suatu bilangan bulat p. Substitusi ke dalam $a^2 = 2b^2$ diperoleh $(2p)^2 = 2b^2$, yaitu $b^2 = 2p^2$. Ini menunjukkan b^2 genap. Akibatnya b juga genap. Diperoleh pernyataan kedua "a dan b keduanya genap". Pernyataan kedua ini kontradiksi dengan pernyataan pertama. Pengandaian harus diingkari, yaitu haruslah $\sqrt{2}$ sebuah bilangan irrasional. □

Contoh 4.23. Buktikan dengan metode kontraposisi dan metode kontradiksi, jika $n^2 + 1$ ganjil maka n genap.

BUKTI. Pertama kita buktikan dengan metode kontraposisi. Diketahui n ganjil, yaitu ia dapat ditulis sebagai $n = 2k - 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned} n^2 + 1 &= (2k-1)^2 + 1 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k + 1), \end{aligned}$$

yaitu sebuah bilangan genap. Untuk metode kontradiksi, diketahui n^2+1 ganjil dan n ganjil. Agar terlihat berbeda dari metode kontraposisi, kita berangkat dari fakta pertama yaitu n^2+1 ganjil. Berdasarkan fakta ini diperoleh n^2 genap. Akibatnya, n juga genap. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan lainnya yaitu n ganjil. □

Dari (*) dan (**) diperoleh

$$na < m \leq na + 1 < nb.$$

Bentuk ini dapat ditulis sebagai $na < m < nb$. Bagilah kedua ruas dengan n, didapat

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Dengan mengambil $r := \frac{m}{n}$ maka inilah bilangan rasional yang dimaksud dalam teorema. □

Keberadaan objek yang dicari dapat tunggal atau banyak (berhingga atau takberhingga). Dalam beberapa keperluan, kita membutuhkan kepastian bahwa keberadaan objek yang dimaksud adalah tunggal. Inilah adalah bukti ketunggalan (*uniqueness proof*). Misalkan sudah dipastikan bahwa objek yang dimaksud ada, katakan x. Untuk membuktikan bahwa x hanya satu-satunya, kita misalkan ada objek lainnya, katakan y. Cara pertama, asumsikan $x \neq y$, kemudian ditemukan sebuah kontradiksi. Dalam hal ini kita telah menggunakan metode kontradiksi dengan mengasumsikan bahwa ada lebih dari satu objek yang dimaksud. Cara ini dianggap cara taklangsung. Cara kedua adalah langsung dengan menunjukkan bahwa $x = y$.

Contoh 4.26. Buktikan bahwa persamaan linear berikut mempunyai penyelesaian tunggal.

$$ax + b = 0, a \neq 0.$$

Bukti. Dengan penyederhanaan operasi aljabar diperoleh $x = -\frac{b}{a}$. Andai ada penyelesaiaan lain, katakan x_1 maka haruslah $ax_1 + b = 0$. Karena $ax + b = 0$ maka diperoleh hubungan $ax_1 + b = ax + b$ atau $a(x_1 - x) = 0$. Karena asumsi $a \neq 0$ maka haruslah $x_1 - x = 0$, yaitu $x_1 = x$. Ini berarti $x = x_1$. Jadi, penyelesaiannya tunggal. □

Contoh 4.27. Jika ℓ dan m dua garis yang tidak sejajar maka terdapat dengan tunggal titik potong kedua garis.

Bukti. Keberadaan titik potong yang dimaksud jelas dapat dipahami karena kedua garis tidak sejajar. Selanjutnya, dibuktikan titik potong tersebut hanya satu-satunya. Fakta bahwa sebuah titik potong pasti terletak pada kedua garis ℓ dan m. Andaikan ada dua titik potong yang berbeda, katakan A dan B. Maka

Contoh 4.30. Diberikan pernyataan berupa konjektur berikut: "Untuk setiap n bilangan asli maka $2^{2^n}+1$ merupakan bilangan prima".

BUKTI. Untuk $n = 1 \to 2^{2^1}+1 = 5$, untuk $n = 2 \to 2^4+1 = 17$, untuk $n = 3 \to 2^8+1 = 257$, untuk $n = 4 \to 2^{16}+1 = 65537$. Kesemua hasilnya berupa bilangan prima. Sekarang untuk $n = 5$ diperoleh

$$2^{32}+1 = 4294967297 = (641)(6700417),$$

ternyata bukan bilangan prima. Jadi $n = 5$ merupakan contoh yang mengingkari pernyataan ini. Disimpulkan pernyataan ini tidak benar. □

Di dalam mata kuliah analisis real, banyak sekali pernyataan yang membutuhkan contoh pengingkar untuk membuktikan ketidakbenarannya. Untuk permasalahan matematika tingkat lanjut, mencari contoh pengingkar tidaklah trivial sehingga sering dianggap sebagai bagian dari kegiatan penelitian matematika. Berikut ini adalah contoh masalah sederhana pada analisis elementer.

Contoh 4.31. Sebuah teorema menyatakan bahwa "jika sebuah barisan (x_n) konvergen maka ia terbatas". Apakah kebalikan teorema ini juga berlaku?

BUKTI. Pada contoh ini kita diminta menyelidiki kebenaran pernyataan "jika ba-risan (x_n) terbatas maka ia konvergen". Sebagai contoh pengingkar, ambil $x_n = (-1)^n$ maka barisan $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \cdots)$ terbatas tetapi tidak konvergen. Kesimpulannya, barisan terbatas belum tentu konvergen. □

LATIHAN SELINGAN 4.9. Buktikan bahwa setiap bilangan, jika ia habis dibagi 2 dan 3 maka ia habis dibagi 6. Apakah kebalikan pernyataan ini berlaku. Jika tidak, berikan contoh pengingkarnya.

4.9 Bukti untuk Kuantifikasi

Membuktikan kebenaran kuantifikasi didasarkan pada kriteria yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Untuk kuantifikasi eksistensial $\exists x \in D, P(x)$ ekuivalen dengan bukti kewujudan atau eksistensi c di dalam D sehingga proposisi $P(c)$ benar. Begitu ditemukan c seperti ini maka disimpulkan kuantifikasi ini bernilai benar, yaitu berdasarkan argumen generalisasi eksistensial.

BUKTI. Perhatikan domain $D = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26\}$. Diperoleh

$$4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11, 16 = 5 + 11$$
$$18 = 7 + 11, 20 = 3 + 17, 22 = 5 + 17, 24 = 5 + 19, 26 = 3 + 23.$$

□

Walaupun cara ini benar namun sangat jarang dipakai dalam matematika karena secara umum domainnya berupa himpunan takberhingga. Misalkan domain D adalah himpunan semua bilangan bulat yang lebih dari 2, maka kita tidak dapat menerapkan metode sapu bersih (*exhaustive proof*) seperti ini.

Contoh 4.36. Misalkan fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) := x^2 - 4x + 1$. Buktikan untuk setiap $x > 4$ berlaku $f(x) > 1$.

BUKTI. Dalam kasus ini kita mulai dengan mengambil sebarang $x > 4$, kemudian kita eksplorasi sifat-sifat yang dimiliki oleh x ini terkait dengan fungsi f. Tulis kembali $f(x) = x(x - 4) + 1$. Karena $x > 4$ maka $x - 4 > 0$ sehingga $x(x - 4) > 0$. Jadi

$$f(x) = \underbrace{x(x-4)}_{>0} + 1 > 1.$$

Karena $x > 4$ diambil sebarang maka pernyataan benar untuk semua $x > 4$. □

Puzzle. Mintalah seseorang untuk memilih sebuah bilangan sebarang untuk dirahasiakan. Selanjutnya minta orang tersebut melakukan serangkaian operasi aritmetika sebagai berikut:

1. Tambahkan bilangan tersebut dengan 5.
2. Kemudian hasilnya dikalikan dengan 4.
3. Hasil sebelumnya dikurangi dengan 6.
4. Kemudian bagi dengan 2.
5. Hasilnya dikurangi dengan dua kali bilangan rahasia tersebut.

Maka kita dapat menebak bilangan terakhir, yaitu 7 apapun bilangan yang dirahasiakan tersebut. Mengapa hal ini dapat terjadi?

LATIHAN SELINGAN 4.10. Buktikan kebenaran pernyataan berikut:

BUKTI. Berdasarkan definisi nilai mutlak ini, kita dapat mempartisi domain $\mathbb{R}$ menjadi tiga, yaitu D_1 =himpunan bilangan positif, $D_2 = \{0\}$ dan D_3 =himpunan bilangan negatif. Oleh karena ada dua elemen x dan y maka akan terdapat lima kasus yang harus dibuktikan, yaitu:

- Kasus 1: Jika salah satu $x = 0$ atau $y = 0$, diperoleh $xy = 0$. Berdasarkan definisi nilai mutlak (lihat cabang tengah), berlaku $|xy| = 0$. Juga belaku $|x| = 0$ atau $|y| = 0$ sehingga $|x||y| = 0$. Diperoleh $0 = |xy| = |x||y| = 0$. Dalam kasus ini kita telah membuktikan kebenaran $p_1 \to q$ dengan p_1: $x = 0$ atau $y = 0$, dan q: $|xy| = |x||y|$.

- Kasus 2: $x > 0$ dan $y > 0$, diperoleh $xy > 0$. Berdasarkan definisi nilai mutlak (cabang atas), berlaku $|x| = x$,$|y| = y$, dan $|xy| = xy$. Diperoleh $|xy| = xy = |x||y|$. Dalam kasus ini kita telah membuktikan kebenaran $p_2 \to q$ dengan p_2: $x > 0$ dan $y > 0$, q: $|xy| = |x||y|$.

- Kasus 3: $x > 0$ dan $y < 0$, diperoleh $xy < 0$. Berdasarkan definisi nilai mutlak, berlaku $|xy| = -(xy) = x(-y)$, $|x| = x$, dan $|y| = -y$. Diperoleh $|xy| = x(-y) = |x||y|$. Dalam kasus ini kita telah membuktikan kebenaran $p_3 \to q$ dengan p_3: $x > 0$ dan $y < 0$, dan q: $|xy| = |x||y|$.

- Kasus 4: $x < 0$ dan $y > 0$, diperoleh $xy < 0$. Berdasarkan definisi nilai mutlak, berlaku $|xy| = -(xy) = (-x)y$, $|x| = -x$, dan $|y| = y$. Diperoleh $|xy| = (-x)y = |x||y|$. Dalam kasus ini kita telah membuktikan kebenaran $p_4 \to q$ dengan p_4: $x < 0$ dan $y > 0$, dan q: $|xy| = |x||y|$.

- Kasus 5: $x < 0$ dan $y < 0$, diperoleh $xy > 0$. Berdasarkan definisi nilai mutlak, berlaku $|xy| = xy$, $|x| = -x$, dan $|y| = -y$. Diperoleh $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$. Dalam kasus ini kita telah membuktikan kebenaran $p_5 \to q$ dengan p_5: $x < 0$ dan $y < 0$, dan q: $|xy| = |x||y|$.

Dengan demikian kita membuktikan kebenaran pernyataan

$$[p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5] \to q.$$

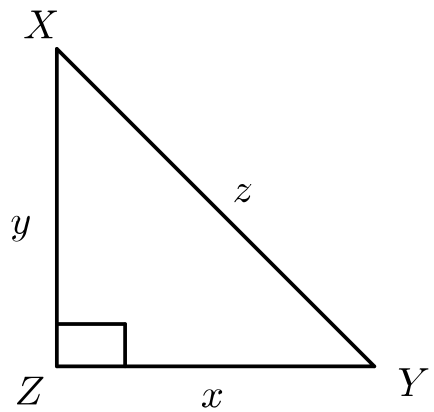
$\square$

Contoh 4.38. Buktikan persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$ tidak mempunyai penyelesaian bulat.

4.11.1 Penalaran maju dan mundur

Dalam proses pembuktian kita dihadapkan pada dua kelompok pernyataan, yaitu kelompok A yang terdiri atas premis-premis (hipotesis) dan kelompok B yang merupakan kesimpulan yang akan dibuktikan. Secara simbolik, pembuktian menggunakan argumen yang valid yaitu menunjukkan bahwa implikasi $A \to B$ bernilai benar. Penggunaan metode langsung, yaitu berangkat dari asumsi bahwa semua premis dalam A adalah benar kita menunjukkan kesimpulan B benar merupakan penalaran maju (*forward reasoning*). Cara kedua adalah berangkat dari B menuju A dengan menggunakan konektivitas bi-implikasi pada setiap tahapnya. Cara ini disebut strategi penalaran mundur (*backward reasoning*). Cara lainnya adalah menggunakan penalaran maju dan mundur secara bersamaan. Cara ini dilakukan dengan menarik mundur kesimpulan beberapa langkah dengan konektivitas bi-implikasi, kemudian digunakan penalaran maju untuk mencapai kesimpulan baru yang ekuivalen ini.

Contoh 4.39. Kita akan membuktikan proposisi berikut: Jika segitiga siku-siku XYZ dengan panjang sisi-sisi siku-sikunya x dan y, panjang sisi miringnya (hipotenusa) z, mempunyai luas $\frac{z^2}{4}$ maka segitiga tersebut sama kaki.



Gambar 4.1: Segitiga siku-siku XYZ

BUKTI. Perhatikan Gambar 4.1 di bawah ini. Analisis pembuktian, kita mempunyai premis-premis: XYZ segitiga siku-siku, panjang sisi siku-sikunya adalah x dan y, panjang hipotenusanya adalah z, luasnya $\frac{z^2}{4}$. Kesimpulan yang harus dibuktikan adalah XYZ segitiga sama kaki. Pertanyaan yang perlu dirumuskan adalah apa yang harus ditunjukkan agar XYZ sama kaki? Berdasarkan pengertian segitiga sama kaki, kita harus menunjukkan ada dua sisinya yang sama panjang. Apakah $x = y$, $x = z$, atau $y = z$? Karena z hipotenusa atau sisi

$x^2 - 2xy + y^2 > 0$. Dengan menambah suku $4xy$ pada kedua ruas, diperoleh $x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$. Kedua ruas dibagi 4, kemudian difaktorkan untuk memperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &> xy \\ \frac{x+y}{2} &> \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Jadi, langkah mundur di sini hanya untuk mendapatkan kembali jejak pembuktian. Formula $\sqrt{xy}$ disebut rerata geometri dari x dan y, sedangkan $\frac{x+y}{2}$ adalah rerata aritmetika. □

Contoh 4.41. Sebuah permainan mirip "congklak" dimainkan oleh dua orang dengan cara memindahkah tumpukan batu dari satu tempat ke tempat lain. Ada 15 batu pada tumpukan tersebut. Caranya, pemain yang dapat giliran diperbolehkan memindahkan satu, dua atau tiga setiap kesempatan. Pemain yang mampu menghabiskan batu terakhir dianggap sebagai pemenang. Buktikan pemain yang mendapat kesempatan pertama selalu menang, apapun skenario yang dilakukan oleh pemain yang mendapat kesempatan kedua.

Bukti. Untuk permasalahan ini kita tunjukkan dengan langkah mundur. Pada langkah terakhir, pemain pertama dapat menang jika sisa batu adalah 1, 2 atau 3. Untuk memaksa pemain kedua menyisakan 1, 2, atau 3 batu maka pada langkah sebelumnya pemain pertama harus menyisakan 4 batu. Untuk dapat menyisakan 4 batu maka sebelumnya harus ada 5, atau 6, atau 7 batu. Keadaan ini dapat terjadi jika pemain pertama pada giliran sebelumnya menyisakan 8 batu kepada pemain kedua. Untuk ini pemain kedua dipaksa meninggalkan 9, 10, atau 11 batu. Agar keadaan ini dapat terjadi, pemain pertama harus menyisakan 12 batu. Dengan arah maju, pemain pertama mengambil 3 batu pada kesempatan pertama, menyisakan 8 batu pada kesempatan kedua, dan menyisakan 4 pada kesempatan ketiga. Maka pada kesempatan keempat pemain pertama dapat menghabiskan semua batu, yakni pemain pertama menang apapun yang dilakukan oleh pemain kedua. Rangkuman proses maju diberikan pada Tabel 4.3.

LATIHAN SELINGAN 4.14. Buktikan $\sqrt{5}$ adalah bilangan irrasional.

4.12 Catatan Kritis pada Pembuktian

4.12.1 Kesimpulan dari contoh kasus

Memberikan contoh (kasus khusus) yang memenuhi sebuah pernyataan matematika yang bersifat umum merupakan salah satu cara memahami maksud dari pernyataan tersebut. Namun demikian, fakta khusus ini jangan dijadikan dasar untuk menarik kesimpulan secara umum.

Contoh 4.43. Dalam membuktikan pernyataan "jika m dan n genap maka $m+n$ genap", ada mahasiswa mengambil kasus $m = 2$ dan $n = 4$, diperoleh $m+n = 2+4 = 6$ adalah genap, kemudian menyimpulkan pernyataan ini benar. Cara ini adalah salah karena dalam matematika tidak berlaku penalaran induktif seperti ini. Sekalipun diberikan ratusan contoh yang memenuhi, tetap saja tidak boleh dijadikan dasar untuk menarik kesimpulan karena masih takberhingga banyak bilangan genap lainnya.

4.12.2 Simbol sama untuk objek yang belum tentu sama

Pada pembahasan sebelumnya (Latihan selingan 3.10), penggunaan aturan instanisasi eksistensial $\exists x, P(x) \to P(c)$ dan $\exists x, Q(x) \to Q(c)$ merupakan kesalahan karena eksistensi objek c pada kedua kuantifikasi belum tentu sama.

Contoh 4.44. Misalkan m dan n adalah bilangan ganjil. Ini adalah salah jika ditulis $m = 2k + 1$ dan $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k karena kedua bilangan ganjil tidak harus sama. Sebagai contoh $m = 3 = 2(1) + 1$ dan $n = 7 = 2(3) + 1$. Untuk fakta ini seharusnya ditulis $m = 2k_1 + 1$ dan $n = 2k_2 + 1$ dengan k_1, k_2 suatu bilangan bulat.

4.12.3 Penarikan kesimpulan secara prematur

Contoh 4.45. Perhatikan pembuktikan bahwa jumlah dua bilangan genap adalah genap. Misalkan kedua bilangan genap tersebut tersebut adalah m dan n, ditulis $m = 2k$ dan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat m dan ℓ. Diperoleh $m + n = 2k + 2\ell$. Kemudian disimpulkan $m + n$ genap. Padahal ada satu lagi tahap penting, yaitu $2k + 2\ell = 2(k + \ell) = 2s$ dengan $s = k + \ell$ sebuah bilangan bulat.

gan ganjil m. Berdasarkan definisi bilangan ganjil maka kita dapat menyajikan $m = 2a+1$ untuk suatu (*some*) bilangan bulat a. Ungkapan terakhir menjadi salah jika diganti $m = 2a+1$ untuk setiap bilangan bulat a karena hanya ada satu kemungkinan nilai a yaitu $a = (m-1)/2$. Dalam mendeskripsikan m bilangan ganjil kita harus menulis "$m = 2a+1$ atau $m = 2a-1$ untuk suatu bilangan bulat a", atau "terdapat bilangan bulat a sehingga $m = 2a+1$ atau $m = 2a-1$".

4.12.6 Penggunaan kata "jika"

Kesalahan yang sering terjadi pada pada langkah pembuktian adalah ketika menggunakan kata "jika" (*if*) untuk makna "karena" (*because*). Perhatikan contoh berikut: Andai p prima. Jika p prima maka p tidak dapat ditulis sebagai perkalian dua bilangan bulat yang lebih kecil dari p. Penggunaan kata "jika" pada kalimat kedua tidaklah tepat karena p prima sudah diketahui pada kalimat pertama. Kalimat kedua seharusnya "karena p prima maka p tidak dapat ditulis sebagai perkalian dua bilangan bulat yang lebih kecil dari p".

Latihan Selingan 4.15. Pernyataan: selisih antara bilangan ganjil sebarang dan bilangan genap sebarang adalah ganjil. Bukti: Andaikan m bilangan ganjil sebarang dan n bilangan genap sebarang. Berdasarkan definisi bilangan ganjil kita dapat menulis $m = 2a+1$ dan berdasarkan definisi bilangan genap kita dapat menulis $n = 2a$ untuk suatu a bilangan bulat. Diperoleh $m - n = (2a+1) - 2a = 1$ karena 1 ganjil maka disimpulkan pernyataan terbukti benar. Identifikasilah langkah atau kalimat yang keliru pada pembuktian ini.

Latihan Selingan 4.16. Pernyataan: untuk setiap bilangan bulat $k > 0$, $k^2 + 2k + 1$ adalah bilangan komposit. Bilangan m dikatakan komposit jika $m = ab$ dengan a, b bulat di antara 1 dan m. Jadi bilangan komposit merupakan lawan bilangan prima. Bukti: Andai $k > 0$ bilangan bulat. Jika $k^2 + 2k + 1$ komposit maka ia dapat ditulis $k^2 + 2k + 1 = rs$ dengan $1 < r < k^2 + 2k + 1$ dan $1 < s < k^2 + 2k + 1$. Karena $k^2 + 2k + 1 = rs$ dan r dan s di antara 1 dan $k^2 + 2k + 1$ maka $k^2 + 2k + 1$ bukan prima. Disimpulkan $k^2 + 2k + 1$ bilangan komposit. Identifikasilah langkah atau kalimat yang keliru pada pembuktian ini.

Berdasarkan teorema ini, metode induksi matematika (PIM) terdiri atas dua langkah, yaitu:

1. Langkah basis yaitu menunjukkan bahwa $P(1)$ benar dan
2. Langkah induktif yaitu menunjukkan implikasi $P(k) \to P(k+1)$ bernilai benar untuk setiap $k > 1$.

Untuk langkah basis tidak harus dimulai dari $n = 1$. Dalam kasus domain untuk n adalah $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}$, maka cukup mulai dari $P(n_0)$ dengan n_0 anggota terkecil pada $\mathbb{N}_0$.

Istilah induktif versus deduktif. Penggunaan istilah induktif dalam metode induksi matematika ini hendaknya tidak rancu dengan istilah penalaran induktif dan penalaran deduktif dalam pendekatan ilmiah. Dalam pendekatan ilmiah, penalaran deduktif menggunakan aturan inferensi untuk mengambil kesimpulan dari premis-premis, sedangkan penalaran induktif mengambil kesimpulan yang hanya didasarkan pada fakta atau bukti pendukung saja tetapi tidak menjamin sepenuhnya. Pembuktian dalam matematika menggunakan penalaran deduktif, bukan induktif. Metode induksi matematika ini sesungguhnya adalah deduktif karena kesimpulannya tidak hanya didasarkan pada kebenaran $P(1)$ tetapi juga didasarkan pada kebenaran universal $\forall k > 1\,(P(k) \to P(k+1))$. Istilah induksi matematika pertama kali dimunculkan oleh matematikawan abad ke-16 yang bernama Francesco Maurolico (1494-1575) dalam bukunya *Aritmeticorum Libri Duo.*

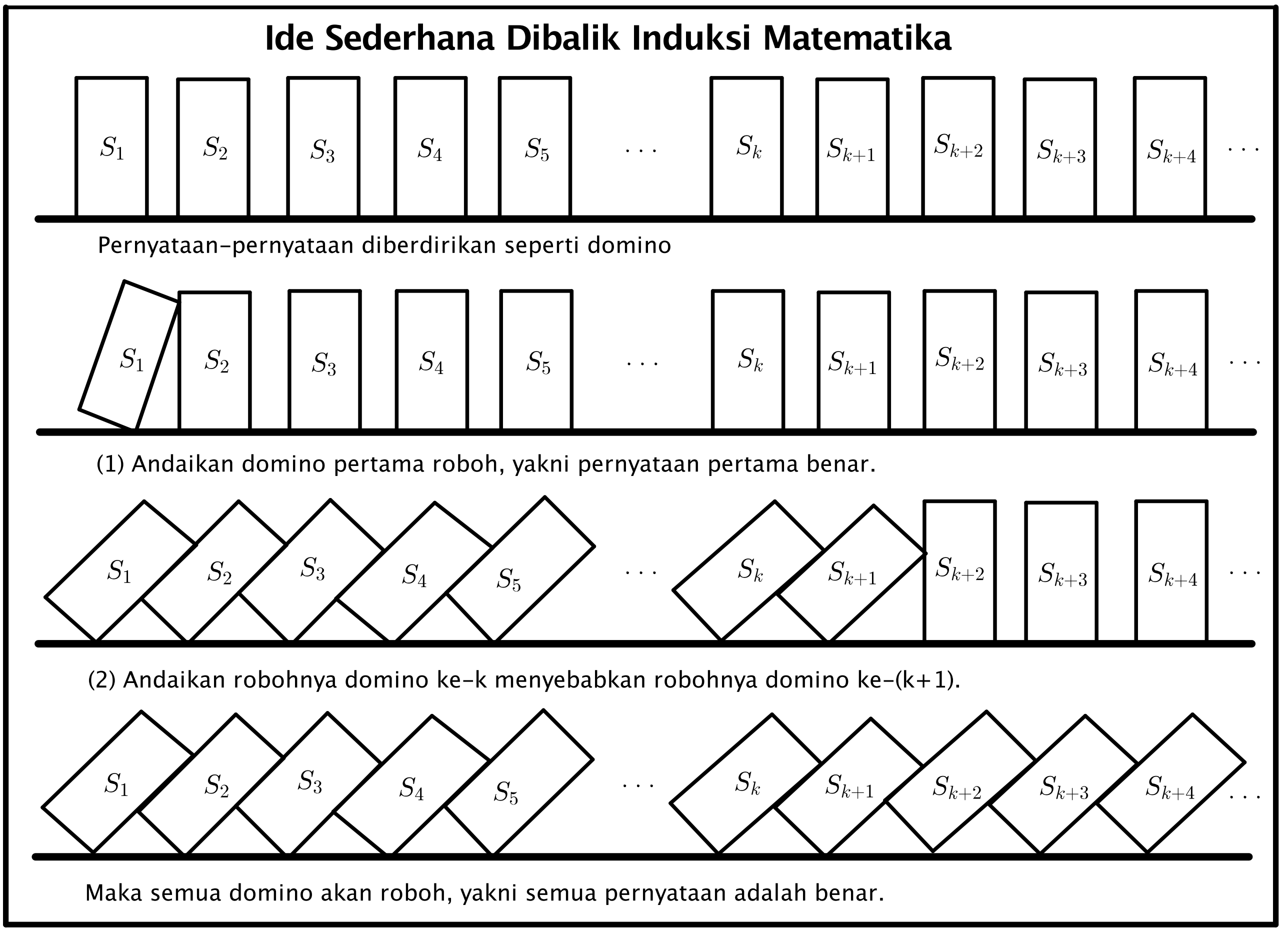
Contoh 4.50. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n, berlaku

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

Bukti. Pernyataan ini dibuktikan dengan PIM dengan domain $\mathbb{N}$ dan

$$P(n) := 1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1.$$

- Langkah basis: $P(1) := 1(1!) = (1+1)! - 1 \leftrightarrow 1 = 1$ (T).
- Langkah induktif: Diketahui $P(k)$ benar yaitu diasumsikan berlaku $1(1!)+$



Gambar 4.2: Ilustrasi metode induksi matematika

Ini berati $P(k+1)$ benar. Pada pembuktian ini, kita telah menggunakan fakta bahwa $2 < k+1$. Hal ini disebabkan $k \geq 4$. Dengan demikian kita telah membuktikan kebenaran implikasi $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Berdasarkan prinsip induksi matematika disimpulkan bahwa $2^n < n!$ untuk setiap $n \geq 4$.

