MODUL

MATEMATIKA II

Disusun Oleh:
INDANAZULFA QURROTA A'YUN

PRODI EKONOMI PEMBANGUNAN
FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN
2020/2021

KATA PENGANTAR

Penyusunan modul Matematika Ekonomi ini pada dasarnya untuk mmebantu kebutuhan literatur bagi mahasiswa Fakultas Ekonomi. Selain ditujuka untuk membantu mahasiswa dan memahami Matematika Ekonomi, modul ini dapat digunakan untuk mempelajari mata kuliah lain yang terkait dengan bidang ekonomi. Dengan mempelajari modul ini paling tidak mahasiswa akan memiliki pengetahuan tentang pengetahuan tentang alat dasar kuantitatif untuk analisis ekonomi seperti mempelajari diferensial fungsi sederhana, diferensial fungsi majemuk: penerapan ekonomi, limit, matrik serta himpunan dan sistem bilangan.

Sebagai langkah awal dalam penyusunan modul ini, modul ini merupakan hasil kompilasi dari beberapa penulis sehingga atas dasar tersebut penulis menyadari bahwa modul ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karenanya penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca.

Yogyakarta, 3 Maret 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
DIFERENSIAL & APLIKASINYA

A. Penerapan Teori Diferensial Biasa

Teori Diferensial biasa diterapkan dalam berbagai masalah diantaranya untuk mencari : laju pertumbuhan, optimasi (nilai maksimum dan minimum), dan elastisitas titik: analisis fungsi dan grafis.

Fungsi Marginal menggambarkan laju pertumbuhan suatu variabel terikat akibat perubahan variabel bebasnya. Secara umum jika diberikan fungsi total sebagai berikut : y = f (x), maka diperoleh fungsi Marginalnya $\frac{dy}{dx}$: laju perubahan y akibat perubahan x sebanyak 1 unit.

B. Contoh Soal

Contoh 1: Marginal Pendapatan (Marginal Revenue)

Fungsi permintan diberikan P = 3Q + 27, di mana P : Price (harga) dan Q : Output. Bagaimanakah fungsi marginal pendapatannya (Marginal Revenue) dan berapa nilai marginal pendapatannya jika perusahaan memproduksi 10 output, serta terangkan artinya!

Jawab:

Fungsi total pendapatan (Total Revenue)

$R = P.Q$

$R = (3Q + 27).Q$

$R = 3Q^2 + 27Q$

Fungsi marginal pendapatan (Marginal Revenue)

$MR = \frac{dR}{dQ} = 6Q + 27$

Jika perusahaan berproduksi pada tingkat output Q = 10 , maka

$$
\begin{aligned}
MR = \frac{dR}{dQ} &= 6Q + 27 \\
&= 6(10) + 27 \\
&= 60 + 27 \\
&= 87
\end{aligned}
$$

Artinya :

untuk setiap peningkatan penjualan Q yang dijual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya tambahan pendapatan sebesar 87, sebaliknya untuk setiap penurunan penjualan Q yang dijual sebanyak 1 unit akan banyak menyebabkan adanya pengurangan pendapatan sebesar 87.

Contoh 2:

Fungsi Permintaan diberikan Q = 6 - 5P; dimana P: Price (harga) dan Q: Penjualan. Bagaimanakah Fungsi marginal pendapatanya (Marginal Revenue) dan berapakah nilai marginal pendapatanya jika perusahaan memproduksi baru 1 penjualan, serta terangkan artinya.

Jawab:

Karena fungsi permintaanya Q = 6 - 5P, dimana harus diubah dahulu menjadi

$P = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}Q$, barulah mencari fungsi total pendapatan (Total Revenue):

$R = P.Q$

$R = (\frac{6}{5} \; - \frac{1}{5}Q)\ Q$

$R = \frac{6}{5}\ Q - \frac{1}{5}\ Q^2$

Fungsi marginal pendapatan (Marginal Revenue):

$MR = \frac{dR}{dQ} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}Q$

Jika perusahaan berproduksi pada tingkat output Q = 1, maka

$MR = \frac{dR}{dQ} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}(1) = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

<u>**Artinya :**</u>

untuk setiap peningkatan penjualan Q yang dijual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya tambahan pendapatan sebesar $\frac{4}{5}$, sebaliknya untuk setiap penurunan penjualan Q yang dijual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya pengurangan pendapatan sebesar $\frac{4}{5}$, sebaliknya untuk setiap penurunan .

Contoh 3:

Fungsi Pendapatan Rata-rata (*Average Revenue*) diberikan AR = 80 – 4Q. Bagaimanakah fungsi marginal pendapatannya (**Marginal Revenue**) dan berapakah nilai marginal pendapatannya jika perusahaan memproduksi 7 output, serta terangkan artinya.

Jawab:

<u>Fungsi total pendapatan </u>(*Total Revenue*) :

$R = AR . Q$

$R = (80 – 4Q)\ Q$

$R = 80Q – 4Q^2$

<u>Fungsi marginal pendapatan</u> (*Marginal Revenue*) :

MR = $\frac{dR}{dQ}$ = 80 - 8Q

Jika perusahaan memproduksi pada tingkat output Q = 7, maka

MR = $\frac{dR}{dQ}$ = 80 - 8(7) = 80 – 56 = 24

Artinya :

Untuk setiap peningkatan output Q yang di jual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya tambahan pendapatan sebesar 24, sebaliknya untuk setiap penurunan penjualan Q yang di jual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya pengurangan pendapatan sebesar 24.

Contoh 4:

Fungsi Total Biaya suatu perusahaan dinyatakan sebagai berikut :

$C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 75$

Bagaimanakah fungsi marginal biayanya (*Marginal cost*) dan berapakah nilai marginal biaya tersebut jika perusahaan memproduksi 2 penjualan, serta terangkan artinya !

Jawab:

Fungsi total biaya (total biaya):

$C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 75$

Fungsi Marginal Biaya (marginal cost):

$C' = 3Q^2 - 8Q + 10$

Jika perusahaan berproduksi pada tingkat penjualan Q = 2, maka

$$\begin{aligned} MC = C' &= 3Q^2 - 8Q + 10 \\ &= 3(2)^2 - 8(2) + 10 \\ &= 12 - 16 + 10 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Artinya :

Untuk setiap peningkatan penjualan Q yang dijual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya tambahan biaya sebesar 6, sebaliknya untuk setiap penurunan penjualan Q yang dijual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya pengurangan biaya sebesar 6.

Contoh 5: Memaksimalkan Toral Pendapatan (Total Revenue)

Harga jual barang P = - 2Q + 16, tentukan berapa output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh total pendapatan maksimum.

Jawab:

Fungsi total pendapatan:

$P = -2Q + 16$

$R = P.Q = (-2Q + 16)Q$

$R = -2Q^2 + 16Q$

Langkah pertama mencari turunan pertama fungsi total pendapatan kemudian dibuat = 0

$R' = -4Q + 16 = 0$

$4Q = 16$

$Q = 4$

Agar dijamin bahwa jika menjual sebanyak Q = 4 maka akan diperoleh total pendapatan maksimum, maka lakukanlah langkah kedua yaitu mencari turunan kedua fungsi total pendapatan:

$R'' = -4$

Ternyata $R'' = -4 < 0$ sehingga diperoleh nilai maksimum

Jadi output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh total pendapatan maksimum yaitu sebanyak 4

Total pendapatan maksimumnya:

$R = -2Q^2 + 16Q$

$R = -2(4)^2 + 16(4)$

$R = 32$

Jadi ketika menjual produk sebanyak 4, maka akan diperoleh total pendapatan maksimum sebesar 32.

Contoh 6: Memaksimasi Marginal Pendapatan (Marginal Revenue)

Harga jual barang P = 16 - 2Q, tentukan berapa output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh marginal pendapatan maksimum. Berapakah marginal pendapatan maksimum tersebut ?

Jawab:

Fungsi permintaan : $P = 16 - 2Q$

Fungsi total pendapatan: $R = P.Q = (16 - 2Q)Q$

$= 16Q - 2Q^2$

Fungsi marginal pendapatan: $MR = 16Q - 2Q^2$

Turunan pertama: $MR' = 16 - 4Q = 0$

$16 = 4Q$

$Q = 4$

Turunan kedua: $MR'' = -4 < 0$

Jadi output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh marginal pendapatan maksimum sebanyak 4.

Marginal pendapatan maksimumnya:

$MR = 16Q - 2Q^2$

$= 16(4) - 2(4)^2$

$= 48$

Contoh 7: Meminimasi Total Biaya (Total Cost)

Biaya total dinyatakan dengan C(Cost) = $5Q^2$ - 1000Q + 85000. Pada tingkat produksi berapakah akan menyebabkan total biaya minimum? Berapakah total biaya minimum tersebut?

$C = 5Q^2 - 1000Q + 85000$

$C' = 10Q - 1000$

$10Q - 1000 = 0$

$10Q = 1000$

$Q = 100$

Turunan kedua : $C'' = 10 > 0$

Jadi total biaya minimum akan tercapai jika berproduksi sebanyak 100 unit.

