PENERBIT ERLANGGA

Analisis Real Elementer

dengan Ilustrasi Grafis & Numeris

Julan Hernadi

Daftar Isi

Prakata

Alhamdulillah, penulis bersyukur kepada Allah SWT karena hanya atas bimbingan dan kekuatan dari Nya buku ini dapat diselesaikan. Teori matematika khususnya menyangkut himpunan bilangan real dan fungsi-fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan real dibahas secara hierarki dan ketat dalam analisis real. Pembahasannya dimulai dari pengertian pangkal seperti aksioma, definisi, teorema, akibat teorema sampai pada penerapannya pada cabang matematika lainnya seperti kalkulus, analisis numerik, dan persamaan diferensial. Analisis dipandang sebagai *the body of mathematics* yang dibangun melalui konsep limit dan fungsi. Analisis real dapat juga dipandang sebagai filosofi matematika dan merupakan pendalaman kalkulus. Banyak sekali metode yang ada dalam kalkulus dijustifikasi secara deduktif di dalam analisis real.

Analisis real merupakan salah satu mata kuliah wajib yang diberikan pada mahasiswa program studi matematika MIPA dan mahasiswa program studi pendidikan matematika FKIP. Ranah kognitif tingkat tinggi dalam pembelajaran matematika dapat dijangkau salah satunya melalui mata kuliah analisis real ini. Berbeda dari beberapa cabang matematika lainnya, analisis real memiliki tingkat abstrak yang sangat tinggi. Untuk memahami materi dalam analisis real dibutuhkan penalaran tingkat tinggi. Kebiasaan pembelajaran matematika di sekolah menengah yang selama ini lebih menekankan pada aspek kemampuan berpikir mekanistik (*algorithm thinking*) daripada aspek kemampuan berpikir logis (*logically thinking*) menyebabkan lemahnya kemampuan bernalar mahasiswa. Mata kuliah analisis real ini dapat menjadi wadah untuk melatih kemampuan penalaran mahasiswa. Materi pada analisis real menjadi alat justifikasi teori-teori pada bidang matematika lainnya.

Penulisan buku ini dimaksudkan untuk memberikan cara yang lebih mudah dalam mempelajari analisis real. Berbagai ilustrasi grafis dan numeris yang diberikan berperan sebagai jembatan antara objek abstrak dalam analisis real dan objek kongkret yang sudah sangat familiar dengan mahasiswa. Dengan ilustrasi ini diharapkan mahasiswa lebih mudah membayangkan dan memahami konsep-konsep abstrak yang ada dalam analisis real. Selain itu, buku ini dimaksudkan untuk memperkaya buku teks analisis real berbahasa Indonesia yang masih sangat kurang. Materi yang dibahas pada buku ini adalah topik-topik elementer dalam analisis real terdiri atas enam bagian utama yaitu Sistem Bilangan Real, Pengantar Topologi, Barisan dan Deret Bilangan Real, Limit Fungsi dan Kekontinuan, Teori Diferensial, dan Teori Integral. Selain daripada itu, diberikan juga materi pengayaan pada topik Barisan dan Deret Fungsi. Penguasaan materi pada buku ini diyakini dapat mempermudah mahasiswa mempelajari cabang matematika lanjutan dan dapat menjadi modal dalam melanjutkan studi ke jenjang pasca sarjana. Hal ini tidak hanya karena cakupan materi yang cukup komprehensif, tetapi juga pendekatan saintifik yang diberikan dalam buku ini diyakini dapat membangun kemampuan penalaran ilmiah mahasiswa.

Buku ini dirancang sebagai buku teks wajib untuk perkuliahan analisis real pada prodi matematika dan prodi pendidikan matematika strata satu (S-1). Buku ini dapat digunakan oleh mahasiswa tingkat strata dua (S-2) matematika atau pendidikan matematika sebagai pengantar analisis real. Dimungkinkan juga bagi mahasiswa non-matematika, utamanya mahasiswa bidang sains dan keteknikan untuk lebih memperdalam matematika sampai ke akar-akarnya. Buku ini dapat pula dijadikan sebagai referensi penelitian atau tugas akhir yang melibatkan topik-topik dalam analisis real seperti disebutkan di atas.

Idealnya buku ini dapat diselesaikan dalam dua semester, misalnya pada mata kuliah analisis real 1 dan analisis real 2 masing-masing dengan bobot 3 SKS. Oleh karena beragamnya kondisi pada program studi pendidikan matematika FKIP atau matematika MIPA di Indonesia, maka penggunaan buku dapat menyesuaikan dengan kondisi masing-masing prodi. Untuk prodi yang hanya mempunyai satu mata kuliah analisis real maka semua bab dapat diberikan tetapi hanya dipilih beberapa subpokok bahasan awal saja. Pada dasarnya materi pada buku ini merupakan materi minimal yang seharusnya dipahami oleh mahasiswa matematika. Oleh karena itu diupayakan semua bab dapat diperkenalkan bagian-bagian yang dianggap penting walaupun tidak tuntas seratus persen.

Urutan materi pada buku telah disusun secara hierarki dalam parwa (bagian), bab dan subbab. Sistem Bilangan Real pada Bagian I perlu dipahami sampai tuntas karena materi pada bagian ini menjadi dasar penting untuk mempelajari materi berikutnya. Dimulai dari pendefinisian bilangan real, sifat-sifat yang berlaku di dalamnya (sifat aljabar, sifat urutan, sifat jarak, sifat kelengkapan, dan sifat kepadatan) sampai kepada bilangan real yang diperluas. Banyak fakta mengejutkan yang selama ini sudah dianggap kebenaran turun temurun, pada bab ini diberikan justifikasinya baik itu sebagai definisi ataupun teorema yang kebenarannya dapat dibuktikan. Secara khusus mahasiswa perlu tahu bahwa $\pm\infty$ bukanlah bilangan real biasa tetapi sebagai bilangan real yang diperluas. Aturan dalam operasi artitmatika yang melibatkan kedua simbol ini diberikan pada bab ini.

Pengantar topologi pada Bagian II membahas berbagai titik dan himpunan khusus pada bilangan real (titik interior, titik kumpul, titik batas, titik terasing, himpunan tertutup, himpunan terbuka, penutup himpunan, himpunan terbilang, himpunan Cantor, himpunan kompak dan himpunan terhubung). Pada bagian ini, ruang topologi sebagai sebagai perumuman sistem himpunan terbuka diberikan sampai pada pembahanan basis dan subbasis ruang topologinya.

Barisan dan deret merupakan topik fundamental berikutnya setelah sistem bilangan real. Pembahasan kedua topik ini pada Bagian III banyak dilengkapi berbagai ilustrasi grafis dan numeris guna memperjelas pemahaman konsep-konsep abstrak. Dimulai dari konsep sederhana berkaitan dengan kekonvergenan barisan, sifat-sifat atau teorema yang terkait dengan kekonvergenan sampai pada barisan Cauchy, barisan kontraksi, limit inferior dan superior sebagai pengembangan konsep limit biasa. Pada topik deret diperkenalkan berbagai alat uji konvergensi untuk mengetahui apakah sebuah deret konvergen atau divergen. Dalam kasus sebuah deret konvergen diberikan aproksimasi jumlahnya dalam bentuk numerik guna memperkuat keyakinan kebenaran teoretis melalui fakta numerisnya.

Pada Bagian IV, konsep limit fungsi dan kekontinuan fungsi dibahas secara terpadu sehingga kesamaan, perbedaan dan hubungan kedua konsep tersajikan dengan jelas. Pada bagian ini juga diperkenalkan notasi *big-O* dan *little-o* yang jarang diberikan pada banyak buku teks analisis elementer. Kedua notasi ini sangat penting dan banyak digunakan pada penyelidikan pola kekonvergenan barisan.

Topik sentral dalam kalkulus yaitu teori diferensial dan teori integral dibahas secara berurutan dalam Bagian V dan Bagian VI. Berbeda dari pembelajaran kalkulus yang umumnya hanya membahas diferensial dan integral secara sekilas, memperbanyak rumus, dan kemudian memecahkan soal penerapan teori; pembahasan diferensial dan integral di sini ditekankan pada justifikasi aturan-aturan yang sudah sangat familiar di dalam kalkulus seperti aturan rantai, Teorema Fundamental Kalkulus (TFK), aturan pengintegralan, dan lain-lain. Lebih dari itu, pada Bagian VI diperkenalkan juga bentuk integral yang lebih umum yaitu integral Riemann-Stieltjes dan juga diberikan ide awal integral Lebesgue.

Untuk pengayaan, pada Bagian VII dibahas barisan dan deret fungsi sebagai perumuman barisan dan deret bilangan real. Pada bagian ini dibahas konsep dua jenis kekonvergenan, yaitu kekonvergenan titik (*point-wise*) dan kekonvergenan seragam (*uniform*) serta implikasi pada pertukaran operasi limit terhadap diferensial dan integral. Topik ini merupakan jembatan untuk mempelajari analisis real pada tingkat lanjut.

Untuk menguatkan pemahaman pada setiap konsep yang diberikan, buku ini mengikutsertakan ilustrasi dan beberapa contoh soal yang terkait, serta soal latihan selingan yang relevan. Pada akhir setiap bagian, diberikan soal-soal latihan yang mencakup keseluruhan bab dalam suatu bagian. Untuk mengukur pemahaman mahasiswa terhadap konsep dasar, soal-soal latihan juga memuat soal yang bersifat teoretis kualitatif yaitu berupa deskripsi pendapat atau opini terhadap suatu permasalahan termasuk soal tipe *example non-example*. Soal-soal dalam analisis real tidak begitu banyak melibatkan aktivitas menghitung seperti pada kalkulus, tetapi lebih banyak aktivitas membuktikan dan bentuk penalaran lainnya.

Keberhasilan belajar analisis real sangat ditentukan oleh ketekunan mahasiswa dalam belajar khususnya dalam penalaran. Coba pahami setiap kalimat yang ada pada definisi, teorema dan pembuktiannya, serta ilustrasi yang diberikan. Belajar kelompok (diskusi) merupakan salah satu cara yang efektif untuk memecahkan kesulitan memahami konsep dalam analisis real. Keuletan adalah kunci keberhasilan dalam belajar, bukan kecerdasan. Oleh karena itu mahasiswa diharapkan menerapkan sikap sabar dalam memahami konsep yang sulit dipahami dalam analisis real. Belum paham sekali baca, ulangi lagi berkali-kali.

Prasyarat yang dibutuhkan untuk memahami buku ini adalah kalkulus biasa dan logika matematika yang mencakup kalimat majemuk (termasuk kontradiksi dan tautologi) dan operator logika, kuantifikasi, aturan inferensi dan metode pembuktian. Penalaran yang digunakan dalam analisis real sepenuhnya mengikuti aturan logika matematika standar. Pada bagian apendiks diberikan materi prasyarat berkenaan dengan logika matematika dan metode pembuktian dalam matematika.

Buku ini merupakan buku ketiga penulis yang telah diterbitkan secara nasional. Buku pertama berjudul "Matematika Numerik dengan Implementasi MATLAB" telah terbit sejak 2012 melalui penerbit ANDI, Yogyakarta. Buku kedua penulis berjudul "Teori dan Komputasi Numerik Diferensial dan Integral" yang diterbitkan oleh Graha Ilmu, Yogyakarta pada awal 2015. Buku ini menggabungkan pembahasan diferensial dan integral dari dua aspek secara terpadu, yaitu aspek teoretis dan aspek komputasi numerik.

Penulis sangat berterima kasih kepada asisten dan para mahasiswa yang telah memberikan koreksi atas kekeliruan yang ditemukan selama menggunakan draft buku ini dalam perkuliahan. Secara khusus penulis mengucapkan terima kasih kepada Sdri Arta Ekayanti sebagai alumni Prodi Pendidikan Matematika Unmuh Ponorogo, sebagai asisten dan kader terbaik penulis yang telah memberikan koreksi untuk penyempurnaan naskah ini. Kepada pihak Subdit HKI dan Publikasi DP2M Dikti yang telah memberikan hibah penulisan buku untuk naskah ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Penulis menyadari bahwa naskah ini masih banyak kekurangannya. Segala kritik dan saran untuk perbaikan pada penerbitan edisi berikutnya sangat diharapkan dari para pembaca sekalian. Saran dan kritik dapat disampaikan melalui email: julan_hernadi@yahoo.com.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan kepada istri tercinta Sri Purnama Surya dan ananda tersayang Ahmad Zhafir Hernadi atas dorongan semangat yang diberikan selama ini. Kepada ibunda Hj Konaria dan adik-adik: Herri

Gusmedi, Aprillina dan Yuniarni, penulis menyampaikan penghargaan dan terima kasih atas doa dan harapan kalian selama ini. Kepada ayahnda tercinta Ahmad Ismail yang telah kembali menghadap Sang Khalik, penulis selalu berdoa semoga senantiasa berada di tempat yang layak di sisi-Nya; *robbigh firlii wa liwaalidayya, robbirhamhumaa kamaa rabbayaanii shooghiroo*. Semoga karya kecil ini memberikan manfaat bagi orang banyak dan menjadi pemicu lahirnya karya-karya lebih besar berikutnya.

Yogyakarta, September 2015

JULAN HERNADI

Bagian I

SISTEM BILANGAN REAL

BAB 1

Pendefinisian Bilangan Real

Truth in science can be defined as the working hypothesis best suited to open the way to the next better one.

Konrad LORENZ

Sesuai dengan namanya, tujuan kuliah analisis adalah untuk melakukan penyelidikan mendalam terhadap masalah matematika yang melibatkan bilangan real. Bilangan real sudah dikenal dengan baik sejak masih di sekolah menengah, bahkan sejak di sekolah dasar. Jadi mahasiswa diyakini sudah mengenal bilangan real tetapi barangkali hanya sekedar kenal dengan bilangan real dari permukaannya saja; belum sampai menemukan fakta-fakta penting dan menakjubkan pada bilangan real itu sendiri. Sebagai contoh, pernyataan $1 \cdot 0 = 0$ dianggap sebuah kesepakatan turun-temurun atau aksioma yang sudah berlaku pada bilangan real. Padahal fakta ini merupakan sebuah proposisi atau dalil yang kebenaran dapat dibuktikan.

Barangkali mahasiswa membayangkan bilangan real suatu sistem yang sederhana, misalnya direpresentasikan pada garis bilangan, mempunyai jarak, dan adanya urutan antara bilangan real yang satu dengan bilangan real lainnya. Namum, ketika diminta untuk membuktikan kebenaran pernyataan-pernyataan sederhana tentang bilangan real yang dikaitkan dengan fungsi atau himpunan, umumnya mahasiswa menemui kesulitan. Sebagai contoh, untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut: "bilangan taknegatif yang kurang dari bilangan positif apapun adalah nol", atau untuk menentukan bilangan terkecil di dalam interval $(0, 1]$, masih banyak mahasiswa yang masih kebingungan.

Secara intuitif, banyak pernyataan dalam matematika yang kebenarannya dapat diterima oleh akal sehat bahkan sudah dianggap sesuatu yang trivial, tetapi pembuktiannya ternyata membutuhkan analisis yang cukup mendalam melalui sebuah argumen yang valid. Kebiasaan lebih sering menggunakan intuisi daripada penalaran ilmiah merupakan salah satu kendala dalam mempelajari analisis real khususnya dan matematika pada umumnya. Untuk itu dibutuhkan pemahaman teori-teori yang dikembangkan dalam sistem bilangan dengan menerapkan prinsip-prinsip inferensi yang benar.

Pada lampiran buku ini diberikan pengantar logika matematika dan prinsip-prinsip inferensi yang berlaku dalam matematika. Termasuk materi penting pada lampiran adalah beberapa metode pembuktian pada matematika karena mayoritas kegiatan pembelajaran dalam buku ini adalah pembuktian. Materi-materi tersebut perlu dipahami terlebih dahulu untuk memudahkan mengikuti pola penalaran yang ada pada buku ini.

dengan $a \in \mathbb{Z}$ dan $b \in \mathbb{N}$. Pada beberapa referensi lainnya himpunan bilangan rasional juga didefinisikan sebagai

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Kedua pendefinisian ini sesungguhnya ekuivalen karena $\mathbb{Z}$ memuat juga bilangan negatif sehingga pembaginya cukup bilangan asli. Kali ini kita menggunakan pendekatan pertama. Berbeda dengan sebelumnya, kita harus mendefinisikan kesamaan dua bilangan rasional sebagai berikut

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

Kita dapatkan bahwa $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ dan seterusnya adalah bilangan-bilangan rasional yang sama. Jadi, sesungguhnya himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ terdiri atas kelas-kelas ekuivalensi $\left[\frac{a}{b}\right]$, yaitu bilangan-bilangan yang sama dengan $\frac{a}{b}$. Sebagai contoh, termasuk ke dalam kelas $\left[\frac{1}{2}\right]$ adalah bilangan-bilangan di dalam himpunan $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \cdots\}$. Dengan mendefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} := \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \text{ dan } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} := \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

maka operasi pengurangan dan pembagian yang sebelumnya tidak berlaku pada $\mathbb{N}$, sekarang berlaku sempurna pada $\mathbb{Q}$. Relasi urutan yang berlaku pada $\mathbb{Q}$ adalah

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \leftrightarrow a_1 b_2 < a_2 b_1$$

dengan relasi sebelah kanan adalah relasi urutan pada $\mathbb{Z}$. Kita dapat mengatakan bahwa $\frac{-3}{4} < \frac{-2}{6}$ sebab $(-3)(6) = -18 < -8 = (-2)(4)$.

Tahap selanjutnya adalah bagaimana mengembangkan bilangan rasional menjadi bilangan real yang biasanya dilambangkan dengan $\mathbb{R}$. Sejauh ini bilangan real $\mathbb{R}$ baru memuat $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, dan $\mathbb{Q}$. Bagaimana dengan bilangan seperti $\sqrt{2}$, e dan π? Apakah mereka ini masuk dalam $\mathbb{R}$? Ambil contoh $\sqrt{2}$. Apakah sesungguhnya bilangan $\sqrt{2}$ ini? Bila ia didefinisikan sebagai sebuah bilangan x dengan $x^2 = 2$ maka eksistensi bilangan ini dalam $\mathbb{R}$ perlu dipertanyakan. Bila dicari dengan kalkulator diperoleh $\sqrt{2}$ adalah 1.4142135 maka bilangan ini bukanlah $\sqrt{2}$ seperti yang dimaksud, sebab $1.4142135^2 \neq 2$. Bilangan lainnya e dan π tentunya lebih rumit lagi. Pada pembahasan selanjutnya kita akan membahas sistem bilangan real ini dari pendekatan aksiomatik. Eksistensi $\sqrt{2}$ pada khususnya dan bilangan irrasional pada umumnya dijamin oleh sifat kelengkapan bilangan real yang akan dibahas pada bagian akhir Bagian 1 ini.

1.2 Sifat Aljabar Bilangan Real

Tahapan dalam membangun sistem bilangan real dimulai dari suatu himpunan bilangan yang anggotanya belum diketahui secara pasti dan belum ada aturan yang berlaku di dalamnya. Kemudian ke dalam himpunan ini diberikan dua operasi biner, yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$. Dengan dua operasi ini disusun beberapa aksioma pada bilangan real $\mathbb{R}$ sebagai berikut (Bartle dan Sherbert, 2000):

(A1) $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$. Sifat ini disebut sifat **komutatif** terhadap penjumlahan.