$\square$

Contoh yang baru saja kita bahas menegaskan bahwa titik berangkat langkah basis tidak harus dari $n = 1$ tetapi diambil bilangan bulat terkecil yang ada pada domainnya. Terdapat satu lagi versi metode induksi matematika yaitu prinsip induksi matematika kuat.

Latihan Selingan 4.17. Buktikan pernyataan berikut dengan menggunakan metode induksi matematika.

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ untuk setiap bilangan asli n.
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ untuk setiap bilangan asli n.

4.14 Soal-soal Latihan Bab 4

1. Dalam penemuan teorinya, apa yang membedakan matematika dari ilmu pengetahuan alam seperti fisika, kimia, dan biologi.
2. Jelaskan pengertian dan kaitannya satu sama lainnya pernyataan-pernyataan dalam matematika berikut: aksioma (postulat), definisi, teorema, asumsi, hipotesis, akibat, konjektur.
3. Apa yang dimaksud dengan istilah takterdefinisi (*undefined-term*) dalam matematika?
4. Apa saja pernyataan dalam matematika yang perlu dibuktikan?
5. Apakah konjektur perlu dibuktikan? Apa yang dapat diperoleh jika sebuah konjektur terbukti? Apa pula yang terjadi jika ia terbukti tidak benar?
6. Mengapa aktivitas membuktikan kebenaran atau ketidakbenaran pernyataan dianggap penting dalam pembelajaran matematika?
7. Apa perbedaan menemukan, membuktikan, dan menerapkan sebuah rumus atau formula di dalam matematika? Ilustrasikan pada kasus di mana jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2, yakni $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
8. Misalkan $\phi > 0$ dan $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Buktikan $\phi = \frac{1}{\phi-1}$. Apakah ke-simpulan ini masih berlaku jika syarat $\phi > 0$ tidak dipenuhi. Bilangan ϕ yang memenuhi sifat ini disebut bilangan emas (*golden number*). Terkait dengan bilangan emas ini, terdapat pula istilah perbandingan emas (*golden ratio*), persegipanjang emas (*golden rectangle*), dan segitiga emas (*golden triangle*). Silakan mencari info lebih lengkap pada referensi lainnya. Banyak sekali fakta unik dan mengejutkan yang diturunkan dari bilangan ini sehingga ia termasuk salah satu bentuk dari *the inherent beauty of mathematics*.

22. Misalkan m dan n bilangan bulat.

    (a) Buktikan kebenaran pernyataan "jika $2m + n$ ganjil maka m dan n keduanya ganjil".

    (b) Rumuskan konvers pernyataan pada (a). Apakah konvers ini bernilai benar? Jika tidak benar, berikan contoh pengingkarnya.

23. Diberikan pernyataan "tidak semua kelipatan 6 adalah kelipatan 9".

    (a) Rumuskan pernyataan ini dengan pernyataannya yang ekuivalen tanpa menggunakan kata "tidak" di awal kalimat.

    (b) Buktikan kebenaran pernyataan yang Anda rumuskan pada (a).

24. Buktikan tidak ada titik pada bidang kartesian yang berbentuk $(\cos\theta, \sin\theta)$ yang berada di dalam segitiga dengan titik sudut $(0, 0), (0, 0.9), (0.9, 0)$.

25. Tetapkan konjektur untuk hasil operasi aritmetika antara dua bila-ngan real rasional dan irrasional di bawah ini, kemudian buktikan secara de-duktif. Ada tiga kemungkinan hasilnya, yaitu rasional, irrasional, atau tidak pasti.

    (a) Hasil jumlah dua bilangan rasional.

    (b) Hasil jumlah dua bilangan irrasional.

    (c) Hasil jumlah sebuah bilangan rasional dan sebuah bilangan irra-sional.

    (d) Hasil kali dua bilangan rasional.

    (e) Hasil kali dua bilangan irrasional.

    (f) Hasil kali sebuah bilangan rasional dan sebuah bilangan irrasional.

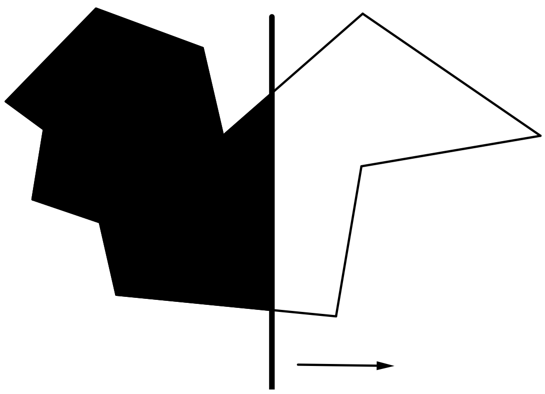
26. Buktikan bahwa jika a, b, c, d rasional dan $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ irrasional, dan $a+\sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ maka $a = c$ dan $b = d$.

27. Misalkan x sebuah bilangan real taknol. Buktikan:

    (a) Jika x rasional maka $1/x$ rasional.

    (b) Jika x irrasional maka $1/x$ irrasional.

37. Buktikan bahwa sebarang daerah yang terletak pada bidang dapat dibagi menjadi dua sama besar oleh sebuah garis vertikal. (Petunjuk: misalkan ada sebarang daerah tertutup dan sebuah garis lurus di atasnya. Bayangkan garis vertikal tersebut sebagai alat scanner, digerakkan pelan-pelan dari kiri ke kanan di mana setiap daerah pada bidang yang terkena akan memberikan jejak hitam. Dengan cara ini, luasan daerah yang terkena dari nol meningkat sampai keseluruhan. Ilustrasinya lihat gambar di bawah). Simpulkan dengan sebuah argumen bahwa garis ini dapat berhenti di posisi yang membagi dua sama besar luas daerah tersebut. Apakah ini termasuk metode konstruktif atau non-konstruktif?



38. Diberikan pernyataan "garis $y = 2x$ memotong lingkaran $x^2 + (y-2)^2 = 4$".

    (a) Ubahlah pernyataan tersebut menjadi bentuk kuantifikasi eksistensial.

    (b) Buktikan kebenaran pernyataan yang Anda rumuskan pada (a).

39. Diberikan deret geometri $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$. Buktikan bahwa ada bilangan asli N sehingga $|S_N - 1| < 10^{-5}$, S_N adalah jumlah N suku pertama deret. Apakah ini termasuk metode konstruktif atau non-konstruktif?

40. Misalkan a, b, dan c bilangan bulat dan x, y, dan z bilangan real taknol yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$\frac{xy}{x+y} = a, \frac{xz}{x+z} = b, \frac{yz}{y+z} = c.$$

    Apakah x, y, dan z merupakan bilangan rasional? Jika iya, nyatakan ketiganya dalam bentuk pembagian dua bilangan bulat.

(d) $n^5 - n$ habis dibagi oleh 5 untuk setiap bilangan asli n.

(e) $2^n - 3 \geq 2^{n-1}$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 3$.

(f) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$ untuk setiap bilangan asli n.

47. Rumuskan konjektur untuk jumlahan berikut, kemudian buktikan dengan induksi matematika.

(a) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$.

(b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

48. Buktikan dengan induksi matematika ekuivalensi logis berikut ini:

$$[p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n] \to q \equiv [(p_1 \to q) \wedge (p_1 \to q) \wedge \cdots \wedge (p_n \to q)]$$

berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

49. Kita mempunyai dua bentuk induksi matematika yaitu prinsip induksi matematika biasa (PIM) dan prinsip induksi matematika kuat (PIK). Kedua bentuk ini berbeda pada langkah induktifnya, yaitu membuktikan kebenaran $P(k) \to P(k+1)$ pada PIM dan $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \cdots \wedge P(k) \to P(k+1)$ pada PIK.

(a) Buktikan jika $\tau(p_2 \to q) = T$ maka $\tau(p_1 \wedge p_2 \to q) = T$. Tunjukkan bahwa konvers dari implikasi ini tidak berlaku.

(b) Jika diketahui $\tau(p_1) = T$ dan $\tau(p_2) = T$ maka berlaku $\tau(p_2 \to q) = T$ jika dan hanya jika $\tau(p_1 \wedge p_2 \to q) = T$.

(c) Secara umum, jika diketahui semua pernyataan $P(1), P(2), \cdots, P(k)$ benar maka berlaku $\tau\left(P(k) \to P(k+1)\right) = T$ jika dan hanya jika $\tau\left(P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \cdots \wedge P(k) \to P(k+1)\right) = T$.

(d) Apakah temuan pada (c) menyimpulkan bahwa kedua tipe induksi tersebut pada dasarnya ekuivalen?

50. Buktikan dengan induksi kuat bahwa setiap bilangan bulat yang lebih dari 1 dapat ditulis sebagai perkalian bilangan-bilangan prima. Sebagai ilustrasi $2 = 2$, $6 = 2 \times 3$, $12 = 2 \times 2 \times 3$ dan seterusnya.

BAB 5

Konsep Dasar Teori Himpunan

Dan suatu tanda bagi mereka adalah bumi yang mati. Kami hidupkan bumi itu dan Kami keluarkan dari padanya biji-bijian, maka daripadanya mereka makan.

QS 36:33.

Himpunan merupakan topik yang sangat fundamental dalam matematika. Topik ini sudah diperkenalkan sejak belajar di sekolah menengah bahkan sejak di sekolah dasar. Selama ini himpunan dipandang sebagai kumpulan objek-objek. Biasanya himpunan digunakan dalam kehidupan sehari-hari untuk pengelompokan objek-objek yang memenuhi syarat tertentu. Barangkali guru di SMP pernah memberikan contoh, A adalah himpunan binatang berkaki empat, B adalah himpunan buah yang rasanya manis, C adalah himpunan huruf vokal, dan lain sebagainya. Kucing termasuk anggota himpunan A tetapi bukan anggota himpunan B. Sepeda motor bukan anggota himpunan manapun. Berdasarkan ilustrasi ini, siswa memahami himpunan sebagai kumpulan objek-objek yang mempunyai sifat yang sama.

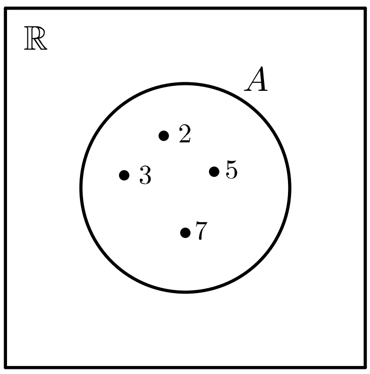
Kata "himpunan" dan "anggota" merupakan dua istilah takterdefinisi (*undefined terms*) seperti halnya "titik" dan "garis" pada geometri Euclid atau "pernyataan", "benar", dan "salah" pada logika proposisi. Kalau ada beberapa buku menuliskan definisi himpunan sebagai koleksi takterurut objek-objek, sesungguhnya hanya didasarkan pada pendekatan intuitif dan cuma untuk pemahaman sederhana. Definisi ini pertama kali dikemukakan oleh Georg Can-

Contoh 5.2. Himpunan bilangan rasional tidak dapat disajikan dengan notasi titik tiga karena polanya tidak sederhana. Sebagai gantinya digunakan notasi pembangun himpunan, yaitu $\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } b \neq 0\}$. Dalam hal ini pernyataan $P(x)$ adalah $x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$ dan $b \neq 0$. Untuk $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ bilangan prima lebih dari } 10\}$ bersesuaian dengan $P(x)$: "x bilangan prima lebih dari 10". Bilangan real cukup dinyatakan dengan $\mathbb{R}$ tanpa perlu menyajikan secara eksplisit sifat anggotanya karena ia biasanya dipandang sebagai semesta pembicaraan.

Perlu diingat bahwa anggota himpunan tidak hanya berupa objek-objek tunggal, tetapi dapat juga berupa himpunan-himpunan. Sebagai contoh, anggota dari himpunan $A = \{1, x, \{a, b\}, \mathbb{N}\}$ terdiri atas objek tunggal yaitu 1 dan x, dan himpunan-himpunan yaitu $\{a, b\}$ dan $\mathbb{N}$.

Cara lain penyajian himpunan adalah dengan diagram Venn, yaitu berupa daerah pada sebuah bidang, biasanya berbentuk lingkaran atau ellips di mana elemen-elemen himpunan dituliskan di dalam daerah ini. Sedangkan himpunan semesta biasanya digambarkan dengan sebuah persegipanjang. Diagram Venn ini ditemukan oleh John Venn pada 1881.

Contoh 5.3. Misalkan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan A himpunan bilangan prima yang kurang dari 10. Penyajian diagram Venn himpunan A ini ditunjukkan pada Gambar 5.1. Penyajian diagram Venn akan sangat cocok untuk menyatakan hubungan dua himpunan atau lebih.



Gambar 5.1: Penyajian himpunan dengan diagram Venn.

Catatan Berikut diberikan beberapa kosensus cara penulisan dalam teori himpunan dan beberapa catatan kritis.

Definisi 5.2. (Himpunan bagian) Himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B, ditulis $A \subseteq B$ jika setiap anggota A termuat di dalam B. Definisi ini ditulis dalam ekspresi logika sebagai berikut

$$A \subseteq B \text{ jika dan hanya jika } \forall x\,(x \in A \to x \in B)\,. \tag{5.2.2}$$

Berdasarkan definisi himpunan bagian, kesamaan dua himpunan dapat dipe-riksa sebagai berikut:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A. \tag{5.2.3}$$

Berdasarkan hubungan ini dapat dikatakan bahwa sebuah himpunan merupakan himpunan bagian dari dirinya sendiri. Dalam kasus $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, A disebut himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari B. Himpunan bagian sejati biasanya menggunakan notasi $A \subset B$, tetapi tidak masalah jika menggunakan notasi $\subseteq$. Himpunan bagian sejati dapat disajikan dalam bentuk kuantifikasi berikut:

$$A \subset B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \exists x\,(x \in B \wedge x \notin A)\,. \tag{5.2.4}$$

Contoh 5.5. Diberikan himpunan $A := \{6k + 12 : k \in \mathbb{Z}\}$ dan $B := \{3s : s \in \mathbb{Z}\}$. Selidikilah apakah berlaku $A \subseteq B$ atau $B \subseteq A$?

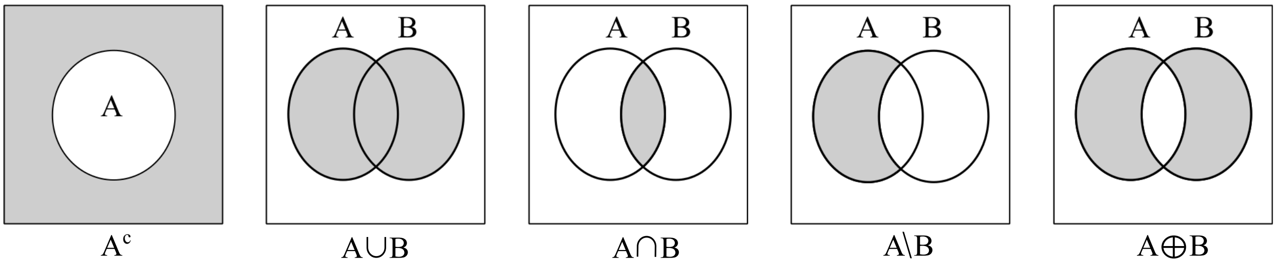
Penyelesaian. Pertama diselidiki $A \subseteq B$. Untuk sebarang $x \in A$ dapat ditulis $x = 6k+12 = 3(2k+4) = 3s$, dengan $s = 2k+4 \in \mathbb{Z}$. Ini berarti $x \in B$, sehingga berlaku $A \subseteq B$. Untuk menyelidiki $B \subseteq A$. Perhatikan $x = 3 \in B$ bersesuaian dengan $s = 1$. Untuk membuktikan bahwa $3 \in A$ kita harus menemukan bilangan bulat k sehingga $6k + 12 = 3$. Setelah disederhanakan diperoleh

$$6k = -9 \to k = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Ternyata k bukan bilangan bulat, sehingga $3 \notin A$. Kesimpulannya B bukan himpunan bagian dari A. Keadaan seperti ini biasanya ditulis $B \nsubseteq A$. □

Gambar 5.2 menyajikan kesamaan himpunan pada panel kiri dan himpunan bagian pada panel kanan. Pada panel kiri, kedua himpunan A dan B disajikan oleh dua lingkaran yang sama dan saling menutupi.

Theorem 5. *Himpunan kosong $\emptyset$ merupakan himpunan bagian dari himpunan apapun.*



Gambar 5.3: Ilustrasi diagram Venn operasi himpunan.

Notasi lain yang sering digunakan untuk komplemen A adalah A', $\widetilde{A}$, dan $\overline{A}$.

2. Gabungan dari A dan B, ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang anggota paling tidak berada pada salah satu A atau B, yaitu:

$$A \cup B := \{x \in \Omega : x \in A \vee x \in B\}.$$

3. Irisan dari A dan B, ditulis $A \cap B$ adalah himpunan yang anggota berada pada A dan B sekaligus, yaitu:

$$A \cap B := \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B\}.$$

4. Komplemen relatif A terhadap B, ditulis $B \setminus A$ adalah himpunan anggota B yang tidak berada pada A, yaitu:

$$B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}.$$

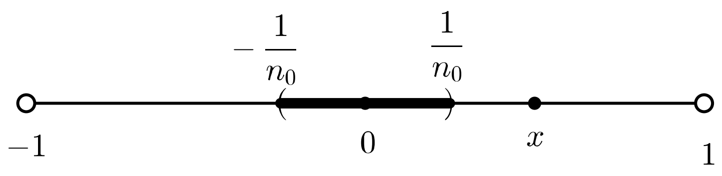
   Notasi lain untuk menyatakan komplemen relatif $B \setminus A$ adalah $B - A$.

5. Selisih simetris dari A dan B didefinisikan sebagai

$$A \oplus B := \{x \in \Omega : x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}.$$

Lima operasi himpunan ini digambarkan dalam bentuk diagram Venn pada Gambar 5.3. Jika $A \cap B = \emptyset$ maka himpunan A dan B dikatakan saling asing (*disjoint*). Sebuah sifat trivial adalah jika $A \subset B$ maka $A \cup B = B$ dan $A \cap B = A$.

Contoh 5.6. Misalkan semesta pembicaraan adalah $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$. Tentukan himpunan $A^c, A \cup B, A \cap B$, dan $B \setminus A$.



Gambar 5.4: Pengambilan interval yang tidak memuat $x \neq 0$.

PENYELESAIAN. Perhatikan bahwa A_k, $k = 1, 2, 3, \cdots$ berupa interval yang semakin menyempit (*nested*) dengan 0 terletak di pusatnya. Sebagai contoh, misalkan $A_1 = (-1, 1), A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), A_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Mengingat $A_3 \subset A_2 \subset A_1$ maka diperoleh $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 = (-1, 1)$ dan $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Untuk membuktikan gabungan takberhingga kita perhatikan bahwa $A_1 \supset A_k$ untuk setiap $k = 2, 3, 4, \cdots$ sehingga $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 = (-1, 1)$. Untuk membuktikan irisan takberhingga kita perhatikan bahwa setiap A_k memuat 0 sebagai anggotanya. Jadi, $0 \in \cap_{k=1}^{\infty} A_k$. Pertanyaannya, apakah ada anggota selain dari nol. Andai ada $x \neq 0$ (misalkan saja x positif) dan $x \in \cap_{k=1}^{\infty} A_k$. Sekecil apapun nilai x, kita selalu dapat memilih sebuah bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < x$ (sifat Archimedes). Ini berarti $x \notin (-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}) := A_{n_0}$. Ilustrasinya diberikan pada Gambar 5.4. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $x \in A_k$ untuk setiap $k = 1, 2, 3, \cdots$. Pengandaian bahwa ada $x \neq 0$ yang menjadi anggota irisan takberhingga $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ adalah salah. Kesimpulannya, $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$. □

Theorem 6. *Misalkan A, B, dan C himpunan sebarang. Maka berlaku relasi himpunan bagian sebagai berikut:*

1. *Inklusi pada irisan: $A \cap B \subseteq A$ dan $A \cap B \subseteq B$.*

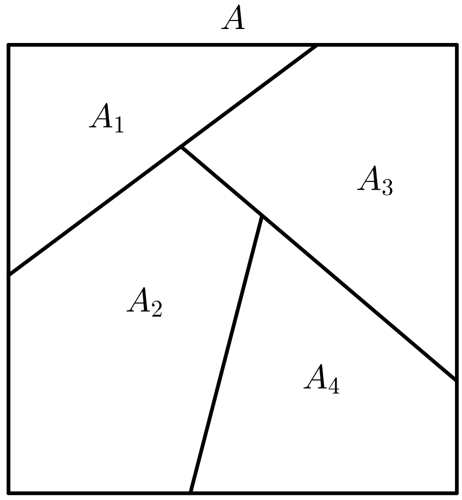
2. *Inklusi di dalam gabungan: $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$.*

3. *Sifat transitif: $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.*

BUKTI. Gunakan definisi irisan, gabungan dan himpunan bagian.

1. Misalkan $x \in A \cap B$ maka $x \in A$ dan $x \in B$. Pernyataan pertama $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ menghasilkan $A \cap B \subseteq A$ dan pernyataan kedua $x \in A \cap B \rightarrow x \in B$ menghasilkan $A \cap B \subseteq B$.

2. Jelas bahwa jika $x \in A$ maka $x \in A \cup B$ sehingga diperoleh $A \subseteq A \cup B$. Argumen yang sama untuk pernyataan kedua.



Gambar 5.5: Salah satu partisi himpunan A.

Latihan Selingan 5.3. Temukan partisi lain pada $\mathbb{Z}$ yang memuat 2 himpunan, 3 himpunan, dan 4 himpunan.

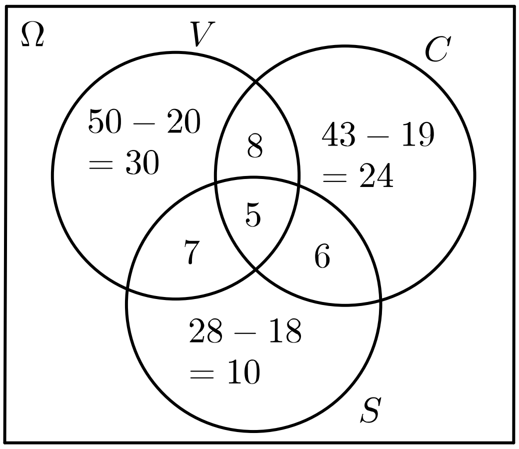
5.3 Kardinalitas Himpunan dan Himpunan Kuasa

Definisi 5.7. [Kardinalitas himpunan] Kardinalitas himpunan A, dilambangkan dengan $|A|$ adalah banyak anggota berbeda himpunan A. Himpunan dengan kardinalitas berhingga disebut himpunan berhingga. Sebaliknya himpunan takberhingga adalah himpunan yang kardinalitasnya takberhingga. Notasi lain yang sering digunakan untuk menyatakan kardinalitas A adalah $n(A)$.

Contoh 5.9. Tentukan kardinalitas himpunan sebagai berikut:

1. $A_1 :=$ himpunan bilangan prima yang kurang dari 10.
2. $A_2 :=$ himpunan bilangan rasional di dalam interval $[0, 1]$.
3. $B_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
4. $B_2 := \{x : x$ himpunan bagian dari $\{a, b\}\}$.

Penyelesaian. $A_1 = \{2, 3, 5, 7\}$ sehingga $|A_1| = 4$. Karena ada takberhingga banyak bilangan rasional di dalam $[0, 1]$ maka $|A_2| = \infty$. Jelas B_1 memuat 4 anggota sehingga $|B_1| = 4$. Perhatikan dengan saksama bahwa $\{a\} \in B_1$ tetapi $a \notin B_1$. Mudah dicek jika $x \in B_2$ maka $x = \emptyset$ atau $x = \{a\}$ atau $x = \{b\}$, atau



Gambar 5.6: Metode diagram Venn.

