MEDIA KOMUNIKASI, EDUKASI, DAN INFORMASI PPPPTK MATEMATIKA YOGYAKARTA

# LIMAS

Edisi Nomor 21, November 2008


## Lubang Hitam dalam Matematika

## Bagaimana Cara Guru Memanfaatkan Faktor Sikap dalam Pembelajaran Matematika?

## Persamaan Diophantine Linear

# DAFTAR ISI

## PENGETAHUAN MATEMATIKA

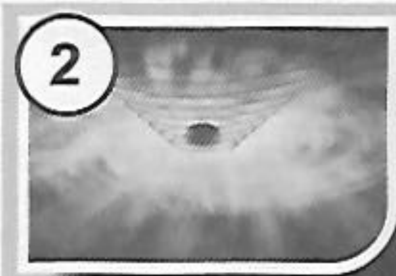


## SOLUSI



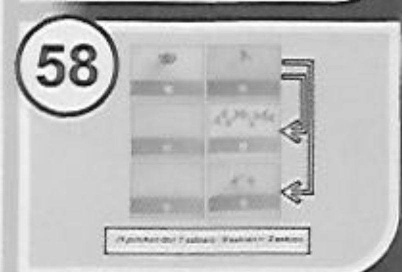
## WAWASAN

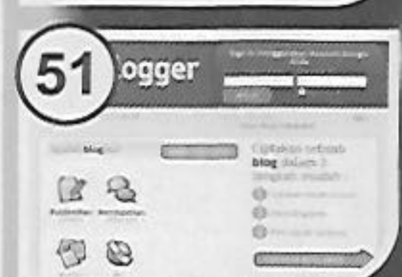










# AKAR KONTINU BILANGAN POSITIF

*) Julan Hernadi

Coba perhatikan ketika pada kalkulator diberikan bilangan positif sebarang, kemudian tekan tanda akar (√ ) terus - menerus, berapakah hasilnya?

Berikut contoh bila diberikan bilangan 2:

1,4142135; 1,189207; 1,0905076; 1,0442737; 1,0218971; 1.0108892; 1,0054298.

Bila diberikan bilangan 0,6 maka hasilnya:

0,7071067; 0,8408963; 0,9170039; 0,9576032; 0,978572; 0,9892279; 0,9945993

Dari kedua contoh di atas,

bila diteruskan maka akan dihasilkan bilangan 1. Silakan dicoba sendiri! Bagaimana fakta ini dapat dijelaskan secara matematis?

Untuk $a > 0$, perhatikan barisan yang didefinisikan secara rekursif berikut:

$$\begin{cases} x_1 := a, \\ x_{n+1} := \sqrt{x_n} \ \ untuk\ n \geq 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Bila dijabarkan, maka suku-suku pada barisan ini akan berbentuk

$$a, \sqrt{a}, \sqrt{\sqrt{a}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}, \ldots$$

Berdasarkan bentuk ini maka proses menekan tanda akar ($\sqrt{}$) seperti disebutkan di atas akan menghasilkan suku-suku barisan seperti yang didefinisikan pada (*), dan hasil akhirnya merupakan nilai dari

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

Untuk dapat menghitung limit barisan ini, dua fakta kalkulus yang harus dipahami, yaitu untuk sebarang bilangan bulat $k$ tetap, selalu berlaku

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

Sekarang kita siap menghitung limit barisan yang didefinisikan pada (*). Kita misalkan

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n$$

diperoleh

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n}$$

$$x = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

$$x = \sqrt{x}$$

Bila persamaan terakhir ini diselesaikan maka akan diperoleh $x = 0$ atau $x = 1$. Ada dua nilai, padahal limit suatu barisan kalau ada selalu tunggal. Yang mana diantara kedua hasil ini yang memenuhi? Perhatikan analisis berikut ini.

1. Untuk kasus $0 < a < 1$ maka barisan

   $a, \sqrt{a}, \sqrt{\sqrt{a}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}, \ldots$ merupakan barisan

   Yang naik monoton dan tegas, artinya $0 < a < \sqrt{a} < \sqrt{\sqrt{a}} < \ldots < 1$. Tidaklah mungkin limitnya 0 karena suku-sukunya semakin lama semakin menjauhi 0.

2. Untuk $a > 1$ maka berlaku

   $$1 > a > \sqrt{a} > \sqrt{\sqrt{a}} > \ldots.$$

   Tidaklah mungkin barisan yang suku-sukunya lebih besar dari 1 akan konvergen ke 0.

Untuk $a = 1$ akan terbentuk barisan konstan yang nilainya selalu 1. Dari analisis di atas disimpulkan harga $x$ yang memenuhi adalah $x = 1$.

Cara lain dengan melihat bahwa hasil akhir dari proses penarikan akar secara terus menerus akan berbentuk

$$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}$$

Bila kedua ruas dikuadratkan maka diperoleh

$$x^2 = \sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}} = x$$

Juga, menghasilkan $x = 0$ atau $x = 1$. Dengan analisis yang sama seperti sebelumnya hanya $x = 1$ yang memenuhi.

**Masalah:**

Sebelum tahun 1500 SM, orang Mesopotamia menghitung akar suatu bilangan positif menggunakan iterasi berikut: Misalkan $a > 0$, didefinisikan

$$\begin{cases} s_1 := 1, \\ s_{n+1} := \frac{1}{2}(s_n + a/s_n) \; untuk \; n \geq 1 \end{cases}$$

Buktikan $(s_n)$ konvergen ke $\sqrt{a}$. Gunakan hasil ini untuk aproksimasi $\sqrt{a}$.

**Bahan bacaan:**

Bartle, R.G and D.R. Sherbet, 1994. *Introduction to real analysis,* second edition, John Willey & sons, New York.

*) Dr. Julan Hernadi
Dosen pada FKIP UNMUH Ponorogo, FMIPA & FKIP UAD, FMIPA UII
Julan_hernadi@yahoo.com