Edisi Nomor 15, Desember 2005

# LIMAS

MEDIA KOMUNIKASI, EDUKASI, DAN INFORMASI PPPG MATEMATIKA YOGYAKARTA

- Beberapa Masalah Kritis pada Kalkulus Integral di SMA (Bagian 2)
- Lebih Paham dengan Lompatan Matematika
- Membangun Wibawa Sang Guru
- Menyiasati Soal Cerita Matematika SMP
- Kesiapan Sekolah Dalam Pemanfaatan Komputer

ISSN 1829-5657

IZIN TERBIT: No. 2426/SK/Ditjen PPG/STT/1988

# Beberapa Masalah Kritis Pada Kalkulus Integral di Sekolah Menengah Atas

**(Bagian II)**

Oleh : Julan Hernadi (Dosen FKIP/FMIPA UAD Yogyakarta)
Nurbaety Ningrum (Mahasiswa FKIP UAD Yogyakarta)

## 4. Integral Tertentu

Misalkan $f:[a,b]\to R$. Ekspresi $\int_a^b f(x)\,dx$ biasanya disebut **integral tertentu** (*definite integral*) fungsi $f$ pada interval $[a, b]$. Integral tertentu disebut juga integral Riemann, dan pendefinisiannya dilakukan dengan pendekatan jumlahan Riemann[*]. Langkah-langkah pendefinisian jumlahan Riemann berikut dicuplik dari buku teks standar kalkulus oleh Bradley and Smith (1995).

**Langkah 1 :** Bagilah interval $[a, b]$ menjadi $n$ buah subinterval dengan memilih titik-titik $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sedemikian hingga:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Kita sebut titik-titik ini sebagai **partisi** $P$. Untuk $k=1,2,3,\ldots,n$, subinterval ke $k$ adalah $I_k=[x_{k-1},x_k]$ dengan lebar $\Delta_k=x_k-x_{k-1}$. Lebar terbesar disebut dengan **norma** partisi $P$ dan biasanya ditulis dengan $\|P\|$ yaitu:

$$\|P\|=\underset{k=1,2,\ldots,n}{maks}\{\Delta x_k\}.$$

**Langkah 2 :** Untuk setiap $k=1,2,3,\ldots,n$, pilih sebarang titik $x_k^*\in I_k=[x_{k-1},x_k]$. Titik ini disebut representasi interval $I_k$.

[*] Bernhad Riemann (1826-1866) was a German mathematiciant who pioneered this approach.

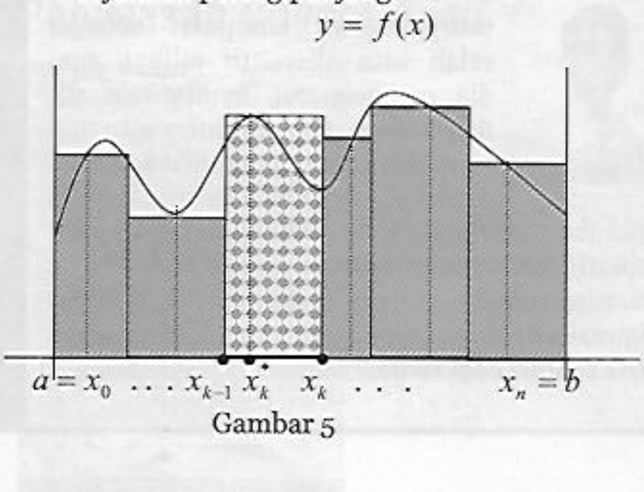
**Langkah 3 :** Bentuk jumlahan

$$R_n=f(x_1^*)\Delta x_1+f(x_2^*)\Delta x_2+\cdots+f(x_n^*)\Delta x_n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Nilai $R_n$ disebut **jumlahan Riemann** (*Riemann sum*) fungsi $f$ pada $[a, b]$.