Penyelesaian. Misalkan V: himpunan siswa yang menyukai vanili, C: himpunan siswa yang menyukai coklat, dan S: himpunan siswa yang menyu-kai stroberi. Diperoleh data $|\Omega| = 100$, $|V| = 50, |C| = 43, |S| = 28, |V \cap C| = 13, |C \cap S| = 11, |V \cap S| = 12$, dan $|V \cap C \cap S| = 5$. Untuk menyelesaikan soal ini, penggunaan diagram Venn sangat membantu. Untuk itu isilah angka-angka pada diagram Venn dimulai dari irisan ketiga himpunan, kemudian irisan dua himpunan, dan akhirnya masing-masing himpunan secara tunggal. Hasilnya diberikan pada Gambar 5.6. Selanjutnya pertanyaan mudah dijawab melalui diagram Venn ini.

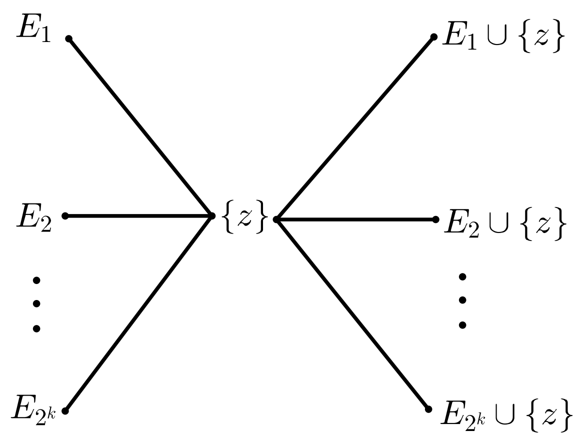
1. Di sini kita diminta menghitung $|C \setminus S|$, yaitu $24 + 8 = 32$.
2. $|(C \cap S) \setminus V| = 6$.
3. $|(V \cup C) \setminus S| = 30 + 8 + 24 = 62$.

□

Latihan Selingan 5.5. Adakah siswa yang tidak menyukai ketiga rasa tersebut. Jika ada, berapa jumlahnya?

Definisi 5.8. [Himpunan kuasa] Misalkan S sebuah himpunan. Himpunan kuasa (*power set*) dari S adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari S. Himpunan kuasa S biasanya dinyatakan oleh $\mathcal{P}(S)$ atau 2^S.

Berdasarkan definisi ini, himpunan kuasa $\mathcal{P}(S)$ minimal memuat himpunan kosong $\emptyset$ dan dirinya sendiri S.



Gambar 5.7: Ilustrasi pembentukan himpunan bagian.

Tanpa mengurangi umumnya pembuktian, misalkan

$$B = A \cup \{z\}$$

dengan $z \notin A$. Karena $E_i \subseteq A$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, 2^k$ maka $E_i \subseteq B$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, 2^k$. Karena $z \in B$ maka himpunan yang berbentuk $E_i \cup \{z\}, i = 1, 2, \cdots, 2^k$ merupakan himpunan bagian dari B. Ilustrasi pembentukan ini diberikan pada Gambar 5.7. Secara total himpunan kuasa dari B dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{P}(B) = \{E_1, E_2, \cdots, E_{2^k}, E_1 \cup \{z\}, E_2 \cup \{z\}, \cdots, E_{2^k} \cup \{z\}\}.$$

Jelas sekali bahwa $|\mathcal{P}(B)| = 2^{k+1}$. Ini berarti langkah induktif terbukti sehingga disimpulkan $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. □

Latihan Selingan 5.6. Pada pembuktian di atas, berikan argumen mengapa himpunan bagian sejati $\emptyset$ dan B pasti termuat di dalam $\mathcal{P}(B)$.

Contoh 5.12. Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{2, 3\}$. Tentukan $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$, dan $\mathcal{P}(A \cup B)$. Kemudian selidikilah hubungan $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ dengan $\mathcal{P}(A \cap B)$ dan $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ dengan $\mathcal{P}(A \cup B)$.

Penyelesaian. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$. Diper-

1. *Hukum identitas:* $A \cup \emptyset = A$ *dan* $A \cap \Omega = A$.
2. *Hukum dominasi:* $A \cup \Omega = \Omega$ *dan* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. *Hukum idempoten:* $A \cup A = A$ *dan* $A \cap A = A$.
4. *Hukum dobel komplemen:* $(A^c)^c = A$.
5. *Hukum komutatif:* $A \cup B = B \cup A$ *dan* $A \cap B = B \cap A$.
6. *Hukum asosiatif:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *dan* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
7. *Hukum distributif:* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *dan* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. *Hukum de Morgan:* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *dan* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
9. *Hukum penyerapan:* $A \cup (A \cap B) = A$ *dan* $A \cap (A \cup B) = A$.
10. *Hukum komplemen:* $A \cup A^c = \Omega$ *dan* $A \cap A^c = \emptyset$.

BUKTI. Beberapa identitas di atas seperti (1)-(5) dan 10 dapat dibuktikan secara trivial atau sederhana. Pembuktian identitas himpunan dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain metode penjabaran menggunakan pembangun himpunan, menunjukkan kesamaan dua himpunan pada kedua ruas, atau menggunakan tabel keanggotaan. Pada kesempatan ini hanya akan dibuktikan beberapa identitas saja, sisanya dijadikan bahan latihan.

- Dibuktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan menggunakan kesamaan dua himpunan.
  - Misalkan $x \in A \cap (B \cup C)$ maka $x \in A$ dan $x \in B \cup C$. Kita perhatikan $x \in B \cup C$ mempunyai tiga kemungkinan, yaitu $x \in B$ dan $x \in C$, $x \notin B$ dan $x \in C$, $x \in B$ dan $x \notin C$.
    * Kemungkinan pertama $x \in B$ dan $x \in C$. Karena sudah diketahui $x \in A$ maka $x \in A \cap B \cap C$;
    * Kemungkinan kedua $x \notin B$ dan $x \in C$. Karena sudah diketahui $x \in A$ maka $x \in A \cap C$;
    * Kemungkinan ketiga $x \in B$ dan $x \notin C$. Karena sudah diketahui $x \in A$ maka $x \in A \cap B$.

    Karena ketiga himpunan $A \cap B \cap C$, $A \cap C$, dan $A \cap B$ merupakan himpunan bagian dari $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ maka diperoleh $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cup B^c$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Tabel 5.1: Tabel keanggotaan.

Perhatikan kolom $(A \cap B)^c$ dan kolom $A^c \cup B^c$ mempunyai pola yang sama sehingga disimpulkan kedua himpunan ini adalah sama.

Cara lainnya adalah dengan menerapkan definisi dengan ekuivalensi dua arah (bi-implikasi). Tanda sama dengan dan bentuk pembangun himpunan tidak ditulis secara eksplisit. Berikut ini adalah contoh metode pembuktian yang dimaksud.

Contoh 5.14. Buktikan $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

Bukti. Misalkan x sebarang, dibuktikan $x \in A \cap (B \setminus C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$.

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \setminus C) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \setminus C \text{ [definisi irisan]} \\
&\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \text{ [definisi selisih relatif]} \\
&\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \text{ [sifat asosiatif proposisi]} \\
&\leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C \text{ [definisi irisan]} \\
&\leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C \text{ [definisi selisih relatif]}.
\end{aligned}
$$

Jadi, $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$. □

Latihan Selingan 5.7. Buktikan identitas himpunan berikut dengan menggunakan metode yang diminta. Tuliskan alasan pada setiap langkahnya.

1. Hukum de Morgan pertama $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dengan menggunakan metode pembangun himpunan.
2. Hukum distributif kedua $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dengan menggunakan tabel keanggotaan.
3. Hukum penyerapan $A \cup (A \cap B) = A$ dengan menggunakan kriteria kesamaan dua himpunan.
4. Hukum penyerapan $A \cap (A \cup B) = A$ dengan menggunakan implikasi dua arah.

Objek pada teori himpunan	*Objek pada logika proposisi*
Himpunan A, B	Pernyataan p, q
Himpunan semesta Ω	Pernyataan selalu benar T
Himpunan kosong $\emptyset$	Pernyatan selalu salah F
Komplemen himpunan A^c	Negasi pernyataan $\neg p$
Gabungan $\cup$	disjungsi $\vee$
Irisan $\cap$	konjungsi $\wedge$
Tabel keanggotaan	Tabel kebenaran
Identitas himpunan	Ekuivalensi proposisi

Tabel 5.2: Kaitan objek pada logika proposisi dan teori himpunan.

5.5 Produk Kartesian

Sebagaimana dijelaskan di awal bahwa himpunan tidak mengenal urutan. Dalam banyak hal, urutan anggota dalam sebuah koleksi akan menjadi sangat penting. Misalkan sekumpulan nilai tes seleksi masuk karyawan dipandang sebagai anggota sebuah himpunan maka sistem urutan sangat diperlukan, misalnya untuk memotong batas lulus (*passing grade*). Untuk ini diperkenalkan istilah pasangan terurut (*ordered pairs*).

Definisi 5.9. [PASANGAN TERURUT] Pasangan terurut $n - tuple$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

adalah koleksi terurut dengan posisi setiap elemen diperhitungkan. Artinya, a_1 anggota pertama, a_2 anggota kedua, dan seterusnya. Dua pasangan terurut $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dan $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ dikatakan sama jika $a_i = b_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

Berdasarkan definisi ini maka pasangan terurut, $(1, 2)$ dan $(2, 1)$ merupakan dua pasangan yang berbeda, sedangkan pada himpunan, $\{1, 2\}$ dan $\{2, 1\}$ adalah dua himpunan yang sama. Sebuah representasi yang cocok untuk pasangan terurut ini adalah posisi titik pada bidang Kartesian seperti diberikan pada Gambar 5.8. Selanjutnya konsep pasangan terurut dikembangkan menjadi produk Kartesian.

Definisi 5.10. [PRODUK KARTESIAN] Misalkan A dan B himpunan sebarang. Produk Kartesian dari A dan B, ditulis $A \times B$ adalah semua pasangan terurut

$1, 2, \cdots, n$. Dengan kata lain,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Contoh 5.16. Misalkan $A = \{\triangle, \star\}, B = \{1\}, C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ maka diperoleh

$$A \times B \times C = \{(\triangle, 1, \alpha), (\triangle, 1, \beta), (\triangle, 1, \gamma), (\star, 1, \alpha), (\star, 1, \beta), (\star, 1, \gamma)\}.$$

5.6 Himpunan Pembenar

Dalam logika predikat, misalkan fungsi proposisi P didefinisikan pada domain D. Himpunan semua $x \in D$ yang membuat $P(x)$ benar disebut himpunan pembenar (*truth set*) dari P. Bagaimana kaitannya dengan himpunan penyelesaian yang sering dibahas dalam matematika? Himpunan penyelesaian biasanya didefinisikan sebagai nilai-nilai variabel, umumnya berupa bilangan yang memenuhi relasi matematika seperti persamaan atau pertidaksamaan. Misalkan kita mempunyai persamaan kuadrat:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

maka himpunan semua nilai x yang memenuhi persamaan ini disebut himpunan penyelesaian. Dalam hal ini himpunan penyelesaiannya adalah $\{-1, 3\}$. Bila didefinisikan fungsi proposisi $P(x)$: "$x^2 - 2x - 3 = 0$" dengan domain D himpunan bilangan bulat maka diperoleh ada dua bilangan bulat yaitu $x = -1$ dan $x = 3$ sehingga $P(-1)$ dan $P(3)$ bernilai benar, sedangkan $P(x)$ bernilai salah untuk x lainnya. Dalam hal ini $\{-1, 3\}$ adalah himpunan pembenar proposisi P.

Dari ilustrasi di atas, setiap persamaan dapat diterjemahkan menjadi fungsi proposisi. Sebaliknya, fungsi proposisi belum tentu dapat dijadikan persamaan atau relasi matematika lainnya. Sebagai contoh, fungsi proposisi

$$Q(x) : \text{"}x \text{ pembagi dari 8"}$$

$x \in D =$ himpunan bilangan bulat positif. Dalam hal ini akan lebih cocok himpunan $\{1, 2, 4, 8\}$ disebut himpunan pembenar proposisi Q daripada himpunan penyelesaian karena Q bukanlah persamaan atau pertidaksamaan. Contoh berikut lebih memperjelas bahwa konsep himpunan pembenar lebih umum daripada himpunan penyelesaian.

puter, himpunan disajikan dalam bentuk biner, yaitu hanya menggunakan simbol 0 dan 1.

Untuk itu perlu diasumsikan semesta Ω himpunan berhingga. Asumsi ini penting karena komputer tidak dapat melakukan operasi yang banyaknya takberhingga. Pertama, tetapkan anggota-anggota semesta Ω dalam bentuk terurut, misalnya $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Selanjutnya representasi komputer yang berkaitan dengan Ω ditulis dalam bentuk array yang terdiri dari bit 1 dan panjangnya n, yaitu

$$\underbrace{111\cdots 1}_{n \text{ buah}}.$$

Selanjutnya setiap A himpunan bagian dari Ω ditulis dalam bentuk string bit, yaitu array dengan panjang n terdiri atas bit 0 atau 1. Jika bit ke-i bernilai 1 ini berarti $a_i \in A$, sebaliknya jika bernilai 0 maka $a_i \notin A$. Penyajian himpunan dalam bentuk string bit ini disebut representasi biner.

Contoh 5.18. Misalkan semesta $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pada komputer, himpunan semesta disajikan sebagai 11 1111 1111. Penggunaan spasi hanya untuk memudahkan identifikasi. Himpunan $A = \{1, 3, 4, 8, 10\}$ disajikan dalam bentuk biner 10 1100 0101. Himpunan bilangan prima $P = \{2, 3, 5, 7\}$ disajikan dalam bentuk biner 01 1010 1000.

Untuk operasi himpunan, representasi string bit lebih mudah dilakukan. Konversi dari biner ke bentuk biasa mengikuti aturan yang telah disebutkan sebelumnya.

Contoh 5.19. Untuk semesta yang sama seperti sebelumnya, misalkan $A =$ 10 0110 1010 dan $B =$ 11 0100 0111.

1. Nyatakan himpunan ini dalam bentuk biasa.
2. Tentukan bentuk biner dan bentuk biasa dari $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$, dan A^c.

Penyelesaian. Dengan menggunakan aturan konversi di atas diperoleh:

1. $A = \{1, 4, 5, 7, 9\}$ dan $B = \{1, 2, 4, 8, 9, 10\}$.
2. Untuk operasi himpunan kita gunakan aturan $\vee$ untuk gabungan dan $\wedge$ untuk irisan, yaitu $1 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1, 0 \vee 0 = 0$ dan $1 \wedge 1 =$

□

Berdasarkan contoh ini, sangat jelas bahwa kardinalitas himpunan kuasa adalah sama dengan banyaknya susunan berbeda string bit yang ada. Karena ada 3 tempat yang akan diisi oleh dua pilihan yaitu 0 dan 1 maka berdasarkan prinsip perkalian akan terdapat $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ kemungkinan susunan yang berbeda. Dengan demikian, teorema tentang kardinalitas himpunan kuasa (Teorema 5.3) dapat pula dijustifikasi melalui cara ini.

Latihan Selingan 5.10. Misalkan $A = \{a, b, e, f\}$, $B = \{b, c, e, f, g\}$, dan $C = \{c, d, f, g\}$ dengan semesta $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. Susunlah aturan operasi biner untuk $\oplus$.
2. Tentukan bentuk biner $A \cap C^c$ dan $A \cup B^c$.
3. Tentukan bentuk biner $A \cap (B \cap C)$ dan $A \cup (B \cap C)$.
4. Tentukan bentuk biner $A \oplus B$, $A \oplus (B \oplus C)$, dan $(A \oplus B) \oplus C$.
5. $(A \oplus B) \setminus C$ dan $A \setminus (B \oplus C)$.
6. Bagaimana cara memverifikasi bahwa sifat asosiatif dan distributif pada operasi himpunan melalui representasi biner ini?

5.7.2 Representasi himpunan dalam bentuk rekursif

Perhatikan himpunan $S = \{2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \cdots\}$ memiliki dua sifat menarik sebagai berikut:

1. $2 \in S$.
2. Jika $x \in S$ maka $2^x \in S$.

Setiap anggota S dapat diperoleh dengan menerapkan sifat 1 dan sifat 2 sebanyak berhingga. Sebagai contoh perhatikan 256: $x = 2 \in S \to 4 = 2^2 \in S \to 16 = 4^2 \in S \to 256 = 16^2 \in S$. Jadi 256 dapat diperoleh dengan menerapan sifat 1 sekali dan sifat 2 tiga kali. Perhatikan $32 \notin S$ karena 32 tidak dapat dihasilkan melalui kedua cara tersebut.

Secara umum dua ketentuan yang harus dipenuhi dalam pendefinisian himpunan S dalam bentuk rekursif adalah:

1. Ketentuan dasar yang memberikan secara eksplisit paling sedikit satu anggota primitif himpunan S.

himpunan fuzzy, keanggotaan setiap x dalam himpunan semesta dinyatakan oleh sebuah fungsi $\mu_S(x)$ sebagai ukuran atau derajat keanggotaannya terhadap A. Dalam hal ini ditetapkan $0 \leq \mu_S(x) \leq 1$ dengan keadaan khusus $\mu_S(x) = 0$ yang berarti pasti $x \notin S$ dan $\mu_S(x) = 1$ yang berarti pasti $x \in S$. Berdasarkan pendefinisian ini, himpunan fuzzy S disajikan dengan menulis setiap anggotanya berserta derajat keanggotaannya.

Contoh 5.22. Misalkan semesta pembicaraan adalah semua orang dan

$$S = \{\text{Tomi } 0.4,\ \text{Diki } 0.7, \text{ Hari } 0.6\}.$$

Maka derajat keanggotaan Diki adalah 0.7, ditulis $\mu_S(\text{Diki}) = 0.7$. Dalam kasus ini keanggotaan Diki dalam S paling tinggi.

Definisi 5.12. (Himpunan bagian fuzzy) Misalkan A dan B himpunan fuzzy. Maka himpunan fuzzy A dikatakan himpunan bagian fuzzy (*fuzzy subset*) B jika $A \subseteq B$ dan $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ untuk setiap $x \in A$.

Contoh 5.23. Misalkan S dan T himpunan orang pintar, yaitu $S = \{\text{Beti } 0.6, \text{ Meta } 0.5\}$ dan $T = \{\text{Beti } 0.7,\ \text{Jona } 0.4, \text{ Mimi } 0.5, \text{ Meta } 0.5\}$. Karena $S \subseteq T$ dan $\mu_S(\text{Beti}) = 0.6 \leq \mu_T(\text{Beti}) = 0.7$, $\mu_S(\text{Meta}) = 0.5 \leq \mu_T(\text{Meta}) = 0.5$ maka kita katakan S himpunan bagian fuzzy dari T.

Derajat keanggotaan pada contoh-contoh sebelumnya menggunakan fungsi diskret. Dalam kasus yang lebih umum, diperlukan fungsi kontinu untuk menyatakan derajat keanggotaan ini. Sebagai contoh perhatikan himpunan sebagai berikut:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ positif dan besar}\}.$$

Kriteria pertama $x > 0$ cukup jelas dalam konteks himpunan biasa, tetapi batasan besar di sini tidak jelas sehingga perlu derajat keanggotaan. Jika $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$ adalah anggota S berdasarkan syarat pertama, apakah status keanggotaannya sama? Seharusnya derajat keanggotaan $x_2 = 2$ lebih besar dari derajat keanggotaan $x_1 = 1$. Salah satu cara untuk menyatakan derajat keanggotaan himpunan S melalui fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x < 0 \\ (1 - e^{-s}) & \text{jika } x \geq 0. \end{cases}$$

Grafiknya diberikan pada Gambar 5.10. Sebagai contoh $\mu_S(1) = 1 - e^{-1} = 0.63$ dan $\mu_S(2) = 1 - e^{-2} = 0.86$. Ternyata, $\mu_S(2) > \mu_S(1)$.

2. $F \cap R$ dimaknai sebagai orang terkenal sekaligus kaya, yaitu

$$F \cap R = \{\text{Alice } 0.4, \text{ Brian } 0.8, \text{ Fred } 0.2, \text{ Oscar } 0.1, \text{Rita } 0.5\}.$$

   Pada himpunan ini, Brian paling tinggi, sedangkan Oscar paling rendah derajat keterkenalannya.

Berikut ini didefinisikan derajat keanggotaan hasil operasi himpunan dan juga produk kartesian.

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min\{1, d_A(x) + d_B(x)\}, \ \mu_{A \setminus B}(x) = \max\{0, d_A(x) - d_B(x)\},$$

$$d_{A \times B}(x, y) = \min\{d_A(x), d_B(x)\}.$$

Latihan Selingan 5.13. Dengan menggunakan himpunan fuzzy F dan R sebelumnya, tentukan himpunan fuzzy berikut ini:

1. $F \cap R^c$ dan $F^C \cap R$.
2. $F \oplus R$ dan $F \setminus R$.
3. $F \times R$ dan $R \times F$.

5.8 Contoh Paradoks pada Teori Himpunan

Pada awal bab ini telah direncanakan untuk menyajikan paradoks yang ada pada teori himpunan. Salah satunya adalah paradoks Russell yang dikemukan oleh seorang filsuf dan matematikawan Inggris Bertrand Russell (1972-1970) pada 1901. Inilah salah satu paradoks yang akan diberikan di sini. Sebelumnya ada paradoks tukang cukur (barber) yang pernah diberikan sebagai latihan Bab 1. Paradoks tukang cukur ini merupakan bentuk khusus dari paradoks Russel.

Paradoks Russell Hampir semua himpunan adalah bukan anggota dari dirinya sendiri. Sebagai ilustrasi, himpunan bilangan bulat bukanlah sebuah bilangan bulat dan begitu juga himpunan semua kuda bukanlah seekor kuda. Namun demikian, kita dapat membayangkan kemungkinan adanya sebuah himpunan yang menjadi anggota dirinya sendiri. Sebagai ilustrasi, himpunan ide-ide abstrak dapat dipandang sebuah ide abstrak. Perhatikan teori himpunan naif (*naive set theory*) dari Georg Cantor (1845-1918) yang menyatakan bahwa apapun koleksi yang dapat terdefinisikan (*definable*) adalah sebuah

- Andai tukang cukur tersebut tidak dapat mencukur dirinya sendiri. Maka dia sendiri masuk kategori orang yang dapat dia cukur sehingga ia dapat mencukur dirinya sendiri. Ini kontradiksi lagi. Kesimpulannya, tukang cukur tersebut dapat mencukur dirinya sendiri.

Dari kedua pengandaian tersebut semuanya menghasilkan kontradiksi. Ini berarti jawaban terhadap pertanyaan "dapatkah tukang cukur tersebut mencukur dirinya sendiri?" adalah tidak *yes* dan juga tidak *no*.

Cara lain memahami paradoks tukang cukur Misalkan Ω semesta pembicaraan yaitu terdiri atas semua orang di desa tersebut. Misalkan K: himpunan orang-orang yang dapat mencukur dirinya sendiri. Maka K^c adalah himpunan orang-orang yang tidak dapat mencukur dirinya sendiri. Nah, andai tukang cukur tersebut ada misalkan x maka ada dua kemungkinan, yaitu $x \in K$ atau $x \in K^c$. Andai $x \in K$ berarti ia dapat mencukur dirinya sendiri. Berdasarkan pernyataan ia tidak dapat mencukur dirinya sendiri. Kedua pernyataan ini bertentangan sehingga tidak mungkin $x \in K$. Kemungkinan kedua adalah $x \in K^c$ yaitu ia tidak dapat mencukur dirinya sendiri. Berdasarkan pernyataan ia dapat mencukur dirinya sendiri. Lagi, diperoleh kontradiksi sehingga tidak mungkin $x \in K^c$. Kesimpulan dari penjelasan ini adalah tidak mungkin ada tukang cukur yang hanya mencukur orang yang tidak dapat mencukur dirinya sendiri.

5.9 Soal-soal Latihan Bab 5

1. Ada dua cara umum untuk menyajikan himpunan, yaitu dengan cara mendaftarkan anggota-anggotanya bersamaan dengan tanda titik-tiga berderet "$\cdots$" dan dengan cara menggunakan pembangun himpunan. Sajikan himpunan di bawah ini dengan cara mendaftarkan semua anggotanya.

   (a) $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dan } x^2 = 1\}$, $A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ dan } x^2 = 1\}$.

   (b) $S_1 = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   (c) $T_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \in \mathbb{Z}\}$, $T_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in \mathbb{Z}\}$.

2. Sajikan himpunan di bawah ini dengan cara menggunakan pembangun himpunan.

   (a) $K = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(a) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.

(b) $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$.

(c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus B$.

(d) $A \cup (A \cap B) = A$.

(e) $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$.

8. Diberikan dua himpunan $A = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dan $B = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Buktikan bahwa $A = B$.

9. Diberikan himpunan $A_i = \{i, i^2\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Tentukan himpunan berikut.

(a) $\cup_{i=1}^4 A_i$ dan $\cap_{i=1}^4 A_i$.

(b) Apakah $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ saling asing berpasangan.

10. Diberikan himpunan $D_i = \{x \in \mathbb{R} \mid -i \leq x \leq i\}$. Tentukan himpunan berikut.

(a) $\cup_{i=1}^n D_i$ dan $\cap_{i=1}^n D_i$.

(b) $\cup_{i=1}^\infty D_i$ dan $\cap_{i=1}^\infty D_i$.

(c) Apakah $\{D_i \mid i = 1, 2, 3, \cdots\}$ saling asing berpasangan.

11. Diberikan himpunan $V_i = \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right]$. Tentukan himpunan berikut.

(a) $\cup_{i=1}^n V_i$ dan $\cap_{i=1}^n V_i$.

(b) $\cup_{i=1}^\infty V_i$ dan $\cap_{i=1}^\infty V_i$.