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sifat ini disebut sifat **asosiatif** terhadap penjumlahan.

Dengan demikian bukti teorema selesai. $\square$

Untuk selanjutnya, penggunaan simbol $\square$ adalah sebagai tanda akhir pembuktian atau penyelesaian suatu soal.

Teorema 1.2. *Jika $u \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$ bilangan real lainnya yang bersifat $u \cdot b = b$ maka berlaku $u = 1$.*

Bukti. Dengan (M3) diperoleh $u = u \cdot 1$. Mengingat $b \neq 0$ maka dengan (M4), terdapat $(1/b) \in \mathbb{R}$ sehingga $b \cdot (1/b) = 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned} u &= u \cdot 1 \text{ (M3)} \\ &= u \cdot (b \cdot (1/b)) \text{ (M4)} \\ &= (u \cdot b) \cdot (1/b) \text{ (M2)} \\ &= b \cdot (1/b) \text{ (diketahui } u \cdot b = b) \\ &= 1. \text{ (M4)} \end{aligned}$$

Dari penjabaran ini, diperoleh $u = 1$ sebagai kesimpulan yang berhasil dibuktikan. $\square$

Teorema 1.3. *Bila a suatu elemen pada $\mathbb{R}$ maka berlaku $a \cdot 0 = 0$.*

Seandainya operasi pengurangan sudah didefinisikan berikut sifat-sifatnya maka pernyataan ini sangat mudah dibuktikan, yaitu cukup mulai dengan fakta $ab - ab = 0$. Selanjutnya dengan sifat distributif diperoleh $a \cdot (b - b) = 0$ dan akhirnya $a \cdot 0 = 0$. Karena sejauh ini kita belum mendefinisikan operasi pengurangan maka kita harus menggunakan aksioma bilangan real untuk membuktikan fakta ini.

Bukti. Mulai dengan menggunakan (M3), yaitu $a \cdot 1 = a$. Selanjutnya lakukan penjabaran berikut:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a &= a \cdot 0 + a \cdot 1 \\ &= a \cdot (0 + 1) \text{ (D)} \\ &= a \cdot 1 \text{ (A3)} \\ &= a \text{ (M3)}. \end{aligned}$$

Pada bentuk terakhir $a \cdot 0 + a = a$ diterapkan Teorema 1.1 dengan $z := a \cdot 0$ maka disimpulkan $a \cdot 0 = 0$. $\square$

Oleh karena sifat komutatif (M1), maka berlaku juga $0 \cdot a = 0$. Jadi, kenyataan yang selama ini digunakan yaitu perkalian sebarang bilangan real dengan nol menghasilkan nol bukanlah sebuah kesepakatan semacam definisi atau aksioma, tetapi sebuah proposisi yang kebenarannya dapat dibuktikan. Fakta-fakta mendasar lain pada bilangan real adalah sebagai berikut.

Teorema 1.4. *Bila $a \in \mathbb{R}$ maka berlaku*

1. $(-1) \cdot a = -a$.
2. $-(-a) = a$,
3. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Bukti. Pembaca diharapkan dapat menelusuri dasar pembenaran penjabaran berikut dengan merujuk sifat-sifat atau teorema yang sudah dibuktikan sebelumnya.

2. Dapat dibuktikan dengan Teorema 1.4(1) yaitu $(-1)\cdot a = -a$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}(-a)\cdot b &= (-1\cdot a)\cdot b\\ &= -1\cdot(a\cdot b)\\ &= -(a\cdot b).\end{aligned}$$

3. Untuk penyelesaian berikut, pembaca diminta memberikan pembenaran sendiri setiap langkah yang ada.

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b)\\ &= (a\cdot(-1))\cdot((-1)\cdot b)\\ &= a\cdot((-1)\cdot((-1)\cdot b))\\ &= a\cdot(((-1)\cdot(-1))\cdot b)\\ &= a\cdot(1\cdot b)\\ &= a\cdot b.\end{aligned}$$

□

Latihan 1.1. Buktikan kebenaran pernyataan berikut.

1. $1/(-a) = -(1/a)$, asalkan $a \neq 0$.
2. $-(a/b) = (-a)/b$, asalkan $b \neq 0$.

Catatan kritis

1. Fakta bahwa $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$ membenarkan aturan bahwa perkalian dua bilangan negatif menghasilkan sebuah bilangan positif. Dalam simbol bahasa awam nonformal: "$(-)\times(-) = (+)$". Secara formal, istilah positif baru akan muncul setelah konsep urutan diperkenalkan. Sedangkan sifat $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$ memberikan justifikasi bahwa perkalian bilangan negatif dan bilangan positif menghasilkan bilangan negatif, atau dalam bahasa awam nonformal: "$(-)\times(+) = (-)$".

2. Sifat komutatif, asosiatif dan distributif pada bilangan real merupakan aksioma. Bilangan real dibangun berdasarkan aksioma-aksioma ini. Jadi tidak perlu dibuktikan kebenarannya secara deduktif. Menunjukkan bahwa $6\times 4 = 4\times 6$ hanyalah sebuah konfirmasi karena ini sebagai sebuah penerapan sifat komutatif. Interpretasi dan ilustrasi sifat-sifat ini perlu dipertimbangkan khususnya ketika penanaman konsep awal di sekolah dasar yang umumnya masih pada tataran berpikir konkret.

Teorema 1.5. *Misalkan a, b, c elemen pada $\mathbb{R}$. Maka pernyataan berikut berlaku.*

1. *Jika $a \neq 0$ maka $1/a \neq 0$ dan $1/(1/a) = a$,*
2. *Jika $a\cdot b = a\cdot c$ dan $a \neq 0$ maka $b = c$,*
3. *Jika $a\cdot b = 0$ maka berlaku salah satu: $a = 0$ atau $b = 0$.*

Bukti. Perhatikan pada pembuktian berikut digunakan metode kontradiksi. Caranya adalah dengan mengasumsikan kesimpulannya salah, kemudian ditunjukkan ada kontradiksi atau pertentangan. Lebih jelasnya metode kontradiksi dapat dilihat pada lampiran.

Dalam kasus ini kebetulan $x = -1$ dan $x = 1$ keduanya merupakan akar persamaan kuadrat. Perhatikan ilustrasi lainnya sebagai berikut.

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \to (x + 1)(x^2 + 1) = 0 \to x + 1 = 0 \text{ atau } x^2 + 1 = 0.$$

Perhatikan kalimat $x + 1 = 0$ atau $x^2 + 1 = 0$ hanya dapat dipenuhi oleh $x + 1 = 0$, yaitu $x = -1$. Sementara itu, $x^2 + 1 = 0$ tidak dapat dipenuhi karena tidak ada bilangan real x yang memenuhi.

Contoh 1.2. Bila bilangan real a memenuhi $a \cdot a = a$ maka berlaku salah satunya: $a = 0$ atau $a = 1$.

PENYELESAIAN. Diketahui $a \cdot a = a$. Maka diperoleh

$$\begin{aligned} a \cdot a + (-a) &= a + (-a) \\ a \cdot a + (-1) \cdot a &= 0 \\ (a + (-1)) \cdot a &= 0. \end{aligned}$$

Diperoleh perkalian dua bilangan $a + (-1)$ dan a bernilai nol. Disimpulkan $a + (-1) = 0$ menghasilkan $a = 1$ (mengapa?) atau $a = 0$. □

Kalimat pada contoh soal ini ekuivalen dengan kontraposisinya, yaitu bila $a \neq 0$ dan $a \neq 1$ maka $a \cdot a \neq a$. Pernyataan ini mengatakan bahwa perkalian dua bilangan yang sama selalu menghasilkan bilangan yang berbeda, kecuali 0 dan 1.

Latihan 1.2. Pada penentuan akar persamaan kuadrat sebelumnya, yaitu

$$x^2 - 1 = 0 \to (x + 1)(x - 1) = 0 \to x + 1 = 0 \text{ atau } x - 1 = 0 \to x = -1 \text{ atau } x = 1.$$

Akhirnya kita simpulkan bahwa akar persamaan kuadrat $x^2 - 1 = 0$ adalah $x = -1$ dan $x = 1$. Jelaskan mengapa pada penjabaran digunakan disjungsi “atau”, sedangkan pada kesimpulan digunakan konjungsi “dan”.

1.3 Operasi Aritmetika dan Himpunan Penting pada $\mathbb{R}$

Sejauh ini hanya ada dua operasi pada bilangan real. Melalui dua operasi ini diturunkan beberapa operasi lainnya yang didefinisikan sebagai berikut:

1. **Operasi pengurangan**. Bila $a, b \in \mathbb{R}$ maka notasi $a - b$ dibaca "a dikurangi oleh b", didefinisikan oleh
$$a - b := a + (-b).$$
2. **Operasi pembagian**. Bila $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ maka notasi a/b atau $\frac{a}{b}$ dibaca "a dibagi oleh b", didefinisikan oleh
$$a/b := a \cdot (1/b).$$
3. **Operasi pemangkatan**. Bila $a \in \mathbb{R}$ maka notasi a^2 dibaca a dipangkatkan dengan dua atau a kuadrat, didefinisikan sebagai $a^2 := a \cdot a$. Secara umum untuk n bilangan asli, a^n adalah a dipangkatkan dengan n didefinisikan oleh
$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}.$$
Untuk $a \neq 0$, notasi a^{-1} dimaksudkan untuk $1/a$ dan notasi a^{-n} untuk $(1/a)^n$.

1.4 Eksistensi Bilangan Irrasional

Sampai saat ini kita belum dapat mengidentifikasi bentuk bilangan irrasional. Kita berangkat dari adanya bilangan real yang bukan bilangan rasional. Bilangan inilah yang kelak disebut bilangan irrasional.

Teorema 1.6. *Tidak ada bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$.*

Bukti. Pembuktian menggunakan metode kontradiksi. Andai ada $r \in \mathbb{Q}$ dengan $r^2 = 2$. Maka dapat ditulis

$$r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

dengan

$$r^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2. \tag{*}$$

Kita dapat mengambil bentuk yang paling sederhana (prima relatif), misalnya untuk $\frac{3}{9}$ diambil $\frac{1}{3}$, untuk $\frac{4}{8}$ diambil $\frac{1}{2}$, dan seterusnya. Jadi diperoleh fakta pertama bahwa m dan n tidak mungkin keduanya genap. Dari (*) diperoleh

$$m^2 = 2n^2. \tag{**}$$

Ini menunjukkan bahwa m^2 sebuah bilangan genap, karena itu diperoleh m juga genap (mengapa?). Jadi dapat ditulis $m = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$. Substitusi ke (**) diperoleh

$$(2p)^2 = 2n^2 \to 4p^2 = 2n^2 \to n^2 = 2p^2.$$

Fakta terakhir ini menyatakan n^2 bilangan genap sehingga diperoleh n juga genap. Dari penjabaran ini diperoleh fakta kedua bahwa m dan n keduanya genap. Hal ini bertentangan dengan pernyataan pertama. Jadi disimpulkan tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan 2. □

Berdasarkan teorema ini kita yakin ada bilangan real lain yang bukan bilangan rasional. Bilangan real yang bukan rasional disebut bilangan irrasional. Bilangan irrasional x yang memenuhi $x^2 = 2$ ditulis dengan simbol $\sqrt{2}$. Eksistensi konstruktif $\sqrt{2}$ dalam bilangan real akan dibahas pada sifat kelengkapan bilangan real.

Dengan demikian kita baru berhasil membangun sistem bilangan real pada struktur keanggotaannya. Struktur keanggotaan himpunan-himpunan yang membangun bilangan real diberikan pada Gambar 1.1.

Contoh 1.3. Buktikan bahwa jika $z \in \mathbb{R}$ bilangan irrasional dan $r \neq 0$ bilangan rasional maka $r + z$ dan rz bilangan irrasional.

Bukti. Dibuktikan dengan kontradiksi. Andai $r + z$ rasional, maka dapat ditulis

$$r + z = \frac{m}{n} \text{ dan } r = \frac{p}{q},\ m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n, q \neq 0.$$

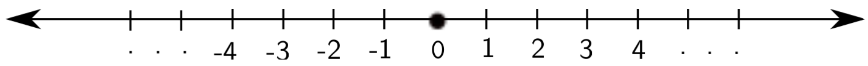
Dari sini diperoleh

$$z = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq},$$

yaitu z rasional, sebab $mq - np, nq \in \mathbb{Z}, nq \neq 0$. Hal ini bertentangan dengan z irrasional. Jadi pengandaian $r + z$ rasional salah, dan haruslah $r + z$ irrasional. Dengan argumen yang sama dapat dibuktikan rz juga irrasional. □

Latihan 1.5. Apakah himpunan bilangan irrasional tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

Latihan 1.6. Misalkan x dan y adalah bilangan irrasional, bagaimana dengan bilangan x^y.



Gambar 1.2: Garis bilangan

2. Bilangan $a \in \mathbb{R}$ sehingga $-a \in \mathbb{P}$ disebut bilangan negatif, ditulis $a < 0$. Notasi $a \leq 0$ berarti $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, dan a disebut bilangan takpositif.

3. Bilangan real a dikatakan lebih besar dari b, ditulis $a > b$ jika dan hanya jika $a - b \in \mathbb{P}$.

Notasi $a < b < c$ dimaksudkan berlaku keduanya $a < b$ dan $b < c$. Bila $a \leq b$ dan $b < c$, maka ditulis $a \leq b < c$.

Contoh 1.4. Perhatikan pernyataan berikut.

1. $5 > 3$ adalah benar, sebab $5 - 3 = 2 \in \mathbb{P}$.

2. $2 \geq 2$ adalah benar, sebab $2 - 2 = 0 \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

3. $1 > 1$ adalah salah, sebab $1 - 1 = 0 \notin \mathbb{P}$.

4. $2 \leq 2 < 3$ adalah benar, sebab $3 - 2 = 1 \in \mathbb{P}$ dan $2 - 2 = 0 \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

Berhubung jelasnya relasi urutan pada $\mathbb{R}$, maka bilangan real ini dapat disajikan dalam bentuk garis bilangan. Garis bilangan adalah garis lurus berupa dua sinar dengan pusat nol. Sinar ke arah kanan untuk menyatakan bilangan positif dan sinar ke arah kiri untuk menyatakan bilangan negatif. Semakin ke kanan bilangannya semakin besar, dan semakin ke kiri bilangannya semakin kecil. Pada garis ini biasanya hanya ditampilkan bilangan-bilangan bulat saja sebagai patokan. Lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 1.2. Bilangan pecahan dan irrasional sulit disajikan secara tepat pada garis bilangan ini. Sejauh ini garis bilangan adalah representasi yang paling cocok untuk bilangan real.

Berikut ini diberikan sifat transitif dan trikotomi pada relasi urutan.

Teorema 1.7. *Misalkan a, b, c tiga bilangan real. Maka pernyataan berikut berlaku.*

1. TRANSITIF: *Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$,*

2. TRIKOTOMI: *Tepat satu pernyataan berikut memenuhi: $a > b$, $a = b$, $a < b$.*

BUKTI. Buktinya cukup menggunakan definisi bilangan positif.

1. Mengingat $a > b$ dan $b > c$ maka berdasarkan definisi bilangan positif, berlaku $a - b \in \mathbb{P}$, dan $b - c \in \mathbb{P}$. Dengan sedikit trik diperoleh

$$a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{P}, \text{ yakni } a > c.$$

2. Terapkan sifat trikotomi pada $a - b$.

$\square$

Sifat urutan lainnya yang banyak digunakan pada pembahasan selanjutnya adalah sebagai berikut.

Teorema 1.8. *Misalkan a, b, c, d bilangan-bilangan real. Maka pernyataan berikut berlaku.*

1. *Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$.*

Contoh 1.5. Buktikan, bila a dan b bilangan real dengan $a < b + \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $a \leq b$.

Bukti. Diketahui $a < b+\varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Bentuk ini dapat disajikan sebagai $a-b < \varepsilon$. Bila $a-b \geq 0$ maka menurut teorema sebelumnya diperoleh $a-b = 0$ atau $a = b$. Sebaliknya, jika $a - b < 0$ maka diperoleh $a < b$. Kedua hasil ini digabungkan, diperoleh $a \leq b$. □

Berdasarkan definisi bilangan positif bahwa perkalian dua bilangan positif akan menghasilkan bilangan positif. Sebaliknya, bila hasil kali dua bilangan real adalah positif, maka belum tentu kedua bilangan real tersebut adalah positif. Berikut penjelasannya.

Teorema 1.11. *Jika $ab > 0$ maka berlaku salah satu dari dua kemungkinan berikut:*

1. $a > 0$ *dan* $b > 0$, *atau*
2. $a < 0$ *dan* $b < 0$.

Bukti. Mengingat $ab > 0$ maka $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, sebab jika salah satu di antara a atau b bernilai nol maka $ab = 0$, bertentangan dengan yang diketahui. Dengan sifat trikotomi maka kemungkinnya adalah $a > 0$ atau $a < 0$. Untuk $a > 0$ maka $1/a > 0$ dan

$$b = 1 \cdot b = ((1/a)a)\, b = \underbrace{(1/a)}_{>0}\underbrace{(ab)}_{>0} > 0.$$

Untuk kasus $a < 0$, diperoleh $-a > 0$ atau $1/(-a) > 0$ sehingga diperoleh

$$0 < (1/(-a))(ab) = -(1/a)(ab) = -\left((1/a) \cdot a\right) \cdot b = -1 \cdot b = -b.$$

Karena $-b > 0$ maka disimpulkan $b < 0$. □

Contoh 1.6. Buktikan bahwa jika $ab < 0$ maka berlaku salah satu dari dua kemungkinan berikut:

$$a > 0 \text{ dan } b < 0 \text{ atau } a < 0 \text{ dan } b > 0.$$

Bukti. Perhatikan a tidak mungkin nol. Untuk $a > 0$, diperoleh

$$b = \underbrace{(1/a)}_{>0}\underbrace{(ab)}_{<0} < 0.$$

Dengan argumen yang sama pembaca dapat membuktikan sendiri kasus $a < 0$. □

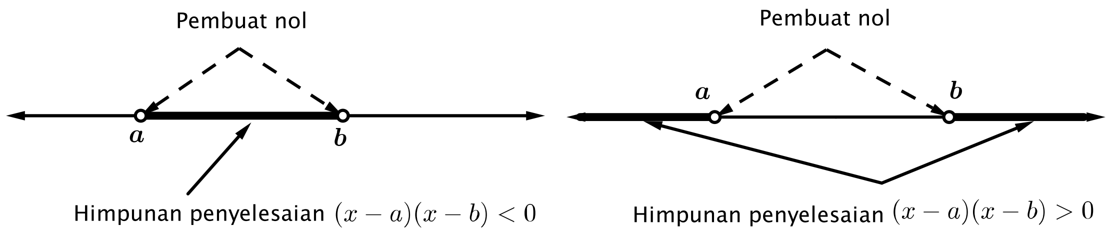
Fakta yang baru saja dibahas menyatakan bahwa jika hasil kali dua bilangan adalah positif maka kedua bilangan itu bertanda sama (negatif semua atau positif semua). Sebaliknya, jika hasil kali kedua bilangan adalah negatif maka kedua bilangan itu bertanda beda (satunya positif dan lainnya negatif). Sifat ini juga berlaku untuk pembagian. Fakta ini biasanya digunakan dalam menyelesaikan pertidaksamaan.