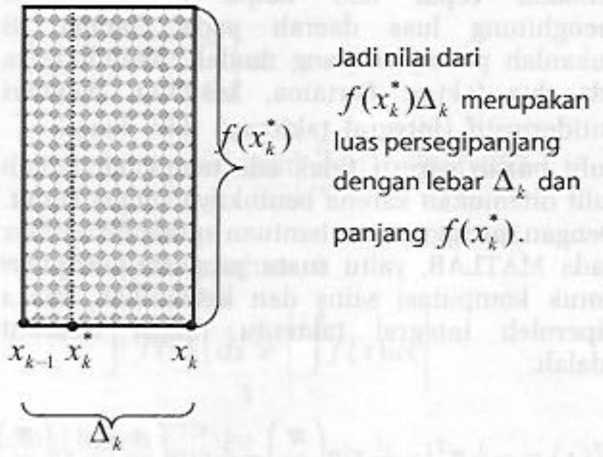
### Beberapa catatan penting tentang jumlahan Riemann :

a) Jumlahan Riemann ini bergantung pada partisi yang diambil dan titik representasi yang dipilih.
b) Lebar masing-masing subinterval **tidak** harus sama. Dalam kasus lebarnya sama, partisi $P$ kita sebut partisi seragam atau partisi regular dengan norma partisi $\|P\|=\frac{b-a}{n}$.
c) Jumlahan Riemann **tidak** hanya dibatasi untuk fungsi nonnegatif. Tetapi bila fungsi $f$ nonnegatif maka jumlahan Riemann ini merupakan aproksimasi luas daerah di bawah kurva dengan menggunakan luas sejumlah persegipanjang.




Gambar 5

Diperhatikan subinterval $I_k = [x_{k-1}, x_k]$!




Suatu konsekuensi logis bahwa luas keseluruhan daerah persegipanjang ini akan **semakin dekat** dengan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ dari $x = a$ sampai $x = b$ **bilamana** norma partisi $\|P\|$ **semakin mengecil.** Jadi, luas daerah di bawah kurva tersebut adalah limit dari jumlahan Riemann berikut:

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k .$$

Diperhatikan dengan seksama bahwa secara umum, kondisi $\|P\| \to 0$ **tidaklah ekuivalen** dengan kondisi $n \to \infty$ **kecuali** pada kasus partisi seragam. Tegasnya, bila partisinya tidak seragam, pengambilan $n \to \infty$ dapat dilakukan hanya pada satu atau beberapa subinterval saja, dan ini tidak mengakibatkan $\|P\| \to 0$. Jadi pendefinisian

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \quad \textbf{tidaklah tepat}.$$

**Definisi 4.1.** Misalkan fungsi $f$ terdefinisi pada interval $[a, b]$. Fungsi $f$ dikatakan **terintegral** pada $[a, b]$ jika nilai

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

ada. Nilai limit ini disebut nilai integral tertentu fungsi $f$ pada $[a, b]$, dan ditulis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \qquad (4)$$

**Luas sebagai integral tertentu:**

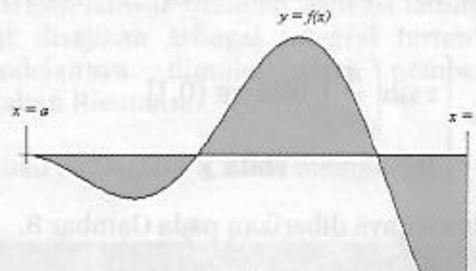
Bila $f$ kontinu dan $f(x) \geq 0$ pada $[a, b]$ maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ pada $[a, b]$ diberikan oleh

$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

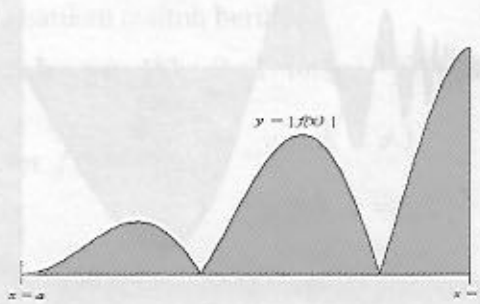
Dalam kasus terdapat daerah di dalam $[a, b]$ di mana $f(x) < 0$ maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu $x$ dari $x = a$ sampai $x = b$ diberikan oleh

$$L = \int_a^b |\, f(x) \,|\, dx$$

**Ilustrasi :**




Gambar 6




Gambar 7

Diperhatikan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu $x$ dari $x = a$ sampai $x = b$ yang terlihat pada Gambar 6 adalah sama dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = |f(x)|$ dari $x = a$ sampai $x = b$ seperti pada Gambar 7. Jadi untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ langkah pertama kita harus mengidentifikasi daerah-daerah di mana fungsi bernilai positif dan di mana fungsi bernilai negatif.