(c) Apakah $\{V_i \mid i = 1, 2, 3, \cdots\}$ saling asing berpasangan.

12. Tentukan $\cup_{i=1}^\infty A_i$ dan $\cap_{i=1}^\infty A_i$ jika diketahui

(a) $A_i = \{i, i+1, i+2, \cdots\}$.

(b) $A_i = \{0, i\}$.

(c) $A_i = \{-i, -i+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, i-1, i\}$.

(d) $A_i = [0, i)$.

(e) $A_i = [i, \infty)$.

13. Diberikan $A = \{1\}$ dan $B = \{x, y\}$. Tentukan $\mathcal{P}(A \times B)$.

(a) $A \oplus B = A$.

(b) $A \oplus C = B \oplus C$.

21. Apakah pada operasi selisih simetris berlaku sifat asosiatif? Dengan kata lain, apakah pernyataan berikut berlaku?

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

22. Misalkan $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$, dan $C = \{2, 3\}$. Tentukan himpunan berikut.

    (a) $A \times (B \cup C)$ dan $A \times (B \cap C)$.

    (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$.

    (c) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

    (d) $(A \times B) \times C$ dan $A \times (B \times C)$.

23. Diberikan himpunan A, B, dan C, buktikan identitas berikut.

    (a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

    (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

24. Tentukan banyak bilangan bulat positif yang tidak melebihi 300 dan habis dibagi oleh 2 atau 3. (Gunakan prinsip masuk-keluar).

25. Misalkan A dan B himpunan berhingga dengan $|A| = m$ dan $|B| = n$. Jika A dan B saling asing, tentukan $|A \cup B|$, $|A \setminus B|$, dan $|B \setminus A|$.

26. Misalkan A dan B himpunan berhingga dengan $|A| = m$ dan $|B| = n$. Jika $A \subseteq B$, tentukan $|A \cup B|$, $|A \setminus B|$, dan $|B \setminus A|$.

27. Tentukan banyak bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan 500 dan habis dibagi oleh

    (a) 2 atau 3.

    (b) 2 atau 3, tetapi tidak oleh 6.

    (c) 2 atau 3 atau 5.

    (d) selain dari $2, 3$, dan 5.

34. Misalkan $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$. Tentukan himpunan yang direpresentasikan oleh bentuk biner berikut ini.

    (a) $A_1 = 11\ 1100\ 1111$.
    (b) $A_2 = 01\ 0111\ 1000$.
    (c) $A_3 = 10\ 0001\ 0001$.

35. Melanjutkan soal sebelumnya, tentukan bentuk biner dan bentuk standar himpunan berikut ini.

    (a) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$.
    (b) $A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3)$.
    (c) $(A_1 \oplus A_2) \oplus A_3$.
    (d) $A_1^c \cup (A_2 \oplus A_3)^c$.

36. Tentukan 5 anggota pertama himpunan S yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut.

    (a) $\sqrt{2} \in S$ dan $x \in S \to \sqrt{2+x} \in S$.
    (b) $3 \in S$ dan $x \in S \to \frac{1}{1+x} \in S$.
    (c) $1 \in S$ dan $x \in S \to 2^x \in S$.

37. Nyatakan himpunan berikut dalam bentuk rekursif.

    (a) $\{1, 3, 7, 15, 31, \cdots\}$.
    (b) $\{b, ba^2, ba^4, ba^6, \cdots\}$.
    (c) $\{b, ba, b^2a^3, b^3a^3, \cdots\}$.

38. Diberikan himpunan fuzzy berikut: $A = \{\text{Olive } 0.6,\ \text{Andi } 0.3,\ \text{Jefri } 0.7\}$ dan $B = \{\text{Jean } 0.8,\ \text{June } 0.5,\ \text{Jefri } 0.6\}$. Tentukan himpunan fuzzy berikut.

    (a) $A \cup B^c$.
    (b) $A^c \cap B$.
    (c) $A \oplus B^c$.
    (d) $A \times B$.

39. Misalkan A dan B himpunan fuzzy, buktikan

BAB 6

Konsep Dasar Relasi dan Fungsi

Dan bersegeralah kamu kepada ampunan dari Tuhanmu dan kepada surga yang luasnya seluas langit dan bumi yang disediakan untuk orang-orang yang bertakwa.

QS 3:133.

Selain teori himpunan, relasi dan fungsi juga merupakan konsep yang sangat mendasar dalam matematika. Khususnya, konsep fungsi merupakan benang pengikat setiap cabang dalam matematika karena semua cabang matematika mengandung fungsi sebagai salah satu objek kajiannya.

Relasi digunakan untuk membandingkan objek-objek matematika. Pada himpunan bilangan real, kita biasanya ingin mengetahui apakah bila-ngan yang satu lebih besar dari bilangan lainnya. Relasi ini disebut dengan relasi urutan dan dinotasikan oleh " $<$ ". Notasi $a < b$ berarti a kurang dari b atau b lebih besar dari a. Sebagai contoh $2 < 3; 2 < 4; 1 < 2; 1 < 3$, dan sebagainya. Dalam kasus relasi ini tidak dipenuhi maka kita katakan tidak berelasi. Walaupun 2 berelasi dengan 3 karena $2 < 3$, namun 3 tidak berelasi dengan 2 karena 3 tidak kurang dari 2, ditulis $3 \not< 2$. Jadi relasi umumnya tidak bersifat komutatif seperti makna dalam kehidupan sehari-hari. Contoh berikutnya adalah relasi kesamaan. Perhatikan pada himpunan bilangan rasional berlaku $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ dan seterusnya. Relasi ini disebut relasi ekuivalensi, biasanya dinotasikan dengan "$\backsim$". Jadi, relasi merupakan instrumen untuk membandingkan dua elemen yang berasal dari dua himpunan, katakan antara himpunan A dan B.

Fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi. Pada relasi, sebuah elemen di A dapat berelasi dengan lebih dari satu elemen di B atau malah ada elemen di A yang tidak memiliki relasi sama sekali dengan elemen di B. Sebagai contoh, $A = \{2, 3, 4, 6\}$ dan $B = \{1, 3, 5, 6\}$ dengan relasi kurang dari " $<$ ". Dalam hal ini $2 \in A$ berelasi dengan $3, 4, 5$ dan 6 pada B. Tetapi $6 \in A$ tidak berelasi dengan elemen apapun pada B. Fungsi adalah relasi yang mempunyai sifat khusus, yaitu semua elemen pada A harus berelasi dengan tepat satu elemen pada B. Relasi antara himpunan mahasiswa dan himpunan indeks prestasi kumulatif (IPK) merupakan sebuah fungsi. Setiap mahasiswa pasti mempunyai IPK dan tidak mungkin seorang mahasiswa mempunyai dua IPK yang berbeda.

Relasi dan fungsi tidak hanya muncul dalam matematika teoretis tapi juga banyak digunakan pada bidang terapan. Sebagai contoh, konsep relasi banyak digunakan pada pendefinisian relasional database pada sains komputer. Fungsi digunakan sebagai deskripsi sebuah proses berjenjang dari masukan (*input*) sampai dengan menghasilkan keluaran (*output*) berbagai peristiwa dalam bidang ilmu terapan.

6.1 Pengertian Relasi

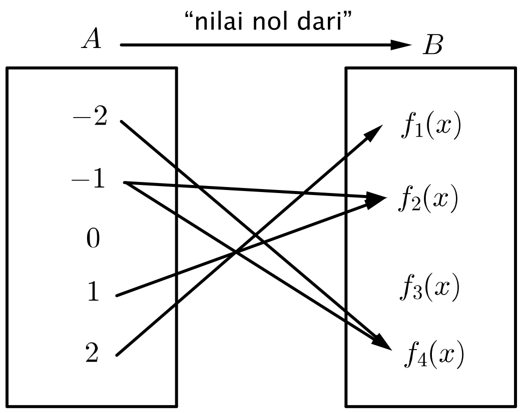
Sebagaimana telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa relasi dari himpunan A ke B merupakan bentuk khusus dari pasangan terurut $A \times B$. Secara formal relasi didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 6.1. [RELASI] Diberikan himpunan A dan B. Relasi dari A dan B dilambangkan oleh R adalah himpunan bagian takkosong dari $A \times B$. Jika $(a, b) \in R$ maka kita katakan a berelasi dengan b terhadap R, ditulis $a\,R\,b$. Sebaliknya jika $(a, b) \notin R$ maka kita katakan a tidak berelasi dengan b, ditulis $a \neg R\, b$. Notasi lainnya adalah $a \sim b$ jika a dan b berelasi dan $a \nsim b$ jika a dan b tidak berelasi.

Contoh 6.1. Misalkan $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, dan relasi R didefinisikan sebagai "faktor dari", yaitu $a\,R\,b$ jika dan hanya jika a faktor dari b. Diperoleh pasangan terurut $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ dan relasi $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$. Dalam hal ini jelas bahwa $R \subseteq A \times B$.

Contoh 6.2. Diberikan himpunan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $B = \{x - 2, x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 + x - 2\}$. Misalkan $a \in A$ dan $f \in B$, didefinisikan $a\,R\,f$ jika dan hanya jika $f(a) = 0$. Sajikan relasi ini dalam bentuk diagram panah.

PENYELESAIAN. Perhatikan fungsi $f_1(x) = x-2$ mempunyai nilai nol di $x = 2$, fungsi $f_2(x) = x^2 - 1$ bernilai nol di $x = -1$ dan $x = 1$, $f_3(x) = x^2 - 2$ bernilai nol di $x = -\sqrt{2}$ dan $x = \sqrt{2}$, dan $f_4(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ bernilai nol di $x = -2$ dan $x = -1$. Diperoleh relasi dalam bentuk diagram panah sebagai berikut:



Gambar 6.1: Bentuk diagram panah relasi "nilai nol dari".

□

Selain representasi dalam bentuk diagram panah, relasi dapat dinyatakan dalam bentuk tabel seperti diberikan pada contoh berikut.

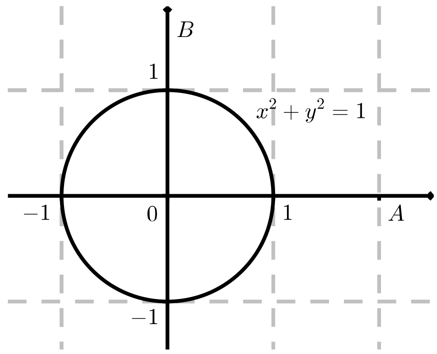
Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$. Misalkan R adalah relasi "elemen dari". Relasi R ini akan disajikan dalam bentuk tabel atau matriks biner. Masing-masing himpunan disusun sebagai baris dan kolom. Elemennya bernilai 1 jika berelasi dan bernilai 0 jika tidak berelasi. Pada tabel ini dibaca 1 elemen dari $\{1, 2\}$ tetapi 1 bukan elemen $\{2, 3\}$ dan $\{4, 5\}$, 3 elemen dari $\{2, 3\}$ dan 3 bukan elemen dari dua himpunan lainnya.

elemen dari	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{4,5\}$
1	1	0	0
2	1	1	0
3	0	1	0
4	0	0	1

Tabel 6.1: Bentuk tabel relasi "elemen dari".

Untuk himpunan A dan B dengan anggota-anggota takterbilang semisal interval atau himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, relasi umumnya disajikan dalam bentuk kurva. Dalam kasus $A = B$, relasi dari A ke B cukup dikatakan relasi pada A.

Contoh 6.3. Misalkan $A = B = \mathbb{R}$ dan didefinisikan relasi R dengan $x\,R\,y$ jika dan hanya jika $x^2 + y^2 = 1$. Relasi ini dapat digambarkan sebagai sebuah lingkaran dengan pusat titik asal dan radius 1.



Gambar 6.2: Bentuk kurva relasi $x^2 + y^2 = 1$.

Titik-titik yang tidak berada pada lingkaran merupakan elemen yang tidak berelasi, seperti titik $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$, dan $(-1, -1)$.

Definisi 6.2. [Sifat-sifat relasi] Sebuah relasi $\sim$ pada X dikatakan:

1. Reflektif jika untuk setiap $x \in X$ berlaku $x \sim x$.
2. Simetris jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $x \sim y \to y \sim x$.
3. Antisimetris jika setiap $x, y \in X$ berlaku $x \sim y$ dan $y \sim x \to y = x$.
4. Transitif jika setiap $x, y, z \in X$ berlaku $x \sim y$ dan $y \sim z \to x \sim z$.

Contoh 6.4. Selidikilah sifat relasi pada X di bawah ini:

1. $X = \mathbb{R}$ dengan relasi "$<$". Bagaimana pula dengan relasi "$\leq$"?
2. X adalah himpunan-himpunan bagian takkosong pada $\mathbb{R}$ dengan relasi $\sim$ didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $A, B \in X$, $A \sim B$ jika dan hanya jika $A \cap B \neq \emptyset$.

Penyelesaian. Kita selidiki keterpenuhan sifat-sifat pada definisi sebelumnya.

1. Jelas relasi "$<$" bersifat transitif karena untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$. Mudah dipahami bahwa sifat reflektif dan simetris tidak dipenuhi oleh relasi "$<$", tetapi sifat antisimetris tetap dipenuhi (mengapa?). Untuk relasi "$\leq$" berlaku sifat reflektif karena $x \leq x$ selalu benar untuk setiap x. Jelas berlaku jika $x \leq y$ maka $y \leq x$, yaitu bersifat simetris. Relasi ini juga bersifat antisimetris sebab berlaku jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$.
2. Perhatikan untuk setiap $A \neq \emptyset$, berlaku $A \cap A = A \neq \emptyset$ sehingga $A \sim A$, yaitu reflektif. Karena irisan bersifat komutatif maka berlaku jika $A \cap B \neq \emptyset$ maka $B \cap A = A \cap B \neq \emptyset$, yaitu simetris. Untuk melihat sifat antisimetris, kita ambil $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$. Jelas $A \cap B \neq \emptyset$ dan $B \cap A \neq \emptyset$ tetapi faktanya $A \neq B$. Ini berarti sifat antisimetris tidak dipenuhi. Ternyata sifat transitif juga tidak dipenuhi, misalnya dengan mengambil contoh pengingkar $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$, dan $C = \{5, 6, 7\}$.

$\square$

6.1.1 Relasi ekuivalensi

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya bahwa ada 4 sifat pokok sebuah relasi, yaitu reflektif, simetris, antisimetris, dan transitif. Secara khusus sebuah relasi yang bersifat reflektif, simetris, dan transitif disebut relasi ekuivalensi.

Definisi 6.3. [Relasi ekuivalensi] Relasi ekuivalensi pada X adalah relasi yang bersifat reflektif, simetris, dan transitif. Jika $\sim$ sebuah relasi ekuivalensi pada X maka kita katakan x ekuivalen dengan y jika dan hanya jika $x \sim y$.

Contoh 6.5. Misalkan $X = \mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat. Relasi "$\sim$" didefinisikan sebagai $m \sim n$ jika hanya jika m dan n memberikan sisa yang sama jika dibagi oleh 3. Selidikilah apakah ini relasi ekuivalensi?

Penyelesaian. Perhatikan bahwa sisa pembagian oleh 3 hanya ada 3 kemungkinan, yaitu 0 (habis dibagi), 1, dan 2. Relasi ini dapat ditulis sebagai $m \sim n$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k_1, k_2, dan $r \in \{0, 1, 2\}$ sehingga $m = 3k_1 + r$ dan $n = 3k_2 + r$. Jelas $m \sim m$ sebab dua bilangan yang sama pasti memberikan sisa yang sama jika dibagi oleh 3. Pernyataan "m dan n memberikan sisa yang sama jika dibagi oleh 3" ekuivalen dengan pernyataan "n dan m memberikan sisa yang sama jika dibagi oleh 3" sehingga sifat simetris dipenuhi. Selanjutnya dibuktikan sifat transitif. Diketahui $m \sim n$ yaitu ada bilangan bulat k_1, k_2, dan $r \in \{0, 1, 2\}$ sehingga $m = 3k_1 + r$ dan $n = 3k_2 + r$ dan $n \sim p$ yaitu ada bilangan bulat k_3 dan $r \in \{0, 1, 2\}$ sehingga $n = 3k_2 + r$ dan $p = 3k_3 + r$. Diperoleh bentuk $m = 3k_1 + r$ dan $p = 3k_3 + r$, yakni $m \sim p$. Dengan terpenuhinya ketiga sifat ini maka disimpulkan relasi ini adalah relasi ekuivaensi. □

Relasi ekuivalensi pada contoh sebelumnya, di dalam teori bilangan dikenal dengan istilah kongruensi modulo. Secara umum, untuk sebuah pembagi bulat n,

$$a \equiv b (\text{mod } n) \text{ jika dan hanya jika } a - b = kn \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{Z}. \tag{6.1.1}$$

Ekspresi $a \equiv b(\text{mod } n)$ dibaca "a kongruen dengan b dalam modulo n". Bila bilangan modulo n sudah dimaklumi, cukup ditulis $a \equiv b$. Untuk $n = 3$ sebagaimana contoh di atas, $0 \equiv 3 \equiv 6 \equiv 9 \equiv \cdots$, $1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv 10 \equiv \cdots$, $2 \equiv 5 \equiv 11 \equiv 17 \equiv \cdots$.

6.1.2 Kelas-kelas ekuivalensi

Pengelompokan elemen-elemen yang saling ekuivalen ini menghasilkan konsep kelas-kelas ekuivalensi seperti diungkapkan pada definisi berikut.

Definisi 6.4. [Kelas ekuivalensi] Diberikan relasi ekuivalensi "$\sim$" pada X. Misalkan $x \in X$ maka himpunan

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\} \tag{6.1.2}$$

disebut kelas ekuivalen x terhadap relasi $\sim$. Jadi, $y \in [x]$ jika dan hanya jika $y \sim x$.

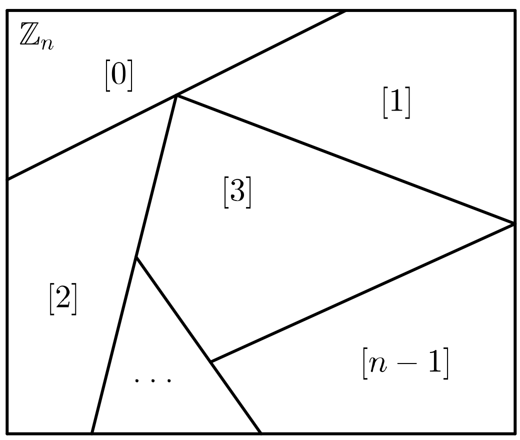
Sebuah fakta trivial bahwa $x \in [x]$. Berdasarkan contoh di atas, relasi kongruensi ini membuat himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terpartisi ke dalam tiga himpunan $[0], [1], [2]$ dengan

$$\begin{aligned}
[0] &= \text{himpunan bilangan bulat habis dibagi 3}\\
&= \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \cdots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\},\\
[1] &= \text{himpunan bilangan bilangan bulat bersisa 1 jika dibagi 3}\\
&= \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\},\\
[2] &= \text{himpunan bilangan bulat bersisa 2 jika dibagi 3}\\
&= \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Di dalam setiap himpunan $[0], [1]$, dan $[2]$ termuat anggota-anggota yang ekiuvalen satu sama lainnya. Ingat ekuivalen tidak harus sama, tetapi sama pasti ekuivalen. Secara umum, himpunan kelas-kelas ekuivalensi modulo n pada $\mathbb{Z}$ adalah

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \cdots, [n-1]\}$$

dan ia membentuk partisi pada $\mathbb{Z}$. Keadaan ini diilustrasikan pada Gambar 6.3.



Gambar 6.3: Ilustrasi partisi yang terbentuk oleh kelas-kelas ekuivalensi.

Ingat kembali bahwa $\mathbb{Z}_n$ adalah partisi pada $\mathbb{Z}$ karena $[m] \cap [n] = \emptyset$ untuk $m \neq n$ dan $\mathbb{Z} = \cup_{k=0}^{n-1}[k]$. Secara umum berlaku fakta bahwa kelas-kelas ekuivalensi membentuk sebuah partisi diberikan pada teorema berikut.

Theorem 10. *Misalkan X sebuah himpunan dan "$\sim$" sebuah relasi ekuivalensi pada X. Maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku*

$$[y] \neq [x] \textit{ jika dan hanya jika } [y] \cap [x] = \emptyset.$$

Dengan kata lain, dua kelas ekuivalensi yang berbeda jika dan hanya jika mereka saling asing.

Bukti. ($\leftarrow$): Dibuktikan melalui kontraposisinya. Diketahui $[y] = [x]$, dibuktikan $[y] \cap [x] \neq \emptyset$. Karena $x \in [x]$ dan $[x] = [y]$ maka $x \in [y]$. Diperoleh $x \in [x] \cap [y]$, yaitu $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. ($\rightarrow$): Dibuktikan melalui kontraposisinya. Diketahui $[y] \cap [x] \neq \emptyset$, dibuktikan $[y] = [x]$. Ini berarti ada $z \in [y]$ dan $z \in [x]$, yakni $x \sim z$ dan $z \sim y$. Berdasarkan sifat transitif diperoleh $x \sim y$. Selanjutnya dibuktikan $[y] \subseteq [x]$. Misalkan $z \in [y]$ maka $z \sim y$. Karena telah diketahui $x \sim y$ maka berdasarkan sifat transitif diperoleh $z \sim x$. Ini berarti $z \in [x]$, yakni terbukti $[y] \subseteq [x]$. Sebaliknya, misalkan $z \in [x]$ maka $z \sim x$. Berdasarkan fakta $x \sim y$ dan sifat transitif, diperoleh $z \sim y$. Ini berarti $z \in [y]$, yakni terbukti $[x] \subseteq [y]$. Berdasarkan hasil ini terbukti bahwa $[y] = [x]$. □

Latihan Selingan 6.1. Misalkan X dan Y himpunan bagian bilangan real. Didefinisikan relasi dari X ke Y sebagai "anggota dari". Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut:

1. 0 berelasi dengan $\{-1, 0, 1\}$.
2. $\{2\}$ berelasi dengan $\{\emptyset, 2\}$.
3. $\emptyset$ berelasi dengan $\mathcal{P}(\emptyset)$.
4. $\{1, 2\}$ berelasi dengan $\{1, 2\}$.
5. $\{\emptyset, 1\}$ berelasi dengan $\mathcal{P}(\{\emptyset, 1\})$.

Latihan Selingan 6.2. Selidikilah keempat sifat (reflektif, simetris, antisimetris, dan transitif) relasi dari X dan ke X sebagai berikut:

1. $X = \mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat, relasinya "habis dibagi".
2. X himpunan garis lurus pada bidang koordinat, relasinya "tegak lurus".

Latihan Selingan 6.3. Misalkan $X = \mathbb{Q}$ himpunan bilangan rasional. Didefinisikan relasi "$\sim$" sebagai $\frac{a}{b} \sim \frac{m}{n}$ bila hanya bila $mb = an$ untuk setiap $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ dan $n \neq 0$. Buktikan ini adalah relasi ekuivalensi. Dapatkah Anda membentuk kelas-kelas ekuivalensi pada himpunan bilangan rasional?

Latihan Selingan 6.4. Misalkan $X = \mathbb{R}^2$. Didefinisikan relasi $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ jika dan hanya jika $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Berikan beberapa contoh elemen-elemen yang berelasi dan juga contoh elemen-elemen yang tidak berelasi. Buktikan ini bukan relasi ekuivalensi.

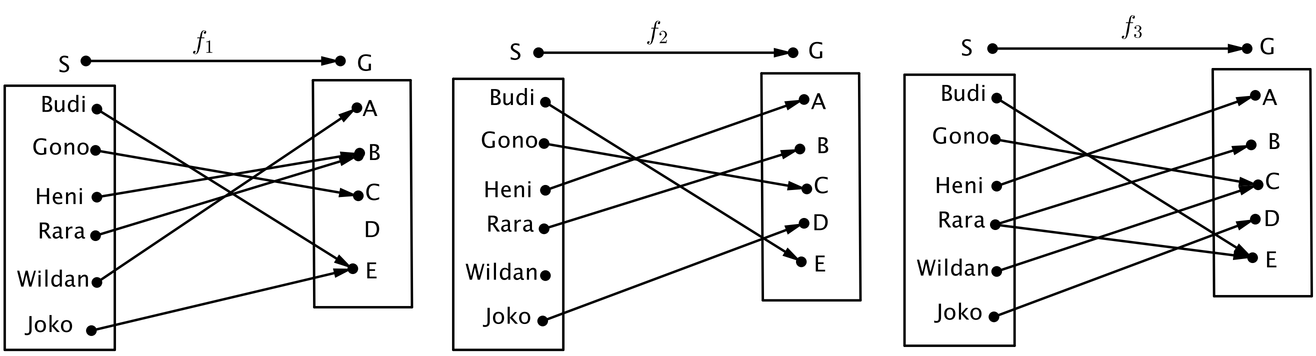
6.2 Pengertian Fungsi

Sebagaimana dijelaskan di awal bab ini, fungsi merupakan bentuk khusus dari sebuah relasi. Definisi formal fungsi diberikan sebagai berikut.

Definisi 6.5. [Fungsi] Misalkan A dan B himpunan takkosong. Sebuah fungsi dari A ke B adalah sebuah relasi atau aturan pengawanan yang memasangkan setiap elemen $x \in A$ dengan sebuah elemen tunggal $y \in B$. Jika aturan pengawanan tersebut dinyatakan dengan f, maka fungsi ini ditulis sebagai $f : A \to B$. Dalam bentuk lain, sebuah fungsi f dari A ke B dapat disajikan sebagai himpunan bagian dari $A \times B$ sehingga setiap $x \in A$ terdapat dengan tunggal $y \in B$ sehingga $(x, y) \in f$. Himpunan A disebut domain dan B disebut kodomain. Fungsi juga kadangkala disebut pemetaan (mapping) atau transformasi.