Contoh 1.7. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + x - 2 > 0$.

Penyelesaian. Pertama kita lakukan faktorisasi berikut:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) > 0.$$

Diperoleh perkalian dua suku $(x + 2)$ dan $(x - 1)$ bernilai positif sehingga ada dua kemungkinan, yaitu:



Gambar 1.3: Ilustrasi grafis penyelesaian pertidaksamaan

- $x - a < 0$ dan $x - b < 0$, ini menghasilkan $x < a$ dan $x < b$. Karena $a \leq b$ maka irisannya adalah $x < a$.
- $x - a > 0$ dan $x - b > 0$, ini menghasilkan $x > a$ dan $x > b$. Irisannya adalah $x > b$.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah

$$\{x \in \mathbb{R} | \, x < a \text{ atau } x > b\}.$$

Ilustrasi grafis penyelesaian kedua pertidaksamaan ini diberikan pada Gambar 1.3.

□

Latihan 1.7. Perhatikan kembali Contoh 1.9. Apa yang Anda peroleh pada penyelesaiannya jika $a = b$?

Latihan 1.8. Jika $a \leq b \leq c$, tentukan penyelesaian pertidaksamaan berikut ini.

1. $(x - a)(x - b)(x - c) < 0$
2. $(x - a)(x - b)(x - c) > 0$.

1.6 Beberapa Ketaksamaan Penting

Dalam matematika banyak sekali fakta yang disajikan dalam bentuk ketaksamaan mulai dari bentuk sederhana sampai bentuk sangat rumit. Ketaksamaan banyak digunakan, salah satunya untuk klasifikasi objek yang memenuhi kriteria tertentu. Pembuktian kebenaran fakta dalam matematika banyak menggunakan ketaksamaan. Berikut ini diberikan beberapa bentuk ketaksamaan sederhana yang disering digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Teorema 1.12. *Misalkan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:*

1. $a < b$
2. $a^2 < b^2$
3. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bukti. Untuk $a = 0$ dan $b \geq 0$ diperoleh pernyataan

$$b > 0 \leftrightarrow b^2 > 0 \leftrightarrow \sqrt{b} > 0.$$

Rerata aritmetika (RA) dari dua bilangan real a dan b adalah $\frac{a+b}{2}$, sedangkan rerata geometri (RG) dari a dan b adalah $\sqrt{ab}$. Dalam kehidupan sehari-hari, rerata aritmetika lebih sering digunakan daripada rerata geometri. Rerata aritmetika merupakan rerata yang sering muncul dalam statistika. Secara umum dua macam rerata ini didefinisikan sebagai berikut. Misalkan diketahui bilangan real atau data $a_1, a_2, \cdots, a_n$ maka

$$RA = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad RG = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}.$$

Notasi sigma $\sum$ adalah untuk penjumlahan suku-suku dan notasi phi $\prod$ untuk perkalian suku-suku. Di sini masih tetap berlaku bahwa

$$RG \leq RA.$$

Rerata geometri tidak dapat memberikan informasi untuk kumpulan data yang memuat data bernilai nol atau negatif. Sedangkan rerata aritmetika tetap dapat diterapkan untuk semua data bernilai real. Oleh karena itu rerata aritmetika sangat sering digunakan dalam bidang aplikasi. Satu lagi jenis rerata yang ada ialah rerata harmonik (RH) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$RH = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \tag{RH}$$

Sayangnya, rerata harmonik tidak cocok untuk data yang sangat dekat dengan nol karena nilainya menjadi besar sekali menuju takhingga. Akan tetapi untuk $a_k > 1$ maka mudah ditunjukkan berlaku hubungan berikut:

$$RH < RG \leq RA.$$

Contoh 1.10. Diberikan data $1, 2, 3, 4, 5$. Rerata aritmetika data ini adalah $\frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$. Rerata geometrinya adalah $\sqrt[5]{(1)(2)(3)(4)(5)} = 2.605$. Rerata harmoniknya adalah $\frac{1}{5}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}) = 0.4567$. Memang benar bahwa $RH < RG \leq RA$.

Teorema 1.14 (Ketaksamaan Bernoulli)**.** *Jika $x > -1$ maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{KB}$$

Bukti. Dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n = 1$ kedua ruas pada (KB) menjadi kesamaan, pernyataan benar untuk $n = 1$. Diasumsikan berlaku untuk $n = k$, yaitu berlaku $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Untuk $n = k+1$, diperoleh

$$\begin{aligned} (1+x)^k &\geq 1 + kx \text{ [Diketahui]} \\ (1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) &\geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k+1)x. \end{aligned}$$

Jadi berlaku untuk $n = k+1$. Dengan demikian disimpulkan pernyataan pada (KB) dipenuhi untuk setiap bilangan asli n. $\square$

Perhatikan pada baris kedua pembuktian di atas, kedua ruas dikalikan dengan $(1 + x)$ suatu bilangan positif karena $x > -1$, sehingga tanda ketaksamaannya tidak berubah. Ketaksamaan Bernoulli disebut juga **ketaksamaan binomial**.

Latihan 1.10. Tuliskan bentuk khusus ketaksamaan Cauchy untuk

1. Dua kelompok bilangan tunggal $\{a_1\}$ dan $\{b_1\}$ dengan $a_1 := a$ dan $b_1 := b$.
2. Dua kelompok bilangan $\{a_1, a_2\}$ dan $\{b_1, b_2\}$ dengan $a_1 = b, a_2 = 1$ dan $b_1 = 1, b_2 = a$.

Latihan 1.11. Verifikasilah secara numerik kebenaran ketaksamaan Cauchy untuk bilangan $a_k = b_k = \frac{1}{k}$ untuk $k = 1, \cdots, 5$.

BAB 2

Nilai Mutlak dan Metrik pada $\mathbb{R}$

Numbers are intelectual witnesses that belong only to mankind.

Honore De BALZAC

Pada sifat urutan, kita baru mengetahui urutan lebih besar di antara dua bilangan real, namun belum diketahui kuantitas besarnya. Sebagai contoh $5 > 2$ dan $5 > -1$ adalah dua hal yang benar, tetapi belum dibahas yang mana kuantitasnya lebih besar, 5 terhadap 2 atau 5 terhadap -1. Oleh karena itu dibutuhkan pengertian jarak atau lebih umum disebut metrik pada bilangan real.

Konsep jarak sangat penting dalam kehidupan sehari-hari karena ia menyangkut ukuran panjang. Jarak antara dua titik biasanya dipahami sebagai panjang lintasan yang berupa garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut (jarak terpendek). Dalam matematika, jarak diperumum dan diabstraksi menjadi konsep metrik. Untuk ini didefinisikan terlebih dulu pengertian nilai mutlak.

2.1 Nilai Mutlak dan Jarak

Definisi 2.1. Nilai mutlak suatu bilangan real a, ditulis dengan $|a|$ didefinisikan sebagai:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{bila } a > 0, \\ 0 & \text{bila } a = 0, \\ -a & \text{bila } a < 0. \end{cases}$$

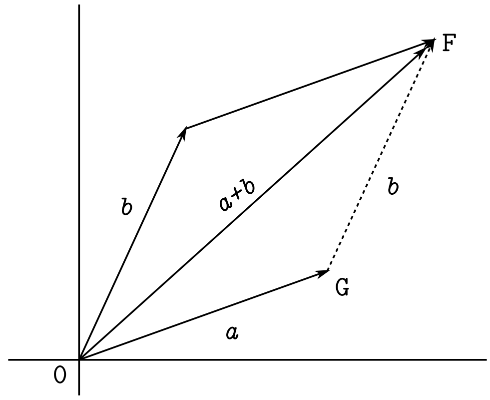
Sebagai contoh, $|3| = 3$, $|0| = 0$, dan $|-1| = -(-1) = 1$. Dengan kata lain, nilai mutlak bilangan real bersifat dikotomi, yaitu nol atau positif. Perhatikan tiga cabang pada definisi nilai mutlak dapat disederhanakan menjadi dua cabang, yaitu

$$|a| := \begin{cases} a & \text{bila } a \geq 0, \\ -a & \text{bila } a < 0. \end{cases}$$

Teorema berikut ini menyajikan sifat-sifat dasar nilai mutlak.

Teorema 2.1. *Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real. Maka berlaku pernyataan berikut.*

1. $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$



Gambar 2.2: Ilustrasi vektor ketaksamaan segitiga

Teorema 2.2. (Ketaksamaan Segitiga) *Untuk sebarang bilangan real a dan b berlaku*

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{KS}$$

Bukti. Dari Teorema 2.1(5) kita mempunyai $-|a| < a < |a|$ dan $-|b| < b < |b|$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan ini diperoleh

$$-(|a| + |b|) < a + b < (|a| + |b|).$$

Kemudian, dari menggunakan Teorema 2.1(4) dengan menganggap $c := (|a| + |b|)$ maka terbukti bahwa

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

□

Dikatakan ketaksamaan segitiga karena ketaksamaan ini mengatakan bahwa panjang sisi sebuah segitiga tidak akan melebihi jumlah panjang kedua sisi lainnya. Sebaliknya, jika ada tiga ruas garis yang tidak memenuhi ketaksamaan ini maka ketiga garis tersebut tidak dapat membentuk sebuah segitiga.

Interpretasi ini akan lebih jelas bila digunakan pendekatan vektor seperti ditampilkan pada Gambar 2.2. Pada gambar ini terlihat segitiga OGF yang dibentuk oleh vektor a, b dan $a + b$. Panjang sisi OF, yaitu $|a + b|$ selalu kurang dari jumlah panjang kedua sisi lainnya, yaitu $|a|$ untuk sisi OG dan $|b|$ untuk sisi GF.

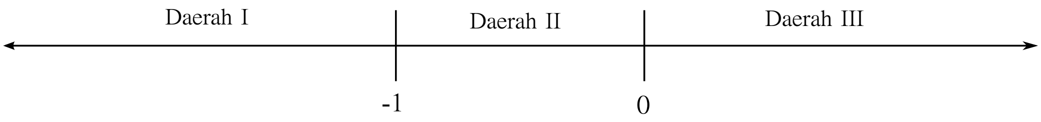
Versi lainnya dari ketaksamaan segitiga diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.3. *Untuk sebarang bilangan real a dan b, berlaku*

1. $||a| - |b|| \leq |a - b|$,
2. $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Bukti. Gunakan ketaksamaan segitiga versi sebelumnya.

1. Tulis $a = (a - b) + b$. Dengan (KS) maka berlaku $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Dengan ide yang sama, yaitu menulis $b = (b - a) + a$ diperoleh $|b| \leq |a - b| + |a|$. Ingat bahwa $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$. Dari kedua hasil ini diperoleh $|a| - |b| \leq |a - b|$ dan $|a| - |b| \geq -|a - b|$. Dengan menggunakan sifat nilai mutlak maka kedua hasil terakhir ini dapat ditulis sebagai $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
2. Tulis $a - b = a + (-b)$ dan dengan (KS) diperoleh $|a - b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.



Gambar 2.3: Ilustrasi pembagian daerah oleh titik transisi

Pada baris terakhir diperoleh kalimat $x^2 < x^2$ sebuah kontradiksi. Ini berarti tidak ada x yang memenuhi alias himpunan penyelesaiannya adalah kosong. Padahal bila diambil $x = 1$ maka diperoleh $1 - |1| < |1 + 1| \leftrightarrow 0 < 2$ adalah sebuah pernyataan benar sehingga $x = 1$ adalah salah satu penyelesaiannya. Jadi metode penguadratan kedua ruas tidak berlaku dalam kasus ini. Cara kedua kita selesaikan dengan menggunakan definisi nilai mutlak. Perhatikan ada dua titik transisi pada soal ini, yaitu $x = -1$ dan $x = 0$ sehingga ada 3 daerah yang perlu diselidiki.

- untuk $x < -1$ diperoleh $1 - (-x) < -x - 1 \to 1 + x < -x - 1 \to 2x < -2 \to x < -1$.
- untuk $-1 \leq x < 0$ diperoleh $1 - (-x) < x + 1 \to 1 + x < 1 + x \to x < x$. Ini berarti tidak ada x dalam domain ini yang memenuhi.
- untuk $x \geq 0$ diperoleh $1 - x < x + 1 \to 2x > 0 \to x > 0$. Jadi, pada domain ini dipenuhi oleh $x > 0$.

Berdasarkan penyelidikan ini maka disimpulkan himpunan penyelesaiannya adalah

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -1 \text{ atau } x > 0\}.$$

□

Contoh 2.3. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $|1 + x| < 2 - |x|$.

PENYELESAIAN. Pada soal ini kita mempunyai 2 titik transisi, yaitu $x = -1$ dan $x = 0$ sehingga garis bilangan terpecah menjadi tiga daerah seperti ditunjukkan pada Gambar 2.3. Titik transisi adalah titik di mana fungsi di dalam nilai mutlak berubah tanda. Dapat diperiksa langsung di titik transisi ini pertidaksamaan dipenuhi.

- [Daerah I] Untuk $x < -1$ berlaku $1 + x < 0$ dan $x < 0$. Pertidaksamaan menjadi

$$\begin{aligned} -(1 + x) &< 2 - (-x) \\ -1 - x &< 2 + x \\ -3 &< 2x \\ x &> -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

  Mengingat syarat $x < -1$ maka irisannya menghasilkan $-\frac{3}{2} < x < -1$.

- [Daerah II] Untuk $-1 \leq x < 0$ berlaku $1 + x > 0$ dan $x < 0$. Pertidaksamaan menjadi

$$\begin{aligned} 1 + x &< 2 - (-x) \\ 1 &< 2. \end{aligned}$$

  Pernyataan terakhir merupakan sebuah kebenaran. Ini berarti pertidaksamaan dipenuhi oleh semua x pada interval ini, yaitu $-1 \leq x < 0$.

Ketaksamaan segitiga sebelumnya hanya melibatkan dua bilangan a dan b. Dengan prinsip induksi matematika, setiap pernyataan yang berlaku untuk dua elemen atau suku akan berlaku juga untuk tiga elemen, empat elemen, dan seterusnya berlaku untuk sebanyak berhingga elemen. Berikut ini diberikan ketaksamaan segitiga generalisasi (KSG) yang melibatkan sebanyak n bilangan real.

Teorema 2.4. *Untuk sebarang bilangan real* $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $n \geq 2$ *berlaku*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|. \tag{KSG}$$

Bukti. Dibuktikan dengan metode induksi matematika pada n. Untuk $n = 2$ jelas berlaku karena merupakan ketaksamaan segitiga standar. Andai berlaku untuk $n = k$, yaitu

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|.$$

Maka untuk $n = k + 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| &\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|. \end{aligned}$$

Ini artinya berlaku untuk $n = k + 1$. Dengan prinsip induksi matematika disimpulkan ketaksamaan (KSG) berlaku untuk setiap $n \geq 2$. $\square$

Teorema ini dapat diinterpretasikan di dalam sebuah segi banyak, panjang sebuah sisi tidak akan melebihi jumlah panjang sisi lainnya. Ingat, segi banyak tersusun atas beberapa segitiga.

2.2 Pengenalan Ruang Metrik

Sebelumnya kita telah mendefinisikan jarak antara x dan y pada bilangan real sebagai $d(x, y) := |x - y|$. Bila kita amati, jarak merupakan fungsi dua variabel dengan (x, y) sebagai argumennya. Berikut ini diberikan definisi jarak secara umum yang disebut metrik.

Definisi 2.3. Misalkan X himpunan takkosong. Sebuah fungsi

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

disebut metrik pada X jika ia memenuhi kondisi berikut:

1. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$. Sifat ini mengatakan bahwa tidak ada jarak yang negatif.

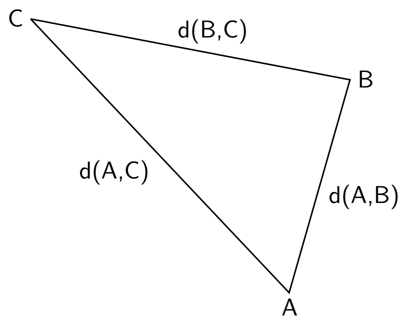
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$. Ini berarti dua titik yang sama mempunyai jarak nol dan dua titik berbeda mempunyai jarak positif.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$. Ini berarti jarak dari x ke y sama dengan jarak dari y ke x.

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$. Sifat ini merupakan generalisasi dari ketaksamaan segitiga (KS).

Contoh 2.4. Buktikan $d(x, y) := |x - y|$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.

Bukti. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku



Gambar 2.5: Ilustrasi ketaksamaan segitiga pada $\mathbb{R}^2$

Ada banyak metrik lain yang bukan metrik Euclid, seperti diberikan pada contoh-contoh berikut ini.

Contoh 2.6. Misalkan S himpunan takkosong, buktikan fungsi d pada $S \times S$ yang didefinisikan oleh

$$d(s,t) := \begin{cases} 0 & \text{bila } s = t, \\ 1 & \text{bila } s \neq t. \end{cases}$$

merupakan metrik. Metrik ini disebut metrik diskret.

Bukti. Misalkan $s, t, z \in S$

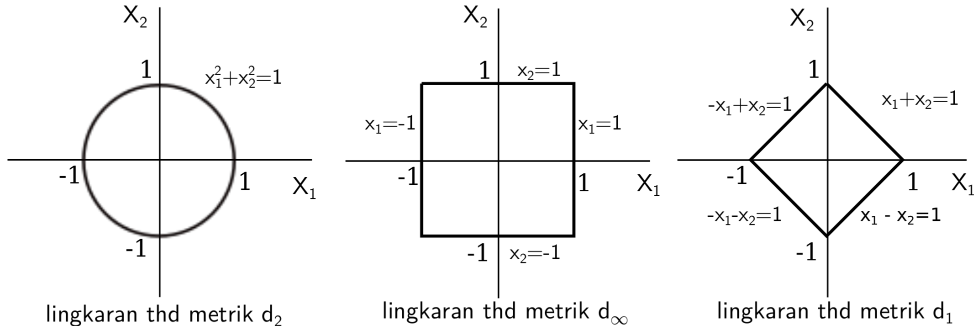
1. $d(s,t) \geq 0$ jelas dipenuhi karena nilainya hanya dua kemungkinan, yaitu 0 atau 1; tidak ada yang bernilai negatif.
2. $d(s,t) = 0$ jika dan hanya jika $s = t$ (lihat cabang pertama).
3. $d(s,t) = d(t,s)$ jelas berlaku mengingat $s = t \leftrightarrow t = s$.
4. Untuk $s = t$ maka $d(s,t) = 0 \leq d(s,z) + d(z,t)$, karena ruas kanan tidak akan negatif. Untuk $s \neq t$ maka untuk sebarang $z \in S$ pasti berlaku minimal salah satunya, yaitu $z \neq s$ atau $z \neq t$. Jadi diperoleh $d(s,t) = 1$ dan pasti terjadi minimal salah satunya: $d(s,z) = 1$ atau $d(z,t) = 1$. Sehingga diperoleh $d(s,t) \leq d(s,z) + d(z,t)$.

