Edisi Nomor 14-Juli 2005

LIMAS

MEDIA KOMUNIKASI, EDUKASI, DAN INFORMASI PPPG MATEMATIKA YOGYAKARTA

- Beberapa Masalah Kritis pada Kalkulus Integral di SMA (Bagian 1)
- Model Arcs dalam Pembelajaran Matematika
- Mengenal 7 Raja dalam Matematika
- Membangun Profesionalisme Guru
- [illegible] Dewantara [illegible]

ISSN 1829-5657

IZIN TERBIT: No. 2426/SK/Ditjen PPG/STT/1988

SAJIAN UTAMA

PENGETAHUAN MATEMATIKA

Kalkulus integral merupakan salah satu materi matematika pada Sekolah Menengah Atas, dimulai dari antiderivatif sampai dengan penggunaan integral tertentu untuk menghitung volume benda putar (Kurikulum 2004, Depdiknas 2003). Pijakan utama dalam penerapan integral adalah Teorema Dasar Kalkulus.

WAWASAN

Ini adalah cerita tentang seorang pemimpin bangsa, bapak pendidikan nasional Indonesia. Ki Hajar Dewantara. Cerita yang amat menarik ini amat sayang untuk kita lupakan begitu saja. Cerita yang penuh dengan perjuangan, dan memiliki nilai kemanusiaan yang tinggi ini, sudah sepantasnya dapat menjadi bahan pelajaran yang amat berharga bagi anak-anak bangsa di negeri ini

KESEHATAN

Osteoporosis berasal dari kata asteo(tulang) dan porosis(pengeroposan), yaitu suatu kelainan tulang yang ditandai dengan berkurangnya kepadatan tulang. Hal ini dapat menyebabkan menurunnya kepadatan tulang dan meningkatkan kemungkinan untuk mengalami patah tulang. Osteoporosis sering terjadi seiring dengan bertambahnya usia

SOLUSI

Hampir tiap hari kita mungkin melihat truk tangki yang mengangkut minyak, tetapi tahukah anda bagaimana menghitung volume minyak dalam tangki tersebut, apalagi kalau minyaknya tidak penuh. Pak Marsudi akan mencoba mengungkap untuk Anda, khususnya Ibu Ernie dari SMP Isen Mulang, Palangkaraya yang menanyakan hal tersebut.

DAFTAR ISI

PENGETAHUAN MATEMATIKA

WAWASAN

KESEHATAN

SOLUSI

Beberapa Masalah Kritis Pada Kalkulus Integral di Sekolah Menengah Atas

(Bagian I)

Oleh : Julan Hernadi (Dosen FKIP/FMIPA UAD Yogyakarta)

Nurbaety Ningrum (Mahasiswa FKIP UAD Yogyakarta)

1. Pendahuluan

Kalkulus integral merupakan salah satu materi matematika pada Sekolah Menengah Atas, dimulai dari antiderivatif sampai dengan penggunaan integral tertentu untuk menghitung volume benda putar (Kurikulum 2004, Depdiknas 2003). Pijakan utama dalam penerapan integral adalah Teorema Dasar Kalkulus yang secara sederhana disajikan sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

dengan F suatu antiderivatif fungsi f pada $[a,b]$, yaitu $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Mungkin karena begitu pentingnya teorema ini, banyak penulis buku pelajaran matematika SMA yang menaruh perhatian lebih pada materi ini. Bahkan ada buku yang diterbitkan oleh penerbit ternama mencantumkan pada sampulnya kalimat matematika berikut:

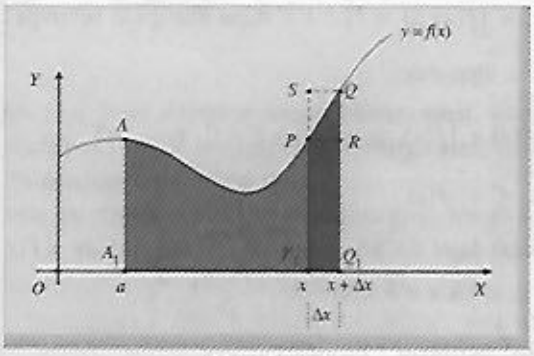
$$\int_a^b F(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Tidak jelas pesan apa yang ingin disampaikan oleh penulis atau perancang sampul tersebut. Apakah menyampaikan pentingnya Teorema Dasar di atas atau yang lainnya. Tapi secara matematika, pernyataan ini adalah sesuatu yang **sangat keliru.** Coba diperhatikan bahwa fungsi di dalam integral dan fungsi pada ruas kanan adalah sama yaitu F, dan fenomena ini tidak berlaku secara umum kecuali salah satu kemungkinannya adalah $F(x) = e^x$.