Total biaya minimumnya sebesar:

$C = 5Q^2 - 1000Q + 85000$

$C = 5(100)^2 - 1000(100) + 85000$

$C = 35000$

Jadi total biaya minimumnya sebesar: 35000

Contoh 8: Meminimasi Marginal Biaya (Marginal Cost)

Biaya total dinyatakan dengan C (Cost) = $Q^3 - 90Q^2 + 2800Q + 56500$. Pada tingkat produksi berapakah akan menyebabkan marginal biaya minimum?. Berapakah marginal biaya minimum tersebut?

Jawab:

Fungsi total biaya: $C = Q^3 - 90Q^2 + 2800Q + 56500$

Fungsi marginal biaya: $MC = 3Q^2 - 180Q + 2800$

Turunan pertama: $MC' = 6Q - 180$

$6Q - 180 = 0$

$6Q = 180$

$Q = 30$

Turunan kedua: $MR'' = 6 > 0$

Jadi output yang harus diproduksi agar diperoleh marginal biaya minimum sebanyak 30.

Marginal biaya minimum:

$MC = 3Q^2 - 180Q + 2800$

$\quad = 3(30)^2 - 180(30) + 2800$

$\quad = 100$

Jadi marginal biaya minimum akan tercapai jika berproduksi sebanyak 30 unit : 100

BAB II
DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA

A. Kuosien Diferensi dan Derivatif

y = f(x) dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δx

Maka :

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

Δ x adalah tambahan x, sedangkan Δ y adalah tambahan y akibat adanya tambahan x. Jadi Δy timbul karena adanya Δx.

Apabila pada persamaan (1) ruas kiri dan ruas kanan sama-sama dibagi Δx, maka diperoleh:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bentuk Δy/ Δx inilah yang disebut sebagai hasil bagi perbedaan atau kuosien diferensi (difference quotient), yang mencerminkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap perubahan variabel bebas x. Proses penurunan fungsi disebut juga proses diferensiasi yang merupakan penentuan limit suatu kuosien diferensi (Δx sangat kecil)

Hasil proses diferensiasi dinamakan turunan atau derivatif (*derivative*). Jika y = f(x)

Maka kuosien diferensinya:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

B. Penotasian

Cara penotasian dari turunan suatu fungsi dapat dilakukan dengan beberapa macam:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$$

Δx sangat kecil maka = Δy / Δx

Kuosien diferensi Δy/ Δx □slope / lereng dari garis kurva y = f(x)

C. Kaidah-kaidah Diferensiasi

1. Diferensiasi konstanta

   Jika y = k, dimana k adalah konstanta, maka dy/dx = 0

   contoh : y = 5 ➔ dy/dx = 0

2. Diferensiasi fungsi pangkat

   Jika y = xn, dimana n adalah konstanta, maka dy/dx = nxn-1

   contoh : y=x3 ➔ dy/dx=3x3-1=3x2

3. Difensiasi perkalian konstanta dengan fungsi

   Jika y = kv, dimana v = h(x), ➔ dy/dx = k dv/dx

   contoh : y = 5x3 □ dy/dx = 5(3x2) = 15x2

4. Diferensiasi pembagian konstanta dengan fungsi

   jika y = k/v, dimana v=h(x), maka:

   $$\frac{dy}{dx} = -\frac{kdv/dx}{v^2}$$

   $$contoh: y = \frac{5}{x^3}, \frac{dy}{dx} = -\frac{5(3x^2)}{(x^3)^2} = -\frac{15x^2}{x^6}$$

5. Diferensiasi penjumlahan/pengurangan fungsi

   jika y = u + v, dimana u = g(x) dan v = h(x)

   maka dy/dx = du/dx + dv/dx

   contoh : y = 4x2 + x3 ➔ u = 4x2 du/dx = 8x

   ➔ v = x3 dv/dx = 3x2

   dy/dx =du/dx + dv/dx = 8x + 3x2

6. Diferensiasi perkalian fungsi

   Jika y = uv, dimana u = g(x) dan v = h(x)

   $$maka \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

   $$contoh: y = (4x^2)(x^3)$$

   $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = (4x^2)(3x^2) + (x^3)(8x) = 12x^4 + 8x^4 = 20x^4$$

7. Diferensiasi pembagian fungsi

   Jika y = u/v. dimana u = g(x) dan v = h(x)

$$maka \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$contoh : y = \frac{4x^2}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{(x^3)(8x) - (4x^2)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$\frac{8x^4 - 12x^4}{x^6} = \frac{-4}{x^2} = -4x^{-2}$$

8. Diferensiasi Fungsi Komposit

   Jika y=f(u) sedangkan u=g(x),dengan bentuk lain y=f{g(x)}, maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$contoh : y = (4x^3 + 5)^2 \Rightarrow misal : u = 4x^3 + 5 \Rightarrow y = u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 12x^2, \frac{dy}{du} = 2u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx} = 2u(12x^2) = 2(4x^3 + 5)(12x^2) = 96x^5 + 120x^2$$

9. Diferensiasi fungsi berpangkat

   Jika $y=u^n$, dimana u=g(x) dan n adalah konstanta, maka dy/dx =nu $^{n-1}$. (du/dx). Contoh:

$$y = (4x^3 + 5)^2, \Rightarrow misal : u = 4x^3 + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \bullet \frac{du}{dx} = 2(4x^3 + 5)(12x^2) = 96x^5 + 120x^2$$

10. Diferensiasi fungsi logaritmik

    Jika y = alogx, maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$contoh : y = {}^5\log 2, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{2 \ln 5}$$

11. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik

    Jika y=alogu, dimana u=g(x), maka :

$$dy/dx = \frac{{}^a\log e}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh} : y = \log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

$$\text{misalkan } : u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$dy/dx = \frac{{}^a\log e}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{\log e}{\left(\frac{x-3}{x+2}\right)} \bullet \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5\log e}{(x-3)(x+2)} = \frac{5\log e}{(x^2 - x - 6)}$$

12. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-berpangkat

Jika y = (^{a}logu)^{n}, dimana u = g(x) dan n adalah konstanta, maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{{}^{a}\log e}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh}: y = (\log 5x^2)^3$$

$$\text{misalkan} \;\; u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\log 5x^2)^2 \left(\frac{\log e}{5x^2} \right) (10x)$$

$$= \frac{30x(\log 5x^2)^2 \log e}{5x^2} = \frac{6}{x} (\log 5x^2)^2 \log e$$

13. Diferensiasi fungsi logaritmik-Napier

Jika y = ln x, maka dy/dx = 1/x

Contoh : y = ln 5, dy/dx = 1/x = 1/5

14. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-Napier

Jika y = ln u, dimana u = g(x), maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh}: y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2} \right)$$

$$\text{misalkan}: u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)}{(x-3)} \bullet \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x^2 - x - 6)}$$

15. Diferensiasi fungsi KOmposit-Logaritmik-Napier-Berpangkat

Jika y = (ln u)n, dimana u = g(x) dan n : konstanta

Maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{1}{u} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\text{contoh}: y = (\ln 5x^2)^3$$

$$\text{misalkan} \;\; u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5x^2)^2 \left(\frac{1}{5x^2} \right) (10x) \;\; = \frac{6}{x} (\ln 5x^2)^2$$

16. Diferensiasi fungsi eksponensial

Jika y = ax, dimana a : konstanta, maka :dy/dx = ax ln a

Contoh : y = 5x,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a = 5^x \ln 5$$

Dalam hal $y = e^x$, maka $\frac{dy}{dx} = e^x$ juga,

sebab $\ln e = 1$

17. Diferensiasi fungsi komposit-eksponensial

Jika y = au dimana u = g(x), maka:

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

Contoh : $y = 9^{3x^2-4}$ misalkan $u = 3x^2 - 4 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx} = 9^{3x^2-4}(\ln 9)(6x) = (6x)9^{3x^2-4} \ln 9$$

Kasus Khusus : dalam hal $y = e^u$, maka $\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

18. Diferensiasi fungsi kompleks

Jika y = uv, dimana u =g(x) dan v =h(x)

Maka:

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \bullet \frac{du}{dx} + u^v \bullet \ln u \bullet \frac{dv}{dx}$$

contoh : $y = 4x^{x^3}$, misalkan : $u = 4x \rightarrow du/dx = 4$

$v = x^3 \rightarrow dv/dx = 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \bullet \frac{du}{dx} + u^v \bullet \ln u \bullet \frac{dv}{dx}$$

$$= (x^3)4x^{x^3-1}(4) + 4x^{x^3} \ln 4x(3x^2)$$

$$= 16x^{x^3+2} + 12x^{x^3+2} \ln 4x$$

$$= 4x^{x^{3+2}}(4 + 3\ln 4x)$$

19. Diferensiasi fungsi balikan

Jika y = f(x) dan x = g(y) adalah fungsi-fungsi yang saling berbalikan (inverse functions)

Maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dy/dx}$$

contoh :

$$x = 5y + 0{,}5y^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 + 2y^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{(5+2y^3)}$$

20. Diferensiasi implisit

Jika f (x, y)=0 merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplisitkan), dy/dx dapat diperoleh dengan mendiferensiasikan suku demi suku, dengan menganggap y sebagai fungsi dari x.