□

Metrik diskret ini sulit dibayangkan dalam bentuk nyata, kecuali untuk tiga elemen $S = \{A, B, C\}$ dapat dibayangkan ketiga titik ini sebagai titik sudut segitiga sama sisi. Untuk lima titik $S = \{A, B, C, D, E\}$, metrik ini merupakan jarak abstrak karena tidak dapat digunakan ukuran jarak biasa. Ilustrasi grafisnya diberikan pada Gambar 2.6. Pada panel kiri, metrik diskret pada himpunan dengan tiga elemen dapat dipahami seperti dalam metrik biasa. Berjarak 1 di antara dua titik berlainan dapat dipahami dalam arti biasa. Akan tetapi untuk lebih dari tiga titik seperti terlihat pada panel kanan, jarak 1 antar dua titik tidak dapat lagi dipandang dalam ukuran biasa. Misalnya $d(A,B) = d(A,D) = 1$ padahal secara kasat mata hal ini tidaklah demikian.

Contoh 2.7. Buktikan berikut ini adalah metrik pada $\mathbb{R}^2$. Untuk $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$:

1. $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.
2. $d_\infty(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.



Gambar 2.7: Lingkaran terhadap berbagai metrik

Bukti. Di sini kita akan menentukan semua titik $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dengan $d(x, 0) = 1$, d metrik yang bersesuaian dengan d_2, d_∞, dan d_1.

1. Untuk metrik d_2 kita mempunyai $\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} = 1$ atau $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Ini tidak lain sebuah lingkaran berpusat pada O dan jari-jari 1.
2. Untuk metrik d_∞ kita mempunyai $\max\{|x_1 - 0|, |x_2 - 0|\} = \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$. Diperoleh $|x_1| = 1$ atau $|x_2| = 1$, yaitu $x_1 = \pm 1$ atau $x_2 = \pm 1$. Jadi ia berupa persegi dengan titik-titik sudut $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ dan $(1, -1)$.
3. Untuk metrik d_1 kita mempunyai $|x_1 - 0| + |x_2 - 0| = 1 \leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 1$. Kita kelompokkan dalam 4 kuadran, yaitu

   (a) kuadran 1: $x_1, x_2 > 0$ sehingga diperoleh $x_1 + x_2 = 1$.
   (b) kuadran 2: $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ sehingga diperoleh $-x_1 + x_2 = 1$.
   (c) kuadran 3: $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ sehingga diperoleh $-x_1 - x_2 = 1$.
   (d) kuadran 4: $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ sehingga diperoleh $x_1 - x_2 = 1$.

   Kesemua ini berupa garis lurus. Setelah digambarkan pada masing-masing kuadran maka diperoleh bangun belah ketupat dengan titik-titik sudut $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ dan $(0, -1)$. Grafik himpunan penyelesaian untuk masing-masing metrik diberikan pada Gambar 2.7.

□

Contoh soal yang baru saja kita bahas membuka wawasan kita bahwa kesepakatan metrik yang digunakan sangat vital dalam penyamaan persepsi akan sebuah makna. Persegi dapat bermakna lingkaran jika dipandang dari metrik d_∞. Begitu juga belah ketupat dapat juga bermakna lingkaran dipandang dari metrik d_1.

Latihan 2.5. Misalkan X himpunan bilangan real positif, buktikan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Buktikan d merupakan metrik pada X.

Latihan 2.6. Misalkan fungsi linear $f(x) := ax + b, a \neq 0$ didefinisikan pada bilangan real $\mathbb{R}$. Kemudian, definisikan fungsi $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$d(x, y) := |f(x) - f(y)|.$$

Selidikilah apakah d sebuah metrik? (Petunjuk: Bagilah kasus untuk $a > 0$ dan $a < 0$).

BAB 3

Sifat Kelengkapan Bilangan Real

Science when well digested is nothing but good sense and reason.

Stanislaus LESZCZYNSKI

Konstruksi anggota bilangan real dimulai dari pendefinisian elemen satuan 1 dan elemen nol 0, kemudian bilangan asli dan bilangan bulat, dan akhirnya bilangan rasional. Bilangan irrasional didefinisikan sebagai bilangan selain bilangan rasional. Walaupun eksistensi bilangan irrasional tidak konstruktif seperti pendefinisian jenis bilangan lainnya, namun keberadaannya sangat penting. Sebagai ilustrasi, seandainya bilangan irrasional $\sqrt{2}$ tidak ada maka himpunan $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ merupakan himpunan kosong padahal $x = 1$ adalah salah satu anggotanya. Untungnya kita telah menunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ adalah sebuah bilangan irrasional.

Permasalahannya adalah bagaimanakah posisi bilangan irrasional ini di dalam himpunan bilangan real khususnya bagaimana pola penyebaran bilangan irrasional pada garis bilangan? Permasalahan ini berkaitan dengan sifat kepadatan bilangan rasional dan bilangan irrasional pada $\mathbb{R}$. Sebuah sifat penting lainnya yang akan dibahas pada bab ini adalah sifat kelengkapan. Sifat ini menjamin bahwa sebuah bilangan yang menjadi batas terkecil atau batas terbesar suatu himpunan terbatas selalu berada di dalam $\mathbb{R}$. Dalam konteks barisan yang akan dipelajari pada Bagian 2 dapat dikatakan sebagai berikut: jika sebuah barisan bilangan real terbatas (x_n) konvergen ke sebuah bilangan x maka $x \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, sifat kelengkapan adalah sifat yang menjamin semua titik limit barisan bilangan terbatas dan konvergen selalu berada pada $\mathbb{R}$. Pada pembahasan analisis lanjutan akan terdapat kasus di mana ada barisan bilangan (x_n) di dalam E dengan $\lim(x_n) = x$, tetapi $x \notin E$. Dalam kasus ini E dikatakan tidak lengkap. Sifat kelengkapan bilangan real dikembangkan dari konsep supremum dan infimum sebagai perumuman konsep maksimum dan minimum.

3.1 Supremum dan Infimum

Ketika kita diberikan himpunan $A := [0, 1)$ maka minimum atau anggota terkecil himpunan ini adalah 0. Bagaimana dengan maksimum A, apakah ada? Kalau ada, berapa nilainya? Perhatikan bahwa 1 bukan nilai maksimum karena 1 tidak termuat di dalam A. Pertanyaan serupa, apakah himpunan $B := (0, 1]$ mempunyai minimum? Dengan kata lain, apakah ada bilangan positif terkecil? Perhatikan pembahasannya yang diberikan pada contoh berikut.

Contoh 3.1. Buktikan himpunan $B := (0, 1]$ tidak mempunyai minimum.

Selanjutnya, kita menyusun definisi p bukan batas atas S. Perhatikan definisi batas atas dalam kalimat logika berikut:

$$p \text{ batas atas } S \text{ jika dan hanya jika } p \geq s \text{ untuk setiap } s \in S.$$

Dengan mengambil negasi kalimat ini maka diperoleh definisi bukan batas atas berikut:

$$p \text{ bukan batas atas } S \text{ jika dan hanya jika ada } s_0 \in S \text{ sehingga } p < s_0.$$

Latihan 3.2. Susunlah definisi d bukan batas bawah S. Kemudian, buktikan bahwa 2 bukan atas atas maupun batas bawah $\mathbb{N}$.

Contoh 3.4. Tentukan batas bawah dan batas atas himpunan $S := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

PENYELESAIAN. Karena $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ maka sangat jelas bahwa himpunan batas atas S adalah $\text{hba}(S) = \{x : x \geq 1\}$ dan himpunan batas bawah S adalah $\text{hbb}(S) = \{x : x \leq 0\}$. Barangkali masalah yang mengganjal adalah mengapa $\varepsilon > 0$ sangat kecil bukan batas bawah S. Perhatikan kembali sifat Archimedes bahwa setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Karena $\frac{1}{K} \in S$ maka disimpulkan ε bukan batas bawah. □

Contoh 3.5. Buktikan setiap bilangan real adalah batas atas himpunan kosong.

BUKTI. Argumennya dapat dijelaskan sebagai berikut. Bilangan $u \in \mathbb{R}$ batas atas S dapat disajikan dalam kalimat logika berikut

$$s \in S \to s < u.$$

Dalam kasus S himpunan kosong maka pernyataan $s \in S$ bernilai salah, sehingga implikasi $s \in S \to s < u$ selalu benar. □

Latihan 3.3. Buktikan bahwa semua bilangan real merupakan batas bawah himpunan kosong.

Definisi 3.2. Himpunan yang mempunyai batas atas disebut **terbatas di atas** (*bounded above*), sedangkan himpunan dikatakan **terbatas di bawah** (*bounded below*) jika ia mempunyai batas bawah. Himpunan dikatakan **terbatas** jika ia terbatas di atas dan terbatas di bawah.

Contoh 3.6. Himpunan bilangan real $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ tidak terbatas di atas maupun di bawah. Himpunan $S := [1, \infty)$ terbatas di bawah. Himpunan $E := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas.

Berdasarkan penjelasan di atas, suatu himpunan terbatas memilki takberhingga banyak batas atas maupun batas bawah. Di antara kesemua batas tersebut, terdapat sebuah batas bawah khusus dan sebuah batas atas khusus. Kedua batas ini disebut dengan infimum dan supremum seperti dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 3.3. Misalkan S himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

1. Misalkan S terbatas di atas. Batas atas u dikatakan **supremum** S, ditulis

$$u = \sup(S)$$

jika tidak ada bilangan lain yang lebih kecil dari u yang menjadi batas atas S. Dengan kata lain u batas atas yang paling kecil.

Gambar 3.2: Ilustrasi kriteria epsilon untuk supremum

Berikut ini adalah kriteria epsilon supremum, yaitu digunakan untuk mengetahui suatu batas atas merupakan supremum atau bukan.

Teorema 3.2. *Misalkan u suatu batas atas himpunan S. Maka berlaku pernyataan berikut*

$$u = \sup S \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists s \in S \text{ sehingga } u - \varepsilon < s. \tag{*}$$

Bukti. ($\rightarrow$): Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena diketahui $u = \sup S$ maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas S, jadi ada $s \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s$.
($\leftarrow$): Akan ditunjukkan bahwa u yang memenuhi sebelah kanan (*) merupakan supremum S. Misalkan v sebarang bilangan real dengan $v < u$. Ambil $\varepsilon := u - v > 0$, maka ada $s \in S$ sehingga

$$u - \varepsilon = u - (u - v) = v < s.$$

Ini berarti v bukan batas atas S dan berdasarkan karakteristik supremum disimpulkan $u = \sup S$. □

Fakta pada teorema ini diilustrasikan pada Gambar 3.2. Pada ilustrasi ini, sekecil apapun supremum digeser ke kiri maka ada $s \in S$ yang dilewati.

Latihan 3.5. Buktikan kebenaran pernyataan berikut. Pernyataan ini adalah kriteria epsilon infimum.

$$w = \inf S \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists s \in S \text{ sehingga } w + \varepsilon > s. \tag{**}$$

Contoh 3.7. Perhatikan himpunan $S := \{x : 0 \leq x < 1\}$. Maka $\max S$ tidak ada, tetapi $\sup S = 1$, $\min S = \inf S = 0$.

Latihan 3.6. Misalkan himpunan $S := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Mudah dipahami bahwa $\inf S = 0$ dan $\sup S = 10$. Verifikasilah hasil ini dengan menerapkan kriteria epsilon untuk infimum dan supremum, yaitu menunjukkan adanya elemen s yang dimaksud dalam kriteria.

Definisi 3.4. (Sifat Kelengkapan) Sifat kelengkapan adalah sifat supremum dan sifat infimum, yaitu setiap himpunan takkosong dan terbatas di atas selalu mempunyai supremum, dan setiap himpunan tak kosong yang terbatas di bawah selalu mempunyai infimum. Mempunyai di sini berarti nilainya berupa bilangan real. Sifat ini dikenal juga dengan aksioma kelengkapan bilangan real.

Dengan sifat ini terjamin bahwa garis bilangan adalah padat, artinya tidak ada satupun titik yang hilang. Sebagai ilustrasi, perhatikan himpunan terbatas berikut

$$A := \{x > 0 : x^2 < 2\}.$$

Walaupun himpunan A ini tidak mempunyai maksimum namun A mempunyai supremum, yaitu sebuah $v \in \mathbb{R}$ dengan $v^2 = 2$. Selanjutnya bilangan ini dinyatakan dengan $v := \sqrt{2}$. Sudah dibuktikan sebelumnya bahwa bilangan ini bukanlah rasional. Fakta ini menjamin bahwa $\sqrt{2}$ yang merupakan bilangan irrasional benar-benar ada. Sayangnya, bilangan ini

$M := \max\{2b, 1\}$ dan $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$maka diperoleh

$$\begin{aligned}(b+\delta)^2 &\leq b^2 + M\delta + M\delta^2 \\ &\leq b^2 + M\delta + M\delta \\ &= b^2 + 2M\delta \\ &\leq b^2 + 2M\frac{\varepsilon}{2M} \\ &= b^2 + \varepsilon \\ &= b^2 + (2 - b^2) = 2.\end{aligned}$$

Diperoleh $(b+\delta)^2 \leq 2$, yaitu $b + \delta \in S$. Ini sebuah kontradiksi karena b adalah batas atas S.

- Untuk kasus $b^2 > 2$, buktinya dijadikan bahan latihan.

Dengan demikian disimpulkan bahwa $b^2 = 2$.

□

Latihan 3.7. Temukan sebuah kontradiksi untuk pengandaian $b^2 > 2$ pada sisa pembuktian teorema di atas.

3.2 Sifat Archimedes dan Akibatnya

Pada pembuktian contoh sebelumnya telah digunakan sifat Archimedes sebagai berikut. Sifat ini dinamakan seperti nama penemunya seorang matematikawan Yunani Archimedes of Syracuse (287 SM–212 SM).

Teorema 3.4. *Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ tidak mempunyai batas atas.*

BUKTI. Dibuktikan dengan kontradiksi. Andai $\mathbb{N}$ mempunyai batas atas maka $\mathbb{N}$ mempunyai supremum sebuah bilangan real, katakan $u = \sup \mathbb{N}$. Bila kita geser ke kiri sebesar 1, maka $u - 1$ bukan lagi batas atas $\mathbb{N}$. Jadi, ada $m \in \mathbb{N}$ sehingga $u - 1 < m$. Sekarang ambil $t := m + 1$ maka $t \in \mathbb{N}$ dan $t > \sup \mathbb{N} = u$. Kontradiksi dengan $u = \sup \mathbb{N}$. □

Akibat sifat Archimedes

- Tidak masalah seberapa besar bilangan real x yang diberikan, kita selalu dapat menemukan bilangan asli n sehingga $n > x$.
- Sebesar apapun bilangan real positif y yang diberikan dan seberapa kecil bilangan real positif x yang diberikan maka kita selalu menggandakan x dengan sebuah bilangan asli sehingga hasilnya melebihi y, yakni selalu ada $n \in \mathbb{N}$ sehingga $nx > y$.
- Diberikan bilangan positif sebarang $\varepsilon > 0$, tidak masalah seberapa pun kecilnya, maka selalu ada bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Akibat terakhir ini sudah kita gunakan secara intuitif pada pada contoh sebelumnya. Sebagai ilustrasi, perhatikan fakta berikut: $\varepsilon = 0.0012 \to \frac{1}{\varepsilon} = 833.333\cdots$, ambil $n = 834$ maka berlaku

$$\frac{1}{n_0} = \frac{1}{834} < 0.0012 = \varepsilon.$$

PENYELESAIAN. Ikuti tahapan seperti pembuktian teorema di atas.

1. Diketahui $a = \sqrt{2} \approx 1,4142$, $b = 3/2 = 1,5$
2. $d = \frac{1}{1,5-1,4142} \approx 11.6569$
3. Jadi bilangan asli yang yang dapat diambil adalah $n = 12, 13, 14, 15, 16$.
4. Untuk $n = 12$ diperoleh $na \approx (12)(\sqrt{2}) \approx 16,9706$ maka diambil $m = 17$. Untuk $n = 13$, $na \approx (13)(\sqrt{2}) \approx 18,3848$ dan diambil $m = 19$. Untuk $n = 14$ maka $na \approx (14)(\sqrt{2}) \approx 19,7990$ dan diambil $m = 20$.
5. Jadi bilangan rasional $r = \frac{17}{12}, \frac{19}{13}$, dan $\frac{20}{14}$ terletak di antara $\sqrt{2}$ dan $3/2$.

□

Teorema ini mengatakan bahwa di antara dua bilangan real, tidak peduli sesempit apapun jaraknya, maka selalu ada bilangan rasional di antara keduanya. Ini menunjukkan bahwa bilangan rasional padat pada $\mathbb{R}$. Artinya bilangan rasional tersebar di mana-mana pada garis bilangan. Tidak hanya bilangan rasional, ternyata bilangan irrasional juga padat pada $\mathbb{R}$.

Teorema 3.6. *Bila a dan b bilangan real dengan $a < b$ maka terdapat bilangan irrasional z dengan $a < z < b$.*

BUKTI. Kita sudah mengetahui bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional. Ambil dua bilangan real $\frac{a}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{b}{\sqrt{2}}$ maka berlaku $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Berdasarkan teorema kepadatan bilangan rasional, terdapat bilangan rasional r dengan $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Dengan menggandakan ketiga ruas dengan $\sqrt{2}$ diperoleh $a < r\sqrt{2} < b$. Ambil $z := r\sqrt{2}$. Inilah bilangan irrasional yang dimaksud. □

Akhirnya kita memperoleh sebuah kesimpulan bahwa kedua jenis bilangan ini terdistribusi secara merata pada bilangan real. Di mana ada bilangan rasional, di dekatnya pasti ada bilangan irrasional dan sebaliknya. Keduanya sama-sama takberhingga banyaknya. Sangat sulit mengidentifikasi pada garis bilangan kedua jenis bilangan ini. Fungsi yang didefinisikan sebagai

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{bila } x \text{ rasional} \\ -1 & \text{bila } x \text{ irrasional} \end{cases}$$

sulit digambarkan secara baik pada bidang koordinat. Bahkan ia akan terlihat seperti dua garis sejajar seperti terlihat pada Gambar 3.4. Nilai pada beberapa titik: untuk r rasional $f(r) = 1$, misal $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 1$, dan $f(r\sqrt{2}) = -1$, misal $f(\sqrt{2}) = -1$.

Contoh 3.10. Temukan 3 bilangan irrasional di antara $\sqrt{2}$ dan $\frac{3}{2}$.