Suatu fakta yang cukup membanggakan adalah sudah banyak buku yang menyajikan pembuktian Teorema Dasar Kalkulus ini. Hal ini sedapat mungkin memang perlu dilakukan dengan tujuan untuk memperkenalkan matematika sebagai pengetahuan dengan penalaran deduktif. Selain itu menurut Making Mathematics (2002), beberapa tujuan dalam melakukan pembuktian kebenaran pernyataan adalah *to establish a fact with certainty, to gain understanding, to communicate an idea to others, for the challenge, to create something beautiful, to construct a larger mathematical theory.* Karena banyaknya nilai manfaat yang dapat diperoleh dari proses pembuktian ini maka penyajian bukti tersebut haruslah benar secara matematik (*mathematically correct*), artinya harus menggunakan argumen logis setiap kali menjelaskan kebenaran suatu pernyataan matematika. Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis-premis, teorema lain, definisi atau bahkan mungkin dari postulate (aksioma) dari mana sistem matematika tersebut dibangun.

Secara umum, pembuktian Teorema Dasar Kalkulus dilakukan dengan menghubungkan antara luas daerah di bawah kurva dan konsep derivatif. Berikut ini diberikan contoh bukti pada salah satu buku SMA.

Diperhatikan daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$ dan garis $x = b$. Misalkan $x \in [a,b]$ dan $L(x)$ menyatakan luas daerah ini dari a sampai x. Visualisasinya ditunjukkan pada Gambar 1 yang diambil langsung dari buku.



Gambar 1

Berdasarkan gambar di atas, diperoleh hubungan:

Luas $PP_1Q_1R <$ Luas $PP_1Q_1Q <$ Luas SP_1Q_1Q

$\Leftrightarrow f(x)\Delta x < L(x+\Delta x) - L(x) < f(x+\Delta x)\Delta x$ (*)

$\Leftrightarrow f(x) < \dfrac{L(x+\Delta x) - L(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x).$

Untuk Δx yang mendekati nol, maka dengan menggunakan definisi derivatif, diperoleh:

$$f(x) < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{L(x+\Delta x) - L(x)}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{L(x+\Delta x) - L(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$\frac{dL(x)}{dx} = f(x)$$

atau $\qquad dL(x) = f(x)\,dx.$

Dengan menggunakan operasi pengintegralan pada masing-masing ruas persamaan di atas, diperoleh hubungan:

$$\int dL(x) = \int_a^x f(x)dx \qquad (**)$$

$$L(x) = F(x) + C. \qquad (***)$$

dengan F antiderivatif dari f, yaitu $F'(x) = f(x)$.

Dari hubungan $L(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$

dapat ditetapkan hal berikut:

(i) Untuk $x = a$, diperoleh:

$$L(a) = \int_a^a f(x)\,dx$$

$$0 = F(a) + C$$

$$\Leftrightarrow \quad C = -F(a)$$

Sehingga $L(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$

(ii) Selanjutnya, untuk $x = b$ diperoleh:

$$L(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Selanjutnya buku tersebut memberikan kesimpulan berikut:

Berdasarkan persamaan di atas, diperoleh hubungan $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ dengan F suatu antiderivatif fungsi f yaitu $F'(x) = f(x)$. Hubungan ini dikenal sebagai **Teorema Dasar Integral Kalkulus.** Secara lengkap disajikan sebagai berikut:

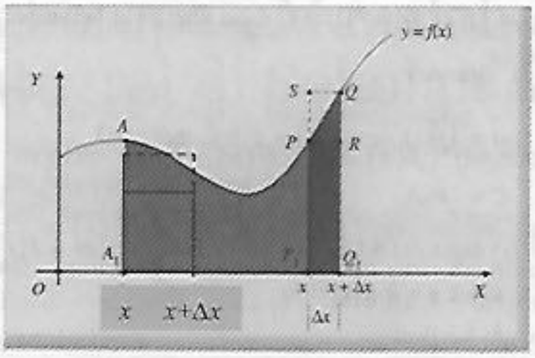
Misalkan kurva $f(x)$ kontinu dalam interval tertutup $[a,b]$. Luas daerah L yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$ dan garis $x = b$ ditentukan dengan rumus

$$L = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dengan F suatu antiderivatif fungsi f yaitu $F'(x) = f(x)$.