Contoh:

$contoh:$

$$4xy^2 - x^2 + 2y = 0, \text{tentukan } \frac{dy}{dx}$$

$$8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8xy + 2)\frac{dy}{dx} = 2x - 4y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y^2}{8xy + 2} = \frac{x - 2y^2}{4xy + 1}$$

BAB III
DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK

A. Definisi Diferensial Fungsi Majemuk

Diferensial fungsi majemuk merupakan diferensiasi untuk fungsi-fungsi yang mengandung lebih dari satu macam variabel bebas: diferensial parsial.

1. $y = f(x,z)$

$$y = f(x,z)$$

$$y' \begin{cases} f_x(x,z) = \dfrac{\partial y}{\partial x} \\ f_z(x,z) = \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{cases}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz$$

2. $p = f(q,o,s)$

   $p' = ….$

Contoh:

$y = x^3 + 5z^2 - 4x^2 z - 6xz^2 + 8z - 7$

$\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 8xz - 6z^2$

$\frac{\partial y}{\partial z} = 10z - 4x^2 - 12xz + 8$

$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz$

$dy = (3x^2 - 8xz - 6z^2)\,dx + (10z - 4x^2 - 12xz + 8)\,dz$

Dalam contoh diatas $\partial y/\partial x$ maupun $\partial y/\partial z$ masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap z

(1a) $\frac{\partial y}{\partial x}$ terhadap x : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x - 8z$

(1b) $\frac{\partial y}{\partial x}$ terhadap z : $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -8x - 12z$

(2a) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap x : $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = -8x - 12z$

(2b) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap z : $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 10 - 12x$

B. Nilai Ekstrim: Maksimum & Minimum

Untuk $y = f(x,z)$ maka y akan mencapai titik ekstrimnya jika :

$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$

Untuk mengetahui apakah titik ekstrimnya berupa titik maksimum atau titik minimum maka dibutuhkan syarat:

Maksimum bila $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ dan $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0$

Minimum bila $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ dan $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0$

Contoh:

Tentukan apakah titik ektrim dari fungsi dibawah ini merupakan titik maksimum atau minimum:

$y = -x^2 + 12x - z^2 + 10z - 45$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -2x + 12 \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -2z + 10$

$-2x + 12 = 0, \quad x = 6 \qquad -2z + 10 = 0, \quad z = 5$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2 \; < 0$ (maks) $\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -2 \; < 0$ (maks)

$y = -(6)^2 + 12(6) - (5)^2 + 10(5) - 45$

$y_{maks} = -36 + 72 - 25 + 50 - 45 = 16$

C. Optimisasi Bersyarat

Ketika kita ingin mengoptimumkan suatu fungsi yakni mencari nilai maksimum atau minimumnya, tetapi terhalang oleh fungsi lain yang harus dipenuhi. Contoh dalam kasus ekonomi:

1. Ketika seseorang hendak memaksimumkan utilitas atau kepuasannya, tetapu terikat pada fungsi pendapatan
2. Sebuah perusahaan ingin memaksimumkan labanya, namun terikat pada fungsi produksi

D. Pengganda Lagrange

Pengganda Lagrange merupakan Metode penyelesaian menghitung nilai ekstrim suatu fungsi yang mengahadapi kendala. Caranya dengan membentuk fungsi baru yang disebut fungsi Lagrange dengan menjumlahkan fungsi yang hendak dioptimumkan dan hasil kali pengganda Lagrange dengan fungsi kendala. Fungsi yang dioptimumkan : z = f(x,y), serta syarat yang harus dipenuhi: : u = g(x,y) maka fungsi Lagrangenya :

$$\mathbf{F\,(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)}$$

Nilai ekstrim dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivatif parsial pertama = 0

$F_x\,(x,y,\lambda) = f_x + \lambda g_x = 0$

$F_y\,(x,y,\lambda) = f_y + \lambda g_y = 0$

Untuk mengetahui jenis nilai ektrimnya, maksimum atau minimum maka syaratnya adalah :

Maksimum bila $F_{xx} < 0$ dan $F_{yy} < 0$

Minimum bila $F_{xx} > 0$ dan $F_{yy} > 0$

Contoh 1:

Tentukan nilai ekstrim z dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x + y = 8$. Jelaskan jenis nilai ekstrimnya.

Fungsi Lagrange : $F = 2x + 2y + \lambda(x + y - 8)$

$$F = 2x + 2y + \lambda x + \lambda y - 8\lambda$$

F ekstrim, F' = 0

$F_x = 2 + 2\lambda x = 0$, diperoleh $\lambda = -1/x$ ………….(1)

$F_y = 2 + 2\lambda y = 0$, diperoleh $\lambda = -1/y$ ………….(2)

Berdasarkan (1) dan (2) : $-1/x = -1/y$ maka $x = y$

Fungsi Kendala : $x + y = 8$

$y + y = 8$

$2y = 8$, $y = 4$, $y = \pm 2$

Karena $y = \pm 2$, $x = \pm 2$

$z = 2x + 2y = \pm 8$

jadi nilai ekstrim $z = \pm 8$

Penyidikan nilai ekstrimnya :

untuk $x = 2$ dan $y = 2$, $\lambda = -1/2$

$F_{xx} = 2\lambda = -1 < 0$

$F_{yy} = 2\lambda = -1 < 0$

Karena F_{xx} dan $F_{yy} < 0$ nilai ekstrimnya adalah nilai maksimum dengan $z_{maks} = 8$

Untuk $x = -2$ dan $y = -2$, $\lambda = ½$

$F_{xx} = 2\lambda = 1 > 0$

$F_{yy} = 2\lambda = 1 > 0$

Karena F_{xx} dan $F_{yy} > 0$ nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min} = -8$

Contoh 2:

Optimumkan $z = xy$ dengan syarat $x + 2y = 10$

$F = xy + \lambda(x + 2y – 10)$

$F = xy + \lambda x + 2\lambda y - 10\lambda$

Jawab :

Syarat yang diperlukan agar F optimum, F' = 0

$F'x = y + \lambda = 0$ diperoleh $\lambda = -y$

$F'y = x + 2\lambda = 0$ diperoleh $\lambda = -1/2\ x$

$-y = -1/2x$ maka $2y = x$

Fungsi Kendala : $x + 2y = 10$

$x + 2y = 10$

$2y + 2y = 10$, $4y = 10$, $y = 2,5$

$X = 2(2,5) = 5$

Jadi Z optimum pada x = 5 dan y = 2,5

$Z_{opt} = xy = (5)\ (2,5) = 12,5$

A. Kondisi Kuhn Tucker

Metode Kuhn Tucker merupakan pengembangan lebih lanjut dari model optimisasi bersyarat. Jika dalam metode pengganda Lagrange, yang dioptimalkan adalah fungsi terhadap kendala yang berbentuk persamaan. Dalam metode Kuhn Tucker, yang dioptimumkan sebuah fungsi yang berbentuk pertidaksamaan.

Maksimumkan fungsi tujuan f(x,y) terhadap kendala $g(z,y) \leq 0$ atau

Minimumkan fungsi tujuan f(x,y) terhadap kendala $g(z,y) \geq 0$

Cara penyelesaiannya ada 2 :

1. Dengan metode Lagrange yang dimodifikasi kemudian diuji dengan kondisi Kuhn Tucker :

   Fungsi baru Lagrange : $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\ g(x,y)$

   Dilakukan pengujian terhadap nilai λ

   Jika $\lambda \leq 0$ berarti optimisasi fungsi tujuan f(x,y) tanpa menyertakan fungsi kendala g(x,y) sudah dengan sendirinya memenuhi kendala, sehingga dapat diabaikan

   Jika $\lambda > 0$ kendalanya bersifat mengikat sehingga nilai optimum yang diperoleh berdasarkan fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan.

2. Metode Kuhn Tucker secara langsung :

   Rumuskan permasalahannya, misalnya maksimumkan f(x,y) thd $g(x,y) \leq 0$ atau minimumkan f(x,y) thd $g(x,y) \geq 0$

   Tetapkan kondisi Kuhn Tucker :

   (a) $\partial\ f(x,y) - \lambda \frac{\partial g\ (x,y)}{\partial x} = 0$

   (b) $\frac{\partial f\ (x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g\ (x,y)}{\partial y} = 0$

(c) $\lambda\, g(x,y) = 0$ dimana $g(x,y) \leq 0$ atau $g(x,y) \geq 0$

Diuji untuk $\lambda = 0$ dan $g(x,y) = 0$ untuk menentukan mana diantara yang memenuhi persamaan (a) dan (b) serta pertidaksamaan kendala g(x,y).