Bila kasusnya sangat sederhana, katakan fungsi $f(x) \geq 0$ pada $[a, c]$ dan $f(x) < 0$ pada $[c, d]$ maka luasnya adalah

$$L = \int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx .$$

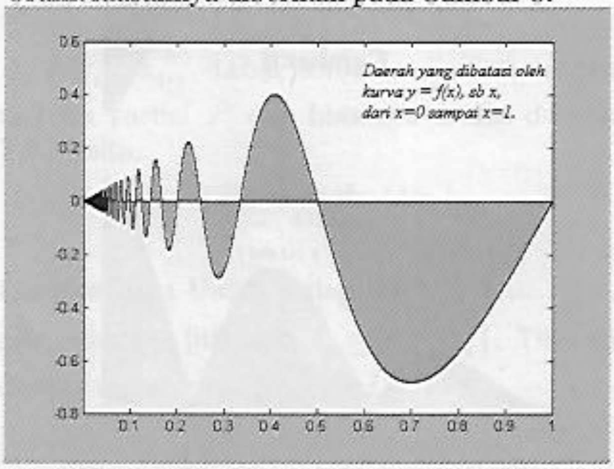
Tetapi kesulitan akan timbul bilamana kita tidak dapat mengidentifikasi secara tepat bagian dari domain yang mana fungsi bernilai positif atau negatif.

Diperhatikan contoh ekstrem berikut!

**Contoh 4.1**. Diberikan fungsi $f : [0,1] \to R$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{bila } x \in (0,1] \\ 0 & \text{bila } x = 0. \end{cases}$$

Grafik luasannya diberikan pada Gambar 8.




Gambar 8

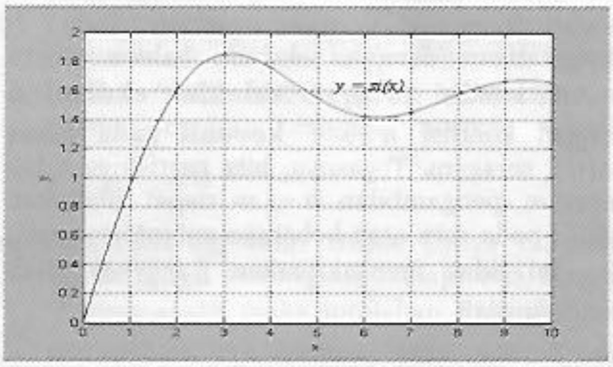
Pada contoh ini, fungsi beroskilasi positif dan negatif, semakin dekat ke nol maka oskilasinya semakin cepat dan tanpa henti. Untuk menghitung luas daerah pada Gambar 8 bukanlah pekerjaan yang mudah. Kesulitannya ada dua faktor. Pertama, kesulitan mencari antiderivatif (integral taktentu) dari fungsi $f$. Sulit bukan berarti tidak ada tetapi barangkali sulit ditemukan karena bentuknya sangat rumit. Dengan menggunakan bantuan *symbolic toolbox* pada MATLAB, yaitu suatu program komputer untuk komputasi sains dan keteknikan, maka diperoleh integral taktentu fungsi tersebut adalah:

$$F(x) = -\tfrac{1}{2}\pi^2\left[-\tfrac{x^2}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \tfrac{x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - si\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]$$

dengan $si$ fungsi integral sinus yang didefinisikan secara implisit sebagai berikut:

$$si(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

dan grafiknya ditunjukkan pada Gambar 9.