Berdasarkan definisi ini, fungsi $f : A \to B$ dapat dikarakterisasi oleh himpunan $G(f) := \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$. Ketika himpunan ini dapat digambarkan pada bidang koordinat maka diperoleh apa yang disebut grafik fungsi f.

Contoh 6.6. Misalkan S = {Budi, Gono, Heni, Rara, Wildan, Joko} himpunan mahasiswa dan G = {A,B,C,D,E} himpunan nilai mata kuliah fondasi matematika. Beberapa aturan pengawanan diberikan sebagai berikut: Panel (a) memenuhi syarat fungsi dan dapat ditulis f_1(Budi) $= E$, f_1(Gono) =



(a) Sebuah fungsi (b) Bukan sebuah fungsi (c) Bukan sebuah fungsi

Gambar 6.4: Contoh fungsi dan bukan bukan fungsi.

C, f_1(Heni) $= B$, f_1(Rara) $= B$, f_1(Wildan) $= A$, f_1(Joko) $= E$ atau dalam bentuk pasangan terurut f_1 = {(Budi,E), (Gono,C), (Heni,B), (Rara,B), (Wildan,A), (Panel (b) bukan fungsi karena ada anggota domain yang tidak dipasangkan yaitu Wildan. Panel (c) juga bukan fungsi karena ada anggota domain yang mempunyai pasangan lebih dari satu (tidak tunggal), yaitu Rara.

Definisi 6.6. [ISTILAH LAIN PADA FUNGSI] Misalkan $f : A \to B$ sebuah fungsi. Daerah hasil (*range*) f didefinisikan sebagai

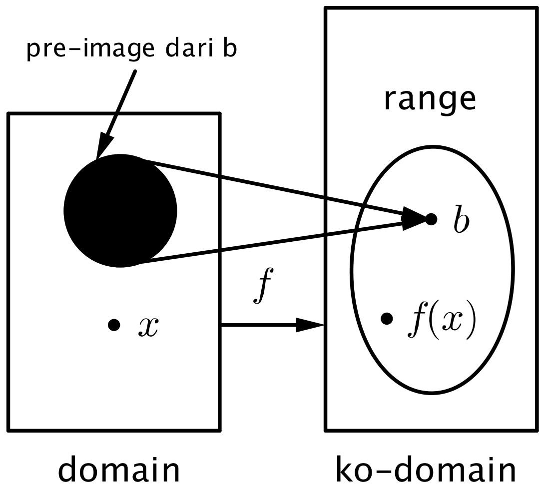
$$\mathrm{R}_f = f(A) := \{f(x) \in B \mid x \in A\}.$$

Misalkan $E \subseteq A$ maka bayangan (*image*) E terhadap f adalah

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Lebih khusus untuk $x \in A$ and $y \in B$ sehingga $y = f(x)$, maka y disebut nilai fungsi (*image*) f di x dan x disebut *pre-image* dari y.

Struktur fungsi dapat dilihat pada Gambar 6.5. Jelas bahwa daerah hasil (range) merupakan subset dari kodomain, sedangkan pre-image berada di dalam domain.



Gambar 6.5: Struktur fungsi.

Jika x sebagai variabel pada domain A, fungsi f dari A ke B kadangkala dinyatakan dengan notasi $x \in A \mapsto f(x) \in B$. Pada pendefinisian fungsi dikenal istilah terdefinisi dengan baik (*well-defined*). Sebuah relasi dari A ke B dikatakan terdefinisi dengan baik jika ia membentuk sebuah fungsi.

Contoh 6.7. Misalkan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mengawankan setiap bilangan bulat dengan kuadratnya, yaitu $f(x) = x^2, x \in \mathbb{Z}$. Selidikilah apakah f sebuah fungsi. Tentukan daerah hasil, bayangan himpunan bilangan genap, dan pre-image dari 16.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa setiap bilangan bulat pasti mempunyai nilai kuadrat. Ini berarti semua anggota domain mempunyai pasangan. Kuadrat sebuah bilangan bulat adalah tunggal sehingga tidak mungkin ada percabangan. Disimpulkan f adalah sebuah fungsi. Daerah hasil f adalah semua bilangan kuadrat, yaitu

$$R_f = \{0, 1, 4, 9, \cdots\}.$$

Misalkan E himpunan bilangan genap. Setiap bilangan genap x dapat ditulis sebagai $x = 2k$ dengan k suatu bilangan bulat. Diperoleh $f(x) = (2k)^2 = 4k^2$. Jadi bayangan E adalah

$$f(E) = \{4k^2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 4, 16, 36, \cdots\}.$$

Terakhir diketahui $y = 16$, ditentukan x sehingga $f(x) = x^2 = 16$. Diperoleh $x = \pm 4$. Jadi, pre-image dari 16 adalah $\{-4, 4\}$. □

Contoh 6.8. Diberikan fungsi f dari $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ke $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan $f(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix}$. Tentukan R_f.

Penyelesaian. Perhatikan untuk $x = 0$ diperoleh $f(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4!}{(4-0)!0!} = 1$. Dengan cara yang sama diperoleh $f(1) = 4$, $f(2) = 6$, $f(3) = 4$, dan $f(4) = 1$. Jadi, $R_f = \{1, 4, 6, 4, 1\} = \{1, 4, 6\}$. □

Contoh 6.9. Misalkan $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \{0, 1\}$ didefinisikan oleh

$$f(E) := \begin{cases} 1 & \text{jika } \sqrt{3} \in E, \\ 0 & \text{jika } \sqrt{3} \notin E. \end{cases}$$

Apakah f terdefinisi dengan baik? Apakah kodomain dan rangenya sama?

Penyelesaian. Perhatikan f membawa sebuah himpunan bagian $E \subseteq \mathbb{R}$ ke sebuah bilangan biner 0 atau 1. Sebagai contoh, $f : \{1, 2, 3\} \mapsto 0$ karena $\sqrt{3} \notin \{1, 2, 3\}$. Sebaliknya $f : [1, 3] \mapsto 1$ sebab $\sqrt{3} \in [1, 3]$. Kita juga punyai $f(\mathbb{Z}) = 0$ karena $\mathbb{Z}$ tidak memuat $\sqrt{3}$, $f(\mathbb{R}) = 1$ karena $\sqrt{3}$ merupakan sebuah bila-ngan real. Penafsirannya, relasi ini membawa himpunan E ke 1 jika E memuat $\sqrt{3}$, selain itu dibawa ke 0. Karena setiap himpunan $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ hanya ada dua kemungkinan terhadap $\sqrt{3}$, yaitu sebagai anggota atau bukan anggota maka disimpulkan f membentuk sebuah fungsi sehingga ia terdefinisi dengan baik. Selanjutnya, mudah dipahami bahwa range dan kodomain f adalah sama. Fungsi ini adalah salah satu contoh fungsi indikator, yaitu fungsi yang menunjukkan apakah sebuah himpunan memuat $\sqrt{3}$ atau tidak. Fungsi seperti ini banyak diterapkan pada algoritma pencarian karakter pada kumpulan karakter. Mesin pencarian komputer dipastikan banyak menggunakan fungsi indikator seperti ini. $\square$

Contoh 6.10. Misalkan $f : [-1, 1] \to (-4, 6)$ dengan $x \mapsto 1 - 3x$. Buktikan f terdefinisi dengan baik yang memetakan domain $[-1, 1]$ ke kodomain $(-4, 6)$. Buktikan range dari f adalah $[-2, 4]$. Dalam kasus apa aturan pengawanan ini tidak terdefinisi dengan baik?

Bukti. Perhatikan untuk $x \in [-1, 1]$ berlaku

$$-1 \leq x \leq 1 \leftrightarrow -3 \leq 3x \leq 3 \leftrightarrow -3 - 1 \leq 3x - 1 \leq 3 - 1 \leftrightarrow -4 \leq 3x - 1 \leq 2.$$

Kalikan kedua ruas dengan -1 diperoleh $-2 \leq 1 - 3x \leq 4$. Ternyata nilai $f(x) \in [-2, 4] \subseteq (-4, 6)$, yakni berada di dalam kodomainnya. Jelas, nilai bayangan setiap $x \in [-1, 1]$ adalah tunggal. Ini dapat dijelaskan jika $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = 1 - 3x_1 = 1 - 3x_2 = f(x_2)$. Jadi, f terdefinisi dengan baik pada domain dan kodomain tersebut. Selanjutnya dibuktikan $R_f = [-2, 4]$. Untuk ini kita ambil sebarang $y \in [-2, 4]$, dibuktikan ada $x \in [-1, 1]$ sehingga $y = f(x)$. Untuk $y \in [-2, 4]$ diperoleh penjabaran berikut

$$-2 \quad \leq \quad y \leq 4 \leftrightarrow -4 \leq -y \leq 2 \leftrightarrow -4 + 1 \leq -y + 1 \leq 2 + 1 \leftrightarrow -3 \leq -y + 1 \leq 3.$$

Ketiga ruas bentuk terakhir dibagi 3 untuk mendapatkan $-1 \leq \frac{1-y}{3} \leq 1$. Nilai $x := \frac{1-y}{3} \in [-1, 1]$ inilah pasangan (pre-image) sebarang $y \in [-2, 4]$. Terbukti bahwa $R_f = [-2, 4]$. Sifat terdefinisi dengan baik menjadi gagal dipenuhi ketika kodomainnya tidak memuat range. Misalnya kodomainnya diambil $(-4, 4)$ maka anggota $x = -1$ tidak memiliki pasangan dalam kodomain $(-4, 4)$, sebab $f(-1) = 1 - 3(-1) = 4 \notin (-4, 4)$. $\square$

Latihan Selingan 6.5. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$. Berapa banyak kemungkinan fungsi yang dapat didefinisikan dari A ke B. Sajikan temuan dengan diagram anak panah. Pertanyaan yang sama untuk fungsi dari B ke A.

LATIHAN SELINGAN 6.6. Misalkan$\mathbb{Z}_d = \{[0], [1], [2], \cdots, [d-1]\}$ dengan d bila-ngan bulat lebih dari 1 adalah himpunan kelas-kelas ekuivalen modulo d pada $\mathbb{Z}$. Didefinisikan $f : \mathbb{Z}_d \to \mathbb{Z}$ dengan $f([k]) := k$. Selidiki apakah f terdefinisi dengan baik?

LATIHAN SELINGAN 6.7. Misalkan $\mathbb{Q}$ himpunan bilangan rasional dan $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ didefi-nisikan oleh

$$f\left(\frac{p}{q}\right) := \frac{p-1}{q}$$

dengan $p, q \neq 0$ adalah bilangan bulat. Buktikan f bukan sebuah fungsi.

6.3 Operasi Aljabar Fungsi

Definisi 6.7. [KESAMAAN DUA FUNGSI] Dua fungsi f dan g dikatakan sama, ditulis $f = g$ jika domain keduanya sama dan $f(x) = g(x)$ untuk setiap x di dalam domain.

Contoh 6.11. Misalkan $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dan $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) := x + 1 \text{ dan } g(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{jika } x \neq 1 \\ a & \text{jika } x = 1. \end{cases}$$

Tentukan a agar $f = g$.

PENYELESAIAN. Perhatikan definisi fungsi g. Untuk $x \neq 1$, berlaku $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$. Untuk $x = 1$ diperoleh $f(1) = 1 + 1 = 2$. Agar $f = g$ maka haruslah $a = g(1) = f(1) = 2$. □

Fungsi modulo Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan $J_n := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ menyatakan himpunan sisa pembagian bilangan bulat oleh n. Fungsi $f : J_n \to J_n$ dengan $f(x) := a(x)(\text{mod } n)$ adalah sisa dari $a(x)$ jika dibagi oleh n. Sebagai contoh,

$$f(x) = (2x^2 + 1)(\text{mod } 3)$$

mendefinisikan fungsi dari $J_3 = \{0, 1, 2\}$ ke $J_3 = \{0, 1, 2\}$. Untuk $x = 0$, diperoleh $2x^2 + 1 = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$ bersisa 1 jika dibagi 3 sehingga $f(0) = (2 \cdot 0^2 + 1)(\text{mod } 3) = 1$. Untuk $x = 1$ diperoleh $2x^2 + 1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ bersisa 0 jika dibagi 3 sehingga $f(1) = 0$. Untuk $x = 2$ diperoleh $2x^2 + 1 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 5$ bersisa 2 jika dibagi 3 sehingga $f(2) = 2$.

Contoh 6.12. Misalkan $f(x) = (x^2+x+1)(\text{mod } 3)$ dan $g(x) = (x+2)^2(\text{mod } 3)$ terdefinisi pada J_3. Buktikan $f = g$.

BUKTI. Kita perlu cek bahwa $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in \{0, 1, 2\}$. Untuk $x = 0$ diperoleh $f(0) = (0^2 + 0 + 1)(\text{mod } 3) = 1(\text{mod } 3) = 1$ dan $g(0) = (0 + 2)^2(\text{mod } 3) = 4(\text{mod } 3) = 1$. Untuk $x = 1$ diperoleh $f(1) = (1^2 + 1 + 1)(\text{mod } 3) = 3(\text{mod } 3) = 0$ dan $g(1) = (1 + 2)^2(\text{mod } 3) = 9(\text{mod } 3) = 0$. Untuk $x = 2$ diperoleh $f(2) = (2^2 + 2 + 1)(\text{mod } 3) = 7(\text{mod } 3) = 1$ dan $g(2) = (2 + 2)^2(\text{mod } 3) = 16(\text{mod } 3) = 1$. Ternyata $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in J_3$, disimpulkan $f = g$. Dalam contoh ini $R_f = R_g = \{0, 1\}$. □

Definisi 6.8. [OPERASI FUNGSI] Misalkan $f : A \to B_1$ dan $g : A \to B_2$ adalah fungsi. Jumlahan, perkalian dan pembagian fungsi didefinisikan sebagai berikut:

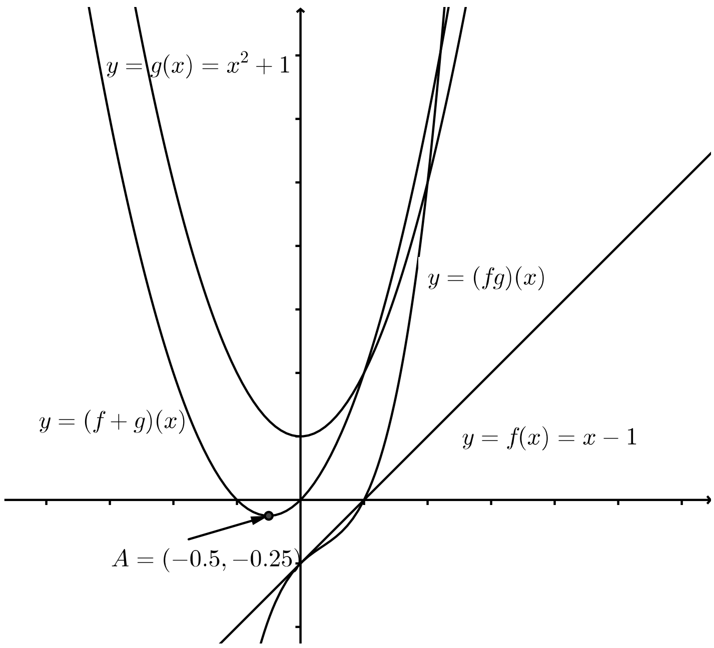
1. $f + g : A \to B_3$ dengan $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ untuk setiap $x \in A$.
2. $fg : A \to B_4$ dengan $(fg)(x) := f(x)g(x)$ untuk setiap $x \in A$.
3. Jika $g(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$ maka $\frac{f}{g} : A \to B_5$ dengan $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ untuk setiap $x \in A$.

Pada operasi fungsi, domain tidak berubah sedangkan rangenya berubah sehingga kodomainnya secara umum juga berubah, yaitu B_3, B_4, dan B_5.

Contoh 6.13. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) := x-1$ dan $g(x) := x^2+1$. Tentukan formula untuk fungsi $f+g, f-g, fg$, dan $\frac{f}{g}$ (jika ada). Tentukan range dari masing-masing fungsi tersebut.

PENYELESAIAN. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 1) + (x^2 + 1) = x^2 + x$, $(fg)(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$, dan $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Karena fungsinya kontinu (tidak terputus) maka range f adalah interval $[f_{\min}, f_{\max}]$ dengan $f_{\min}$ dan $f_{\max}$ adalah berturut-turut nilai minimum dan maksimum fungsi f pada domain $\mathbb{R}$. Kita analisa satu per satu fungsi-fungsi tersebut.

1. Untuk $f(x) = x - 1$ kita perhatikan nilai $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Diperoleh $-\infty < x < \infty \leftrightarrow -\infty - 1 < x - 1 < \infty - 1 \leftrightarrow -\infty < f(x) < \infty$. Jadi $R_f = (-\infty, \infty)$. Untuk $g(x) = x^2 + 1$ kita perhatikan nilai $x^2 + 1$ untuk $-\infty < x < \infty$. Karena $x^2 \geq 0$ untuk setiap x maka $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$. Jadi $R_g = [1, \infty)$.



Gambar 6.6: Grafik penjumlahan, perkalian fungsi.

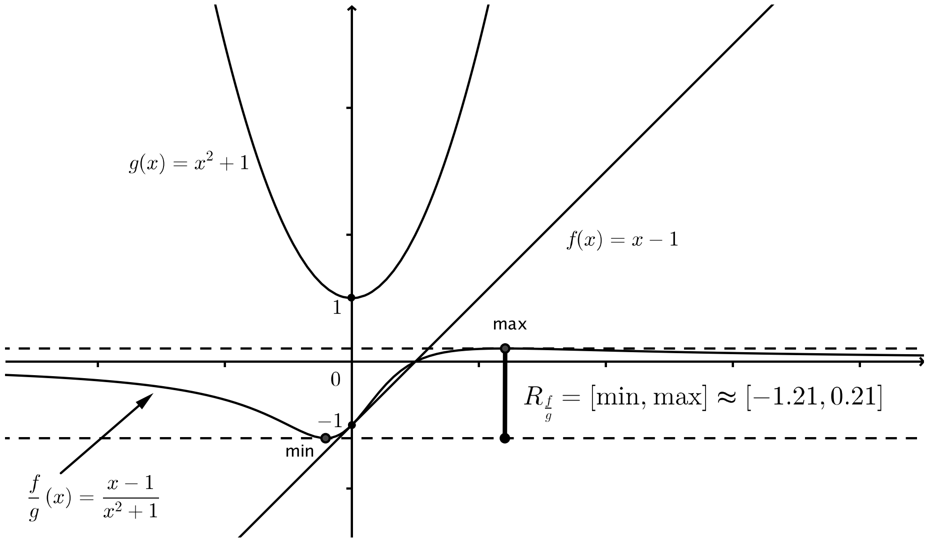
2. Untuk $(f+g)(x) = x^2+x$, nilai nolnya adalah $x^2+x = x(x+1) = 0$ yaitu $x = -1$ dan $x = 0$. Nilai minimumnya dicapai di antara dua nilai nolnya, yaitu $x_{\min} = -\frac{1}{2}$. Diperoleh $(f+g)_{\min} = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1) = -\frac{1}{4}$. Untuk batas atasnya, fungsi ini takterbatas sehingga diperoleh $R_{(f+g)} = [-\frac{1}{4}, \infty)$. Untuk $(fg)(x) = (x-1)(x^2+1)$, perhatikan bahwa $-\infty < x - 1 < \infty$. Kalikan dengan $x^2 + 1 > 0$ diperoleh $-\infty < (x-1)(x^2+1) < \infty$, yaitu $R_{fg} = (-\infty, \infty)$. Terakhir, untuk $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ kita harus menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi ini. Dengan kalkulus kita tentukan syarat perlu tercapai ekstrem adalah derivatifnya bernilai nol, yaitu

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1(x^2+1) - (x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Karena penyebutnya selalu positif (tidak nol) maka cukup pembilangnya bernilai nol, yaitu $x^2 + 1 - (2x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + 1 = 0$. Dengan menggunakan rumus abc, diperoleh $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Untuk $x = 1 + \sqrt{2}$ diperoleh $\left(\frac{f}{g}\right)_{\max} = \frac{(1+\sqrt{2})-1}{(1+\sqrt{2})^2+1} \approx 0.21$ dan untuk $x = 1 - \sqrt{2}$ diperoleh $\left(\frac{f}{g}\right)_{\min} = \frac{(1-\sqrt{2})-1}{(1-\sqrt{2})^2+1} \approx -1.21$. Jadi, $R_{\frac{f}{g}} \approx [-1.21, 0.21]$.

□

Perlu dipertegas bahwa bahwa $\pm\infty$ bukanlah sebuah bilangan real, yaitu



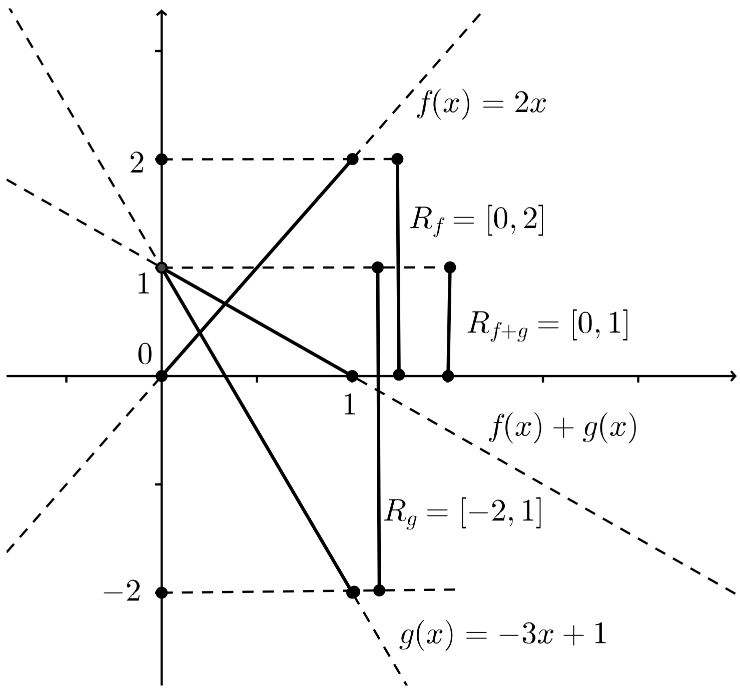
Gambar 6.7: Grafik pembagian fungsi.

$\pm\infty \notin \mathbb{R}$. Lambang ini untuk menyatakan sebuah kuantitas yang melebihi dari bilangan real apapun. Oleh karena itu penulisan interval yang memuat $\pm\infty$ selalu menggunakan interval terbuka, seperti $(-\infty, \infty), [-\frac{1}{4}, \infty)$. Untuk memperjelas hasil analisa ini, kita sajikan grafik fungsi-fungsi tersebut pada Gambar 6.6, yaitu grafik fungsi f, g, $f + g$, dan fg. Perhatikan bahwa nilai yang dijangkau oleh y, yaitu $[y_{\min}, y_{\max}]$ merupakan range dari fungsi. Untuk pembagian $\frac{f}{g}$ diberikan pada Gambar 6.7. Perhatikan pula telah terjadi perubahan signifikan pada range fungsi-fungsi hasil operasi tersebut.

Seandainya diketahui $R_f = [a, b]$ dan $R_g = [c, d]$, apakah kita dapat memastikan range dari fungsi hasil operasi f dan g? Apakah berlaku $R_{f+g} = [a + c, b + d]$? Untuk menjawab pertanyaan ini perhatikan contoh berikut.

Contoh 6.14. Diberikan fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dan $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := 2x$ dan $g(x) = -3x + 1$. Tentukan R_f, R_g dan R_{f+g}. Apakah berlaku bahwa range jumlah sama dengan jumlah dari masing-masing range.

Penyelesaian. Oleh karena $0 \leq x \leq 1$ maka $0 \leq 2x \leq 2$ sehingga $R_f = [0, 2]$. Perhatikan juga $0 \leq x \leq 1 \to -3 \leq -3x \leq 0 \to -3 + 1 \leq -3x + 1 \leq 0 + 1$, yaitu $R_g = [-2, 1]$. Untuk $(f + g)(x) = -x + 1$ diperoleh $0 \leq x \leq 1 \to -1 \leq -x \leq 0 \to -1 + 1 \leq -x + 1 \leq 0 + 1$, yaitu $R_{f+g} = [0, 1]$. Ternyata $[0, 1] = R_{f+g} \neq [a+c, b+d] = [0+(-2), 2+1] = [-2, 3]$. Keadaan ketiga range fungsi pada domain $[0, 1]$ diberikan pada Gambar 6.8. $\square$



Gambar 6.8: Range fungsi f, g, dan $f + g$.

6.4 Fungsi Satu-satu dan Fungsi Kepada

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, setiap anggota domain harus habis terpasang dengan tepat satu anggota kodomain. Syarat ini tidak menutup kemungkinan ada anggota kodomain yang tersisa, yaitu tidak ada pasangan pada domain. Keadaan fungsi seperti ini dikatakan tidak satu-satu (*one-to-one*). Sebaliknya, walaupun daerah hasil atau range fungsi umumnya subset dari kodomain, namun ada kemungkinan kodomain dan range keduanya adalah sama. Keadaan fungsi seperti ini dikatakan kepada (*onto*).

Definisi 6.9. [Fungsi satu-satu dan fungsi kepada] Misalkan $f : A \to B$ sebuah fungsi.