Nilai-nilai x dan y yang memenuhi ketiga kondisi ini merupakan nilai-nilai yang mengoptimumkan fungsi tujuan f(x,y)

Contoh 1:

Maksimumkan $f(x,y) = 10xy – 2{,}5x – y$ terhadap kendala $x + y \leq 9$

Dengan menganggap $x + y = 9$ maka berdasarkan metode Lagrange :

$$F(x,y, \lambda) = 10xy – 2{,}5x – y – \lambda(x+y-9)$$

$$F'x = 0 \rightarrow 10y – 5x – \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10y - 5x$$

$$F'y = 0 \rightarrow 10x – 2y – \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10x – 2y$$

$$10y – 5x = 10x – 2y$$

$$12y = 15x, \quad y = 1{,}25x \quad \text{atau} \quad x = 0{,}8y$$

Menurut kendala : $x + y = 9 \rightarrow 0{,}8y + y = 9$

$$1{,}8y = 9$$

$$y = 5$$

$$x = 0{,}8\,(5) = 4 \rightarrow f(x,y) \text{ maks} = 135$$

$$\lambda = 10(5) – 5(4) = 10(4) – 2(5) = 30$$

karena $\lambda > 0$ berarti x = 4 dan y = 5 yang memaksimumkan f(x,y) terhadap kendala yang dianggap berbentuk persamaan, berlaku juga terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan.

Contoh 2:

Minimumkan $f(x,y) = x – xy + 2y$ terhadap $x + y \geq 8$

Jawab:

Cara Kuhn Tucker

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \quad = 2x – y – \lambda = 0$

b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \quad = -x + 4y – \lambda = 0$

c) $\lambda\, g(x, y) = 0 \quad = \lambda\,(x + y – 8) = 0$

Jika $\lambda = 0$, maka agar (a) dan (b) terpenuhi haruslah x = y = 0, akan tetapi kemudian kendala $x + y \geq 8$ tidak terpenuhi.

Jika $x + y – 8 = 0$, dengan kata lain $y = 8 – x$ maka :

$2x – y – \lambda = 0 \rightarrow 2x – (8-x)- \lambda= 0 \rightarrow 3x – 8 – \lambda = 0$

$-x + 4y - \lambda = 0 \rightarrow -x + 4(8-x)-\lambda=0 \rightarrow -5x + 32 - \lambda = 0$

$\lambda = 3x - 8$ ….(1)

$\lambda = -5x + 32$ ….(2)

$3x - 8 = -5x + 32$

$8x = 24$

$x = 3$, $y = 8-3 = 5$

Dengan x=5 dan y=3 kendala $x+y \geq 8$ terpenuhi.

Jadi f(x,y) min = 28

BAB IV

DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK (PENERAPAN EKONOMI)

A. Permintaan Marjinal dan Elasitsitas Permintaan Parsial

Apabila dua macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaannya, maka permintaan akan masing-masing barang akan fungsional terhadap harga kedua macam barang tersebut. Dengan perkatan lain jika barang A dan barang B mempunyai hubungan penggunaan, maka:

$Q_{da} = f(P_a, P_b)$ dan $Q_{db} = f(P_a, P_b)$

Derivatif pertama dari Q_{da} dan Q_{da} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, di mana:

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_a

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_b

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_a

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_b

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut, dapat dihitung elastisitas parsialnya.

Dalam hal ini terdapat 2 macam elastisitas permintaan, yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan permintaan suatu barang berkenaan dengan harga barang tersebut (elastisitas harga-permintaan) dan elastisitas yang mengukur kepekaan permintaan suatu barang berkenaan dengan harga barang lain (elastisitas silang-permintaan).

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{da} &= \frac{\%\,\Delta Q_{da}}{\%\,\Delta P_a} = \frac{E\,Q_{da}}{E\,P_a} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}} \\
\eta_{db} &= \frac{\%\,\Delta Q_{db}}{\%\,\Delta P_b} = \frac{E\,Q_{db}}{E\,P_b} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}
\end{aligned}\right\}\ \text{Elastisitas harga-permintaan}$$

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{ab} &= \frac{\%\,\Delta Q_{da}}{\%\,\Delta P_b} = \frac{E\,Q_{da}}{E\,P_b} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}} \\
\eta_{ba} &= \frac{\%\,\Delta Q_{db}}{\%\,\Delta P_a} = \frac{E\,Q_{db}}{E\,P_a} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}
\end{aligned}\right\}\ \text{Elastisitas silang-permintaan}$$

Jika η_{ab} danη_{ba} keduanya bernilai negatif untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan B adalah komplementer atau saling melengkapi; sebab pernurunan harga suatu barang akan meningkatkan permintaan atas keduanya.

Jika η_{ab} danη_{ba} keduanya bernilai positif untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan B adalam kompetitif/substitutif atau saling menggantikan; sebab pernurunan harga suatu barang akan meningkatkan permintaan barang tersebut serta menurunkan permintaan atas barang lainnya.

Contoh:

Fungsi permintaan akan barang A dan barang B mesing-masing ditunjukkan oleh Q_{da}. $P_a^2.P_b^3 - 1 = 0$ dan Q_{db}. $P_a^3.P_b - 1 = 0$

Berapa elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut?

Fungsi permintaan akan barang A dan barang B mesing-masing ditunjukkan oleh Q_{da} . $P_a^2.P_b^3 - 1 = 0$ dan Q_{db}. $P_a^3.P_b - 1 = 0$

Berapa elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut?

$Q_{da} \,.\, P_a^2.P_b^3 - 1 = 0 \qquad Q_{db} \,.\, P_a^3.P_b - 1 = 0$

$Q_{da} = \frac{1}{P_a^2.Pb^3}\; Q_{db} = \frac{1}{P_a^3.Pb}$

$Q_{da} = P_a^{-2}.P_b^{-3} \qquad Q_{db} = P_a^{-3}.P_b^{-1}$

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} = -2P_a^{-3}.P_b^{-3} \qquad \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} = -3P_a^{-4}.P_b^{-1}$

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} = -3P_a^{-2}.P_b^{-4} \qquad \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} = -P_a^{-3}.P_b^{-2}$

$\eta_{da} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}} = -2P_a^{-3}.P_b^{-3} \cdot \frac{P_a}{P_a^{-2}.Pb^{-3}} = -2$

$\eta_{db} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}} = -P_a^{-3}.P_b^{-2} \cdot \frac{P_b}{P_a^{-3}.Pb^{-1}} = -1$

$\eta_{ab} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}} = -3P_a^{-2}.P_b^{-4} \cdot \frac{P_b}{P_a^{-2}.Pb^{-3}} = -3$

$\eta_{ba} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}} = = -3P_a^{-4}.P_b^{-1} \cdot \frac{P_a}{P_a^{-3}.Pb^{-1}} = -3$

Barang A elastis karena $|\eta_{da}|>1$

Barang B elastis-uniter karena $|\eta_{db}|=1$

Barang A dan B bersifat komplementer karena η_{ab} dan η_{ba} keduanya bernilai negatif

B. Perusahaan Dengan Dua Macam Produk dan Biaya Produksi Gabungan

Apabila sebuah perusahaan menghasilkan dua macam output, dan biaya yang dikeluarkannya untuk memproduksi kedua macam produk itu merupakan biaya produksi gabungan (joint production cost), maka perhitungan keuntungan maksimum yang diperolehnya dapat diselesaikan dengan pendekatan diferensiasi parsial. Dengan metode serupa pendekatan ini dapat pula digunakan untuk menganalisis kasus perusahaan yang menghasilkan lebih dari 2 macam produk yang biaya produksinya juga merupakan biaya produksi gabungan.

Andaikan sebuah perusahaan memproduksi 2 macam barang, A dan B, di mana fungsi permintaan akan masing-masing barang diserminkan oleh Q_a dan Q_b, serta biaya produksinya $C = f(Q_a,Q_b)$, maka:

Penerimaan dari memproduksi A : $R_a = Q_a .P_a = f(Q_a)$

Penerimaan dari memproduksi B : $R_b = Q_b .P_b = f(Q_b)$

Penerimaan total : $R = R_a + R_b = f(Q_a) + f(Q_a)$

Biaya total : $C = f(Q_a,Q_b)$, fungsi keuntungannya:

$\pi = R – C = f(Q_a) + f(Q_b) - f(Q_a,Q_b)$

π Maksimum bila $\pi' = 0$

$$\pi' \, Q_a = \frac{\partial \pi}{\partial Qa} = 0 \text{ ....(1)}$$

$$\pi' \, Qb = \frac{\partial \pi}{\partial Qb} = 0 \text{ ....(2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) nilai Q_a danQ_b dapat ditemukan sehingga π Maksimum bisa dihitung.

Contoh:

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi dua macam barang, A dan B, ditunjukkan oleh $C = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a.Q^b$

Harga jual masing-masing barang per unit adalah $P_a = 7$ dan $P_b = 20$.

Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum dan besarnya keuntungan maksimum tersebut.

$$\left.\begin{aligned} R_a &= Q_a .P_a = 7Q_a \\ R_b &= Q_b.P_b= 20Q_b \end{aligned}\right\} \quad R = R_a + R_b = 7Q_a + 20Q_b$$

$$\begin{aligned} \pi &= R – C = 7Q_a + 20Q_b – (Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a.Q_b) \\ &= -Q_a^2 -3Q_b^2 - Q_a.Q_b+7Q_a + 20Q_b \end{aligned}$$

π Maksimum bila $\pi' = 0$

$$\left.\begin{aligned} \pi'_{\,Qa} &= \frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = -2Q_a - Q_b+7 = 0 \\ \pi'_{\,Qb} &= \frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = -6Q_b - Q_a +20 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} Q_b &= -2Q_a + 7 \\ - 6(-2Q_a + 7) - Q_a +20 &= 0 \\ 12Q_a – 42 – Qa + 20 &= 0 \\ Q_a &= 2 \\ Q_b &= -2(2) + 7 =3 \end{aligned}$$

$$\pi = -(2)^2 –3(3)^2 – (2)(3) +7(2)+ 20(3) = 37$$

C. Utilitas Marjinal Parsial dan Keseimbangan Konsumsi

Dalam kenyataan sehari-hari, konsumen tidak hanya mengkonsumsi satu macam barang tetapi bermacam-macam. Jika kepuasan konsumen dilambangkan dengan U dan barang-

barang yg dikonsumsi dilambangkan dengan q_1 (i = 1,2,...,n), maka fungsi utilitas dapat dituliskan dengan notasi $U = f(q_1, q_2, q_3,...,q_n)$.

Seandainya untuk penyederhanaan konsumen hanya mengkonsumsi 2 macam barang, X dan Y, maka fungsi utilitasnya:

$$\mathbf{U = f(x,y)}$$

Derivatif dari U merupakan utilitas marjinal parsialnya

$\frac{\partial U}{\partial x}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang x

$\frac{\partial U}{\partial y}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang y

Keseimbangan konsumsi merupakan suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasan optimum. Secara geometri, keseimbangan konsumsi terjadi pada persinggungan kurva indeferensi dengan garis anggaran (*budget line*). Garis anggaran: mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing-masing dan pendapatan konsumen.

Jika pendapatan konsumen sebesar M dan harga barang x dan y adalah P_x dan P_y per unit, maka persamaan budget line dapat dituliskan dengan:

$$\mathbf{M = xP_x + yP_y}$$

Tingkat kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum dapat dicar dengan motode lagrange. Dengan fungsi utilitas U = f (x,y) dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M = xP_x + yP_y$.

Sesuai dengan metode lagrange, diperoleh fungsi baru:

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda(xP_x + yP_y - M)$

Agar F maksimum:

$F_x(x,y) = 0 \rightarrow f_x(x,y) + \lambda P_x = 0$ ....(1)

$F_y(x,y) = 0 \rightarrow f_y(x,y) + \lambda P_y = 0$ ....(2)

Selanjutnya perhatikan:

Utilitas total : U = f(x,y)

Utilitas marjinal : MU = U' = f'(x,y)

a. Utilitas marjinal barang x : $MU_x = f_x(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$
b. Utilitas marjinal barang y : $MU_y = f_y(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$

Sehingga:

$$\frac{f_x(x,y)}{P_x} = \frac{f_y(x,y)}{P_y}$$

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$$

$f_x(x,y) + \lambda P_x = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{f_x(x,y)}{P_x}$

$f_y(x,y) + \lambda P_y = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{f_y(x,y)}{P_y}$

Contoh:

Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang x dan y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2y^3$. Jumlah pendapatan konsumen 1.000 rupiah, harga barang x dan y per unit sebesar 25 rupiah dan 50 rupiah.

a) Bentuklah fungsi utilitas marjinal untuk masing-masing barang

b) Berapa utilitas marjinal tersebut jika konsumen mengkonsumsi 14 unit x dan 13 unit y?

c) Jelaskan apakah dengan menkonsumsi 14 unit x dan 13 unit y kepuasan konsumen optimum atau tidak.

Jawab

a) $U = x^2y^3 \rightarrow$ $MU_x = 2xy^3$

$MU_y = 3x^2y^2$

b) Jika x = 14 dan y = 13,

$MU_x = 2xy^3 = 2(14)(13)^3 = 61.516$

$MU_y = 3x^2y^2 = 3(14)^2(13)^2 = 99.372$

c) $\frac{MU_x}{P_x} = \frac{61.516}{25} = 2.460,64$

$\frac{MU_y}{P_y} = \frac{99.372}{50} = 1.987,44$

Karena $\frac{MU_x}{P_x} \neq \frac{MU_y}{P_y}$ berarti konsumsi 14 unit x dan 13 unit y kepuasan konsumen tidak optimum.

D. Produk Marjinal Parsial dan Keseimbangan Produksi

Untuk memproduksi suatu barang pada dasarnya diperlukan beberapa macam faktor produksi seperti tanah, modal, tenaga kerja, bahan baku, mesin-mesin dan sebagainya.

Sebagian dari masukan yang digunakan sudah barang tentu merupakan masukan tetap, sementara sebagian lainnya adalah masukan variabel. Selanjutnya jika untuk memproduksi suatu barang dianggap hanya ada dua macam masukan variabel (katakanlah K dan L), maka fungsi produksinya secara pasti dapat dinyatakan dengan:

P = f(k,l)

Derivatif pertama dari P merupakan produk marjinal parsialnya.

$\frac{\partial P}{\partial k}$ adalah produk marjinal dari masukan K

$\frac{\partial P}{\partial l}$ adalah produk marjinal dari masukan L

Untuk P = konstanta tertentu, fungsi produksi P = f(k,l) merupakan persamaan isoquant, yakni kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi penggunaan masukan K dan L yang menghasilkan keluaran dalam jumlah sama.

Keseimbangan produksi merupakan suatu keadaan atau tingkat kombinasi faktor-faktor produksi secara optimum, yakni tingkat pencapaian produksi dengna kombinasi biaya terendah (*least cost cmbination*). Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan garis biaya yang sama (*isocost*) dengan kurva produksi yang sama (*isoquant*).

Isocost : mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai macam masukan (faktor-faktor produksi) berkenaan dengan harganya masing-masing dan jumlah dana yang dimiliki.

Jika pendapatan produsen sebesar M dan harga barang x dan y adalah P_x dan P_y per unit, maka persamaan budget line dapat dituliskan dengan:

$$\mathbf{M = kP_x + lP_y}$$

Tingkat kombinasi produksi yang optimum dapat dicar dengan motode lagrange. Dengan fungsi produksi P = f (k,l) dimaksimumkan terhadap fungsi isocost $M = kP_k + lP_l$.

Sesuai dengan metode lagrange, diperoleh fungsi baru:

$F(k,l) = f(k,k) + \lambda(kP_k + lP_l - M)$

Agar F maksimum:

$F_k(k,l) = 0 \rightarrow f_k(k,l) + \lambda P_k = 0$ ....(1)

$F_l(k,l) = 0 \rightarrow f_l(k,l) + \lambda P_l = 0$ ....(2)

Selanjutnya perhatikan:

Produksi total : P = f(k,l)

Produksimarjinal : PU = U' = f'(k,l)

(i) Utilitas marjinal barang k : $MU_k = f_k(k,l) = \frac{\partial U}{\partial k}$

(ii) Utilitas marjinal barang l : $MU_l = f_l(k,l) = \frac{\partial U}{\partial l}$

Sehingga:

$$\left.\begin{array}{l} f_k(k,l) + \lambda P_k = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{f_k(k,l)}{P_k} \\ f_l(k,l) + \lambda P_l = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{f_l(k,l)}{P_l} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{f_x(x,y)}{P_x} = \frac{f_y(x,y)}{P_y} \\ \frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \end{array}$$

Contoh:

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan K dan L. Harga per unit K dan L adalah 4 rupiah dan 3 rupiah. Fungsi produksinya sebesar P = 12 kl. Berapa unit masing-masing masukan seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum, berapa unit kombinasi keluaran yang dihasilkan dari kombinasi tersebut?

Jawab:

Fungsi Produksi : $P = f(k,l) = 12\ kl$

Fungsi kendala : $M = kP_k + lP_l$

$96 = 4k + 3l$

Fungsi lagrange : $F(k,l) = 12\ kl + \lambda\ (4k + 3l - 96)$

Agar F maksimum:

$F_k = 12l + 4\lambda = 0$ $\lambda = -3\lambda$

$F_l = 12k + 3\lambda = 0$ $\lambda = -4\kappa$

$96 = 4k + 3(4/3k)$ Sehingga, $3l = 4k \rightarrow l = 4/3k$

$96 = 8k \rightarrow k = 12$, $l = 4/3(12) = 16$, $P = 12(12)(16) = 2304$ unit.