Gambar 9

Kedua, kesulitan mendeteksi secara tepat kapan fungsi ini nonnegatif dan kapan ia negatif. Sesungguhnya nilai nol fungsi ini terjadi pada $\pi / x = k.\pi$ atau pada $x = 1/k$ dengan $k$ bulat nonnegatif. Jadi akan terjadi tak berhingga banyak bagian kurva di bawah sumbu $x$. Dikarenakan dua kesulitan ini maka penanganan manual kasus seperti ini menjadi sangat sulit. Kembali dengan menggunakan bantuan

MATLAB khususnya fungsi **quad** untuk integrasi diperoleh:

$$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) dx \cong -0{,}183$$

$$\text{Luas} := \int_0^1 \left| x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| dx \cong 0{,}293$$

Perlu ditegaskan bahwa

$$\int_a^b | f(x) | \, dx \neq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

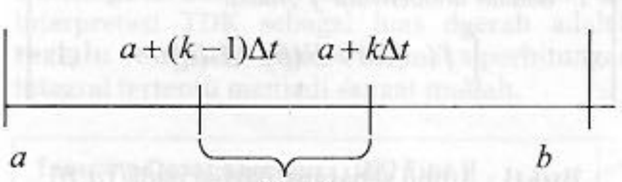
tetapi hanya berlaku

$$\int_a^b | f(x) | \, dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right| .$$

**Jarak sebagai integral tertentu:**

Selain luas seperti yang telah dibahas sebelumnya, jarak yang ditempuh oleh suatu benda dapat pula disajikan dalam bentuk integral tertentu.

Misalkan suatu benda bergerak sepanjang suatu garis lurus dari $t=a$ sampai $t=b$ dengan kecepatan pada waktu $t$ diketahui adalah $v(t)$. Untuk sederhananya, pada interval $[a, b]$ dibuat partisi **seragam**.




$$\Delta t = \frac{b-a}{n}$$

Diperhatikan kecepatan pada interval ke $k$ :

$$I_k = [a+(k-1)\Delta t, \, a+k\Delta t].$$

Bila $\Delta t$ sangat kecil maka kecepatan di dalam interval ini relatif tetap. Jadi cukup masuk akal bila kecepatannya diaproksimasi(didekati) oleh fungsi konstan, yaitu

$$v(a+(k-1)\Delta t) .$$

Perubahan posisi benda pada interval ini adalah

$$v(a+(k-1)\Delta t)\,\Delta t ,$$

yaitu *kecepatan × waktu tempuh*. Perubahan ini dapat positif (menjauh dari semula) atau negatif (mundur) bergantung pada nilai dari $v(a+(k-1)\Delta t)$. Jadi jarak yang ditempuh oleh benda sesungguhnya adalah

$$| v(a+(k-1)\Delta t) | \, \Delta t ,$$

dan total jarak yang ditempuh $t=a$ sampai $t=b$ diaproksimasi oleh:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} | v(a+(k-1)\Delta t) | \, \Delta t .$$

Bila dicermati kembali, bentuk ini adalah jumlahan Riemann fungsi $v$ pada $[a, b]$ dengan representasi $t_k^* = a+(k-1)\Delta t$. Berdasarkan Definisi (4.1) dan relasi (4), diperoleh jarak tempuhnya adalah:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b | v(t) | \, dt .$$

Masih banyak masalah aplikasi lainnya yang dapat disajikan sebagai integral tertentu dan pemodelannya dimulai dari pembentukan jumlahan Riemann.

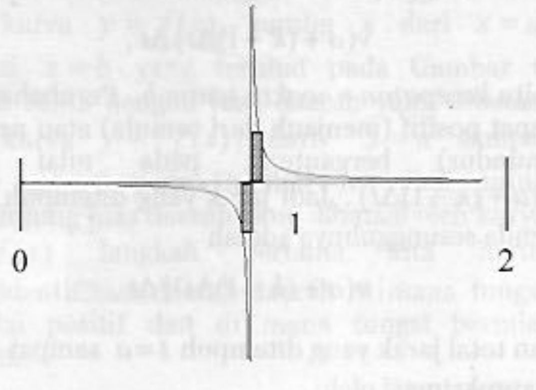
Kembali ke Definisi 4.1 kita mempunyai

$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ asalkan limit ini ada. Mungkinkah limit ini tidak ada ???.

Diperhatikan contoh berikut!

**Contoh 4.2** Diberikan fungsi $f:[0, 2]\to R$ dengan $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{untuk } x \neq 1 \\ 0 & \text{untuk } x = 1. \end{cases}$

Grafiknya disajikan pada Gambar 10.



Gambar 10

Sekarang diambil partisi

$P = \{x_0 = 0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ...x_n = 2\}$

dengan $x_k = 1$. Jadi kita tetapkan subinterval ke $k$ sebagai $I_k = [x_{k-1}, 1]$.

Diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + ...$$

$$+ \underbrace{f(x_{k-1}^*)\Delta x_{k-1}}_{(\#)} + \underbrace{f(x_k^*)\Delta x_k}_{(\#\#)} + ... + f(x_n^*)\Delta x_n.$$

Sekarang pusatkan perhatian pada suku (#) dan (##). Bila $\|P\| \to 0$ maka $x_{k-1}^* \to 1^-$ dan $x_k^* \to 1^+$ sehingga $f(x_{k-1}^*) \to -\infty$ dan $f(x_k^*) \to +\infty$. Jadi diperoleh:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \infty - \infty$$

yaitu bentuk yang tidak terdefinisi. Dalam kasus ini, limit jumlahan Riemann tidak ada dan dikatakan fungsi pada contoh ini **tidak terintegral** pada $[0,2]$.

Salah satu syarat cukup agar suatu fungsi terintegral adalah ia kontinu. Kekontinuan pada suatu interval tertutup $[a, b]$ akan menjamin keterbatasan sehingga jumlahan Riemann pada sebarang partisi selalu ada. Pada Bartle dan Sherbet (1994), pendefinisian integral Riemann dilakukan dengan menggunakan jumlahan bawah dan jumlahan atas. Definisi 4.1 di atas merupakan salah satu bentuk khusus dari definisi ini. Dengan definisi ini, sesungguhnya masih ada kondisi yang lebih ringan agar suatu fungsi terintegral, misalnya setiap fungsi kontinu sepotong-sepotong dan terbatas pasti terintegral. Perhitungan integral untuk kasus seperti ini biasanya dikerjakan dengan memecah domain integrasi menjadi beberapa subdomain.

## 5. Teorema Dasar Kalkulus

Dapat dibayangkan betapa sulitnya materi kalkulus integral bila setiap akan menghitung integral tertentu harus menggunakan Definisi 4.1, yaitu dengan mendefinisikan jumlahan Riemann pada interval integrasinya. Untungnya, terdapat relasi yang menakjubkan antara integral tertentu dengan antiderivatif. Relasi ini dikenal dengan Teorema Dasar Kalkulus (*Fundamental Theorem of Calculus*) tipe I. Ketiga nama dalam sejarah matematika: Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Leibniz (1646-1716) dan Bernhard Riemann (1826-1866) sangat berperan dalam melahirkan Teorema yang sangat penting ini.

**Teorema Dasar Kalkulus (TDK) Tipe I**

*Misalkan* $f : [a,b] \to R$ *kontinu pada* $[a,b]$. *Bila terdapat fungsi* $F$ *kontinu pada* $[a,b]$ *dan* $F'(x) = f(x)$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, *yaitu* $F$ *adalah antiderivatif* $f$, *maka*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (5)$$

**Bukti** : Ambil sebarang partisi pada $[a,b]$

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) \\ &+ \cdots + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) \qquad (i)\end{aligned}$$

Diterapkan TNR tipe I untuk $F$ pada interval $[x_{k-1}, x_k]$. Berdasarkan TNR ini terdapat

$x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ sehingga diperoleh:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$
$$= F'(x_k^*)\Delta x_k \qquad (ii)$$

Berdasarkan $(i)$ dan $(ii)$ maka diperoleh :

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} F'(x_k^*)\Delta x_k$$

$$\Leftrightarrow \qquad F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k .$$

Diperhatikan, pada ruas kanan relasi ini merupakan jumlahan Riemann fungsi $f$ pada $[a,b]$. Jika diambil limit untuk $\|P\| \to 0$ pada kedua ruas diperoleh:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k .$$

Dengan menggunakan Definisi 4.1 diperoleh:

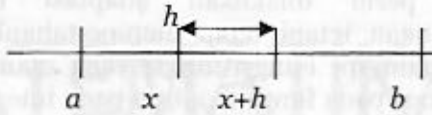
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = F(b) - F(a).$$

**Bukti selesai.**

Diperhatikan pada TDK tipe I, fungsi $f$ **hanya** disyaratkan kontinu dan **tidak mesti nonnegatif** atau naik saja atau turun saja. Jadi interpretasi TDK sebagai luas daerah adalah **terlalu sempit**. Dengan TDK maka perhitungan integral tertentu menjadi sangat mudah.