PENYELESAIAN. Pertama temukan dulu 3 bilangan rasional di antara $a := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ dan $b := \frac{3/2}{\sqrt{2}} \approx 1.06$. Diperoleh $d := \frac{1}{b-a} = 16.67$. Ambil $n := 17, 18, 19$. Untuk $n = 17$ maka $na = 17$, sehingga dapat diambil $m = 18$. Diperoleh $r_1 = \frac{18}{17}$. Untuk $n = 18$ maka $na = 18$ sehingga diambil $m = 19$. Diperoleh $r_2 = \frac{19}{18}$. Dengan cara yang sama diperoleh $r_3 = \frac{20}{19}$. Akhirnya ketiga bilangan irrasional yang dimaksud adalah $\frac{18}{17}\sqrt{2}$, $\frac{19}{18}\sqrt{2}$ dan $\frac{20}{19}\sqrt{2}$. □

sangat besar dan semakin membesar sehingga tidak ada lagi bilangan real yang dapat merepresentasikannya. Oleh karena itu dikembangkan sistem bilangan real diperluas (*extended real number system*) yang memuat simbol takhingga $-\infty$ dan ∞. Selanjutnya himpunan bilangan real diperluas ini dinyatakan oleh $\mathbb{R}^*$, yaitu

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}.$$

Simbol ∞ atau $(+\infty)$ digunakan untuk menyatakan kuantitas yang melebihi bilangan real positif apapun, sedangkan $-\infty$ untuk menyatakan kuantitas yang kurang dari bilangan real negatif apapun. Aturan operasi aritmetika dalam $\mathbb{R}^*$ yang disepakati seperti diberikan oleh Aliprantis and Burkinshaw (1998) adalah sebagai berikut: Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku

1. $\infty + \infty = \infty$, $(-\infty) - \infty = -\infty$.
2. $(\pm\infty) \cdot \infty = \pm\infty$, $(\pm\infty) \cdot (-\infty) = \mp\infty$.
3. $\infty + a = \infty$, $-\infty + a = -\infty$,
4. $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ untuk $a > 0$, $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ untuk $a < 0$.
5. $0 \cdot \infty = 0$.
6. $-\infty < a < \infty$.

Definisi yang sejalan dapat diterapkan pada operasi pangkat dan akar. Operasi aritmetika $\infty - \infty$ dan $-\infty + \infty$ tidak terdefinisikan. Berdasarkan sifat 6 maka disimpulkan $-\infty$ dan ∞ bukanlah anggota $\mathbb{R}$, tapi hanyalah sebagai simbol untuk menyatakan kuantitas yang nilainya sudah berada di luar bilangan real.

Latihan 3.12. Anda tentu sering melihat orang menulis ekspresi matematika $\frac{1}{\infty} = 0$ dan $\frac{0}{0}$ merupakan bentuk taktentu. Bagaimana menurut pendapat Anda terhadap kedua bentuk ini? Coba diskusikan.

Istilah Kunci Bagian I Istilah kunci berikut ini sudah dibahas pada Bagian I dan sering digunakan dalam pembahasan analisis real berikutnya. Pengertian ini hanyalah untuk pemahaman praktis masing-masing istilah tersebut. Untuk pengertian lebih formal dapat dibaca kembali pada pembahasan lengkapnya.

Bilangan real: nilai yang menyajikan sebuah kuantitas pada garis bilangan.

Analisis real: cabang matematika yang mempelajari bilangan real dan fungsi bernilai real dengan variabel juga bernilai real.

Bilangan asli: bilangan yang biasanya digunakan untuk membilang, yaitu $1, 2, 3, \cdots$

Bilangan bulat: bilangan yang dapat ditulis tanpa melibatkan komponen pecahan. Bilangan bulat terdiri dari 0, bilangan asli $1, 2, 3, \cdots$ dan invers aditifnya $-1, -2, -3, \cdots$.

Bilangan rasional: bilangan yang dapat disajikan sebagai rasio dua bilangan bulat $\frac{p}{q}$ dengan $q \neq 0$.

Bilangan irrasional: bilangan real yang bukan bilangan rasional.

Batas bawah: elemen yang tidak melebihi elemen apapun pada sebuah himpunan.

Infimum: batas bawah yang paling besar.

Maksimum: elemen terbesar pada sebuah himpunan.

Batas atas: elemen yang tidak kurang dari elemen apapun pada sebuah himpunan.

Supremum: batas atas paling kecil.

Sifat kelengkapan: sifat yang menyatakan bahwa tidak satupun bilangan real yang tidak berada pada garis bilangan; biasanya dikenal juga dengan sifat supremum dan infimum. Sifat ini dapat digunakan untuk menunjukkan eksistensi bilangan irrasional.

Sifat Archimedes: sifat yang menyatakan selalu ada bilangan asli yang lebih besar dari bilangan real apapun.

Sifat kepadatan: sifat yang menyatakan bahwa bilangan rasional dan bilangan irrasional ada di mana-mana pada garis bilangan.

Bilangan real diperluas: bilangan real ditambah dua simbol $-\infty$ dan ∞.

Soal Latihan Bagian I Ada dua kelompok soal latihan yaitu soal yang terkait dengan pemahaman konsep dasar dan soal-soal pembuktian biasa. Petunjuk penyelesaian berikut merupakan salah satu langkah awal untuk menyelsaikan soal yang dimaksud. Cara lain masih mungkin dilakukan selama argumennya valid.

1. Jelaskan peran elemen nol dan elemen satuan pada bilangan real. Buktikan kedua elemen ini tidak sama. (Petunjuk: Untuk pertanyaan pertama, deskripsikan jawaban Anda menurut bahasa sendiri. Untuk membuktikan $0 \neq 1$, dapat digunakan metode kontradiksi).

2. Menurut pendapat Anda apakah sifat ketertutupan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian diperlukan sebagai aksioma bilangan real?

   Petunjuk: Kedua sifat tersebut disajikan adalah
   $$a, b \in \mathbb{R} \to a + b \in \mathbb{R} \text{ dan } a, b \in \mathbb{R} \to a \cdot b \in \mathbb{R}.$$
   Coba amati apakah sifat ini mempunyai signifikansi dalam sistem bilangan real.

3. Operasi pembagian $(\div)$ didefinisikan melalui perkalian, yaitu $\frac{a}{b} := a \cdot (1/b)$ asalkan $b \neq 0$. Mengapa perlu ada syarat $b \neq 0$? Apakah ada syarat khusus pada pendefinisian operasi pengurangan? (Petunjuk: Kembalikan ke sifat aljabar bilangan real khususnya (M4)).

4. Jelaskan dengan bahasa Anda sendiri, bagaimana proses pendefinisian bilangan positif, bilangan negatif, dan nol pada bilangan real? Bagaimana pula sifat urutan pada bilangan real didefinisikan? (Petunjuk: Sajikan jawaban secara runtut).

5. Apa yang dimaksud dengan sifat trikotomi pada bilangan real? Apakah pada bilangan real ada sifat dikotomi, berikan contohnya? (Petunjuk: Sifat trikotomi adalah tiga sifat yang saling asing, sedangkan dikotomi adalah dua sifat yang saling asing).

Petunjuk. Karena $a, b > 0$ maka berdasarkan RAG berlaku $0 < \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$. Karena $a < b$ maka $aa < ab$ sehingga $a = \sqrt{aa} < \sqrt{ab}$. Juga karena $a < b$ maka $\frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2}(b+b) = b$. Selanjutnya gunakan RAG pada bilangan a dan b untuk membuktikan ketaksamaan pertama. Untuk pernyataan kedua menggunakan kenyataan bahwa $b - a > 0$ dan $ab > 0$ sehingga $\frac{b-a}{ab} > 0$.

18. Bila $c > 0$, selidikilah relasi urutan c dan c^2.

Petunjuk. Tulis $c^2 - c = c(c-1)$. Perhatikan dua kasus berikut: $0 < c < 1$ dan $c > 1$. Juga perhatikan kasus khusus $c = 1$.

19. Tentukan semua x yang memenuhi $\frac{1}{x} < x^2$.

Petunjuk. Tulis $\frac{1}{x} - x^2 = \frac{1-x^3}{x} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x} < 0$. Terapkan dua kemungkinan pada pembilang dan penyebut terkait hasil bagi mereka bernilai negatif.

20. Tentukan semua pasangan titik (x, y) dan sketsa grafik pada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $|x| + |y| = 1$.

Petunjuk. Bagilah bidang koordinat XY dalam 4 kuadran. Terapkan definisi nilai mutlak untuk menghilangkan tanda nilai mutlak pada persamaan. Tentukan himpunan penyelesaian pada setiap kuadran. Hasil yang diperoleh digambarkan pada bidang koordinat.

21. Buktikan bahwa $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

Petunjuk. Terapkan sifat trikotomi pada a dan b, kemudian gunakan definisi maksimum dan definisi nilai mutlak. Sebagai contoh jika $a > b$ maka $\max\{a, b\} = a$.

22. Buktikan untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Petunjuk. Gunakan ketaksamaan Cauchy dengan mengambil $a_1 = \frac{1}{2}a$, $a_2 = \frac{1}{2}b$ dan $b_1 = b_2 = 1$.

23. Tentukan supremum dan infimum, maksimum dan minimum (bila ada) himpunan sebagai berikut:

   (a) $E_1 := \{x : x^2 - x - 2 < 0\}$
   (b) $E_2 := \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   (c) $E_3 := \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$
   (d) $E_4 := \left\{(n!)^{1/n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Petunjuk. Dengan memainkan variabel pada domain yang diberikan, selidiki kemungkinan nilai terbesar dan nilai terkecil yang dapat didekati oleh anggota himpunan tersebut.

24. Misalkan A suatu himpunan takkosong pada $\mathbb{R}$ dan terbatas di bawah. Didefinisikan $B := \{-x : x \in A\}$. Buktikan $\sup A = -\inf B$.

28. Jika $0 < a < b$ dan $0 \leq c \leq d$, buktikan $0 \leq ac \leq bd$.

29. Bila $0 \leq a < b$, buktikan $a^2 \leq ab < b^2$. Tunjukkan bahwa $a^2 < ab < b^2$ tidak selalu berlaku.

30. Buktikan bahwa $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

31. Temukan himpunan penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan berikut

    (a) $x^2 > 3x + 4$
    (b) $1 < x^2 < 4$
    (c) $\frac{1}{x} < x$

    Selanjutnya, jawaban Anda dapat diverifikasi melalui grafik fungsi. Banyak program aplikasi matematika yang dapat digunakan untuk menggambar grafik fungsi, misalnya GeoGebra, MATLAB, MAPLE.

32. Dalam kondisi apa berlaku pernyataan $|a + b| = |a| + |b|$? Jelaskan jawaban Anda.

33. Jika $x < z$, buktikan bahwa $x < y < z$ jika dan hanya jika $|x - y| + |y - z| = |x - z|$. Interprestasikan fakta ini secara geometris.

34. Gambarkan grafik fungsi $y = |x| + |x - 1|$.

35. Tentukan semua x yang memenuhi pertidaksamaan berikut

    (a) $4 < |x + 2| + |x + 1| < 5$
    (b) $|2x - 3| < 5$ dan $|x + 1| > 2$ secara bersamaan.

    Penyelesaian yang diperoleh dapat diverifikasi dengan menggunakan grafik yang dapat digambarkan dengan bantuan komputer.

36. Tentukan semua pasangan titik (x, y) dan sketsa grafik pada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan berikut

    (a) $|x| = |y|$
    (b) $|xy| = 1$
    (c) $|x| - |y| = 1$.

37. Tentukan semua pasangan titik (x, y) dan sketsa grafik pada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan berikut

    (a) $|x| \leq |y|$
    (b) $|xy| \geq 1$
    (c) $|x| + |y| \leq 2$

38. Buktikan akibat sifat Archimedes berikut:

    (a) Tidak masalah seberapa besar bilangan real x yang diberikan, kita selalu dapat menemukan bilangan asli n sehingga $n > x$.

50. Berikan alasan kualitatif mengapa operasi aritmetika berikut yang memuat $\pm\infty$ berlaku.

    (a) $\infty + \infty = \infty$, $(-\infty) - \infty = -\infty$.

    (b) $(\pm\infty) \cdot \infty = \pm\infty$, $(\pm\infty) \cdot (-\infty) = \mp\infty$.

    (c) $\infty + a = \infty$, $-\infty + a = -\infty$,

    (d) $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ untuk $a > 0$, $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ untuk $a < 0$.

    (e) $0 \cdot \infty = 0$.

    (f) $-\infty < a < \infty$.

51. Apa yang dapat disimpulkan dari hasil operasi aritmetika yang memuat ketakhinggaan berikut?

    (a) $\infty - \infty$.

    (b) $\frac{\infty}{\infty}$.

    (c) ∞^a, $a \in \mathbb{R}$.

    (d) a^∞, $a \in \mathbb{R}$.

    (e) $\frac{a}{\infty}$, $a \in \mathbb{R}$.

Bagian II

PENGANTAR TOPOLOGI

BAB 4

Titik dan Himpunan Khusus pada $\mathbb{R}$

Science without religion is lame, religion without science is blind.

Albert EINSTEIN

Pada bab ini dibahas beberapa elemen dasar dalam ruang topologi yaitu berupa titik dan himpunan khusus pada bilangan real. Titik-titik khusus yang dibahas meliputi titik interior, titik terasing, titik kumpul (titik limit) dan titik batas. Terkait dengan istilah-istilah ini muncul pula himpunan-himpunan khusus, yaitu himpunan terbuka, himpunan tertutup, himpunan titik interior, himpunan titik kumpul (titik limit), dan himpunan titik batas.

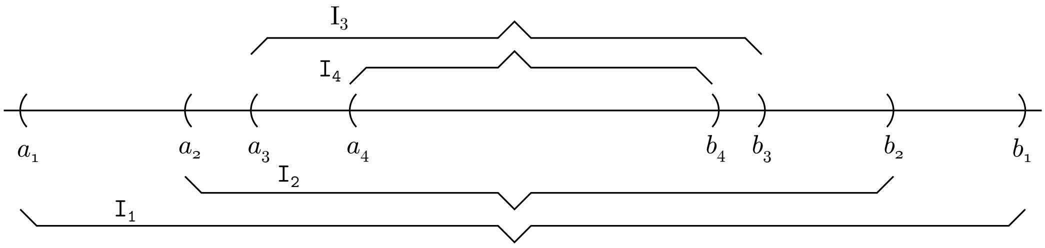
Ditinjau dari kardinalitas himpunan, kita dapat membagi himpunan sebagai himpunan berhingga dan himpunan takberhingga. Himpunan berhingga sudah sering dipelajari pada matematika dasar. Kita juga mengenal himpunan terbatas yang didasarkan pada magnitudo anggotanya. Himpunan terbatas sudah dibahas pada Bab 1. Berdasarkan sifat keterbilangan anggotanya, kita akan mengenal himpunan terbilang dan himpunan takterbilang. Konsep himpunan terbilang akan diperkenalkan pada bab ini. Selain itu, konsep himpunan kompak sebagai dasar untuk mempelajari analisis lebih lanjut akan dibahas secara khusus pula pada baba ini. Himpunan Cantor yang pendefinisian dan sifat-sifatnya sangat unik akan dibahas pula dalam bab ini.

Pada urutan pertama, interval sebagai himpunan bagian khusus bilangan real yang sudah sangat familiar bagi kita semua akan diulas terlebih dulu. Banyak sifat-sifat penting pada interval yang perlu diketahui karena diperlukan sebagai dasar pembahasan materi analisis lebih lanjut, di antaranya adalah sifat interval bersarang.

4.1 Interval dan Sifat-sifatnya

Sifat urutan pada $\mathbb{R}$ mengakibatkan terbentuknya himpunan terurut yang disebut **interval**. Bila $a < b$ maka himpunan bilangan real yang berada di antara a dan b membentuk interval (a, b) yang didefinisikan sebagai

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$



Gambar 4.2: Ilustrasi grafis interval bersarang

Interval bersarang

Barisan interval (I_n), $n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ disebut interval bersarang (*nested interval*). Pada interval bersarang berlaku sifat

$$I_{n-1} \cap I_n = I_n.$$

Ilustrasi interval bersarang diberikan pada Gambar 4.2. Permasalahannya adalah apa yang terjadi jika semua anggota interval ini diiriskan, yaitu $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$?

Contoh 4.1. Perhatikan $I_n := [0, \frac{1}{n}]$. Oleh karena berlaku $[0,1] \supset [0, \frac{1}{2}] \supset [0, \frac{1}{3}] \supset \cdots$ maka ia merupakan interval bersarang. Buktikan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Bukti. Misalkan $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Maka $x \in I_n = [0, \frac{1}{n}]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi, $0 \le x \le \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan $\varepsilon > 0$ bilangan positif sebarang. Menurut sifat Archimedes terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Jadi $0 \le x \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi, disimpulkan $x = 0$. □

Contoh 4.2. Perhatikan $E_n := (0, \frac{1}{n}]$. Oleh karena berlaku $(0,1] \supset (0, \frac{1}{2}] \supset (0, \frac{1}{3}] \supset \cdots$ maka ia merupakan interval bersarang. Buktikan $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$.

Bukti. Menggunakan metode kontradiksi. Andai $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \emptyset$, katakan ada $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Ini berarti $0 < x \le \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena $x > 0$ maka menurut sifat Archimedes terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n_0} < x$. Pernyataan ini kontradiksi dengan pernyataan $0 < x \le \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi pengandaian salah sehingga disimpulkan $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. □

Akhirnya pada bagian ini kita tutup dengan sifat interval bersarang sebagai berikut:

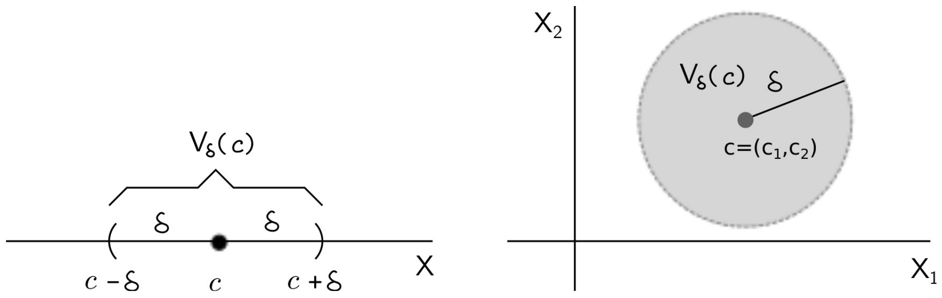
Teorema 4.1. *Bila $I_n := [a_n, b_n], n \in \mathbb{R}$ interval bersarang tertutup dan terbatas maka ada $\mu \in \mathbb{R}$ sehingga $\mu \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, ada $\mu \in \mathbb{R}$ dengan $\mu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.*

Bukti. Karena $I_n := [a_n, b_n]$ bersarang maka berlaku $[a_1, b_1] \supset [a_n, b_n]$ untuk setiap $n = 2, 3, \cdots$. maka disimpulkan $a_n \le b_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu himpunan semua titik tepi kiri para interval tersebut, yaitu $S = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ adalah terbatas di atas dengan b_1 salah satu batas atasnya. Akibatnya himpunan ini mempunyai supremum, katakan

$$\eta = \sup S.$$

Kita buktikan bahwa $\mu = \eta$. Jelas bahwa $a_n \le \eta$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Untuk suatu n tertentu, perhatikan titik tepi kanan b_n. Baik untuk $k \le n$ atau $k > n$ maka berlaku $a_k \le a_n$. Jelasnya perhatikan Gambar 4.3. Oleh karena itu diperoleh b_n adalah batas atas himpunan $S = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Akibatnya, $\eta = \sup S \le b_n$. Jadi, $a_n \le \eta \le b_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Kita simpulkan $\mu = \eta \in I_n = [a_n, b_n]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

□



Gambar 4.5: Ilustrasi persekitaran pada $\mathbb{R}$ (kiri) dan pada $\mathbb{R}^2$ (kanan)

Definisi persekitaran dapat dikembangkan pada $\mathbb{R}^2$. Bila $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ maka persekitaran c dengan radius δ berupa daerah di dalam lingkaran dengan pusat c dan jari-jari δ, yaitu

$$V_\delta(c) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - c_1|^2 + |x_2 - c_2|^2 < \delta\}.$$

Bahkan persekitaran dapat dikembangkan pada $\mathbb{R}^n$, bentuknya adalah bola (*sphere*). Dalam hal bentuk metrik tidak disebutkan secara spesifik maka persekitaran yang dimaksud adalah dalam metrik jarak biasa (Euclid). Ilustrasi grafis persekitaran pada $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^2$ diberikan pada Gambar 4.5.