BAB V
FUNGSI LIMIT

A. Kaidah-kaidah Limit

1. Limit dari suatu konstanta adalah konstanta itu sendiri.

   Contoh : $\lim\limits_{x\to 2} 3 = 3$

2. Limit dari suatu penjumlahan/pengurangan fungsi adalah jumlah selisih dari limit fungsi-fungsinya. Contoh:

   $$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

   $$\lim_{x\to 2}\{(1-2x^2) + (x^3)\} = \lim_{x\to 2}(1-2x^2) + \lim_{x\to 2}(x^3)$$

   $$= (1-2.2^2) + (2^3) = -7 + 8 = 1$$

3. Limit dari suatu perkalian fungsi adalah perkalian dari limit fungsi-fungsinya.

   $$\lim_{x\to a}\{f(x)\,.\,g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x)\,.\lim_{x\to a} g(x)$$

   $$\lim_{x\to 2}\{(1-2x^2)\,(x^3)\} = \lim_{x\to 2}(1-2x^2)\,.\lim_{x\to 2}(x^3) = (-7)(8) = -56$$

4. Limit dari suatu pembagian fungsi adalah pembagian dari limit fungsi-fungsinya, dengan syarat limit fungsi pembagiannya tidak sama dengan nol.

   $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad \text{dengan syarat } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

   $$\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)}{(x-5)} = \frac{\lim\limits_{x\to 5}(x^2-25)}{\lim\limits_{x\to 5}(x-5)}$$

   $$= \frac{\lim\limits_{x\to 5}(x-5)(x+5)}{\lim\limits_{x\to 5}(x-5)}$$

   $$= \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$$

5. Limit dari suatu fungsi berpangkat n adalah pangkat n dari limit fungsinya.

   $$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^n = \{\lim_{x\to a} f(x)\}^n$$

   $$\lim_{x\to 2}(1-2x^2)^3 = \{\lim_{x\to 2}(1-2x^2)\}^3 = (-7)^3 = -343$$

6. Limit dari suatu fungsi terakar berpangkat positif adalah akar dari limit fungsinya.

   $$\lim_{x\to a}\{\sqrt[n]{f(x)}\} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad n > 0$$

   $$\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{(x^3 - x + 44)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 5}(x^3 - x + 44)} = \sqrt[3]{64} = 4$$

B. Contoh Soal Perhitungan Limit

1. Hitunglah $\lim_{x\to -1}\left(3x^2 - x - 6\right)$

   Jawab:

   $$\lim_{x\to -1}\left(3x^2 - x - 6\right) = \lim_{x\to -1} 3x^2 - \lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 6$$
   $$= 3\lim_{x\to -1} x^2 - (-1) - 6$$
   $$= 3\left(\lim_{x\to -1} x\right)^2 + 1 - 6$$
   $$= 3(-1)^2 + 1 - 6 = -2$$

2. Hitunglah $\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 2x - 15}{x+3}$

   Jawab:

   $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 2x - 15}{x+3} = \frac{\lim_{x\to 2}\left(x^2 - 2x - 15\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x+3\right)}$$
   $$= \frac{\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 15}{\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3} = \frac{2^2 - 2.2 - 15}{2+3}$$
   $$= -3$$

3. Hitung $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{5x-1}}$

   Jawab:

   $$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{5x-1}} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{5x-1}\right)^{1/2} = \left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{5x-1}\right)^{1/2}$$
   $$= \left(\frac{1}{\lim_{x\to 2}(5x-1)}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{5\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1}\right)^{1/2}$$
   $$= \left(\frac{1}{5.2-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{3}$$

4. Hitung $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

Jawab:

Karena $\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ dan $\lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right)=0$

Maka sifat:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Jadi, tidak dapat langsung digunakan. Apakah dengan demikian limit yang ditanyakan menjadi tak ada?

Perhatikan bahwa: $x\neq 1$

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x-2)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

5. Hitung

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$$

Jawab:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\sqrt{x^2+5}+3}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{\sqrt{9}+3}=\frac{2}{3}$$

C. Limit Tak Hingga

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, untuk $x>0$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$, untuk $x<0$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x}=0$
4. $\lim_{x\to -\infty} x=-\infty$
5. $\lim_{x\to \infty} x=\infty$

D. Contoh Soal Perhitungan Limit Tak Hingga

Hitunglah $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{x^2-2x+5}$$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} (3x^2-1) = \infty \text{ dan } \lim_{x\to\infty} (x^2-2x+5) = \infty$$

Hal ini berakibat nilai limit yang ditanyakan menjadi susah dikatakan. Apakah limit tersebut tak ada?

Perhatikan bahwa:

$$\frac{3x^2-1}{x^2-2x+5} = \frac{x^2(3-1/x^2)}{x^2(1-2/x+5/x^2)} = \frac{3-1/x^2}{1-2/x+5/x^2}$$

Oleh karena itu, menggunakan sifat limit, diperoleh:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{x^2-2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-1/x^2}{1-2/x+5/x^2} = \frac{3}{1} = 3$$

BAB VI
FUNGSI NON-LINEAR

A. Fungsi Non-Linear

Fungsi non-linear adalah fungsi yang pangkat dalam variabelnya > 1

Contoh:

Y = a + bx + cx2

Aplikasi fungsi non-linear dalam ekonomi

Bila diketahui fungsi permintaan dan penawaran sebagai berikut:

=> Qd = -7 + P2 => Qs = 25 – P2

Hitung jumlah barang dalam keseimbangan pasar!

Keseimbangan pasar

Qd = Qs	=> Qs = 25 – P2
-7 + P2 = 25 – P2	=> Qs = 25 – (4)2
2P2 = 32	=> Qs = 25 - 16
P2 = 16	=> Qs = 9
P = 4	

Jadi, jumlah barang dalam keseimbangan adalah 9.

B. Fungsi Biaya Non-Linear

Biaya Tetap	=> FC
Biaya Tetap rata-rata	=> AFC = FC/Q
Biaya Variabel	=> VC
Biaya Variabel rata-rata	=> AVC = VC/Q
Biaya Total	=> TC = FC + VC
Biaya Total rata-rata	=> ATC = AFC + AVC
	ATC = TC/Q

TC $= aQ^3 – bQ^2 + cQ + d$

ATC $= (aQ^3 – bQ^2 + cQ + d)/Q$

ATC $= aQ^2 – bQ + c + d/Q$

VC FC

Biaya minimum Q => -b/2a

Contoh:

TC = Q^2 - 4Q + 50

Tentukan biaya minimum

Tentukan TC

Tentukan FC, AFC, VC dan AVC

Jawab:

$TC = Q^2 - 4Q + 50$

Biaya minimum (Q)= -b/2

$Q = 4/2.1 = 2$

$TC = Q^2 - 4Q + 50$

TC = 22 - 4(2) + 50

TC = 46

=> $VC = Q^2 - 4Q$

=> $VC = (2)^2 – 4 (2)$

=> **VC = -4**

=> **AVC = -4/2 = -2**

FC = 50

=>AFC = FC/Q

=>**AFC = 50/2 = 25**

C. Fungsi Penerimaan Non-Linear

Penerimaan total => TR = P.Q

Penerimaan rata-rata => ATR = TR/Q

Biaya minimal => Q = -b/2a

Contoh:

P = 20 – 2Q

Tentukan TR, jika Q = 2 dan Q = 4

Tentukan P, jika Q = 2 dan Q = 4

Tentukan Penerimaan maksimal

Jawab:

TR = P.Q => TR = (20 – 2Q) . Q

=> TR = $20Q - 2Q^2$

Tentukan TR, jika Q = 2 dan Q = 4

TR = $20Q - 2Q^2$ => TR = $20Q - 2Q^2$

TR = $20(2) - 2(2)^2$ => TR = $20(4) - 2(4)^2$

TR = 32 => TR = 48

Tentukan P, jika Q = 2 dan Q = 4

P = 20 – 2Q => P = 20 – 2Q

P = 20 – 2(2) => P = 20 – 2(4)

P = 16 => P = 12

Tentukan Penerimaan maksimal

TR maksimal jika biaya minimum

Q = -b/2a => TR = $20Q - 2Q^2$

Q = -20/2.-2 = 5 => TR = $20 (5) - 2 (5)^2 = 50$

D. Keuntungan dan Kerugian

Penerimaan total yang diperoleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan TR = -0,10Q2 + 20 Q, sedangkan baiaya total yang dikeluarkan TC = 0,25 Q3 – 3Q2 + 7Q + 20. Hitung keuntungan jika dihasilkan barang dan terjual sebanyak 10 dan 20 unit.