1. Fungsi f dikatakan satu-satu (*one-to-one*), atau injektif jika dan hanya jika

$$\forall x, y \in A \, [f(x) = f(y) \to x = y] \tag{6.4.1}$$

   Keadaan ini dapat dimaknai bahwa tidak ada elemen pada kodomain yang bercabang. Kondisi ini dapat pula disajikan dalam bentuk kontraposisinya, yaitu

$$\forall x, y \in A \, [x \neq y \to f(x) \neq f(y)] \, .$$

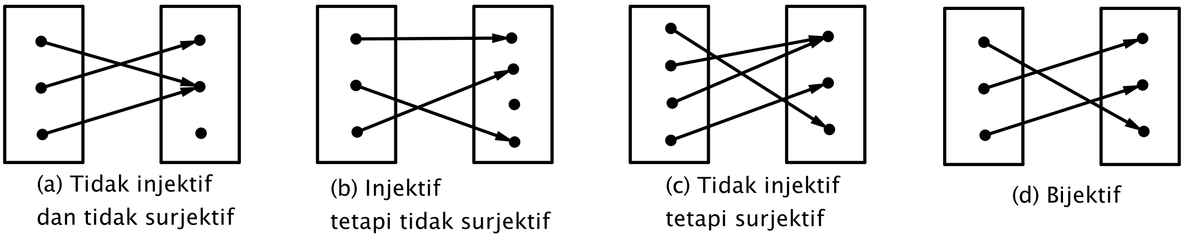
2. Fungsi f dikatakan kepada (*onto*), atau surjektif jika dan hanya jika

$$\forall y \in B, \exists x \in A\,[f(x) = y]\,. \tag{6.4.2}$$

   Keadaan ini dapat dimaknai bahwa semua elemen pada kodomain habis terpasang, yaitu range = kodomain.

3. Fungsi f yang bersifat injektif dan surjektif disebut bijektif.

Beberapa kemungkinan fungsi ditinjau dari bentuk injektif dan surjektifnya disajikan pada Gambar 6.9.



Gambar 6.9: Beberapa kemungkinan bentuk fungsi.

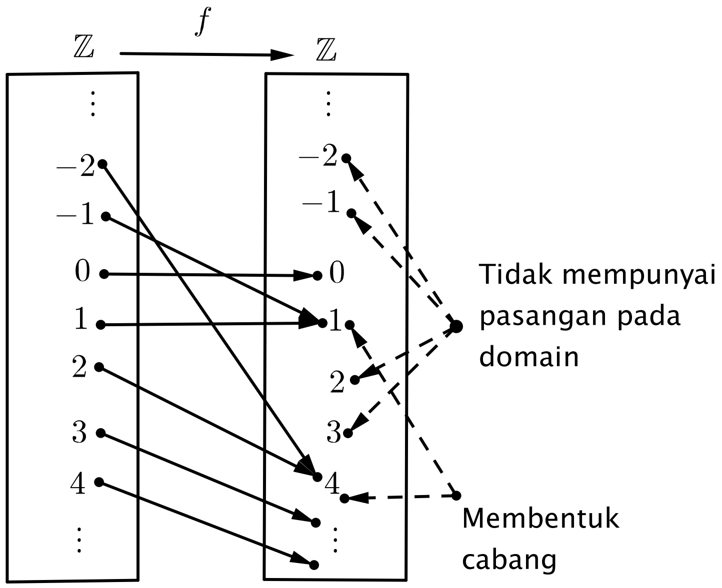
Contoh 6.15. Perhatikan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai $f(x) := x^2$. Fungsi ini tidak surjektif karena $-1 \in \mathbb{Z}$, namun tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = x^2 = -1$. Fungsi ini tidak injektif karena ada x, y dengan $x \neq y$ tetapi $f(x) = f(y)$, yakni membentuk cabang pada kodomainnya. Dalam hal ini $x = 2$ dan $y = -2$, berlaku $f(x) = f(y) = 4$.

Ilustrasi grafis fungsi pada contoh ini diberikan pada Gambar 6.10. Perhatikan bahwa bilangan bulat negatif, $-1, -2, -3, -5, \cdots$ dan bilangan $2, 3, \cdots$ pada kodomain tidak mempunyai pasangan pada domain, yakni tidak injektif. Bilangan kuadrat taknol $1, 4, 9, \cdots$ mempunyai dua pasangan pada domain, yakni tidak surjektif.

Contoh 6.16. Misalkan S himpunan string-bit dan $f : S \to \mathbb{Z}_+$. Selidikilah sifat injektif dan surjektif fungsi f jika didefinisikan

1. $f(s) :=$ posisi bit 0 pada pada string s.
2. $f(s) :=$ banyaknya bit 1 pada string s.
3. $f(s) :=$ bilangan bulat terkecil k sehingga bit ke-k adalah 1 dan $f(s) = 1$ jika string s tidak memuat bit 1.

Penyelesaian. Sekedar mengingatkan bahwa string-bit adalah array yang terdiri atas bit 0 dan bit 1.



Gambar 6.10: Ilustrasi fungsi pada Contoh 6.15.

1. Berdasarkan definisi ini ternyata f bukan fungsi sehingga istilah injektif dan surjektif tidak relevan pada relasi yang bukan fungsi. Sebagai contoh $f(01101) = 1$ dan 4 karena ada dua bit 0 pada posisi ke-1 dan ke-4.

2. Perhatikan $s_1 = 110101$ dan $s_2 = 01010011$. Jelas $s_1 \neq s_2$ tetapi $f(s_1) = f(s_2) = 4$. Jadi fungsi ini tidak injektif. Sebaliknya, setiap $n \in \mathbb{Z}_+$ kita dapat menemukan string-bit dengan banyak bit 1 sama dengan n. Jadi fungsi ini surjektif.

3. Sebagai ilustrasi $f(010010) = 2$ karena bit 1 muncul pertama pada urutan ke-2. Perhatikan juga bahwa $f(010010111) = 2$ sehingga fungsi ini tidak injektif. Sebaliknya, setiap $n \in \mathbb{Z}_+$ kita dapat menemukan string-bit $s = 000 \cdots 101010$ dengan bit 1 muncul pertama kali pada urutan ke-n, yaitu surjektif.

$\square$

Contoh 6.17. Misal fungsi f dan g didefinisikan dari domain $\{a, b, c\}$ ke himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai berikut:

$$f(a) = 0, f(b) = 1, f(c) = 2, g(a) = -1, g(b) = 2, g(c) = -3.$$

Jelas f dan g fungsi satu-satu (injektif), tetapi $h := f + g$ tidak injektif karena $h(a) = f(a) + g(a) = 0 + (-1) = -1$ dan $h(c) = f(c) + g(c) = 2 + (-3) = -1$. Contoh ini menegaskan bahwa jumlah dua fungsi injektif belum tentu injektif.

LATIHAN SELINGAN 6.8. Misalkan domain dan kodomain fungsi berikut adalah $\mathbb{Z}$. Identifikasilah sifat injektif dan surjektif fungsi berikut.

1. $f(n) = n^2 - 1$.
2. $f(n) = n^3$.
3. $f(n) = \sin n$.

LATIHAN SELINGAN 6.9. Selidiki sifat injektif dan surjektif fungsi $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

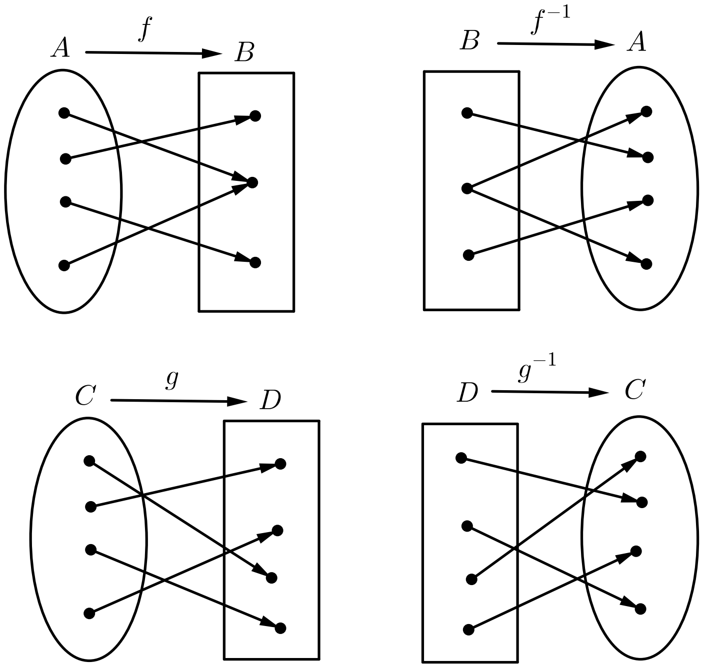
1. $f(m, n) = m + n - 1$.
2. $f(m, n) = m^2 - n^2$.
3. $f(m, n) = |m| - |n|$.

Petunjuk: $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ jika dan hanya jika $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$.

LATIHAN SELINGAN 6.10. Didefinisikan $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x, y) := (x + y, x - y)$. Buktikan f satu-satu.

6.5 Invers Fungsi dan Fungsi Invers

Kedua istilah ini pada dasarnya berbeda. Kalau fungsi invers pasti berupa fungsi, tetapi invers fungsi belum tentu berupa fungsi. Perhatikan ilustrasi yang diberikan pada Gambar 6.11. Diketahui f dan g keduanya merupakan fungsi. Jika kedua aturan pengawanan ini dibalik diperoleh relasi f^{-1} untuk f (panel atas) dan g^{-1} untuk g (panel bawah). Relasi f^{-1} bukan merupakan fungsi, tetapi relasi g^{-1} adalah fungsi. Di sini f^{-1} bukan fungsi karena f tidak satu-satu (injektif). Agar relasi balik ini merupakan fungsi maka haruslah fungsi asalnya bijektif, yaitu injektif dan surjektif. Secara formal diungkapkan pada teorema berikut.



Gambar 6.11: Ilustrasi invers fungsi dan fungsi invers.

Theorem 11. *Misalkan fungsi $f : X \to Y$ bijektif maka relasi $f^{-1} : Y \to X$ yang didefinisikan sebagai*

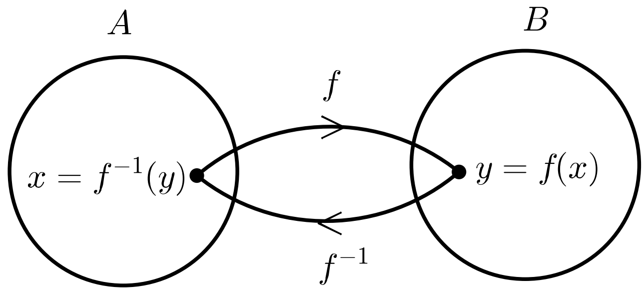
$$y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y) \tag{6.5.1}$$

merupakan sebuah fungsi. Lebih lanjut, f^{-1} juga bijektif.

Bukti. Diketahui f injektif dan surjektif. Dibuktikan f^{-1} sebuah fungsi. Pertama ditunjukkan f^{-1} bernilai tunggal. Misalkan $y \in Y$ sebarang. Berdasarkan (6.5.1), terdapat $x \in X$ sehingga $x = f^{-1}(y)$. Untuk membuktikan ketunggalan x ini, kita misalkan ada x_1 sehingga $x_1 = f^{-1}(y)$. Ini berarti $y = f(x)$ dan $y = f(x_1)$, yakni $f(x) = f(x_1)$. Karena f injektif maka diperoleh $x = x_1$, yakni f^{-1} bernilai tunggal (terdefinisi dengan baik). Terbukti f^{-1} sebuah fungsi. Selanjutnya dibuktikan f^{-1} bijektif. Misalkan $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ maka ada $x \in X$ sehingga $x = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$. Berdasarkan (6.5.1), diperoleh $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = f(x)$. Diperoleh $y_1 = y_2$, yakni f^{-1} injektif. Misalkan $x \in X$ sebarang. Karena f fungsi maka ada $y \in Y$ sehingga $y = f(x)$ atau $x = f^{-1}(y)$, yakni f^{-1} surjektif. Terbukti f^{-1} bijektif. $\square$

Selanjutnya pembicaraan dibatasi pada fungsi-fungsi bijektif sehingga istilah fungsi invers dan invers fungsi merupakan dua hal yang sama.

Definisi 6.10. [Fungsi invers] Misalkan fungsi $f : X \to Y$ bijektif maka fungsi $f^{-1} : Y \to X$ yang didefinisikan menurut (6.5.1) disebut fungsi invers dari f. Fungsi yang mempunyai invers disebut invertibel. Ilustrasi grafis hubungan fungsi dan inversnya diberikan pada Gambar 6.12.



Gambar 6.12: Hubungan fungsi dan inversnya.

Contoh 6.18. Misalkan $h : \mathcal{P}(\{a,b\}) \to \{00, 10, 01, 11\}$ dengan $h(\emptyset) = 00, h(\{a\}) = 10, h(\{b\}) = 01, h(\{a,b\}) = 11$. Fungsi h jelas bijektif sehingga dapat diperoleh invers $h^{-1} : \{00, 10, 01, 11\} \to \mathcal{P}(\{a,b\})$ sebagai berikut:

$$h^{-1}(00) = \emptyset, h^{-1}(10) = \{a\}, h^{-1}(01) = \{b\}, h^{-1}(11) = \{a,b\}.$$

Contoh 6.19. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh formula $f(x) = 3x + 1$. Tentukan formula f^{-1}, kemudian gambarkan grafik f dan f^{-1}. Bagaimanakah hubungan kedua grafik ini?

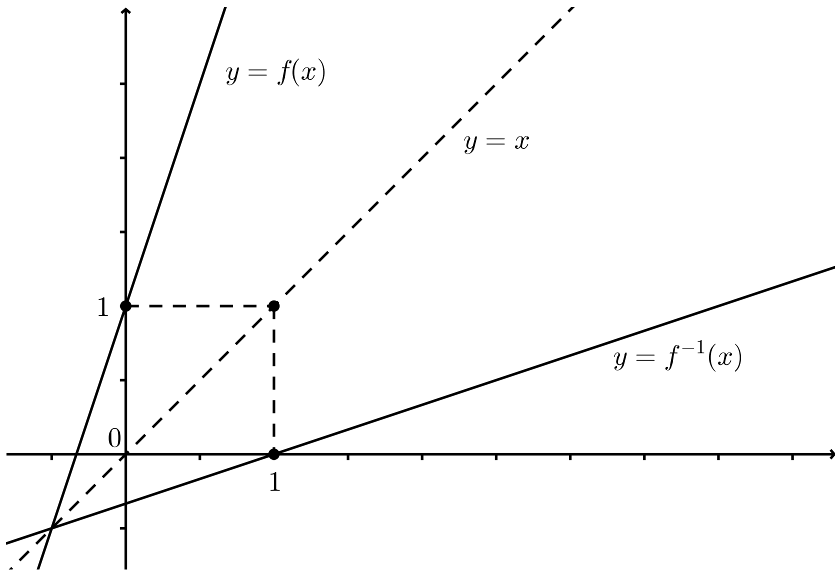
Penyelesaian. Misalkan $y = f(x)$, kemudian gunakan pernyataan (6.5.1):

$$y = 3x + 1 \leftrightarrow 3x = y - 1 \leftrightarrow x = \frac{y-1}{3} \leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}.$$

Dengan mengganti variabel y dengan x diperoleh formula $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$. Grafik kedua fungsi diberikan pada Gambar 6.13. Pada gambar ini terlihat jelas grafik f dan f^{-1} simetris terhadap garis $y = x$, yakni sebagai pencerminan. $\square$

Contoh 6.20. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = (x-1)^3 + 2$. Buktikan fungsi ini bijektif, kemudian tentukan inversnya. Gambarkan grafik f dan f^{-1}.

Penyelesaian. Pertama dibuktikan sifat injektif. Misalkan $f(x_1) = f(x_2)$, yaitu $(x_1 - 1)^3 + 2 = (x_2 - 1)^3 + 2 \to (x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3$. Untuk mudahnya,



Gambar 6.13: Grafik fungsi linear dan inversnya.

misalkan $z_1 := x_1 - 1$ dan $z_2 := x_2 - 1$. Kemudian difaktorkan sebagai berikut:

$$z_1^3 - z_2^3 = (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) = 0.$$

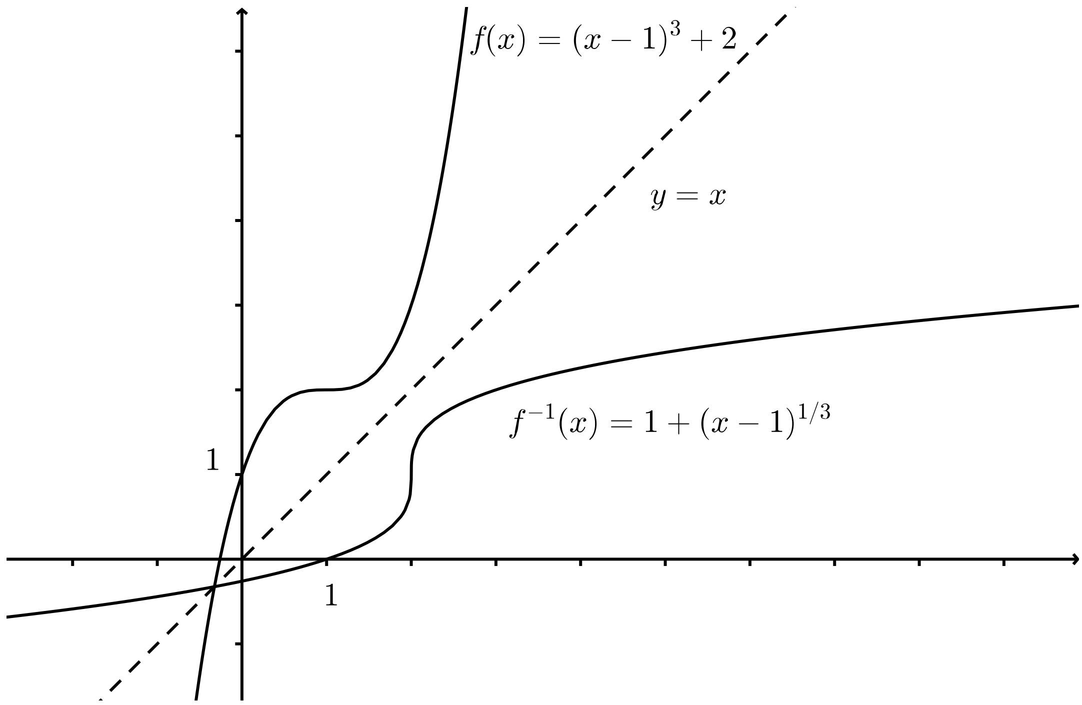
Perhatikan bentuk kuadrat $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2$ tidak mungkin mempunyai nilai nol sehingga haruslah $z_1 - z_2 = 0$, yakni $(x_1 - 1) - (x_2 - 1) = 0$ atau $x_1 = x_2$. Terbukti injektif. Penjelasan tambahan, andai ada bilangan real z_1 dan z_2 sehingga $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0$. Dengan memandang bentuk ini sebagai persamaan kuadrat dalam z_1 diperoleh $z_1 = \frac{-z_2 \pm \sqrt{z_2^2 - 4z_2^2}}{2} = \frac{-z_2 \pm z_2\sqrt{-3}}{2}$ bukanlah sebuah bilangan real. Jadi tidak mungkin ada akar realnya. Membuktikan fungsi ini surjektif adalah sejalan dengan menemukan formula untuk f^{-1}. Misalkan $y \in \mathbb{R}$, ditentukan nilai $x \in \mathbb{R}$ sehingga $y = f(x)$.

$$y = (x-1)^3 + 2 \leftrightarrow (x-1)^3 = y - 2 \leftrightarrow x - 1 = (y-1)^{1/3} \leftrightarrow x = 1 + (y-1)^{1/3}.$$

Karena setiap $y \in \mathbb{R}$, nilai $x = 1 + (y-1)^{1/3}$ terdefinisi sebagai bilangan real maka terbukti f surjektif. Selanjutnya, mengingat $x = f^{-1}(y)$ maka dapat ditulis $f^{-1}(y) = 1 + (y-1)^{1/3}$. Dengan substitusi variabel y dengan x diperoleh invers $f^{-1}(x) = 1 + (x-1)^{1/3}$. $\square$

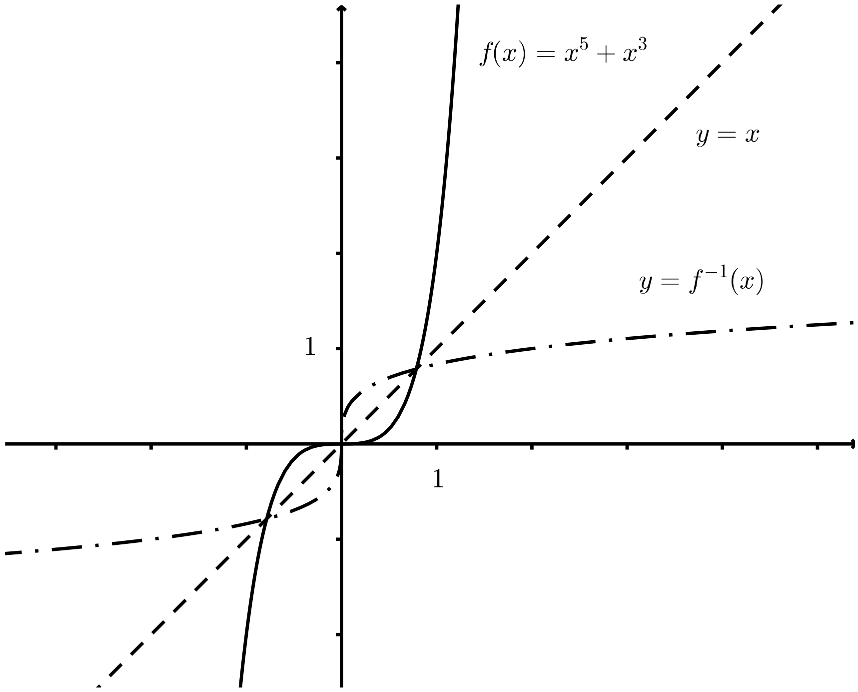
Grafik fungsi f dan inversnya diberikan pada Gambar 6.14. Jelas sekali terlihat bahwa garis $y = x$ menjadi sumbu cermin antara kurva fungsi dan inversnya.

Tidak semua fungsi bijektif memiliki formula invers secara eksplisit. Se-



Gambar 6.14: Grafik fungsi kubik dan inversnya.

bagai contoh fungsi $f(x) := x^5 + x^3$ pada domain $\mathbb{R}$ adalah bijektif sehingga f^{-1} ada. Sayangnya, formula untuk f^{-1} tidak tersaji secara eksplisit karena variabel x dalam $y = f(x)$ tidak dapat dipisahkan. Namun demikian, nilai fungsi invers $x = f^{-1}(y)$ untuk y sebarang dapat ditentukan secara numerik. Sebagai contoh untuk $y = 1$, nilai x adalah akar persamaan $x^5 + x^3 = 1$ atau $x^5 + x^3 - 1 = 0$. Ketika nanti mempelajari teorema Rolle dan teorema nilai rerata (TNR) pada kalkulus atau analisis real, akan diketahui bahwa persamaan ini mempunyai penyelesaian tunggal. Ini menunjukkan bahwa invers merupakan fungsi. Dengan menggunakan GeoGebra, grafik fungsi bersama dengan inversnya dapat diperoleh seperti ditunjukkan pada Gambar 6.15. Sifat simetris terhadap garis $y = x$ terlihat sangat jelas.



Gambar 6.15: Grafik fungsi derajat 5 dan inversnya.

Contoh 6.21. Misalkan $A = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq 1\}$ dan didefinisikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := \frac{3x}{2x-2}$. Buktikan f tidak surjektif. Tentukan kodomain $B \subseteq \mathbb{R}$ agar $f : A \to B$ mempunyai invers.

Penyelesaian. Jelas untuk $x \in A$, f terdefinisi dengan baik. Misalkan $y = \frac{3x}{2x-2}$, diperoleh

$$2xy - 2y = 3x \leftrightarrow 2xy - 3x = 2y \leftrightarrow x(2y-3) = 2y \leftrightarrow x = \frac{2y}{2y-3}.$$

Untuk $y = \frac{3}{2}$, nilai x tidak terdefinisi. Ini berarti ada anggota kodomain $\mathbb{R}$, yaitu $y = \frac{3}{2}$ yang tidak mempunyai pasangan $x \in A$. Agar fungsi ini surjektif maka perlu diambil kodomain $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq \frac{3}{2}\}$. Inversnya $f^{-1} : B \to A$ diberikan oleh $f^{-1}(x) = \frac{2x}{2x-3}$. □

Latihan Selingan 6.11. Misalkan $f : A \to B$ didefinisikan oleh $f(x) := \frac{4x}{x-2}$. Tentukan domain A dan kodomain B agar fungsi f bijektif sehingga inversnya ada. Kemudian, tentukan formula inversnya.

Latihan Selingan 6.12. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi satu-satu dan kepada. Didefinisikan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) := af(x) + b$ dengan $a \neq 0$ dan b konstanta. Buktikan g juga satu-satu dan kepada, kemudian tentukan formula untuk $g^{-1}(x)$. Terapkan formula yang ada jika $f(x) := \frac{4x}{x-2}$.