Beberapa masalah penting yang perlu dikemukakan sehubungan dengan pengungkapan, pemahaman dan pembuktian Teorema Dasar Kalkulus di atas adalah sebagai berikut:

1. Sesungguhnya, Teorema Dasar Kalkulus tidak berkaitan dengan luas seperti diungkapkan di atas tetapi luas daerah dapat disajikan sebagai integral tertentu sebagai kasus khusus. Baru kemudian, integral tertentu dihitung menggunakan Teorema Dasar Kalkulus.
2. Perumusan luas daerah L yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$ dan garis $x = b$ dengan $L = \int_a^b f(x)\,dx$ perlu kehati-hatian karena rumusan ini **hanya berlaku** untuk fungsi $f(x)$ yang taknegatif pada $[a,b]$.
3. Alat bantu pemahaman pembuktian dengan visualisasi pada Gambar 1 adalah cukup baik. Tapi seharusnya tidak menimbulkan kontradiksi. Bagi siswa yang cerdik, dia dapat mengambil sebarang x di antara a dan b. Untuk gambar yang sama, bila ada siswa cerdik yang mengambil x seperti berikut :



maka relasi pada (*) di atas **tidak berlaku** dan sebagai gantinya menjadi $f(x+\Delta x)\,\Delta x < L(x+\Delta x) - L(x) < f(x)\,\Delta x$.

Bila dicermati, langkah pembuktian di atas hanya berlaku untuk fungsi naik. Sedangkan untuk fungsi turun relasi (*) perlu diadaptasikan seperti yang baru saja dikemukakan. Untuk fungsi yang kadang naik dan kadang turun pada $[a,b]$ maka pembuktian di atas **tidak berlaku**.

Jadi pengambilan fungsi $y = f(x)$ yang kurvanya seperti pada Gambar 1 **tidaklah tepat.**

4. Argumen yang menghasilkan (**) **tidak dapat dibenarkan** karena integral pada kedua ruas tidak sama, sebelah kiri dipasang integral taktentu (tanpa batas) sedangkan integral pada ruas kanan dibatasi dari a sampai dengan x. Selanjutnya, implikasinya pada (***) tidak jelas alasannya, khususnya tentang dari mana konstanta C berasal.

Secara umum, pembuktian Teorema Dasar Kalkulus pada buku matematika SMA menggunakan pendekatan yang mirip seperti di atas. Bahkan masih terdapat buku yang tidak tepat dalam menyajikan konsep integral. Untuk meluruskan kesalahan konsep matematika terutama yang sudah tercantum di dalam buku yang beredar di tengah masyarakat diperlukan kepedulian dari semua pihak termasuk masyarakat pemerhati pendidikan matematika di Indonesia. Melalui artikel ini penulis mencoba mengangkat beberapa masalah kritis pada kalkulus integral dan pemecahannya, khususnya memberikan alternatif pembuktian Teorema Dasar Kalkulus dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata. Beberapa materi terkait dengan kajian ini akan dibahas secara mendalam.

2. Teorema Nilai Rata-rata (TNR)

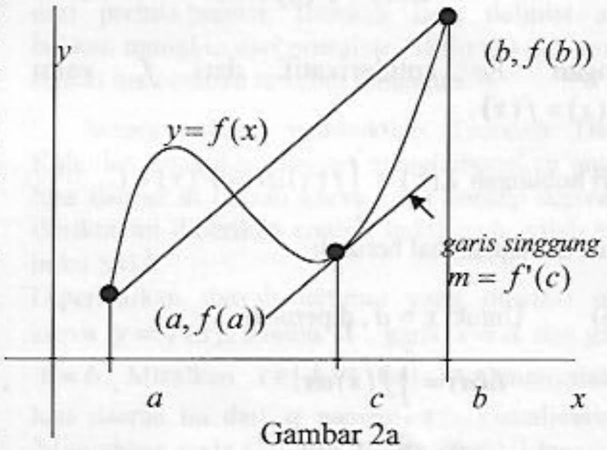
Teorema ini adalah teorema yang sangat penting di dalam kalkulus. Teorema ini menghubungkan antara fungsi dan derivatifnya. Pada umumnya, TNR digunakan sebagai alat untuk membuktikan teorema penting lainnya di dalam kalkulus, termasuk nantinya Teorema Dasar Kalkulus.