Laba (∏) = TR – TC

Laba (∏) = (- 0,10Q2 + 20 Q) – (0,25 Q3 – 3Q2 + 7Q + 20)

Laba (∏) = -0.25Q3 + 2.90Q2 + 13Q - 20

Jika Q = 10

Laba (∏) = -0.25Q3 + 2.90Q2 + 13Q – 20

Laba (∏) = -0.25(10)3 + 2.90(10)2 + 13(10) – 20 = 150 (Laba)

Jika Q = 20

Laba (∏) = -0.25Q3 + 2.90Q2 + 13Q – 20

Laba (∏) = -0.25(20)3 + 2.90(20)2 + 13(20) – 20 = -600 (Rugi)

BAB VII
MATRIK

A. Pengertian Matrix

Matrix adalah susunan bilangan atau variabel yang diatur dalam beberapa baris dan kolom, serta dibatasi kurung biasa atau kurung siku. Ukuran panjang dan lebar matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom pada matriks. Selanjutnya, bilangan-bilangan yang menyusun baris dan kolom matriks disebut unsur-unsur atau elemen dari matriks itu sendiri. Baris sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks. Sedangkan, kolom sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks. Matrik terdiri dari:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrik berorde 2 x 3

Matrik berorde 3 x 2

Matrik berorde 2x 2 atau matrik bujur sangkar

Vektor merupakan bentuk matrik khusus yang hanya terdiri dari satu kolom atau satu baris.

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektor baris

Vektor kolom

B. Operasi Matrik

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matrik

   Dua buah matrik hanya dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika dan hanya jika mempunyai dimensi yang sama.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh Penjumlahan:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ maka, } A+B=\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Contoh Pengurangan:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ maka, } A-B = \ldots\ldots$$

2. Perkalian Matrik dengan Skalar (Bilangan)

   Skalar (bilangan) adalah suatu matrik yang berdimensi/berorde 1 x 1

$$\text{Jika } k = \text{skalar} = \text{konstanta dan } A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$k \times A = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\text{Jika } k=5 \text{ dan } A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka, } kA = 5\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jika } k=3 \text{ dan } A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka, } k \times A = \ldots\ldots\ldots$$

3. Perkalian Antar Matrik

   Dua buah matrik dapat dikalikan jika dan hanya jika jumlah kolom dari matrik pertama (lead matrix) sama dengan jumlah baris dari matrik kedua (*lead matrix*). Hasil perkaliannya berupa matrik dengan jumlah baris yang sama dengan baris matrik pertama dan jumlah kolom yang sama dengan kolom matrik kedua.

4. Perkalian Vektor

Perkalian vektor kolom $u_{(mx1)}$ dan vektor baris $v_{(1xn)}$ akan menghasilkan matrik $uv_{(mxn)}$.

$$\text{Contoh:} \quad u_{(2x1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_{(1x3)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka:} \quad uv_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(1) & 2(5) \\ 3(4) & 3(1) & 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 12 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jika } A_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } B_{(2x3)} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ ,maka:}$$

$$AB_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 4(-1)+6(0) & 4(3)+6(4) & 4(2)+6(-3) \\ 3(-1)+7(0) & 3(3)+7(4) & 3(2)+7(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 36 & -10 \\ -3 & 37 & 15 \end{bmatrix}$$

C. Jenis-Jenis Matrik

1. Matrik satuan/identitas: matrik bujur sangkar yang elem diagonalnya = 1, sedangkan elemen yang lainnya adalah nol.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matrik diagonal: matrik bujur sangkar yang semua elemennya nol kecuali pada diagonal utama.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Matrik nol: matrik yang semua eleemennya adalah nol.

$$0_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Transpose matrik (AT): matrik yang diubah dengan menukar elemen baris menjadi elemen kolom/sebaliknya.

$$A_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

5. Matrik simetrik: matrik bujur sangkar yang bersifat hasil transposnya adalah matrik semula (AT = A).

$$A_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

6. Matrik singular: matrik yang determinnya = 0, tidak mempunyai invers.
7. Matrik non-singular: matrik yang determinnya tidak sama = 0, serta mempunyai invers.
8. Invers matrik: diperoleh dengan cara tertentu dari suatu matrik non-singular, ditulis dengan (A-1), hasil kali matrik asal dengan inversnya, A x A -1 = matrik satuan. Berikut adalah invers matrik berordo 2 x 2

Misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan Determinan matriks A = |A| = ad − bc

maka invers matrik A diperoleh dengan:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, cari inversnya jika ada.

Penyelesaian:

$$A^{-1} = \frac{1}{5(3) - 4(2)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

Pembuktian:

$A.A^{-1} = I \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 5\left(3/7\right)+2\left(-4/7\right) & 5\left(-2/7\right)+2\left(5/7\right) \\ 4\left(3/7\right)+3\left(-4/7\right) & 4\left(-2/7\right)+3\left(5/7\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BAB VIII
HIMPUNAN DAN SISTEM BILANGAN

A. Himpunan

1. Konsep Himpunan

   Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang mempunyai sifat-sifat tertentu. Objek di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Secara umum himpunan dilambangkan dgn huruf besar, sedang anggota berhuruf kecil.

   Himpunan: A, B, C, D, ….

   Anggota himpunan: a, b, c, d, …

2. Penyajian Himpunan

   Enumerasi

   Contoh 1

   a. Himpunan empat bilangan asli pertama: A = {1, 2, 3, 4}.
   b. Himpunan lima bilangan genap positif pertama: B = {2,4, 6, 8, 10}.
   c. C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
   d. Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100}
   e. Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

   Keanggotaan

   X ϵ A: x merupakan anggota himpunan A;

   x ∉ A: x bukan merupakan anggota himpunan A.

   Simbol-simbol Baku

   P = himpunan bilangan bulat positif = {1, 2, 3, ...}

   N = himpunan bilangan alami (natural) = {1, 2, ...}

   Z = himpunan bilangan bulat = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

   Q = himpunan bilangan rasional

   R = himpunan bilangan riil

   C = himpunan bilangan kompleks

   Himpunan yang universal: semesta, disimbolkan dengan U.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan A = {1, 3, 5}.

Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: {x | syarat yang harus dipenuhi oleh x}

Contoh 2

A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

A = {x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau

$$A = \{x \mid x \in P, x < 5\}$$

yang ekivalen dengan A = {1, 2, 3, 4}

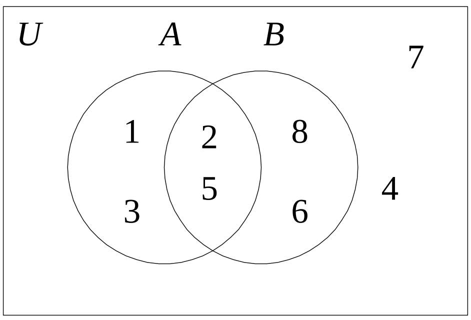
"Himpunan A yang beranggotakan x sedemikian rupa sehingga x adalah anggota P dimana x kurang dari lima"

3. Diagram Venn dan Himpunan Semesta
   a. Himpunan semesta: Himpunan yang memuat semua anggota yang dibicarakan, disebut juga semesta pembicaraan.
   b. Diagram Venn adalah diagram yang menunjukkan semua kemungkinan hubungan logika dan hipotesis di antara sekelompok (set/himpunan/grup) benda/objek.

   Contoh 3

   Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

   A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.



4. Himpunan Kosong

   Himpunan yang tidak mengandung anggota dinamakan himpunan kosong;

Dilambangkan dengan $\varnothing$ atau {}

Contoh: A= {}

Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari setiap himpunan.

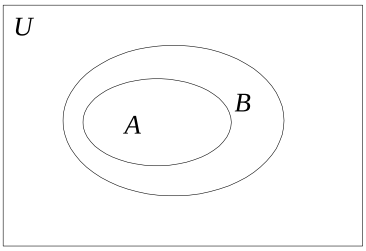
B. Hubungan Antar Himpunan

Himpunan Bagian (Subset)

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan superset dari A.

Notasi: $A \subseteq B$

Diagram Venn:



1. Operasi -Union

   Definisi: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

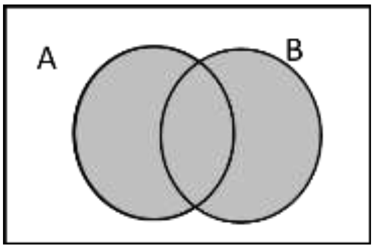
   Contoh-1 A = {2, 3, 5, 7, 9}

   B = {0, 1, 2, 4, 5, 6,}

   C = {10, 11, 14, 15}

   D = {Anto, 14, L}

   E = {1, 2, 4}

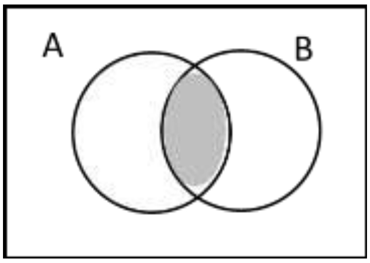


   Maka: A U B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}

   A U D = {2, 3, 5, 7, 9, Anto, 14, L}

   B U C =? B U D =? C U D =?