> **Teorema Dasar Kalkulus (TDK) Tipe II**
>
> *Misalkan* $f : [a,b] \to R$ *kontinu pada* $[a,b]$.
> *Bila didefinisikan fungsi* $F$ *pada* $[a,b]$ *dengan*
>
> $$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$
>
> *maka* $F$ *merupakan antiderivatif dari* $f$ *yaitu*
> $F'(x) = f(x)$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$.

**Bukti :** Gunakan definisi derivatif $F$ di titik $x$.




$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right]$$

Dengan menerapkan TNR tipe II untuk fungsi $f$ pada interval $[x, x+h]$ maka terdapat $c \in [x, x+h]$ sehingga $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h\,f(c)$.

Diperhatikan bila $h \to 0$ maka $x \to c$. Jadi diperoleh:

$$F'(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{h}[h\,f(c)]$$
$$= \lim_{x \to c} f(c) = f(x).$$

**Bukti selesai.**

Dengan demikian kita telah membuktikan bahwa integral taktentu pada Definisi 3.1 merupakan antiderivatif khusus fungsi $f$. Terdapat pula referensi lainnya yang menyebut fungsi $F$ sebagai **fungsi primitif** dari $f$.

## 6. Penutup

Demikianlah tulisan ini semoga dapat memberikan tambahan wawasan bagi guru matematika SMA dan pembaca lainnya. Materi pada artikel termuat dalam materi kuliah **Pengantar Analisis Real** yang biasa diberikan oleh penulis pertama pada **Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UAD Yogyakarta** dan sangat erat kaitannya dengan materi matematika SMA. Bahkan materi ini adalah sebagian kecil dari materi skripsi yang sedang dikerjakan oleh penulis kedua.

Penerapan materi ini pada kalkulus integral di SMA perlu dilakukan adaptasi dan penyederhanaan tetapi tetap mempertahankan kebenaran konsep. Fungsi-fungsi yang diambil cukup dibatasi pada fungsi kontinu pada interval tertutup sehingga beberapa definisi seperti antiderivatif, integral taktentu dan integral tertentu selalu *well-defined* (terdefinisi dengan baik). Ada baiknya integral taktentu kita sebut sebagai **antiderivatif khusus** karena tidak mengandung konstanta sebarang. Sedangkan antiderivatif adalah antiderivatif khusus yang memuat konstanta sebarang. Penyajian dan pembuktian Teorema Dasar Kalkulus khususnya tipe I perlu dilakukan dengan benar. Untuk itu diperlukan pengenalan Teorema Rata-rata sebagai teorema pendukung.

Sekali lagi materi pada artikel ini ditujukan untuk guru-guru SMA yang sebagian besar bergelar sarjana. Semakin tinggi dan luas pengetahuan seorang guru maka semakin besar peluang untuk keberhasilan dalam mengajar. Penguasaan materi dengan baik adalah syarat perlu bagi seorang guru tetapi belumlah cukup sebelum dia mampu mentransfer pengetahuan tersebut ke peserta didik.

## DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G *and* R.Sherbert. 1994. Introduction *to Real Analysis*, 2nd *Edition*, New York : John Willey and Sons.

Bradley G.L. and K.J. Smith 1995. *Calculus*, Prentice Hall, New Jersey.

Daiman, D. E, Listya T. D dan Herawati. 2000, *Matematika 3A*. Yudistira, Jakarta .

Education Development Center, 2002. *Making mathematics*. http://www.edc.org/makingmath.

Depdiknas. 2003. Kurikulum 2004, *Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika*.

Wirodikromo, S. 2002. *Matematika untuk SMA Kelas XII*, Jilid 5. Erlangga, Jakarta.

***1) Dr. Julan Hernadi***
*Pemerhati masalah pendidikan matematika, mengajar pada program studi Pendidikan Matematika FKIP UAD dan jurusan Matematika FMIPA UAD, FKIP UNMUH Ponorogo, FMIPA UII, e-mail : julan_hernadi@yahoo.com*

***2) Nurbaety Ningrum***
*Mahasiswa semester VIII program studi Pendidikan Matematika FKIP UAD, Yogyakarta.*

---❖❖❖---