Teorema Nilai Rata-rata (TNR) Tipe I

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan f terdiferensial pada (a,b) maka terdapat paling sedikit satu titik $c \in (a,b)$ sehingga:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{2a}$$

Pemahaman TNR tipe I dapat menggunakan bantuan visualisasi seperti pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2a

Kita perhatikan bahwa berdasarkan TNR, garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $(c, f(c))$ akan sejajar dengan garis yang melalui titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$.

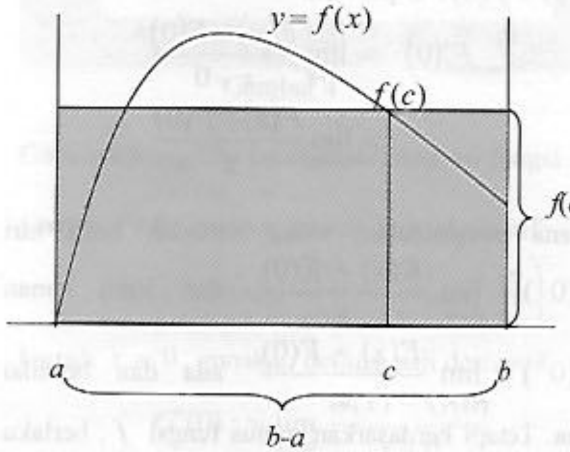
Teorema Nilai Rata-rata Tipe II

Jika $f:[a,b]\to R$ *kontinu pada* $[a,b]$ *maka terdapat titik* $c\in[a,b]$, *sehingga*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad (2b)$$

TNR tipe II ini dikenal sebagai TNR bentuk integral. Pemahaman TNR ini adalah sebagai berikut:

Bila fungsi f nonnegatif pada $[a,b]$ maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y=f(x)$ pada $[a,b]$ *sama dengan* luas suatu daerah persegi panjang dengan sisi sisi $f(c)$ dan $(b-a)$ seperti ditunjukkan pada Gambar 2b berikut.



Gambar 2b

Pembuktian TNR dapat ditemukan secara detail pada banyak buku kalkulus atau pengantar analisis real, misalnya (*Bartle and Sherbet*, 1994).

Berikut ini diberikan satu pernyataan penting yang pembuktiannya menggunakan TNR. Pernyataan ini diberikan dalam bentuk Lemma, yaitu sejenis teorema kecil.

Lemma 1. *Misalkan* f *kontinu pada interval* $[a,b]$ *dan terdiferensial pada* (a,b). *Jika* $f'(x)=0$ *untuk setiap* $x\in(a,b)$ *maka* f *merupakan fungsi konstan pada* $[a,b]$.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa $f(x)=f(a)$ untuk setiap $x>a$. Terapkan TNR pada interval $I_x:=[a,x]$ *). Jadi terdapat $c_x\in(a,x)\subset[a,b]$ sehingga berlaku $f(x)-f(a)=f'(c_x)(x-a)$.

Karena diketahui $f'(x)=0$ untuk setiap $x\in(a,b)$ maka $f'(c_x)=0$. Akhirnya didapat $f(x)-f(a)=0$ atau $f(x)=f(a)$. **Bukti selesai.**

Lemma ini dipahami sebagai berikut:

> Setiap fungsi kontinu dan terdiferensial yang derivatifnya bernilai nol merupakan fungsi konstan. Kelihatannya sederhana. Tapi akibat langsung Lemma ini yang diungkapkan berikut dapat mengatasi masalah pada point 4 di atas.

Akibat 1. *Misalkan fungsi f dan* g, *keduanya kontinu pada interval* $[a,b]$ *dan terdiferensial pada* (a,b). *Jika* $f'(x)=g'(x)$ *untuk setiap* $x\in(a,b)$ *maka terdapat konstanta* C *sehingga* $f(x)=g(x)+C$ *untuk setiap* $x\in[a,b]$.