Contoh 4.3. Tentukan persekitaran titik $x = 2$ dengan radius $\frac{1}{4}$.

Penyelesaian. $V_{\frac{1}{4}}(2) = (2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}) = (1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4})$. □

Latihan 4.2. Tentukan persekitaran titik $(0, 0)$ dengan radius 1. Apakah perbedaannya dengan lingkaran pusat $(0, 0)$ dengan radius 1.

Definisi 4.2. (Titik interior) Misalkan E sebuah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Titik $c \in E$ dikatakan titik interior E jika terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$V_\delta(c) := (c - \delta, c + \delta) \subset E. \tag{4.2.2}$$

Berdasarkan definisi ini, titik interior E harus anggota E, tetapi tidak semua anggota E berupa titik interior. Sebagai negasi pernyataan ini kita peroleh definisi bahwa $d \in E$ bukan titik interior jika setiap $r > 0$ berlaku $V_r(c) \not\subseteq E$. Ini berarti tidak ada persekitaran c yang berada di dalam E.

Contoh 4.4. Buktikan bahwa setiap titik di dalam interval terbuka (a, b) adalah titik interior.

Bukti. Misalkan $c \in (a, b)$ titik sebarang. Ambil $\delta := \frac{1}{2} \min\{c - a, b - c\}$ maka persekitaran $V_\delta(c) \subset (a, b)$. Jadi, c titik interior. □

Pada subpokok bahasan berikutnya keadaan yang berlaku pada (a, b) diperumum menjadi konsep himpunan terbuka. Himpunan terbuka terdiri dari titik-titik interior. Oleh karena itu kita katakan (a, b) himpunan (interval) terbuka.

Contoh 4.5. Buktikan bahwa setiap titik pada interval tertutup $[a, b]$ adalah titik interior kecuali titik tepinya a dan b.

Bukti. Bahwa a bukan titik interior karena setiap $r > 0$, $V_r(a) = (a-r, a+r)$ tidak mungkin termuat di dalam (a, b). Hal ini karena bagian persekitaran $(a - r, a)$ selalu berada di luar interval $[a, b]$. Argumen yang sama berlaku juga untuk b. Dalam kasus ini $a, b \in E := [a, b]$ tetapi bukan titik interior. □

Definisi 4.3. (Titik terasing) Misalkan E himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Elemen $c \in E$ dikatakan titik terasing (*isolated point*) jika terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku

$$E \cap V_\delta(c) = \{c\}. \tag{4.3.1}$$

Jadi titik terasing harus masuk ke dalam himpunan E tetapi ia tidak mempunyai persekitaran yang termuat di dalam E.

Contoh 4.8. Buktikan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ tidak mempunyai titik terasing.

Bukti. Mengingat sifat kepadatannya, maka di dalam setiap persekitaran bilangan rasional sebarang selalu memuat takberhingga banyak bilangan irrasional. Karena itu kesamaan (4.3.1) tidak mungkin dapat dipenuhi. □

Dengan argumen yang sama maka dapat ditunjukkan juga bahwa himpunan bilangan irrasional tidak mempunyai titik terasing.

Contoh 4.9. Buktikan bahwa pada himpunan bilangan bulat, semua anggotanya adalah titik terasing.

Bukti. Untuk sebarang bilangan bulat n, ambil $\delta := \frac{1}{2}$ maka jelas $\mathbb{Z} \cap V_{1/2}(n) = \{n\}$. □

Latihan 4.4. Misalkan E sebuah himpunan padat. Buktikan E tidak memiliki titik terasing.

Contoh 4.10. Buktikan bahwa himpunan $E := (-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2)$ hanya mempunyai satu titik terasing yaitu 0.

Bukti. Dalam hal ini kita dapat mengambil $\delta := \frac{1}{2}$ sehingga $E \cap V_\delta(0) = E \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \{0\}$. Untuk $c \in E$ titik selain dari nol dapat ditunjukkan bahwa setiap persekitaran c pasti memuat anggota E lainnya. Gunakan argumen pada latihan di atas. □

Berbeda dari titik terasing, titik kumpul (*accumulation point*) merupakan titik di mana banyak anggota himpunan tersebut berkumpul. Kadang-kadang titik kumpul disebut juga **titik limit**. Titik kumpul merupakan kebalikan titik terasing. Artinya kalau bukan titik terasing pasti merupakan titik kumpul, dan sebaliknya. Bedanya, titik kumpul tidak harus berada pada himpunan yang dimaksud.

Definisi 4.4. (Titik kumpul) Misalkan E himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Titik $c \in \mathbb{R}$ dikatakan titik kumpul E jika setiap $\varepsilon > 0$ maka berlaku

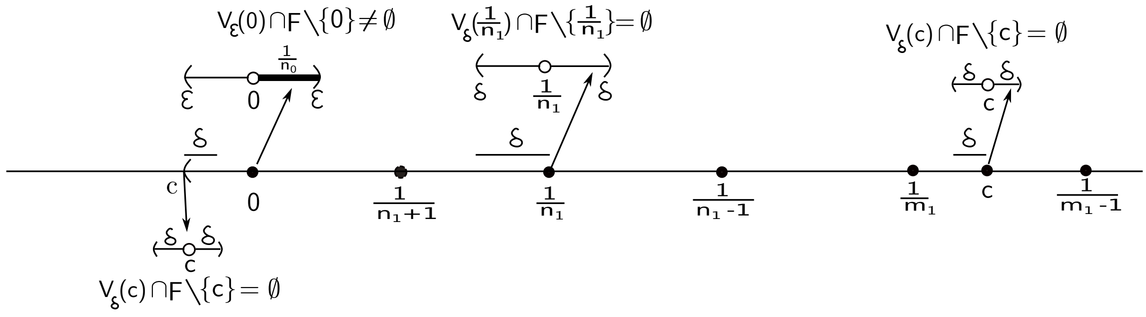
$$V_\varepsilon(c) \cap E \setminus \{c\} \neq \emptyset. \tag{4.3.2}$$

Dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(c) := (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ memuat anggota E selain dari c. Lebih lanjut, penggunaan istilah titik kumpul dan titik limit adalah untuk maksud yang sama. Pada ruang topologi kita lebih banyak menggunakan istilah titik limit daripada titik kumpul.

Contoh 4.11. Diberikan himpunan E sebagai berikut

$$E := (-1, 0] \cup \{1\} \cup [2, 3).$$

Tentukan semua titik kumpul dan titik terasing E.



Gambar 4.8: Himpunan dengan titik kumpul tunggal

4.4 Titik Batas

Perhatikan interval (a, b) atau $[a, b]$. Kedua titik tepinya a dan b memberikan batasan atau sempadan antara di dalam dan di luar interval. Persekitaran atau tetangga titik di perbatasan ini meliputi anggota di dalam maupun di luar interval. Definisi formalnya diungkapkan sebagai berikut.

Definisi 4.5. (Titik batas) Misalkan E himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Titik $c \in \mathbb{R}$ dikatakan titik batas (*boundary point*) himpunan E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, persekitaran $V_\varepsilon(c) := (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ memuat anggota E dan juga memuat anggota E^c (E^c untuk komplemen E), yakni

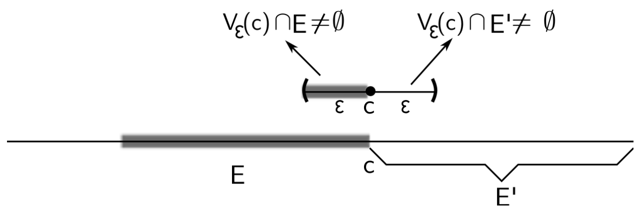
$$V_\varepsilon(c) \cap E \neq \emptyset \text{ dan } V_\varepsilon(c) \cap E^c \neq \emptyset. \tag{4.4.1}$$

Perlu ditegaskan bahwa titik batas dapat berada di dalam atau di luar E. Pastinya, titik interior tidak mungkin menjadi titik batas dan sebaliknya. Untuk kasus interval, titik batas sangat mudah dikenali yaitu titik tepi interval. Ilustrasi grafis titik batas diberikan pada Gambar 4.9. Tetapi untuk himpunan yang lebih umum, visualisasi titik batasnya lebih sulit.

Contoh 4.13. Interval $E := (a, b]$ mempunyai dua titik batas, yaitu a dan b. Titik batas pertama a di luar E, sedangkan titik batas kedua b di dalam E.

Contoh 4.14. Buktikan bahwa himpunan $F := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ hanya mempunyai satu titik batas yaitu 0.

Bukti. Perhatikan $c = 0$, maka setiap persekitaran $V_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ memuat banyak anggota F dan juga memuat banyak anggota F^c, yakni bilangan negatif. Jadi, $c = 0$ adalah titik batas. Untuk $c \neq 0$ maka dua kemungkinan, yaitu $c < 0$ atau $c > 0$. Untuk semua kemungkinan kita dapat mengambil $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}|c|$ sehingga $V_{\varepsilon_0}(c) \cap F = \emptyset$ dan $V_{\varepsilon_0}(c) \cap F^c = \emptyset$. Jadi, c bukan titik batas. $\square$



Gambar 4.9: Ilustrasi grafis titik batas

Contoh 4.18. Beberapa contoh himpunan tertutup.

1. Himpunan $E := [a, b]$ merupakan himpunan tertutup, biasanya disebut interval tertutup. Sebaliknya, himpunan $F_1 := [a, b)$ atau $F_2 := (a, b]$ bukan himpunan tertutup karena salah satu titik kumpulnya berada di luar himpunan.

2. Himpunan kosong $\emptyset$ merupakan himpunan tertutup karena ia tidak mempunyai anggota sama sekali, sehingga ia tidak memuat titik kumpul.

3. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan himpunan tertutup karena mereka tidak memiliki titik kumpul.

4. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ bukan himpunan tertutup karena bilangan irrasional merupakan titik kumpul tetapi berada di luar $\mathbb{Q}$. Begitu juga halnya dengan himpunan bilangan irrasional bukan himpunan tertutup.

5. Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan himpunan tertutup karena semua titik kumpulnya termuat di dalam $\mathbb{R}$.

Berikut ini diberikan contoh bukan himpunan tertutup.

Contoh 4.19. Buktikan bahwa himpunan $E := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ bukan himpunan tertutup.

Bukti. Mengingat 0 adalah titik kumpul E tetapi $0 \notin E$ maka berdasarkan definisi disimpulkan E bukan himpunan tertutup. □

Bila himpunan E kita gabungkan dengan titik kumpulnya, yaitu $\overline{E} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ maka $\bar{E}$ tertutup. Secara umum, misalkan E' himpunan semua titik kumpul E, himpunan $\bar{E}$ yang didefinisikan sebagai $\overline{E} := E \cup E'$ disebut penutup (*closure*) himpunan E. Jadi penutup himpunan merupakan himpunan tertutup.

Pada himpunan tidak berlaku sifat dikotomi, yakni kalau tidak tertutup maka terbuka dan sebaliknya. Tidak tertutup dapat terbuka atau tidak terbuka. Pengertian himpunan terbuka diberikan pada definisi berikut.

Definisi 4.7. (Himpunan terbuka) Misalkan E suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Himpunan E dikatakan terbuka jika semua anggotanya merupakan titik interior.

Berdasarkan definisi ini, jika ada anggota himpunan yang bukan titik interior maka kita katakan himpunan tersebut tidak terbuka. Pastinya, himpunan terbuka tidak mungkin memuat titik batas.

Contoh 4.20. Berikut beberapa contoh yang dapat memperjelas pengertian himpunan terbuka.

1. Himpunan $E := (a, b)$ merupakan himpunan terbuka karena semua anggotanya adalah titik interior.

2. $F_1 := [a, b]$ bukan himpunan terbuka karena ada anggotanya yang bukan titik interior, yaitu a dan b. Dalam kasus ini F_1 tertutup.

3. $F_2 := (a, b]$ tidak terbuka karena $b \in F_2$ tetapi bukan titik interior. Dalam kasus ini F_2 tidak tertutup seperti telah dijelaskan sebelumnya. Istilah awamnya, F_2 adalah interval setengah-terbuka.

Contoh 4.21. Buktikan bahwa himpunan kosong $\emptyset$ merupakan himpunan terbuka.

1. Dibuktikan $E_1 \cup E_2$ terbuka. Misalkan $x \in E_1 \cup E_2$, maka $x \in E_1$ atau $x \in E_2$. Oleh karena kedua himpunan ini terbuka maka ada persekitaran $V_\delta(x)$ dengan $V_\delta(x) \subset E_1$ atau $V_\delta(x) \subset E_2$, yaitu x titik interior. Oleh karena itu $V_\delta(x) \subset E_1 \cup E_2$, yaitu x titik interior $E_1 \cup E_2$. Jadi disimpulkan $E_1 \cup E_2$ terbuka. Cara yang sejalan dapat diterapkan untuk membuktikan $E_1 \cap E_2$ juga terbuka.

2. Dibuktikan $E_1 \cap E_2$ juga tertutup. Misalkan x titik kumpul $E_1 \cap E_2$, maka x titik kumpul E_1 dan titik kumpul E_2. Karena masing-masing E_1 dan E_2 tertutup maka $x \in E_1$ dan $x \in E_2$. Jadi, $x \in E_1 \cap E_2$ dan disimpulkan $E_1 \cap E_2$ tertutup. Cara kedua adalah dengan membuktikan bahwa komplemennya terbuka, yaitu dengan menerapkan aturan De Morgan dan hasil sebelumnya. Perhatikan $(E_1 \cap E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c$. Mengingat E_1^c dan E_2^c terbuka maka begitu juga dengan gabungannya (hasil sebelumnya). Karena $(E_1 \cap E_2)^c$ terbuka maka $(E_1 \cap E_2)$ tertutup.

□

Latihan 4.6. Lengkapilah bukti teorema di atas, yaitu

1. Jika E_1 dan E_2 terbuka maka $E_1 \cap E_2$ juga terbuka.

2. Jika E_1 dan E_2 tertutup maka $E_1 \cup E_2$ juga tertutup.

Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, yaitu jika berlaku untuk dua himpunan maka berlaku untuk sebanyak berhingga himpunan. Misalnya, jika $E_1, E_2, \cdots, E_n$ terbuka maka $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ juga terbuka. Begitu juga irisan atau gabungan berhingga lainnya. Untuk irisan atau gabungan tak berhingga diberikan pada teorema berikut. Untuk keperluan ini, himpunan indeks digunakan Λ lebih umum dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$.

Teorema 4.4. *Misalkan $E_\lambda, \lambda \in \Lambda$ himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.*

1. *Jika masing-masing E_λ terbuka maka $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ juga terbuka.*

2. *Jika masing-masing E_λ tertutup maka $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ juga tertutup.*

Bukti. Misalkan $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ maka $x \in E_{\lambda_0}$ untuk suatu $\lambda_0 \in \Lambda$. Mengingat E_{λ_0} terbuka maka x titik interior E_{λ_0}. Artinya terdapat persekitaran $V_\delta(x)$ dengan $V_\delta(x) \subset E_{\lambda_0}$. Oleh karena $E_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ maka $V_\delta(x) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, yaitu x titik interior $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$. Jadi $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ terbuka. Untuk membuktikan $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ tertutup jika setiap E_λ tertutup adalah cukup ditunjukkan komplemennya terbuka. Dengan aturan de Morgan diperoleh $\left[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right]^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda^c$. Mengingat E_λ^c terbuka maka menurut hasil sebelumnya, komplemen ini terbuka. □

Irisan tak berhingga himpunan terbuka atau gabungan tak berhingga himpunan tertutup belum tentu mempertahankan sifatnya karena tidak memenuhi syarat cukup teorema ini. Untuk jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 4.25. Himpunan $E_n := (0, 1 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$, kesemuanya merupakan himpunan terbuka. Buktikan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 1],$$

bukan sebuah himpunan terbuka.

tidak dapat memutuskan berlakunya urutan pada himpunan ini. Misalnya kita tidak dapat mengatakan $\star < \triangle$. Namun demikian kita dapat mendefinisikan korespondensi satu-satu (bijeksi) dengan himpunan bagian bilangan asli $\mathbb{N}$, misalnya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & \longleftrightarrow & 1 \\ a & \longleftrightarrow & 2 \\ \star & \longleftrightarrow & 3 \\ \triangle & \longleftrightarrow & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi himpunan tidak terurut dapat saja dikorespondensikan dengan himpunan terurut $\mathbb{N}$ atau bagiannya. Pengurutan himpunan atau koleksi objek-objek dalam susunan atau daftar tertentu disebut enumerasi. Sebaliknya, himpunan terurut belum tentu dapat dikorespondensikan dengan $\mathbb{N}$. Sebagai contoh himpunan $E := [0, 1)$ tidak dapat dikorespondensikan dengan $\mathbb{N}$. Inilah yang mengilhami pengertian himpunan terbilang.

Definisi 4.8. (Himpunan terbilang) Himpunan E dikatakan terbilang (*countable*) jika terdapat korespondensi satu-satu (bijeksi) antara E dan himpunan bagian bilangan asli $\mathbb{N}$. Jika tidak dapat dibentuk korespodensi satu-satu seperti yang dimaksud maka himpunan tersebut dikatakan takterbilang (*uncountable*).

Berdasarkan definisi ini maka himpunan berhingga selalu terbilang. Jika kita dapat membuat korespodensi satu-satu antara E dan E_1 dengan E_1 terbilang maka E juga terbilang.

Contoh 4.27. Himpunan $E := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ adalah terbilang.

Bukti. Definisikan $f(n) := \frac{1}{n}$ sebagai bijeksi antara E dan $\mathbb{N}$. □

Contoh 4.28. Buktikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terbilang.