2. Operasi – Irisan

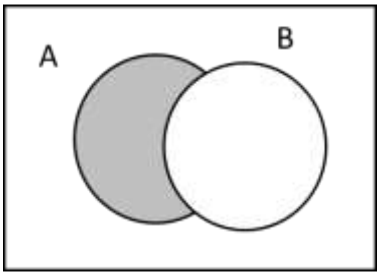


   Definisi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Contoh:	Maka:	
A = {2, 3, 5, 7, 9}	$A \cap B$ = {2, 5}	
B = {0, 1, 2, 4, 5, 6,}	$E \cap B$ = {1,2 4}	
C = {10, 11, 14, 15}	$A \cap C$ = {}	$A \cap E$ = {2}
D = {Anto, 14, L}	$D \cap C$ = {14}	
E = {1, 2, 4}	$A \cap D$ = {}	

3. Operasi Selisih – Minus

Definisi: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$



Contoh

A = {2,3,4,6,7,9}

B = {1,2,3,5,6,8,9,10}

C = {3,5,9}

Maka: A – B = {4,7}

B – A = {1,5,8,10}

A – C = {

B – C = {

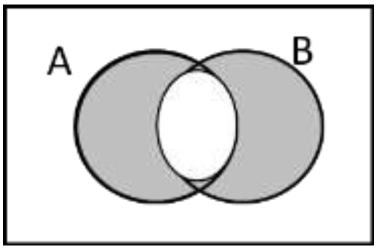
C – B = {

4. Operasi Beda Setangkup

Definisi: $A \oplus B = \{x \mid (x \in A \text{ atau } x \in B) \text{ dan } x \notin (A \cap B)\}$

$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh:

A = {1,2,3,5,6,8,9,10} ; B = {2,7,8,11} ;

C = {1,3,5,7,9,11} ; D = {1,2,5,6,7,9,12}

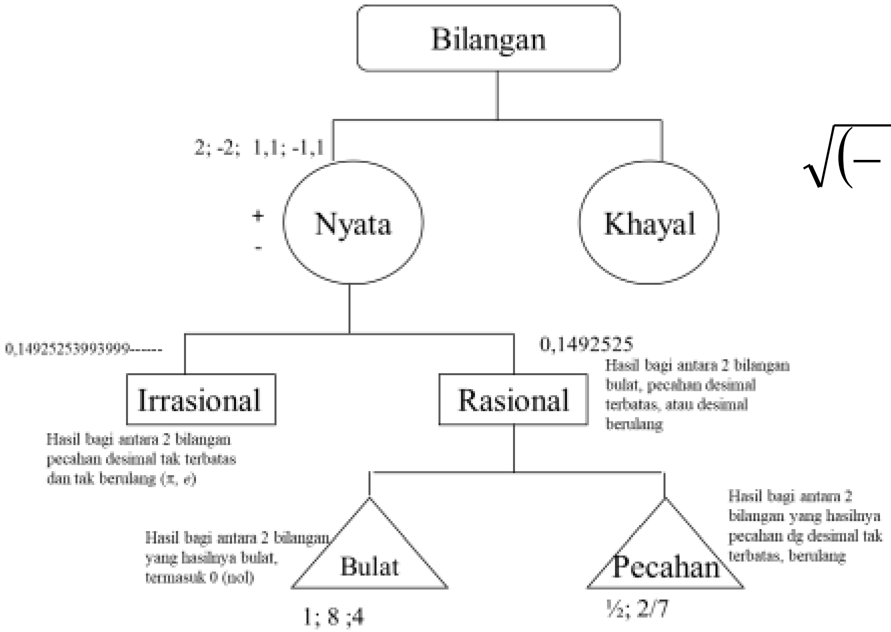
Maka: A ⊕ B = {1, 2, ~~3~~, 5, 6, 7, 8, ~~9~~, 10, 11} = {1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11}

B ⊕ C = {1, 2, 3, 5, 7, ~~8~~, 9, ~~11~~} = {1, 2, 3, 5, 8, 9}

A ⊕ C = {

A ⊕ D = {

C. Pembagian Jenis Bilangan



$$\sqrt{(-4)} = \pm 2$$

D. Hubungan perbandingan antar bilangan

Tanda Ketidaksamaan

1. Tanda < melambangkan "lebih kecil dari"
2. Tanda > melambangkan "lebih besar dari"
3. Tanda < melambangkan "lebih kecil dari atau sama dengan"
4. Tanda > melambangkan "lebih besar dari atau sama dengan"

E. Operasi Bilangan

1. Kaidah Komutatif

   a + b = b + a

   a x b = b x a

2. Kaidah Asosiatif

   (a + b) + c = a + (b + c)

   (a x b) x c = a x (b x c)

3. Kaidah Pembatalan

   a + c = b + c　　　*a x c = b x c*

   Maka: a = b　　　Maka: a = b

4. Kaidah Distributif

   a (b + c) = ab + ac

5. Unsur Penyama

   a + 0 = a

   a x 1 = 4　　a: 1 = 4

6. Kebalikan

   a x 0 = a

   a x 1/a = 1

F. Operasi Tanda

1. Operasi Penjumlahan
   a. (+ a) + (+b) = (+c)
   b. (- a) + (- b) = (- c)
   c. (+ a) + (- b) = (+ c) jika |a| > |b|
      (+ a) + (- b) = (- d) jika |a| < |b|
   d. (- a) + (+ b) = (+ c) jika |a| < |b|
      (- a) + (+ b) = (- d) jika |a| > |b|
2. Operasi Pengurangan
   a. (+ a) - (+ b) = (+ c) jika |a| > |b|
      (+ a) - (+ b) = (- d) jika |a| < |b|
   b. (- a) - (- b) = (+ c) jika |a| < |b|
      (- a) - (- b) = (- d) jika |a| > |b|
   c. (+ a) - (- b) = (+ c)
   d. (- a) - (+ b) = (- c)
3. Operasi Perkalian
   a. (+ a) x (+ b) = (+ c)
   b. (- a) x (- b) = (+ c)
   c. (+ a) x (- b) = (- c)
   d. (- a) x (+ b) = (- c)
4. Operasi Pembagian
   a. (+ a): (+ b) = (+ c)
   b. (- a): (- b) = (+ c)
   c. (+ a): (- b) = (- c)
   d. (- a): (+ b) = (- c)

A. Operasi Bilangan Pecahan

1. Operasi Pemadanan

$$\frac{a}{b} = \frac{a \text{ x } c}{b \text{ x } c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

2. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Dua buah pecahan atau lebih, hanya dapat ditambahkan atau dikurangkan apabila mereka memiliki suku pembagi yang sama atau sejenis. Jika suku pembaginya belum sama, maka terlebih dahulu harus disamakan sebelum pecahan-pecahan tersebut ditambahkan dan dikurangkan.

3. Operasi Perkalian

$$\frac{a}{x} \times \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}$$

4. Operasi Pembagian

$$\frac{a}{x} : \frac{b}{y} = \frac{a}{x} \times \frac{y}{b} = \frac{ay}{xb}$$

G. Kaidah- Kaidah

Kaidah Pemangkatan

1. Bilangan berpangkat nol adalah satu

   $x^0 = 1$ ($x \neq 0$)

   Contoh: 40 = 1

2. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri

   $x^1 = x$

   Contoh: $5^1 = 5$

3. Nol berpangkat suatu bilangan adalah tetap nol

   $0^x = 0$

   Contoh: 07 = 0

4. Bilangan berpangkat negatif adalah balikan pengali dari bilangan itu sendiri

   $x\text{-}^n = 1/x^n$

   Contoh: $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8 = 8^{-1}$

5. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri

   $x^{a/b} = {}^b\sqrt{x^a}$

6. Bilangan pecahan berpangkat adalah hasil bagi suku-suku berpangkatnya.

   $(x/y)^a = x^a / y^a$

7. Bilangan berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasilkali pangkat-pangkatnya

   $(x^a)^b = x^{ab}$

8. Bilangan dipangkatkan pangkat-berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkatan pangkatnya.

   $x^{\wedge(a^{\wedge}b})=x^c$

Kaidah perkalian berpangkat

1. $x^a.\,x^b=x^{a+b}$
2. $x^a.\,y^a=(xy)^a$
3. $x^a\colon x^b=x^{a-b}$
4. $x^a\colon y^a=(x/y)^a$

Kaidah Pengakaran Bilangan

1. ${}^b\sqrt{x}=x^b$
2. ${}^b\sqrt{x^a}=x^{a/b}$
3. ${}^b\sqrt{x\mathrm{y}}={}^b\sqrt{x}\ .\ {}^b\sqrt{\mathrm{y}}$
4. ${}^b\sqrt{x/y}={}^b\sqrt{x}\ /\ {}^b\sqrt{\mathrm{y}}$
5. $m^b\sqrt{x^a}\pm n\ {}^b\sqrt{x^a}=(m\pm n)^b\sqrt{x^a}$
6. ${}^b\sqrt{{}^c\sqrt{x^n}}={}^{b.c}\sqrt{x^n}$
7. ${}^b\sqrt{x}/\,{}^b\sqrt{y}={}^b\sqrt{x/y}$