Bukti: Diperhatikan bila diambil fungsi h dengan $h(x)=f(x)-g(x)$ maka berlaku $h'(x)=0$. Selanjutnya diterapkan Lemma 1 pada fungsi h. **Bukti selesai.**

Akibat ini dapat dipahami sebagai berikut:

> Jika ada dua fungsi yang mempunyai derivatif yang sama maka kedua fungsi tersebut hanya dibedakan oleh suatu konstanta. Kembali pada masalah pada point 4 di atas, bila F antiderivatif dari f yaitu $F'(x)=f(x)$ maka hubungan $\dfrac{dL(x)}{dx}=f(x)$ akan menghasilkan $L'(x)=F'(x)$. Jadi pernyataan pada (***) langsung dijamin oleh Akibat 1 dan tidak perlu memasang integral pada kedua ruas yang dapat menimbulkan masalah baru.

---

*) Notasi ":=" dibaca "didefinisikan sebagai" (*defined as*).

3. Antiderivatif dan Integral Taktentu.

Pada beberapa buku, **antiderivatif** dan **integral taktentu** dianggap sebagai dua istilah yang sama. Namun ada pula buku yang membedakan definisi kedua istilah ini, seperti definisi berikut yang diambil dari (Bartle and Sherbet, 1994):

Definisi 3.1. *Misalkan* $f:[a,b]\to R$. *Fungsi* $F:[a,b]\to R$ *dikatakan* ***antiderivatif*** *dari* f *jika* $F'(x)=f(x)$ *untuk setiap* $x\in[a,b]$. *Sedangkan fungsi* $F:[a,b]\to R$ *yang didefi-nisikan sebagai* :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (3)$$

disebut ***integral taktentu*** *(indefinite integral) dari fungsi* f.

Sebagai konsekuensi langsung dari Definisi 3.1 dan Akibat 1 adalah bila F dan G keduanya antiderivatif dari f maka berlaku:

$$G(x)=F(x)+C.$$

Jadi bentuk umum dari antiderivatif selalu memuat konstanta sebarang C.

Contoh 3.1. Diberikan fungsi $f(x)=x^5$ dengan $x\in R$. Antiderivatif khusus dari fungsi f adalah $F(x)=\frac{1}{6}\,x^6$ sebab

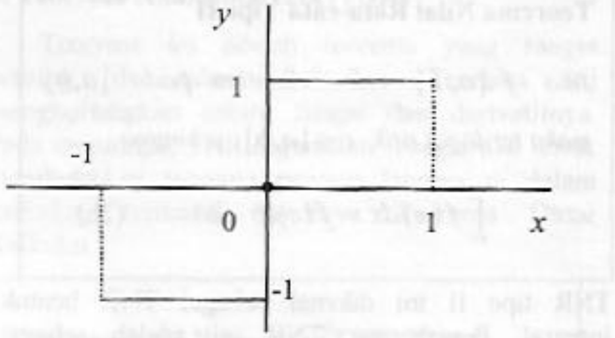
$$F'(x)=x^5=f(x).$$

Sedangkan bentuk umum antiderivatifnya adalah $G(x)=\frac{1}{6}x^6+C$ dengan C konstanta sebarang. Integral tak tentu fungsi ini adalah $F(x)=\frac{1}{6}\,x^6$.

Contoh 3.2. Diberikan fungsi *signum* yang didefinisikan sebagai

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{bila } x<0\\ 0 & \text{bila } x=0\\ 1 & \text{bila } x>0\end{cases}$$

Grafik fungsi ini pada interval $[-1,1]$ diberikan pada Gambar 3.



Gambar 3.

Fungsi ini tidak mempunyai antiderivatif pada $[-1,1]$ sebab tidak ada fungsi F yang memenuhi $F'(x)=f(x)$, khususnya $F'(0)$ tidak ada. Untuk membuktikan hal ini, kita gunakan bukti tak langsung atau bukti terbalik. Andaikan ia ada dan $F'(0)=f(0)$. Diperoleh:

$$F'(0) := \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$

Karena pengandaian, maka haruslah limit kiri $F'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ dan limit kanan $F'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ ada dan bernilai sama. Tetapi berdasarkan rumus fungsi f, berlaku $F'(0^-)=f(0^-)=-1$ dan $F'(0^+)=f(0^+)=1$, suatu kontradiksi. Jadi pengandaian bahwa $F'(0)$ ada, harus diingkari.