Bukti. Kita dapat melakukan enumerasi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} E: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \end{bmatrix}.$$

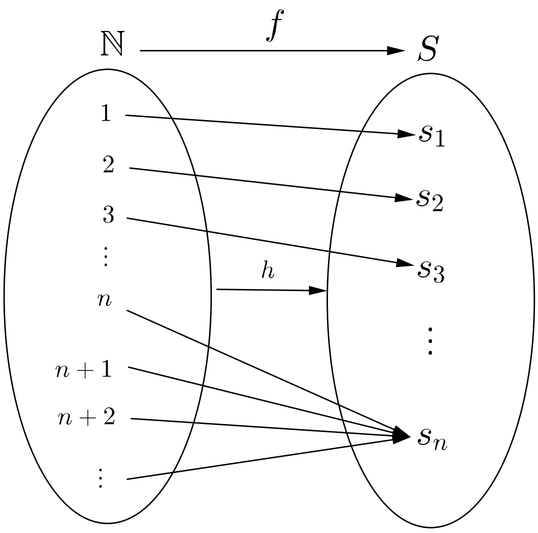
Sangat jelas adanya sebuah bijeksi antara $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{N}$ melalui enumerasi seperti ini. Secara eksplisit bijeksi ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{jika } z \geq 0 \\ -2z + 1 & \text{jika } z < 0. \end{cases}$$

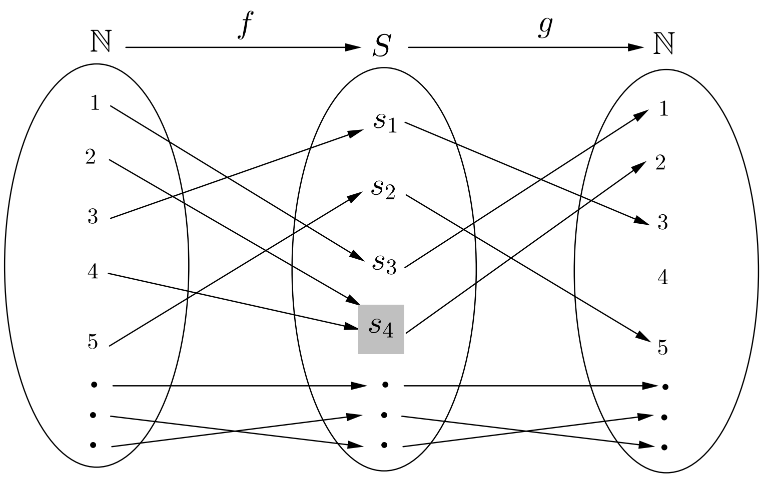
Fungsi f sebuah bijeksi dapat ditunjukkan sebagai berikut: untuk $n \in \mathbb{N}$ ganjil, diambil $z = \frac{1-n}{2}$ maka mudah ditunjukkan $f(z) = n$. Untuk $n \in \mathbb{N}$ genap, diambil $z = \frac{n}{2}$ maka $f(z) = f(\frac{n}{2}) = 2(\frac{n}{2}) = n$. □

Contoh 4.29. Himpunan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ terbilang.

Bukti. Pertama, buat enumerasi dalam bentuk matriks sebagai berikut:



Gambar 4.11: Konstruksi fungsi surjektif



Gambar 4.12: Konstruksi fungsi injektif

Bijeksi ini merupakan fungsi surjektif.
$(2 \to 3)$: Oleh karena $f : \mathbb{N} \to S$ surjektif maka setiap $s \in S$, selalu ada $n \in \mathbb{N}$ sehingga $f(n) = s$. Definisikan $g : S \to \mathbb{N}$ dengan

$$g(s) := \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) = s\}.$$

Konstruksi fungsi g ini diilustrasikan pada Gambar 4.12. Perhatikan elemen $s_4 \in S$ memiliki dua pasangan $2, 4 \in \mathbb{N}$. Selanjutnya diambil $g(s) = \min\{2, 4\} = 2$. Dibuktikan g pemetaan injektif yaitu bila $g(s_1) = g(s_2)$ maka $s_1 = s_2$. Misalkan $n_1 = g(s_1)$ maka $f(n_1) = s_1$. Juga, $n_2 = g(s_2)$ maka $f(n_2) = s_2$. Oleh karena diketahui $n_1 = g(s_1) = g(s_2) = n_2$ maka haruslah $f(n_1) = f(n_2)$, yaitu $s_1 = s_2$. Diingatkan bahwa domain pada fungsi injektif tidak harus habis tetapi tidak boleh bercabang. $(3 \to 1)$: Karena diketahui $g : S \to \mathbb{N}$ injektif maka dapat dibentuk bijeksi antara $\mathbb{N}_g$ dan S dengan $\mathbb{N}_g \subset \mathbb{N}$. Disimpulkan S terbilang berdasarkan definisi awal.

□

Latihan 4.10. Diketahui A dan B terbilang. Buktikan $A \cup B$ dan $A \cap B$ juga terbilang.

dengan $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$. Sebagai contoh, bila $r_1 = 0.32564301\cdots$ maka $d_{11} = 3, d_{12} = 2$ dan seterusnya. Selanjutnya definisikan bilangan real baru $r = 0.d_1d_2d_3d_4\cdots$ dengan aturan sebagai berikut

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{jika } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{jika } d_{ii} = 4. \end{cases}$$

Sebagai contoh, untuk beberapa bilangan $r_1 = 0.34567120\cdots$ $(d_{11} = 3 \neq 4)$, $r_2 = 0.447362130\cdots$ $(d_{22} = 4)$, $r_3 = 0.0235763452\cdots$ $(d_{33} = 3 \neq 4)$, $r_4 = 0.891468923\cdots$ $(d_{44} = 4)$, dan seterusnya. Diperoleh $d_1 = 4, d_2 = 5, d_3 = 4, d_4 = 5$, dan seterusnya, sehingga bilangan real yang dimaksud adalah $r = 0.4545\cdots$. Kita akan tunjukkan bahwa bilangan real r seperti ini tidak mungkin terletak di antara 0 dan 1. Diperhatikan bahwa $r \neq r_i$ untuk setiap i karena mereka berbeda mulai dari desimal digit ke i ke kanan. Contoh, $r_2 = 0.447362130\cdots$ berbeda dari $r = 0.4545\cdots$ mulai dari digit kedua (bandingkan $447362130\cdots$ dan $4545\cdots$). Karena setiap bilangan real dipastikan mempunyai representasi tunggal dalam ekspansi desimal seperti di atas maka disimpulkan bilangan r yang kita konstruksi tersebut tidak berada di atara 0 dan 1. Ini adalah sebuah kontradiksi sehingga pengandaian bahwa bilangan real di antara 0 dan 1 terbilang adalah tidak benar. Kesimpulannya, himpunan bilangan real di antara 0 dan 1 adalah takbilang. Akibatnya, himpunan bilangan real takterbilang. □

4.7 Himpunan Cantor

George Cantor (1845-1918) merupakan matematikawan pertama yang menjelaskan himpunan tak berhingga secara detail. Pada tahun 1874 Cantor memberikan bukti bahwa bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah terbilang. Pada bagian ini kita akan mebahas sedikit karya fundamental Cantor yaitu himpunan Cantor (*Cantor trenary set*). Himpunan ini dikonstruksi dengan cara membagi interval $[0, 1]$ menjadi 3 subinterval yang sama, kemudian membuang 1 subinterval yang di tengah dan mempertahankan 2 subinterval lainnya. Prosedur yang sama dilakukan pada kedua subinterval yang tersisa.

Langkah-langkah membangun himpunan Cantor

1. Bagilah interval $[0, 1]$ menjadi tiga subinterval yang sama, yaitu $[0, \frac{1}{3}]$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ dan $[\frac{2}{3}, 1]$. Buanglah interval pertengahan $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, dan bentuklah himpunan F_1 dengan menggabungkan subinterval yang masih tersisa, yaitu
$$F_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$
2. Bagi kedua subinterval $[0, \frac{1}{3}]$ dan $[\frac{2}{3}, 1]$ masing-masing menjadi tiga subinterval yang sama, yaitu $[0, \frac{1}{9}]$,$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$ pada subinterval $[0, \frac{1}{3}]$ dan $[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$,$(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, $[\frac{8}{9}, 1]$ pada subinterval $[\frac{2}{3}, 1]$. Buanglah subinterval pertengahan pada masing-masing subinterval asal, dan bentuklah himpunan F_2 dengan menggabungkan semua subinterval yang masih tersisa, yaitu
$$F_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$
3. Proses ini diteruskan untuk membangun $F_3, F_4, \cdots$ dan seterusnya sampai menuju takberhingga.

4.8 Himpunan Kompak

Himpunan kompak memainkan peranan penting dalam analisis real. Banyak sifat menarik yang dapat diperoleh bilamana sebuah fungsi didefinisikan pada himpunan kompak. Himpunan kompak merupakan pengembangan konsep himpunan terbatas dan tertutup. Bahkan pada $\mathbb{R}$, kedua istilah ekuivalen. Pendefinisian himpunan kompak dimulai dengan pengertian liput terbuka (*open cover*) sebagai berikut.

Definisi 4.9. (Liput terbuka) Misalkan E himpunan pada sebuah ruang metrik X. Liput terbuka (*open cover*) adalah koleksi himpunan terbuka $\mathcal{G} =\{G_\alpha\}$ pada X sehingga gabungannya menyelimuti E, yaitu

$$E \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Bila $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ dan gabungan himpunan-himpunan di dalamnya masih memuat E maka $\mathcal{G}'$ disebut liput bagian (*subcover*) dari $\mathcal{G}$. Jika $\mathcal{G}'$ memuat berhingga banyak himpunan maka ia disebut liput bagian berhingga (*finite subcover*).

Contoh 4.32. Misalkan $E := [1, \infty)$. Beberapa liput terbuka E yang dapat dibentuk, di antaranya:

1. $\mathcal{G}_0 := \{(0, \infty)\}$
2. $\mathcal{G}_1 := \{(1 - r, 1 + r) : r \in \mathbb{Q}_+\}$
3. $\mathcal{G}_2 := \{(1 - n, 1 + n) : n \in \mathbb{N}\}$
4. $\mathcal{G}_3 := \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$

Dalam contoh ini, $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$ sehingga $\mathcal{G}_2$ disebut liput bagian dari $\mathcal{G}_1$.

Definisi 4.10. (Himpunan kompak) Sebuah himpunan K pada ruang metrik X dikatakan kompak (*compact*) jika setiap liput terbuka K memuat liput bagian berhingga. Secara eksplisit, jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ liput terbuka K maka terdapat berhingga banyak indeks $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sehingga

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}.$$

Contoh 4.33. Buktikan himpunan berhingga $K = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ pada $\mathbb{R}$ adalah kompak.

Bukti. Misalkan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ sebarang liput terbuka K. Maka untuk setiap x_i terdapat $G_{\alpha_i} \in \mathcal{G}$ sehingga $x_i \in G_{\alpha_i}$. Jadi berlaku $K \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$. Oleh karena itu diambil $\mathcal{G}' := \{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ sebagai liput bagian berhingganya. □

Contoh 4.34. Buktikan himpunan $E := (0, 1]$ tidak kompak.

Bukti. Untuk membuktikan E tidak kompak kita harus menemukan suatu liput terbuka yang tidak memuat liput bagian yang berhingga. Ambil $\mathcal{G} = \{(\frac{1}{n}, 2) : n \in \mathbb{N}\}$. Semuanya himpunan terbuka dan $(0, 1] \subset \cup_{n\in}(\frac{1}{n}, 2)$. Jadi $\mathcal{G} = \{(\frac{1}{n}, 2) : n \in \mathbb{N}\}$ adalah liput terbuka E. Kita tunjukkan setiap himpunan bagian berhingga $\mathcal{G}$ tidak dapat menyelimuti E lagi. Misalkan $\mathcal{G}' := \{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_m}\}$ dengan $G_{\alpha_k} := (\frac{1}{\alpha_k}, 2)$ sebarang himpunan bagian $\mathcal{G}$. Dengan mengambil $t := \max\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ maka berlaku

$$\bigcup_{k=1}^m G_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^m (\frac{1}{\alpha_k}, 2) = (\frac{1}{t}, 2).$$

Jelas $(0, 1] \subsetneq (\frac{1}{t}, 2)$ karena $\frac{1}{t} > 0$ sehingga disimpulkan $\mathcal{G}'$ tidak memuat liput bagian yang berhingga. Terbukti E tidak kompak. □

Oleh karena $u \notin K$ maka $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Jadi $\mathcal{G} = \{G_n\}$ adalah liput buka K. Oleh karena K kompak maka terdapat berhingga banyak $G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots, G_{n_t}$ sehingga gabungannya masih menutupi K, yaitu

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{t} G_{n_k} = (-\infty, u - \frac{1}{m}) \cup (u + \frac{1}{m}, \infty) := G_m$$

dengan $m := \max\{n_1, n_2, \cdots, n_t\}$. Berdasarkan keadaan ini maka berlaku

$$K \cap (u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}) = \emptyset$$

dan akibatnya

$$V_{\frac{1}{m}}(u) := (u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}) \subset K^c.$$

Ini menunjukkan bahwa u adalah titik interior K^c. Oleh karena u diambil sebarang maka disimpulkan K^c terbuka yang berakibat K tertutup. □

Kebalikan teorema ini ternyata juga berlaku. Jadi himpunan tertutup dan terbatas adalah syarat perlu dan cukup untuk himpunan kompak. Hasil ini dikenal dengan teorema Heine-Borel.

Teorema 4.8. [HEINE-BOREL] *Sebuah himpunan K pada $\mathbb{R}$ adalah kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas.*

BUKTI. Bukti teorema ini cukup sulit sehingga tidak diberikan di sini. Lebih detail dapat dilihat pada Bartle dan Sherbet (2000). Teorema ini berlaku juga pada ruang Euclid $\mathbb{R}^n$, lihat Rudin (1976) atau Thomson, dkk (2001). □

Dengan teorema ini kita simpulkan bahwa interval tertutup $I := [a, b]$ adalah kompak. Lebih umum, himpunan sel $I_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) : a_{k,i} \leq x_i \leq b_{k,i}, i = 1, 2, \cdots, k\}$ juga kompak pada $\mathbb{R}^k$. Pada $\mathbb{R}^2$, cell berbentuk daerah persegi panjang termasuk batas-batasnya. Berdasarkan teorema Heine-Borel, tertutup adalah syarat perlu bagi himpunan kompak. Artinya, jika himpunan tidak tertutup maka ia tidak mungkin kompak.

Teorema 4.9. *Himpunan bagian tertutup dari himpunan kompak adalah kompak.*

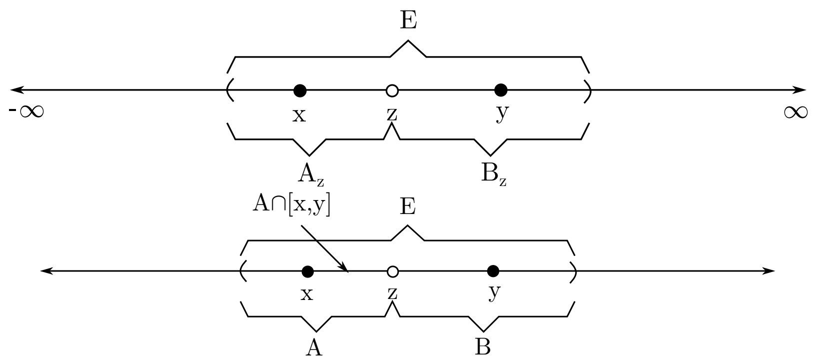
BUKTI. Misalkan K himpunan bagian yang dimaksud. Oleh karena himpunan kompak pasti terbatas maka K juga terbatas. Jadi K tertutup dan terbatas sehingga disimpulkan kompak dengan teorema Heine-Borel. □

Latihan 4.11. Jika himpunan K kompak dan F tertutup, buktikan $K \cap F$ kompak.

4.9 Himpunan Terpisah dan Himpunan Terhubung

Sebelum sampai pada definisi himpunan terhubung (*connected set*) kita perkenalkan dulu pengertian himpunan terpisah (*separable set*) sebagai berikut. Notasi $\overline{E}$ atau clos(E) adalah penutup himpunan (*closure*) E, yaitu gabungan himpunan E dan himpunan titik kumpul E. Dalam kasus E himpunan tertutup maka $\overline{E} = E$.

Definisi 4.11. (HIMPUNAN TERPISAH) Dua himpunan A dan B pada ruang metrik X dikatakan terpisah (*separable*) jika $A \cap \overline{B}$ dan $\overline{A} \cap B$ berupa himpunan kosong, yaitu tidak ada anggota A yang menjadi titik kumpul B dan tidak ada anggota B yang menjadi titik kumpul A.



Gambar 4.16: Konstruksi himpunan terpisah

$A_z \subset (-\infty, z)$ dan $B_z \subset (z, \infty)$ maka A_z dan B_z terpisah sehingga E tidak terhubung.
($\leftarrow$): Dibuktikan dengan kontraposisi. Misalkan E tidak terhubung. Maka ada himpunan takkosong A dan B yang terpisah sehingga $E = A \cup B$. Ambil $x \in A$ dan $y \in B$ dengan $x < y$. Ambil z dengan

$$z := \sup\left(A \cap [x, y]\right).$$

Ilustrasi grafis situasi ini diberikan pada Gambar 4.16 (panel bawah). Oleh karena $A \cap [x, y]$ himpunan terbatas di atas (*bounded above*) maka mudah ditunjukkan bahwa z adalah titik kumpul A, yaitu $z \in \overline{A}$. Oleh karena A dan B terpisah maka $z \notin B$. Lebih khusus, $x \leq z < y$. Ada dua kemungkinan. Bila $z \notin A$ maka berlaku $x < z < y$. Sebagaimana diketahui sebelumnya berlaku $z \notin B$ maka disimpulkan $z \notin E$. Bila $z \in A$ maka $z \notin \overline{B}$. Jadi ada $z_1 \notin B$ dan $z < z_1 < y$. Oleh karena itu diperoleh $x < z < z_1 < y$. Mengingat $z := \sup\left(A \cap [x, y]\right)$ maka $z_1 \notin A$. Disimpulkan $x < z_1 < y$ dan $z_1 \notin E$. Kita telah membuktikan bahwa jika E tidak terhubung maka (4.9.1) tidak dipenuhi. □

Contoh 4.38. Berdasarkan definisi ini maka kita dapat menyimpulkan bahwa $\mathbb{R}$ dan interval $[a, b]$ adalah himpunan terhubung.

Latihan 4.12. Apakah irisan dan gabungan dua himpunan terhubung juga terhubung?

BAB 5

Ruang Topologi pada $\mathbb{R}$

Don't just read it; fight it! Ask your own questions, look for your own examples, discover your own proofs.

Paul HALMOS

Pada bagian sebelumnya telah dibahas beberapa bentuk titik dan himpunan khusus pada bilangan real seperti titik kumpul, titik interior, himpunan terbuka, himpunan tertutup, dan persekitaran. Persekitaran dan titik interior merupakan dua aspek penting dalam mendefinisikan himpunan terbuka. Sedangkan pendefinisian persekitaran dan titik interior bergantung pada metrik yang digunakan. Suatu himpunan dapat merupakan himpunan terbuka terhadap metrik tertentu tetapi belum tentu terbuka terhadap metrik lainnya.

Dalam konteks yang lebih umum, himpunan bagian terbuka dari sebuah himpunan dapat didefinisikan melalui konstruksi, tidak bergantung pada metrik yang digunakan. Koleksi himpunan bagian terbuka yang memenuhi sifat tertentu menghasilkan sebuah topologi. Jadi, topologi dapat dipandang sebagai sistem himpunan terbuka. Secara formal topologi dapat didefinisikan sebagai kajian kualitatif sifat-sifat objek tertentu (ruang topologi) yang invarian terhadap transformasi tertentu (pemetaan kontinu), khususnya sifat-sifat yang invarian di bawah transformasi tertentu yang disebut homomorphisma. Pada bab ini kita hanya membahas struktur ruang topologi dan sifat-sifat dasarnya saja tanpa dikaitkan dengan sifat-sifat invarian terhadap transformasi tertentu.