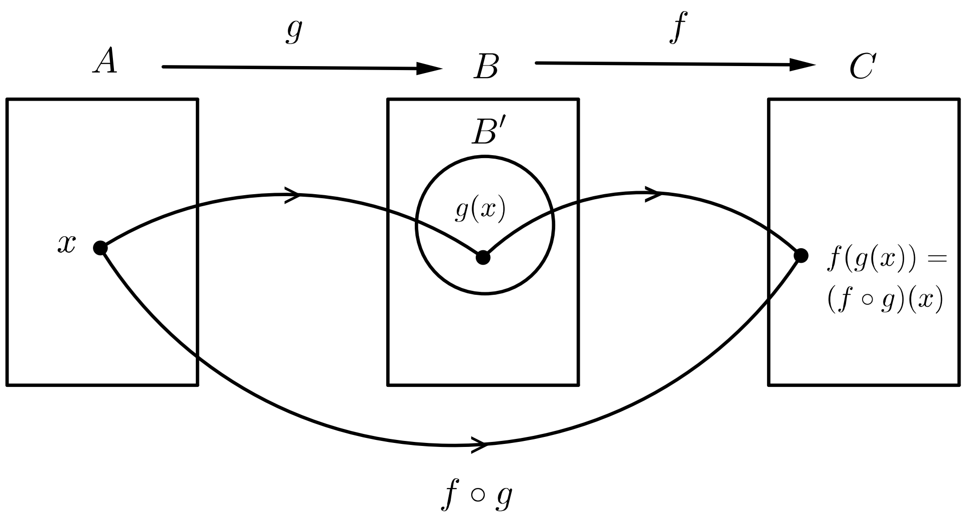
6.6 Komposisi Fungsi

Operasi dua fungsi yang terdefinisi pada domain yang sama dapat berupa penjumlahan, perkalian, atau pembagian. Bentuk lain operasi dua fungsi adalah komposisi. Pada komposisi dua fungsi, domain fungsi yang satu merupakan range fungsi berikutnya.

Definisi 6.11. [Komposisi fungsi] Diberikan fungsi $g : A \to B$ dan $f : B \to C$, komposisi fungsi f dan g adalah fungsi $f \circ g : A \to C$ yang didefinisikan sebagai

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \text{ for all } x \in A. \tag{6.6.1}$$

Komposisi fungsi $f \circ g$ belum tentu membentuk sebuah fungsi. Struktur umum komposisi fungsi diberikan pada Gambar 6.16. Pada ilustrasi ini, range fungsi g tidak mencakup semua domain f sehingga $f \circ g$ bukanlah sebuah fungsi.

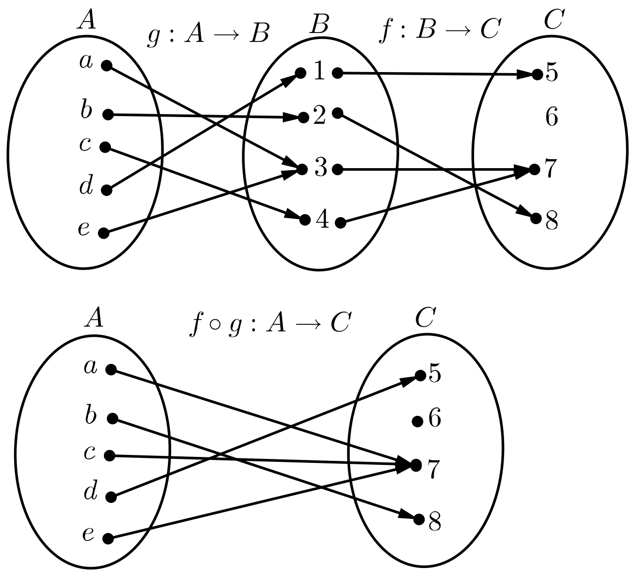


Gambar 6.16: Struktur komposisi fungsi.

Agar $f \circ g$ merupakan fungsi maka range g harus menjadi domain$f$, yaitu $R_g = D_f$, yakni g harus surjektif.

Contoh 6.22. Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dan $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Definisikan fungsi $g : A \to B$, $f : B \to C$ dengan $g(a) = 3, g(b) = 2, g(c) = 4, g(d) = 1, g(e) = 3$ dan $f(1) = 5, f(2) = 8, f(3) = 7, f(4) = 7$. Tentukan komposisi fungsi $f \circ g$. Apakah $g \circ f$ merupakan sebuah fungsi?

Penyelesaian. Dengan menggunakan definisi komposisi fungsi diperoleh $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(3) = 7$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(2) = 8$, $(f \circ g)(c) =$



Gambar 6.17: Ilustrasi komposisi fungsi

$f(g(c)) = f(4) = 7$, $(f \circ g)(d) = f(g(d)) = f(1) = 5$, $(f \circ g)(e) = f(g(e)) = f(3) = 7$. Karena $R_g = \{1, 2, 3, 4\} = D_f$ maka $f \circ g$ merupakan sebuah fungsi. Dalam bentuk diagram, komposisi fungsi ini diberikan pada Gambar 6.17. □

Kalau penjumlahan dan perkalian dua fungsi bersifat komutatif, apakah komposisi fungsi juga komutatif, yaitu apakah $g \circ f = f \circ g$? Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 6.23. Misalkan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ diberikan oleh $g(n) = n + 1$ dan $f(n) = n^2$. Tentukan formula $g \circ f$ dan $f \circ g$, apakah $g \circ f = f \circ g$?

Penyelesaian. Dengan menerapkan definisi komposisi fungsi diperoleh $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n^2) = n^2 + 1$, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Mengingat $n^2 + 1 \neq n^2 + 2n + 1$ untuk setiap n maka $g \circ f \neq f \circ g$. Kesimpulannya komposisi tidak bersifat komutatif. □

Definisi 6.12. [Fungsi identitas] Misalkan X sebuah himpunan takkosong. Fungsi $I_X : X \to X$ yang didefinisikan sebagai

$$I_X(x) = x \text{ untuk setiap } x \in X \tag{6.6.2}$$

disebut fungsi identitas pada X.

Jadi, fungsi identitas tidak mengubah nilai variabel yang dimasukkan. Pada bidang koordinat, fungsi identitas dinyatakan oleh garis $y = x$. Teorema berikut memberikan sebuah fakta bahwa komposisi fungsi sebarang f dengan fungsi identitas menghasilkan fungsi f itu sendiri.

Theorem 12. *Misalkan $f : X \to Y$, I_X fungsi identitas pada X, dan I_Y fungsi identitas pada Y. Maka berlaku*

$$f \circ I_X = f \text{ dan } I_Y \circ f = f.$$

Bukti. Untuk setiap $x \in X$ diperoleh $(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x)$ dan $(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$. Berdasarkan definisi kesamaan dua fungsi disimpulkan bahwa $f \circ I_X = f$ dan $I_Y \circ f = f$. □

Secara intuitif, fungsi invers digunakan untuk memperoleh kembali nilai pada domain melalui nilai fungsi pada kodomain. Fakta ini dapat dijelaskan dalam teorema sebagai berikut.

Theorem 13. *Misalkan $f : X \to Y$ bijektif dengan inversnya $f^{-1} : Y \to X$ maka berlaku*

$$f \circ f^{-1} = I_Y \text{ dan } f^{-1} \circ f = I_X. \tag{6.6.3}$$

Bukti. Gunakan definisi invers $y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Misalkan $y \in Y$ sebarang, maka berlaku $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = I_Y(y)$. Ini berarti $f \circ f^{-1} = I_Y$. Selanjutnya, misalkan $x \in X$ sebarang, maka berlaku $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_X(x)$. Ini berarti $f^{-1} \circ f = I_X$. □

Selanjutnya kita selidiki bagaimana sifat injektif dan surjektif fungsi f dan g berlaku pula pada komposisinya.

Theorem 14. *Jika $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ keduanya injektif (satu-satu) maka begitu juga dengan $g \circ f$. Jika keduanya surjektif (kepada) maka begitu juga dengan $g \circ f$.*

Bukti. Perhatikan $g \circ f$ terdefinisi pada X. Pertama dibuktikan sifat injektifnya. Misalkan $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, kita tunjukkan $x_1 = x_2$.

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Oleh karena g injektif maka $f(x_1) = f(x_2)$. Mengingat f juga injektif maka diperoleh $x_1 = x_2$, yaitu $g \circ f$ injektif. Selanjutnya dibuktikan sifat surjektifnya. Misalkan $z \in Z$ sebarang. Karena g surjektif maka ada $y \in Y$ sehingga $z =$

$g(y)$. Lagi, karena f surjektif maka ada $x \in X$ sehingga $f(x) = y$. Jadi disimpulkan bahwa untuk setiap $z \in Z$, terdapat $x \in X$ sehingga $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Terbukti sifat surjektif $g \circ f$. □

Contoh 6.24. Misalkan $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ dan $B = A$. Didefinisikan fungsi $f : A \to B$ dengan $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Tentukan formula f^{-1}, kemudian verifikasilah bahwa $f^{-1} \circ f = I_A$ dan $f \circ f^{-1} = I_B$.

Bukti. Misalkan $y = \frac{x+1}{x-1}$. Untuk $x \neq 1$ diperoleh:

$$y(x-1) = (x+1) \leftrightarrow yx - y = x + 1 \leftrightarrow x(y-1) = y+1$$
$$\leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}.$$

Diperoleh $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$; substitusi variabel y dengan x diperoleh $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Ini sebuah keunikan di mana fungsi dan inversnya adalah sama. Selanjutnya, misalkan $x \in A$ dan $x \neq 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{(\frac{x+1}{x-1}) + 1}{(\frac{x+1}{x-1}) - 1} \\ &= \frac{\frac{x+1+(x-1)}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x = I_A(x).\end{aligned}$$

Terbukti $f^{-1} \circ f = I_A$. Selanjutnya untuk $y \in B$ dan $y \neq 1$ diperoleh

$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = \cdots = y = I_B(y).$$

Terbukti juga $f \circ f^{-1} = I_B$. □

Latihan Selingan 6.13. Melanjutkan contoh soal sebelumnya, jelaskan bagaimana sifat simetris yang dimiliki oleh fungsi f dan inversnya f^{-1} yang pada faktanya mereka adalah sama, yakni $f = f^{-1}$. Ilustrasikan keadaan ini dengan grafik.

Latihan Selingan 6.14. Misalkan fungsi $f(x) = ax + 1$ dan $g(x) = 2x + 3$ keduanya terdefinisi pada $\mathbb{R}$. Tentukan nilai a, agar $f \circ g = g \circ f$.

6.7 Fungsi Pembulatan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak digunakan fungsi yang bernilai bulat. Sebagai contoh, skor akhir suatu asesmen (misalnya 75 dalam skala 100), ukuran file (misalnya 120 kb), kecepatan transmisi data (misalnya 512 kbps), semuanya disajikan dalam bilangan bulat. Ketika sebuah file berukuran sesungguhnya 140.2 kb maka ruang penyimpanan yang dibutuhkan adalah 141 kb. Dalam hal ini terjadi pembulatan ke atas. Jika pada suatu transmisi data mengirim 140.8 kb maka hanya dapat terkirim 140 kb. Dalam hal ini terjadi pembulatan ke bawah. Pada sebuah penilaian hasil ujian, seorang mahasiswa mendapat nilai asli 73.45 dibulatkan menjadi 73, sedangkan nilai asli 73.55 dibulatkan menjadi 74. Dalam hal ini terjadi pembulatan ke bilangan bulat terdekat.

Definisi 6.13. [FUNGSI PEMBULATAN] Ada 3 macam fungsi pembulatan yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{Z}$, yaitu

1. Fungsi *flooring*, yaitu fungsi yang mengawankan bilangan real x dengan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$. Fungsi flooring biasa juga dikatakan fungsi bilangan bulat terbesar.

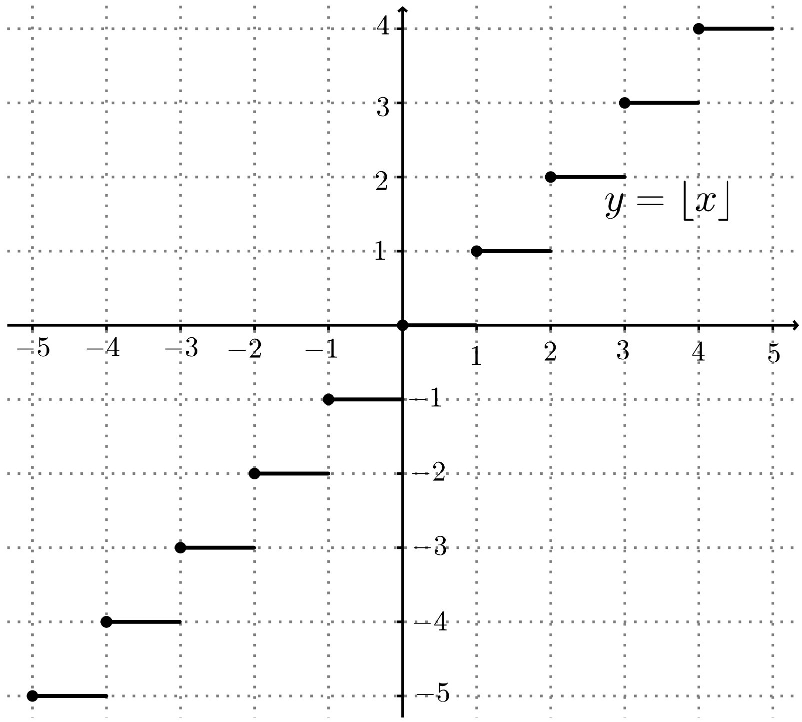
2. Fungsi *ceiling*, yaitu fungsi yang mengawankan bilangan real x dengan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $\lceil x \rceil$.

3. Fungsi *rounding*, yaitu yang mengawankan bilangan real x dengan bilangan bulat terdekat, dinotasikan dengan $[x]$.

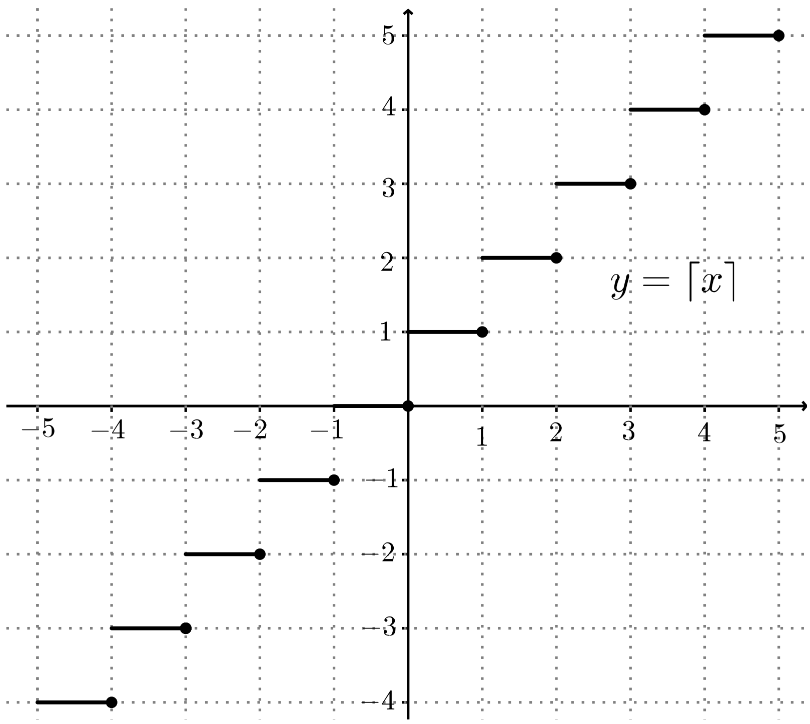
Sebagai contoh, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1, \lfloor 0.5 \rfloor = 0, \lceil -0.5 \rceil = 0, \lceil 0.5 \rceil = 1, \lfloor 3.1 \rfloor = 3, \lceil 3.1 \rceil = 4, \lfloor 5 \rfloor = \lceil 5 \rceil = 5$. Untuk fungsi rounding, $[7.2] = 7$, $[7.6] = 8$, dan $[7.5] = 8$.

Sifat fungsi flooring dan ceiling Kedua fungsi bernilai konstan pada setiap interval $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Jelasnya, jika $x \in (n, n+1)$ maka $\lfloor x \rfloor = n$ dan $\lceil x \rceil = n+1$. Sebaliknya jika $\lfloor x \rfloor = n$ maka pasti $x \in [n, n+1)$. Begitu juga jika $\lceil x \rceil = n+1$ maka $x \in (n, n+1]$. Karena $\lfloor n \rfloor = n$ dan $\lceil n+1 \rceil = n+1$ maka diperoleh sifat sebagai berikut:

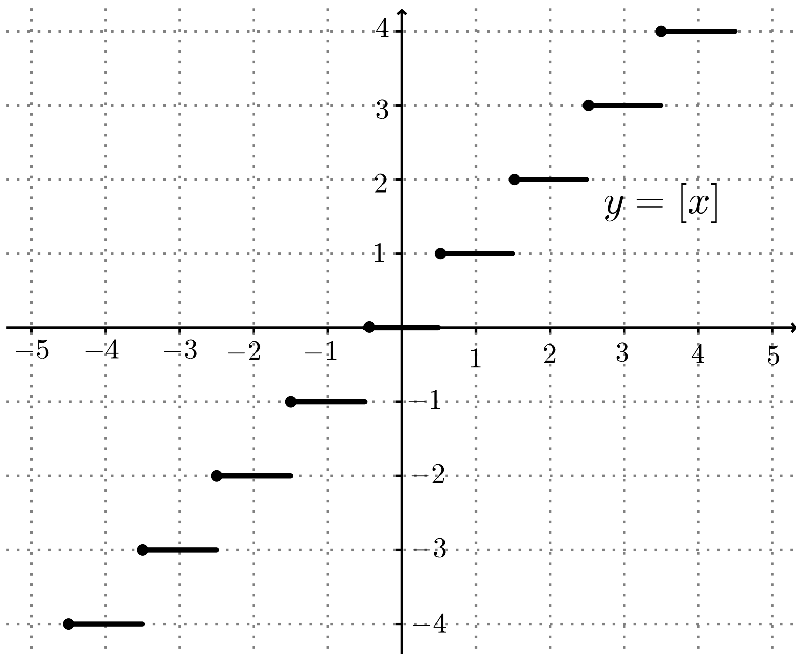
$$\lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n+1 \text{ dan } \lceil x \rceil = n+1 \leftrightarrow n < x \leq n+1. \tag{6.7.1}$$



Gambar 6.18: Grafik fungsi flooring.



Gambar 6.19: Grafik fungsi ceiling.



Gambar 6.20: Grafik fungsi rounding.

Berdasarkan sifat ini kita dapat menggambarkan grafik kedua fungsi seperti ditunjukkan pada Gambar 6.18 untuk fungsi flooring dan Gambar 6.14 untuk fungsi ceiling. Perhatikan walaupun pada tampilan grafik, kedua fungsi ini mirip tetapi sesungguhnya nilai kedua fungsi berbeda 1, kecuali pada titik-titik bulat mereka bernilai sama. Pada kuliah analisis real, fungsi flooring dan ceiling ini merupakan salah satu contoh fungsi tangga (*step function*) atau fungsi konstan sepotong-sepotong (*piece-wise constant*). Untuk fungsi rounding, bentuknya mirip dengan flooring dan ceiling hanya saja titik-titik transisinya (*jump points*) terjadi di median interval $[n, n+1]$, yaitu di $x = \frac{2n+1}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Contoh 6.25. Data yang tersimpan pada disk komputer biasanya disajikan dalam byte di mana setiap byte terdiri atas 8 bit. Berapa banyak byte yang dibutuhkan untuk menyimpan data yang terdiri atas 100 bit?

PENYELESAIAN. Karena satuan penyimpan adalah byte (bukan bit) maka diperoleh $\frac{100}{8} = 12.5$ byte. Karena tidak boleh pecahan maka dibulatkan ke atas, yaitu diperlukan $\left\lceil \frac{100}{8} \right\rceil = \lceil 12.5 \rceil = 13$ byte. Hal ini karena jika ditetapkan 12 byte dipastikan data tidak tersimpan. $\square$

Sifat lainnya dari fungsi flooring dan ceiling diberikan pada teorema berikut.

Theorem 15. *Misalkan x bilangan real sebarang. Berikut ini adalah beberapa sifat fungsi flooring dan fungsi ceiling.*

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ *dan* $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
2. $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ *dan* $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$, $n \in \mathbb{Z}$

Penyelesaian. Gunakan sifat (6.7.1) langsung atau adaptasi.

1. Misalkan $x \in \mathbb{R}$ maka ada $n \in \mathbb{Z}$ sehingga $n < x \le n+1$. Berdasarkan (6.7.1) diperoleh $\lceil x \rceil = n+1$. Kedua ruas dikalikan dengan -1 diperoleh $-(n+1) \le -x < -n$. Dengan adaptasi (6.7.1), diperoleh $\lfloor -x \rfloor = -(n+1)$. Jadi diperoleh hubungan $\lfloor -x \rfloor = -(n+1) = -\lceil x \rceil$. Untuk bagian lainnya dijadikan bahan latihan.

2. Misalkan $\lfloor x \rfloor = m$ dengan $m \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan (6.7.1) diperoleh $m \le x < m+1$. Ketiga ruas ditambah dengan n diperoleh $m+n \le x+n < (m+n)+1$. Kembali terapkan (6.7.1) diperoleh $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$. Untuk bagian lainnya dijadikan bahan latihan.

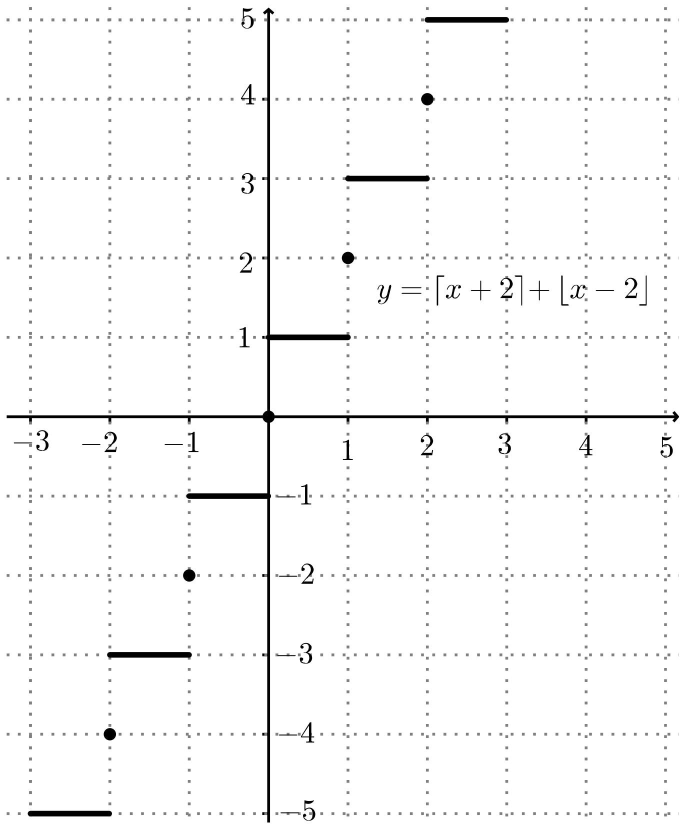
□

Contoh 6.26. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \lceil x-2 \rceil + \lfloor x+2 \rfloor$.

Penyelesaian. Misalkan $n \in \mathbb{Z}$. Untuk $x = n$ diperoleh $f(x) = \lceil n-2 \rceil + \lfloor n+2 \rfloor = n-2+n+2 = 2n$. Untuk $n < x < n+1$ diperoleh $n-2 < x-2 < n-1$ dan $n+2 < x+2 < n+3$. Dengan menggunakan (6.7.1) diperoleh $\lceil x-2 \rceil = n-1$ dan $\lfloor x+2 \rfloor = n+2$ sehingga berlaku $f(x) = \lceil x-2 \rceil + \lfloor x+2 \rfloor = n-1+n+2 = 2n+1$ untuk $x \in (n, n+1)$. Jadi fungsi ini memiliki range bilangan ganjil, yaitu $\{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$ yang bersesuaian dengan $n \in \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$. Untuk memudahkan menggambar grafik fungsinya, kita susun tabel sebagai berikut. Grafiknya diberikan pada Gambar 6.21.

n	Interval	$f(x) = 2n+1$	$f(n)$
-2	$-2 < x < -1$	-3	-4
-1	$-1 < x < 0$	-1	-2
0	$0 < x < 1$	1	0
1	$1 < x < 2$	3	2
2	$2 < x < 3$	5	4

□



Gambar 6.21: Grafik fungsi pada Contoh 6.26.

Contoh 6.27. Selidikilah apakah kesamaan $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ berlaku? Jika tidak, apakah ada nilai x yang memenuhi?

PENYELESAIAN. Ambil $x = \frac{1}{2}$, diperoleh $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $2\lfloor x \rfloor = 2\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 2 \cdot 0 = 0$. Ternyata kesamaan ini tidak berlaku. Selanjutnya kita tentukan nilai x yang memenuhi persamaan ini. Misalkan $\lfloor 2x \rfloor = n$ maka $n \leq 2x < n+1$. Ketiga ruas dibagi 2 diperoleh $\frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2}$. Untuk x ini diperoleh $\lfloor x \rfloor = \frac{n}{2}$. Akibatnya, $2\lfloor x \rfloor = n$ yaitu sama dengan nilai $\lfloor 2x \rfloor$. Jadi, himpunan penyelesaian persamaan ini adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$. □

LATIHAN SELINGAN 6.15. Lengkapi bukti Teorema 6.6 yang belum selesai.

LATIHAN SELINGAN 6.16. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$.

LATIHAN SELINGAN 6.17. Selidikilah apakah kesamaan berikut ini berlaku? Jika tidak, tentukan himpunan penyelesaiannya.

1. $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
2. $\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$.

6.8 Soal-soal Latihan Bab 6

1. Misalkan X himpunan bilangan prima dan $Y = \mathbb{Z}$. Relasi $a \sim b$ didefinisikan sebagai "a habis membagi b", ditulis $a \mid b$.
   (a) Berikan dua pasang elemen yang berelasi.
   (b) Berikan dua pasang elemen yang tidak berelasi.
   (c) Sifat-sifat apa saja (reflektif, simetris, antisimetris, dan transitif) yang dipenuhi oleh relasi ini.
   (d) Apakah ada pasangan elemen yang memenuhi sifat simetris? Sebutkan.