Tetapi berdasarkan Definisi 3.1, fungsi signum ini mempunyai integral taktentu yaitu

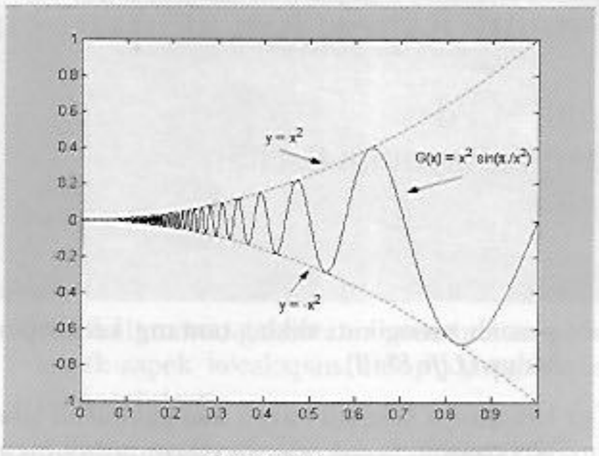
$$F(x)=|x|-1=\begin{cases}-x-1 & \text{bila } x<0\\ x-1 & \text{bila } x\ge 0.\end{cases}$$

Integral taktentu ini dapat diperoleh dengan menyelesaikan integral pada (3). Jadi fungsi pada contoh ini *tidak mempunyai antiderivatif tetapi mempunyai integral tak tentu.*

Contoh 3.3. Diberikan fungsi $G:[0,1]\to R$ dengan

$$G(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & \text{bila } x\in(0,1] \\ 0 & \text{bila } x=0. \end{cases}$$

Grafik fungsi ini disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4

Coba sekarang kita lakukan diferensiasi fungsi G.

Untuk $x\neq 0$, gunakan aturan dasar derivatif:

$$G'(x)=2x\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)-\frac{2\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right).$$

Untuk $x=0$, gunakan definisi asli derivatif:

$$G'(0):=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

Karena selalu berlaku $-1\le\sin(\pi/x^2)\le 1$ dan $-|x|\le x\le|x|$ maka berlaku

$-|x|\le x\sin(\pi/x^2)\le|x|$. Jadi diperoleh:

$$\lim_{x\to 0}(-|x|)\le\lim_{x\to 0}x\sin(\pi/x^2)\le\lim_{x\to 0}|x|$$

$$\Rightarrow -|\lim_{x\to 0}x|\le\lim_{x\to 0}x\sin(\pi/x^2)\le|\lim_{x\to 0}x|$$

$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to 0}x\sin(\pi/x^2)\le 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}x\sin(\pi/x^2)=0$$

Jadi diperoleh $G'(0)=0$. Jadi fungsi G terdiferensial pada [0, 1] dengan derivatif

$$G'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & \text{bila } x\in(0,1] \\ 0 & \text{bila } x=0. \end{cases}$$

Bila diambil fungsi $g:[0,1]\to R$ dengan $g(x)=G'(x)$ maka fungsi g mempunyai antiderivatif yaitu G. Tetapi dikarenakan g tidak terbatas pada interval [0, 1] maka rumusan integral (2) pada Definisi 3.1 tidak mempunyai nilai, yaitu fungsi g tidak terintegral. Penjelasan istilah keterintegralan fungsi akan dijelaskan pada bagian berikutnya. Jadi fungsi pada contoh ini *mempunyai antiderivatif tetapi tidak mempunyai integral taktentu.*

Ketiga contoh tersebut dimaksudkan untuk membantu pemahaman tentang kedua istilah antiderivatif dan integral taktentu baik perbedaannya maupun kesamaannya. Dalam kasus fungsi f kontinu, integral taktentu merupakan salah satu antiderivatif (antiderivatif khusus). Fakta ini merupakan bentuk Teorema Dasar Kalkulus tipe II yang akan dibahas secara khusus pada bagian lainnya. Mungkin disebabkan alasan ini, dan untuk penyederhanaan maka istilah antiderivatif dan integral taktentu dianggap dua istilah yang sama. Selanjutnya, antiderivatif fungsi f ditulis sebagai $\int f(x)\,dx$ dan biasanya juga dibaca "integral taktentu dari fungsi f". Namun bila kita ingin konsisten dengan Definisi 3.1, maka berlaku:

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\textit{antiderivatif}} = \underbrace{F(x)}_{\textit{integral taktentu}} + \underbrace{C}_{\textit{konstanta sebarang}}$$

asalkan antiderivatif dan integral taktentu ada.

Bersambung ke Bagian II.........................