2. Gambarkan dalam sebuah diagram panah untuk menyatakan relasi sebagai berikut:
   (a) Relasi "anggota dari", $X = \{0, 1, 2\}$ ke himpunan kuasa $Y = \mathcal{P}(X)$.
   (b) Relasi "akar dari", $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ke himpunan persamaan $Y = \{x^2 - 1 = 0, 2x = 4, (x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$.
   (c) Relasi "garis singgung dari" $X = \{y = -1, y = 1, y = -3, x = 3\}$ ke himpunan lingkaran $Y = \{x^2 + y^2 = 1, x^2 + (y + 1)^2 = 4\}$.

3. Berikut ini adalah relasi pada $\mathbb{R}$. Gambarkan kurva relasi tersebut dan relasi inversnya.
   (a) $y = x + 1$.
   (b) $x = y^2 + 1$.
   (c) $y > x^2$.

4. Berikut ini diberikan sebuah himpunan X dan sebuah relasi $\sim$ pada X. Selidikilah sifat reflektif, simetris, antisimetris, dan transitif relasi tersebut disertai dengan alasannya.
   (a) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y$ jika dan hanya jika $y = \frac{1}{x}$.
   (b) X himpunan garis lurus pada bidang Kartesian $\mathbb{R}^2$, $\ell_1 \sim \ell_2$ jika dan hanya jika ℓ_1 dan ℓ_2 berpotongan.
   (c) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y$ jika dan hanya jika $|x| \leq y$.

(d) X himpunan bilangan bulat lebih dari atau sama dengan 2, $x \sim y$ jika dan hanya jika $\text{FPB}(x, y) > 1$.

5. Buktikan relasi yang diberikan sebagai berikut adalah relasi ekuivalensi.

   (a) Relasi pada $\mathbb{R}$ dengan $x \sim y$ jika dan hanya jika $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.

   (b) Relasi pada $\mathbb{R}^2$ dengan $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ jika dan hanya jika $\lfloor y_1 \rfloor = \lfloor y_2 \rfloor$.

   (c) Relasi pada $\mathbb{R}$ dengan $x \sim y$ jika hanya jika $\cos(x) = \cos(y)$ dan $\sin(x) = \sin(y)$.

   (d) Relasi pada $\mathbb{N}^2$ dengan $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ jika dan hanya jika $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$. Ilustrasikan relasi ini secara grafis.

   (e) Relasi pada $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dengan $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ jika dan hanya jika ada $c \neq 0$ sehingga $(x_1, y_1) = c(x_2, y_2)$.

6. Apa yang dimaksud kelas-kelas ekuivalensi pada himpunan X? Apa hubungan antara kelas-kelas ekuivalensi dengan partisi? Berikan contoh atau ilustrasi untuk memperjelas jawaban Anda.

7. Jelaskan mengapa sebuah relasi ekuivalensi "$\sim$" pada himpunan X dapat membentuk kelas-kelas ekuivalensi pada X.

8. Apakah hubungan antara kodomain dan range sebuah fungsi? Apakah fungsi memetakan domain kepada kodomainnya?

9. Tentukan domain dan range fungsi-fungsi berikut.

   (a) Fungsi yang mengawankan sebuah pasangan bilangan bulat positif dengan maksimumnya.

   (b) Fungsi yang mengawankan sebuah bilangan bulat positif dengan digit terbesarnya.

   (c) Fungsi yang mengawankan sebuah string-bit dengan banyaknya bit dalam string tersebut.

   (d) Fungsi yang mengawankan sebuah string-bit dengan selisih antara banyaknya bit 0 dan bit 1 dalam string tersebut.

   (e) Fungsi yang mengawankan sebuah string-bit dengan posisi bit 1 pertama dan dengan 0 jika string-bitnya terdiri atas bit 0 semua.

10. Tentukan apakah relasi f di bawah ini merupakan fungsi? Jika bukan fungsi, jelaskan alasannya.

    (a) f dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}^+$ dengan $f(n) = 2^{n-1}$.
    (b) f dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Q}$ dengan $f(n) = \frac{1}{n^2+1}$.
    (c) f dari $\mathbb{R}$ ke $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dengan $f(x) := \{x\}$.
    (d) f dari $\mathbb{R}$ ke $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dengan $f(x) := \{-x, x\}$.
    (e) f dari $\mathbb{Q}$ ke $\mathbb{Q}$ dengan $f(\frac{m}{n}) = m - n$.
    (f) f dari $\mathbb{Q}$ ke $\mathbb{Q}$ dengan $f(\frac{m}{n}) = \frac{m-n}{n}$.
    (g) f dari $\mathbb{Q}$ ke $\mathbb{Q}$ dengan $f(\frac{m}{n}) := \begin{cases} \frac{n}{m} & \text{jika } m \neq 0 \\ 0 & \text{jika } m = 0. \end{cases}$.

11. Tentukan $f(A)$ image himpunan A terhadap fungsi f yang didefinisikan sebagai berikut.

    (a) $f(x) = x^3$, $A = [-1, 3]$.
    (b) $f(x) = \sin(x)$, $A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.
    (c) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $A = [0, 3]$.

12. Tentukan pre-image dari himpunan terhadap pemetaaan berikut ini.

    (a) $f^{-1}(\{-1\})$ di mana $f : \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ dengan $f(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
    (b) $f^{-1}(\{2, 4\})$ di mana $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ dengan $f(n) = \frac{2^n}{n}$.
    (c) $f^{-1}([-1, 8])$ di mana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^3$.

13. Diketahui $f, g : J_5 \to J_5$ dengan $f(x) = (x + 3)(\text{mod } 5)$ dan $g(x) = (x^3 + 4x^2 + 2x + 2)(\text{mod } 5)$. Buktikan $f = g$.

14. Sekarang domain fungsi modulo diperluas menjadi semua himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, yaitu $f, g : \mathbb{Z} \to J_3$ dengan $f(x) = (x^2 + x + 1)(\text{mod } 3)$ dan $g(x) = (x + 2)^2(\text{mod } 3)$. Buktikan $f = g$.

15. Misalkan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ didefinisikan sebagai $f(n) := \frac{n}{2^n}$. Buktikan f tidak satu-satu (*one-to-one*) dan juga tidak kepada (*onto*).

16. Selidikilah apakah fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ berikut ini bijektif? Jika ia tidak bijektif, tentukan restriksi kodomainnya agar ia menjadi bijektif. Kemudian, tentukan inversnya.

(a) $f(x) = x^5 + 1$.

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$.

(c) $f(x) = 2^x$.

(d) $f(x) = e^x$.

17. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} 2x - 1 & \text{jika } x < 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0 \\ x + 1 & \text{jika } x > 0. \end{cases}$$

(a) Gambarkan grafik fungsi f.

(b) Tentukan rumus untuk inversnya f^{-1}. Apakah invers f^{-1} merupakan sebuah fungsi?

(c) Gambarkan grafik f^{-1}.

18. Jelaskan dengan sebuah alasan mengapa grafik fungsi f dan inversnya f^{-1} merupakan hasil pencerminan satu dengan lainnya terhadap garis $y = x$.

19. Buktikan fungsi eksponensial $f(x) = a^x, a > 0$ dan $a \neq 1$ dan fungsi logaritma $g(x) = \log_a x$ adalah saling invers pada sebuah domain tertentu. Tentukan domain ini dan gambarkan grafik kedua fungsi beserta garis $y = x$. Bagaimana sifat pencerminannya?

20. Untuk fungsi $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ di bawah ini, tentukan sifat injektif dan surjektifnya.

(a) $f(m, n) = mn$.

(b) $f(m, n) = 2m - n$.

(c) $f(m, n) = m^2 - n^2$.

(d) $f(m, n) = |m| - |n|$.

(e) $f(m, n) = m^2 - 1$.

21. Diketahui fungsi $f : X_1 \to Y_1$ dan $g : X_2 \to Y_2$. Definisikan fungsi $f \times g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ dengan $(f \times g)(x_1, x_2) := (f(x_1), f(x_2))$. Buktikan

(a) Jika f dan g satu-satu maka begitu juga $f \times g$.

(b) Jika f dan g kepada maka begitu juga $f \times g$.

22. Jika diketahui f dan $f \circ g$ keduanya adalah injektif, apakah g juga injektif?

23. Jika diketahui f dan $f \circ g$ keduanya adalah surjektif, apakah g juga surjektif?

24. Secara umum berlaku $f \circ g \neq g \circ f$. Misalkan $f(x) = a_1x + b_1$ dan $g(x) = a_2x + b_2$ keduanya terdefinisi pada $\mathbb{R}$, pilihlah nilai a_1, b_1, a_2, dan b_2 bulat agar $f \circ g = g \circ f$. (Petunjuk: temukan relasi yang menghubungkan keempat konstanta ini, kemudian pilih nilai yang memenuhi relasi ini. Ada banyak kemungkinan).

25. Komposisi fungsi umumnya tidak bersifat komutatif, yaitu $f \circ g \neq g \circ f$. Apakah berlaku sifat asosiatif pada komposisi fungsi, yaitu apakah berlaku $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$?

26. Misalkan $f(x) = x^2 - 2x + 1$ terdefinisi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Tentukan pre-image himpunan berikut.

    (a) $A_1 = \{-1\}$.

    (b) $A_2 = \{x \mid 0 < x < 1\}$.

    (c) $A_3 = \{x \mid x > 2\}$.

    (d) $A_4 = \{x \mid x < -1\}$.

27. Misalkan $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, tentukan himpunan berikut.

    (a) $g^{-1}(\{0\})$.

    (b) $g^{-1}(\{-3, 0, 3\})$.

    (c) $g^{-1}(\{x \mid |x| > 2\})$.

28. Tentukan formula invers untuk fungsi yang didefinisikan sebagai berikut.

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.

    (b) $f : \{2, 3, 4, 5\} \to \{1, 3, 6, 10\}$ dengan $f(n) = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

    (c) $f : \{2, 4, 8\} \to \{1, 2, 3\}$ dengan $f(n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

(d) $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ dengan $f(r) = \frac{1}{r}$.

29. Buktikan fungsi berikut dengan domain dan kodomain bilangan real, ia tidak invertibel. Tentukan restriksi kodomainnya agar fungsi menjadi invertibel, kemudian temukan formula inversnya.

    (a) $f(x) = e^x$.
    (b) $f(x) = |x|$.
    (c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

30. Misalkan fungsi $f : A \to B$ dan $E_1, E_2 \subseteq B$. Buktikan.

    (a) $f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$.
    (b) $f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$.

31. Gambarkan grafik fungsi pembulatan sebagai berikut:

    (a) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$.
    (b) $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor + \lceil x + 1 \rceil$.
    (c) $f(x) = \left\lfloor \left\lceil x + \frac{1}{2} \right\rceil - \frac{1}{2} \right\rfloor$.
    (d) $f(x) = \left\lfloor 2 \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil + 1 \right\rfloor$.

32. Putuskan apakah ekspresi berikut dipenuhi oleh semua bilangan real x. Jika tidak, tentukan himpunan nilai x yang memenuhi persamaan tersebut.

    (a) $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor$.
    (b) $\lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil x \rceil$.
    (c) $\lfloor 2x \rfloor = 2 \lfloor x \rfloor$.
    (d) $\left\lceil \frac{\lceil x/2 \rceil}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil$.

33. Selidikilah apakah ekspresi berikut ini dipenuhi oleh semua bilangan real x dan y.

    (a) $\lceil xy \rceil = \lceil x \rceil \lceil y \rceil$.
    (b) $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
    (c) $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$.

Glosarium

Akibat fakta khusus yang diturunkan langsung dari teorema dan kebenarannya dapat dibuktikan langsung dari teorema.

Aksioma (Postulat) pernyataan yang dianggap benar dan tidak perlu diperdebatkan lagi.

Anggota primitif anggota himpunan yang didefinisikan pertama kali untuk menghasilkan anggota-anggota lain secara rekursif.

Argumen sekumpulan pernyataan yang terdiri atas premis-premis dan diakhiri oleh sebuah kesimpulan.

Aturan rekursif formula sistematis untuk membangun anggota baru dari anggota yang sudah diketahui.

Bentuk rekursif formula pendefinisian nilai dengan menggunakan nilai-nilai sebelumnya.

Bi-implikasi pernyataan yang berbentuk p jika dan hanya jika q, ditulis $p \leftrightarrow q$.

Bijektif bentuk relasi fungsi satu-satu sekaligus kepada.

Bit digit 0 atau 1.

Bukti serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan atau proposisi.

Bukti ekuivalensi metode pembuktian pernyataan yang berupa bi-implikasi.

Bukti ketunggalan menunjukkan hanya ada satu (tunggal) objek pada bukti kewujudan.

Bukti kewujudan (eksistensi) metode pembuktikan adanya (minimal satu) objek matematika yang memenuhi kondisi tertentu.

Bukti konstruktif menemukan secara eksplisit objek pada bukti kewujudan.

Bukti kosong metode pembuktian implikasi dengan menunjukkan hipotesisnya bernilai salah.

Bukti langsung metode pembuktian kebenaran implikasi dengan mengasumsikan hipotesisnya benar, kemudian menunjukkan kesimpulannya benar.

Bukti per kasus membuktikan kebenaran kuantor universal dengan cara membagi kasus per kasus anggota domainnya.

Bukti taklangsung metode pembuktian implikasi melalui kontraposisinya.

Bukti trivial metode pembuktian implikasi dengan cara menunjukkan kesimpulannya selalu benar.

Contoh pengingkar contoh yang membuat sebuah pernyataan bernilai salah.

Dalil istilah lama untuk teorema, biasanya banyak digunakan dalam geometri Euclid.

Definisi kesepakatan bersama mengenai pengertian atau batasan suatu istilah.

Derajat keanggotaan kriteria anggota himpunan fuzzy.

Diagram Venn diagram yang digunakan untuk menyajikan anggota dan bukan anggota himpunan, biasanya menggunakan bentuk-bentuk geometri bidang.

Disjungsi proposisi yang berbentuk $p \vee q$.

Disjungsi eksklusif proposisi yang berbentuk $p \oplus q$.

Ekuivalensi logis dua pernyataan yang berbeda secara redaksi tetapi bermakna sama secara logika.

Eliminasi menghilangkan pernyataan yang bernilai salah pada sebuah disjungsi.

Fungsi bentuk khusus relasi yang mengawankan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain.

Fungsi ceiling fungsi pembulatan ke atas.

Fungsi flooring fungsi pembulatan ke bawah.

Fungsi identitas fungsi yang tidak mengubah nilai, atau nilai masuk sama dengan nilai keluar.

Fungsi kepada fungsi yang semua anggota kodomainnya habis terpasang.

Fungsi modulo fungsi yang mempunyai nilai (range) sebagai bilangan sisa pembagian bilangan bulat.

Fungsi proposisi representasi simbol predikat dengan variabel-variabelnya.

Fungsi rounding fungsi pembulatan ke bulat terdekat.

Fungsi satu-satu fungsi yang relasinya tidak mempunyai cabang pada kodomainnya.

Fungsi tangga fungsi bernilai konstan pada sub-sub interval domain, grafiknya berbentuk potongan-potongan garis horizontal.

Generalisasi memperluas kesimpulan dengan menggunakan bentuk disjungsi.

Generalisasi eksistensial menyimpulkan bahwa kuantifikasi eksistensial benar melalui temuan kebenaran khusus.

Generalisasi universal menyimpulkan bahwa kuantifikasi universal benar jika benar untuk sebarang.

Himpunan bagian himpunan yang termuat di dalam himpunan.

Himpunan bagian sejati himpunan bagian selain dari himpunan kosong dan dirinya sendiri.

Himpunan bagian taksejati himpunan kosong atau dirinya sendiri.

Himpunan fuzzy himpunan yang kriteria anggotanya tidak tegas (samar).

Himpunan kosong himpunan yang tidak memuat anggota sama sekali.

Himpunan kuasa himpunan yang anggotanya terdiri atas semua himpunan bagian.

Himpunan pembenar anggota domain yang menyebabkan fungsi proposisi bernilai benar.

Himpunan penyelesaian nilai variabel yang memenuhi relasi matematika seperti persamaan atau pertidaksamaan.

Hipotesis kumpulan premis-premis.

Implikasi pernyataan yang berbentuk "jika p maka q", biasanya ditulis $p \to q$.

Induksi biasa membuktikan kebenaran $P(k+1)$ melalui asumsi $P(k)$, biasanya disebut prinsip induksi matematika (PIM).

Induksi kuat membuktikan kebenaran $P(k+1)$ melalui asumsi $P(k), P(k-1), \cdots, P(2), P(1)$, biasanya disebut prinsip induksi kuat (PIK).

Induksi matematika metode yang digunakan untuk membuktikan kebenaran pernyataan yang berupa fungsi proposisi dengan variabel bilangan asli.

Injektif bentuk relasi fungsi satu-satu.

Instantisasi eksistensial menyimpulkan kebenaran khusus melalui kuantifikasi eksistensial.

Instantisasi universal menyimpulkan kebenaran khusus melalui kuantifikasi universal.

Invers implikasi implikasi yang berbentuk $\neg p \to \neg q$.

Kalimat majemuk pernyataan yang tersusun atas pernyataan-pernyataan tunggal yang dihubungkan oleh beberapa konektivitas.

Kalkulus proposisi logika yang membahas nilai kebenaran proposisi, disebut juga logika proposisi.

Kardinalitas himpunan banyaknya anggota himpunan.

Kelas ekuivalensi partisi himpunan berdasarkan relasi ekuivalensi.

Komplemen himpunan himpunan yang anggotanya berada di luar himpunan tersebut.

Komplemen relatif himpunan yang anggotanya berada di luar himpunan tersebut tetapi masih di dalam himpunan relatifnya.

Komposisi fungsi fungsi yang bekerja pada fungsi.

Konektivitas kumpulan operator logika.

Konjektur pernyataan yang baru diduga benar, tetapi belum terbukti secara matematis.

Konjungsi proposisi yang berbentuk $p \wedge q$.

Kontingensi kalimat majemuk yang bukan tautologi maupun kontradiksi.

Kontradiksi gabungan beberapa proposisi tunggal yang selalu bernilai salah tanpa bergantung pada nilai kebenaran proposisi penyusunnya, umum berbentuk $p \wedge \neg p$.

Kontraposisi pernyataan yang berbentuk $\neg q \rightarrow \neg p$.

Konvers kebalikan dari implikasi, yaitu pernyataan yang berbentuk $q \rightarrow p$.

Kuantifikasi pernyataan yang memuat kuantor baik secara eksplisit maupun implisit.

Kuantifikasi bersusun pernyataan yang memuat lebih dari satu kuantor.

Kuantor lambang untuk menyatakan kuantitas.

Kuantor eksistensial lambang untuk menyatakan "untuk beberapa", dilambangkan dengan "$\exists$".

Kuantor universal lambang untuk menyatakan "untuk semua", dilambangkan dengan "$\forall$".

Langkah basis langkah menunjukkan pernyataan $P(n_0)$ dalam induksi matematika, umumnya $n_0 = 1$.

Langkah induktif langkah menunjukkan pernyataan $P(k + 1)$ benar jika diketahui $P(k)$ benar pada induksi matematika biasa.

Lemma pecahan atau bagian dari sebuah teorema.

Logika hasil pertimbangan akal pikiran yang diutarakan lewat kalimat dalam suatu bahasa.

Logika matematika logika yang digunakan untuk menganalisis argumen dalam matematika, yakni hubungan antara kesimpulan dan premis-premisnya.

Metode kontradiksi metode pembuktian dengan mengasumsikan sebaliknya, kemudian menemukan sebuah kontradiksi.

Metode non-konstruktif metode untuk menemukan adanya objek pada bukti kewujudan secara logis tanpa menunjukkannya secara eksplisit.

Modus ponens menetapkan kesimpulan sebuah implikasi jika hipotesinya dipenuhi.

Modus ponens universal modus ponens yang terjadi di dalam kuantifikasi universal.

Modus tollens mengingkari hipotesis sebuah implikasi ketika kesimpulannya salah.

Modus tollens universal modus tollens yang terjadi di dalam kuantifikasi universal.

Negasi lawan atau ingkaran dari sebuah proposisi atau pernyataan.

Nilai kebenaran status yang diberikan pada sebuah pernyataan, ada dua kemungkinan yaitu benar (T) atau salah (F).

Operator logika operator yang digunakan untuk membentuk kalimat majemuk, umumnya berupa negasi ($\neg$), disjungsi ($\vee$), konjungsi ($\wedge$), eksklusif or ($\oplus$), implikasi ($\rightarrow$), dan bi-implikasi ($\leftrightarrow$).

Opini pernyataan yang kebenarannya bergantung secara subjektif pada orang atau kelompok orang tertentu, tetapi tidak berlaku secara umum.

Paradoks pernyataan yang tidak konsisten secara logika.

Partisi himpunan Koleksi himpunan bagian yang saling asing yang gabungannya membentuk kembali himpunan semula.

Pasangan terurut koleksi terurut elemen-elemen dengan posisi diperhitungkan atau berpengaruh.

Penalaran deduktif proses penarikan kesimpulan yang hanya didasarkan pada argumen yang valid, hasilnya diterapkan pada kasus khusus.

Penalaran induktif Proses penarikan kesimpulan yang hanya didasarkan pada fakta atau bukti pendukung dari beberapa kasus khusus.

Pernyataan sebuah kalimat deklaratif, nilai kebenarannya belum pasti.

Predikat pernyataan yang memuat berhingga banyak variabel dan ia menjadi proposisi jika nilai variabelnya disubstitusi oleh nilai tertentu.

Premis pernyataan yang dijadikan dasar untuk penarikan kesimpulan.

Prinsip masuk-keluar formula atau relasi yang menghubungkan kardinalitas gabungan dan irisan himpunan.

Produk Kartesian himpunan yang terdiri atas pasangan-pasangan terurut.

Proposisi adalah pernyataan yang telah memiliki nilai kebenaran yang pasti.

Relasi bentuk pengawanan antara dua himpunan.

Relasi ekuivalensi relasi yang memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

Representasi biner penyajian dalam bentuk bit 0 dan 1.

Resolusi penarikan kesimpulan pada dua bentuk disjungsi dengan cara mengeliminasi pernyataan yang kontradiktif.

Saling asing istilah untuk dua himpunan yang tidak beririsan.

Selisih simetris gabungan himpunan yang tidak memuat irisannya.

Sifat urutan baik sifat adanya elemen terkecil pada himpunan bagian takkosong dari himpunan bilangan bulat positif.

Silogisme penarikan kesimpulan secara berjenjang melalui dua implikasi, secara spesifik disebut juga silogisme hipotetik.

Silogisme disjungtif penarikan pada sebuah disjungsi di mana salah satu pernyataannya bernilai salah.

Simplikasi mempersempit kesimpulan sebuah pernyataan yang berbentuk konjungsi.

Singleton himpunan yang hanya memuat sebuah anggota.

String bit array yang terdiri atas bit 0 atau 1.

Surjektif bentuk relasi fungsi kepada.

Syarat cukup syarat yang jika ia dipenuhi akan mengakibatkan terjadinya sesuatu.

Syarat perlu dan cukup Gabungan syarat perlu dan syarat cukup, biasanya dinyatakan dengan ungkapan “jika dan hanya jika”.

Syarat perlu keadaan yang harus (pasti) dipenuhi jika sesuatu terjadi.

Tautologi gabungan beberapa proposisi tunggal yang selalu bernilai benar tanpa bergantung pada nilai kebenaran proposisi penyusunnya.

Teorema pernyataan matematika yang kebenarannya dapat dibuktikan

Teori himpunan naif teori himpunan yang dikemukakan oleh Georg Cantor yang memandang setiap kumpulan objek adalah himpunan.

Daftar Pustaka

[1] B. Averbach and O. Chein. *Problem Solving through Recreational Mathematics.* Dover Publication, Inc, 2000.

[2] R. Carnap. *Introduction to Symbolic Logic and Its Applications.* Dover Publication, Inc, 1958.

[3] I. Chriswell and W. Hodges. *Mathematical Logic.* Oxford University Press, New York, 2007.

[4] K. Devlin. *Sets, Functions and Logic.* Chapman & Hall/CRC, 2004.

[5] S.S. Epp. *Discrete Mathematics with Apllication.* Brooks/Cole, 2011.

[6] K. Ferland. *Discrete Matemathics An Introduction to Proof and Combinatorics.* Hougthton Mifflin Company, Boston, 2009.

[7] J. Franklin and A. Daoud. *Introduction to Proof in Mathematics.* Prentice Hall, 1988.

[8] M. J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* W.H. Freeman and Company, 1994.

[9] J. Hernadi. Metoda pembuktian dalam matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika PPS Unsri*, 2, 2008.

[10] J. Hernadi. *Penalaran dalam Pembelajaran Matematika*, 2015. Makalah disampaikan pada kuliah umum S2 Pendidikan Matematika UMM, 22 Februari 2015.

[11] J. Hernadi. *Teori dan Komputasi Numerik Diferensial dan Integral.* Graha Ilmu, Yogyakarta, 2015.

[12] C. Howson. *Logic with Tress: An Introduction to Symbolic Logic.* Routledge, 1997.

[13] G.T. Kneebone. *Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics.* D. Van Nostrand Company Limited, 1963.

[14] T. Koshy. *Discrete Mathematics with Applications.* Elsevier Academic Press, 2004.

[15] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman & Hall, 1997.

[16] J.L. Mott and K. Schutte. *Logic and Bolean Algebra.* Barron's Educational Series, Inc, 1979.

[17] K.H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications (Sixth Edition).* Mc Graw Hill, 2007.

[18] M. Savan vos. *The World's Most Famoust Math Problems.* St. Martin's Press, New York, 1993.