5.1 Pengertian Ruang Topologi

Definisi 5.1. (Topologi) Misalkan X sebuah himpunan dan τ adalah sebuah koleksi himpunan bagian dari X yang memenuhi sifat berikut

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. Gabungan sebarang anggota τ tetap berada di dalam τ, yaitu jika $E_k \in \tau$ untuk setiap $k \in \Lambda$ maka $\cup_{k\in\Lambda} E_k \in \tau$.
3. Irisan berhingga anggota τ tetap berada di dalam τ, yaitu jika $E_k \in \tau$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$ maka $\cap_{k=1}^{n} E_k \in \tau$.

Selanjutnya τ disebut **topologi** untuk X dan anggota-anggota τ disebut himpunan terbuka. Pasangan (X, τ) disebut **ruang topologi** atau singkatnya **ruang** saja. Ketika

1. $\tau_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$, yaitu topologi trivial.
2. $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
3. $\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.
4. $\tau_4 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Definisi 5.2. (Himpunan tertutup) Sebuah himpunan bagian C pada ruang topologi X dikatakan tertutup jika komplemennya $X \setminus C$ adalah himpunan terbuka (di dalam τ).

Contoh 5.6. Pada topologi biasa, kita katakan interval $C := [a, b]$ tertutup karena komplemennya $X \setminus C = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ adalah himpunan terbuka.

Teorema 5.1. *Koleksi himpunan tertutup pada ruang topologi X memiliki sifat sebagai berikut*

1. *$\emptyset$ dan X adalah himpunan tertutup.*
2. *Irisan sebarang himpunan tertutup adalah tertutup.*
3. *Gabungan berhingga himpunan tertutup adalah tertutup.*

Bukti. Mengingat komplemen $\emptyset$ adalah X dan komplemen X adalah $\emptyset$ maka jelas kedua himpunan super khusus ini terbuka sekaligus tertutup. Fakta ini konsisten dengan topologi biasa pada bilangan real. Untuk kondisi 2 dan 3, cukup gunakan hukum De Morgan untuk himpunan: misalkan F_k para himpunan tertutup maka berdasarkan definisi sebelumnya $F_k^c = X \setminus F_k$ terbuka, sehingga

$$(\cap_{k\in\Lambda} F_k)^c = (\cup_{k\in\Lambda} F_k^c)$$

sebuah himpunan terbuka berdasarkan definisi topologi. Argumen yang sama berlaku juga untuk gabungan berhingga, yaitu

$$(\cup_{k=1}^n F_k)^c = (\cap_{k=1}^n F_k^c)$$

sebuah himpunan terbuka berdasarkan definisi topologi. □

Selanjutnya kita bahas penyajian titik-titik khusus yang maksud sebelumnya dalam konteks ruang topologi.

5.2 Perumuman Istilah pada Ruang Topologi

Mengingat ruang topologi merupakan perumuman dari ruang metrik maka sebagai konsekuensinya beberapa istilah yang terkait dengan titik dan himpunan khusus juga mengalami perumuman.

Definisi 5.3. (Persekitaran) Persekitaran titik $x \in X$ adalah himpunan terbuka yang memuat x. Khususnya, semua anggota topologi τ yang memuat x adalah persekitaran x.

Berdasarkan definisi ini, himpunan $A \subset X$ adalah terbuka jika dan hanya jika setiap titik $x \in X$ ada persekitaran $V(x)$ dengan $V(x) \subset A$. Jadi himpunan terbuka adalah persekitaran dari semua titiknya, yaitu:

$$A = \cup_{x\in A} V(x)$$

dengan $V(x)$ persekitaran yang termuat di dalam A.

limit A, yaitu $x \in A'$. Jadi, $\overline{A} \subset A \cup A'$. Sebaliknya, jika $x \in A \cup A'$ maka $x \in A$ atau $x \in A'$. Berdasarkan definisi titik penutup, jelas $A \subset \overline{A}$ dan faktanya berlaku $A' \subset \overline{A}$ sehingga diperoleh $A \cup A' \subset \overline{A}$. Dengan demikian disimpulkan $\overline{A} = A \cup A'$.

Contoh 5.7. Misalkan $X = \{a, b\}$ dan $\tau := \{\emptyset, \{a, b\}\}$ sebuah topologi trivial. Maka $a \in X$ adalah titik limit himpunan $\{b\}$. Alasannya, pada τ hanya himpunan $\{a, b\}$ yang memuat a dan $\{a, b\} \cap \{b\} \setminus \{a\} = \{b\} \neq \emptyset$.

Latihan 5.4. Misalkan $X = \{a, 1, 2\}$ dan $\tau = 2^X$ topologi diskret. Tentukan semua titik limit untuk masing-masing himpunan berikut: $E_1 = \{a, 2\}$ dan $E_2 = \{1\}$.

Definisi 5.7. (Titik batas) Titik $x \in X$ dikatakan titik batas (*boundary point*) himpunan A jika untuk setiap persekitaran V berlaku:

$$V \cap A \neq \emptyset \text{ dan } V \cap A^c \neq \emptyset.$$

Himpunan semua titik batas A disebut batas himpunan A dan dinyatakan dengan ∂A.

Teorema 5.2. *Misalkan A dan B himpunan bagian dari ruang topologi X. Maka pernyataan berikut berlaku*

1. *Jika $A \subset B$ maka $A^o \subset B^o$.*
2. $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.
3. *Jika $A \subset B$ maka $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Bukti. (1): Misalkan x titik interior A maka ada himpunan terbuka O dengan $x \in O$ dan $O \subset A$. Oleh karena $A \subset B$ maka $O \subset B$. Jadi x juga titik interior B.

(2): Karena $A \cap B \subset A$ maka $\mathrm{int}(A \cap B) \subset \mathrm{int}(A)$. Juga, oleh karena $A \cap B \subset B$ maka $(A \cap B)^o \subset B^o$ sehingga diperoleh $(A \cap B)^o \subset A^o \cap B^o$. Karena $A^o \cap B^o$ merupakan himpunan terbuka yang termuat di dalam $A \cap B$ dan $(A \cap B)^o$ merupakan himpunan terbuka terbesar di dalam $A \cap B$ maka haruslah $A^o \cap B^o \subset (A \cap B)^o$. Dari kedua hasil ini maka pernyataan 2 terbukti melalui definisi kesamaan himpunan.

(3): Misalkan $x \in \overline{A}$ maka $A \cap V(x) \neq \emptyset$ untuk setiap persekitaran $V(x)$. Karena $A \subset B$ maka $\emptyset \neq A \cap V(x) \subset B \cap V(x)$. Jadi, $B \cap V(x) \neq \emptyset$, yakni $x \in \overline{B}$. Terbukti bahwa $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(4): Kita tahu bahwa $\overline{A} \cup \overline{B}$ himpunan tertutup yang memuat $A \cup B$. Mengingat $\overline{A \cup B}$ himpunan tertutup terkecil yang memuat $A \cup B$ maka haruslah $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Karena $A \subset A \cup B$ dan $B \subset A \cup B$ maka dengan pernyataan 3 diperoleh $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ dan $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ sehingga $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Dengan definisi kesamaan himpunan maka pernyataan 4 terbukti. □

Contoh 5.8. Berikut ini merupakan contoh pengingkar bahwa pernyataan 2 belum tentu berlaku untuk gabungan dan pernyataan 4 belum tentu berlaku untuk irisan.

1. Misalkan $A := [0, 1]$ dan $B := [1, 2]$. Maka diperoleh $A \cup B = [0, 2]$ dan

   $$(A \cup B)^o = (0, 2) \text{ dan } A^o \cup B^o = (0, 1) \cup (1, 2).$$

   Ternyata keduanya tidak sama.

Istilah Kunci Bagian II Berikut diberikan pengertian praktis beberapa istilah kunci yang sering digunakan dalam Bagian II. Untuk pengertian lebih formal dapat dibaca kembali pada pembahasan lengkapnya.

Interval: himpunan bilangan real yang bersifat bahwa setiap anggotanya selalu terletak di antara dua bilangan real di dalam himpunan tersebut.

Interval bersarang: barisan interval yang semakin lama semakin menyempit.

Titik interior: titik yang berada secara utuh di dalam sebuah himpunan, tidak berada di batas.

Persekitaran: himpunan titik-titik yang jaraknya di sekitar titik tertentu, kriterianya ditentukan oleh radius dalam sebuah metrik.

Titik terasing: anggota himpunan yang jauh atau terpencil dari anggota-anggota lainnya.

Titik kumpul: titik di mana banyak sekali anggota himpunan berkumpul di sana; disebut juga titik limit.

Titik batas: titik yang berada pada perbatasan himpunan.

Himpunan tertutup: himpunan yang memuat semua titik kumpulnya.

Himpunan terbuka: himpunan yang memuat semua titik interiornya.

Himpunan terbilang: himpunan yang dapat dikorespondensikan satu-satu dengan himpunan (bagian) bilangan asli.

Himpunan takterbilang: selain dari himpunan terbilang.

Enumerasi: cara menyusun korespondensi satu-satu suatu himpunan terbilang.

Surjektif: bentuk relasi (fungsi) yang tidak membentuk cabang pada kodomain.

Injektif: bentuk relasi (fungsi) yang memasangkan habis anggota kodomain dengan domain.

Himpunan Cantor: sebuah himpunan yang dibangun secara berjenjang dengan cara menggabungkan sisa hasil pembuangan bagian tengah subinterval.

Liput terbuka: koleksi himpunan terbuka yang gabungannya meliputi sebuah himpunan.

Himpunan kompak: sebuah himpunan yang mana setiap liput terbukanya memuat liput terbuka berhingga.

Himpunan terpisah: dua himpunan yang mana titik kumpul himpunan yang satu tidak menjadi titik kumpul himpunan lainnya.

Himpunan terhubung: sebuah himpunan yang bukan merupakan gabungan dua himpunan terpisah.

Ruang topologi: pasangan himpunan dan koleksi himpunan bagian terbukanya yang memenuhi sifat-sifat tertentu.

Titik limit dalam topologi: sebuah titik di mana setiap himpunan terbuka yang memuatnya juga memuat anggota lainnya.

8. Perhatikan kembali definisi himpunan tertutup berikut: Misalkan E suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Himpunan E dikatakan tertutup jika semua titik kumpulnya termuat di dalam E. Nyatakan definisi himpunan tertutup ini dalam bahasa logika simbolik.

9. Nyatakan definisi himpunan terbuka dalam bahasa logika simbolik.

10. Buktikan bahwa himpunan semua titik kumpul selalu tertutup.

11. Didefinisikan komplemen relatif himpunan B di dalam A sebagai berikut: $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$. Apa yang dapat disimpulkan untuk himpunan $A \setminus B$ dan $B \setminus A$ jika

    (a) A dan B keduanya terbuka.

    (b) A dan B keduanya tertutup.

12. Buktikan bahwa sebuah himpunan adalah terbuka jika dan hanya jika ia tidak memuat titik batasnya. Berikan contoh yang dapat memperjelaskan kebenaran pernyataan ini.

13. Buktikan bahwa sebuah himpunan adalah tertutup jika dan hanya jika ia memuat semua titik batasnya. Berikan contoh yang dapat memperjelas pernyataan ini.

14. Buktikan bahwa
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1].$$

15. Bangunlah liput buka himpunan $E := \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ yang tidak mempunyai liput bagian yang berhingga.

16. Buktikan himpunan bagian tertutup dari sebuah himpunan kompak adalah kompak.

17. Buktikan bahwa gabungan dua himpunan kompak adalah kompak.

18. Buktikan bahwa irisan sebarang himpunan-himpunan kompak adalah kompak.

19. Buktikan bahwa gabungan sebarang himpunan-himpunan kompak belum tentu kompak. (Petunjuk: cukup berikan contoh pengingkarnya).

20. Berikan contoh himpunan tertutup yang terbilang dan himpunan tertutup tetapi tidak terbilang.

21. Apakah ada himpunan terbuka takkosong tetapi ia terbilang? (Petunjuk: berikan contohnya bila ada dan berikan alasannya bila tidak ada)

22. Jika sebuah himpunan terbilang, apakah komplemennya juga terbilang? (Petunjuk: cukup berikan contoh pengingkarnya)

23. Apakah irisan dua himpunan takterbilang juga takterbilang?

24. Misalkan $E := \{a, b, c\}$. Bangunlah semua topologi yang dapat didefinisikan pada E.

25. Berapa banyak kemungkinan topologi yang dapat dibentuk pada himpunan dengan 4 anggota?

26. Misalkan $I := [0, 1]$ dan $\tau := \{I \cap U \,|\, U \text{ himpunan terbuka pada } \mathbb{R}\}$

    (a) Buktikan τ adalah topologi pada I.

Bagian III

BARISAN DAN DERET BILANGAN REAL

BAB 6

Barisan Bilangan Real

The essence of mathematics lies in its freedom.

Georg CANTOR

Di sekolah menengah, barisan diperkenalkan sebagai kumpulan bilangan yang disusun menurut pola tertentu. Dua jenis barisan yang sudah sangat dikenal adalah barisan aritmetika dan barisan geometri. Barisan dicirikan oleh suku-sukunya yang membentuk pola atau aturan tertentu. Sebagai ilustrasi pertama kita perhatikan kelompok bilangan berikut.

$$2, 5, 8, 11, \cdots, 2 + 3(n-1), \cdots$$

Ini merupakan barisan aritmetika dengan suku-sukunya berpola $u_n = 2 + 3(n-1), n \in \mathbb{N}$. Barisan aritmetika dicirikan oleh selisih antara dua suku berurutan selalu konstan (tetap) dan konstanta ini disebut beda. Telah dikenal dengan baik jika barisan aritmetika memiliki suku pertama a dan beda b maka suku ke$-n$ mempunyai pola $u_n = a + (n-1)b$. Karena suku-suku barisan aritmetika selalu bertambah atau berkurang secara tetap (bergantung pada apakah b positif atau negatif), maka dipastikan suku-sukunya membesar menuju ∞ atau $-\infty$. Keadaan seperti ini akan disebut barisan divergen.

Untuk ilustrasi kedua adalah sebagai berikut.

$$2, 1, 1/2, 1/4, \cdots, 2\left(1/2\right)^{n-1}, \cdots$$

Ini merupakan barisan geometri dengan suku pertama $a = 2$ dan rasio sebagai perbandingan antara dua suku yang berurutan yaitu $r = 1/2$. Suku-suku barisan geometri adalah $u_n = ar^{n-1} = 2(1/2)^{n-1}$. Jelas suku-suku ini semakin lama semakin mengecil dan menuju 0. Situasi seperti ini akan disebut barisan konvergen. Pada barisan geometri ketika rasionya $r > 1$ maka suku-sukunya membesar menuju ∞. Sebaliknya, jika $r < -1$ maka suku-sukunya berganti tanda, kadang positif menuju ∞ dan kadang negatif menuju $-\infty$. Sebagai contoh $a = 1$ dan $r = -2$ diperoleh barisan geometri $1, -2, 4, -6, 8, \cdots, (-2)^n, \cdots$. Dalam kasus seperti ini barisan geometri merupakan barisan divergen.

Untuk ilustrasi ketiga diperhatikan barisan berikut.

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n+1}{n+2}, \cdots$$

atau dalam bentuk rekursif berikut

$$x_1 := a, x_n = x_{n-1} + b, n = 2, 3, \cdots .$$

Contoh 6.2. Berikut diberikan beberapa suku awal barisan (x_n). Seandainya pola seperti ini tetap, tentukan formula umum suku ke-n nya.

1. $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \cdots$
2. $1/2, -1/4, 1/8, -1/16, \cdots$
3. $1, 4, 9, 16, \cdots$

PENYELESAIAN. Dengan memperhatikan pola bilangan pada setiap suku pada barisan di atas maka dengan mudah kita dapat bentuk umum suku ke-n nya sebagai berikut.

1. $x_n = \frac{n}{n+1}$. Berikutnya barisan ini merupakan salah satu contoh barisan yang pada akhirnya menuju nilai tertentu yang disebut konvergen.
2. $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Perhatikan di sini suku $(-1)^n$ untuk mengakomodasi tanda $+$ dan $-$ pada suku-suku barisan tersebut. Barisan seperti ini akan disebut barisan alternating.
3. $x_n = n^2$. Ini adalah contoh barisan yang semakin lama semakin besar menuju takberhingga. Ini adalah salah satu contoh barisan divergen karena tidak ada bilangan real yang ditujunya.

□

Contoh 6.3. Diberikan barisan yang didefinisikan secara rekursif berikut. Tentukan 5 suku pertamanya.

1. $y_1 := 2, \quad y_{n+1} := \frac{1}{2}(y_n + 2/y_n), n \geq 1.$
2. $z_1 := 1, \quad z_2 := 2, \quad z_{n+2} := (z_{n+1} + z_n)/(z_{n+1} - z_n), n \geq 1.$

PENYELESAIAN. Cukup substitusikan n yang belum ada pada masing-masing formula.

1. Untuk $n = 1$ diperoleh $y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + \frac{2}{y_1}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$. Dengan cara yang sama pembaca dapat menyelesaikan sendiri untuk memperoleh y_3, y_4 dan y_5.
2. Karena z_1 dan z_2 sudah diketahui maka kita tinggal substitusi $n = 1, 2$, dan 3 untuk memperoleh z_3, z_4 dan z_5.

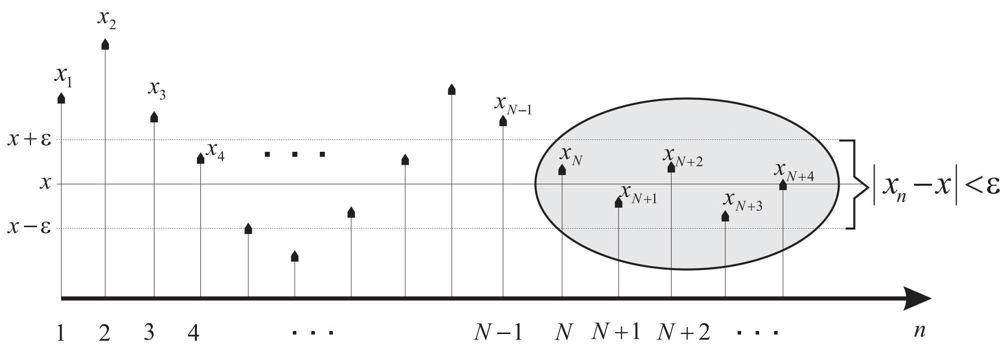
□

Penulisan barisan menggunakan kurung biasa (*parentheses*) "( )" dimaksudkan untuk membedakannya dari himpunan biasa yang ditulis menggunakan kurung kurawal (*brace*) "{ }". Pada himpunan, anggota yang sama cukup ditulis satu kali. Sedangkan pada barisan, suku-suku yang berbeda ada kemungkinan bernilai yang sama, dan semuanya harus ditulis. Sebagai contoh ambil barisan (x_n) yang didefinisikan $x_n := (-1)^n$. Jadi barisannya adalah

$$X := (-1, 1, -1, 1, \cdots).$$

Tetapi bila suku-suku ini dipandang sebagai anggota himpunan maka ditulis

$$X := \{-1, 1\}.$$



Gambar 6.1: Ilustrasi barisan konvergen

Untuk menunjukkan bahwa bahwa barisan (x_n) konvergen ke x kita perlu menunjukkan kewujudan bilangan asli N untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan sehingga (6.1.1) dipenuhi. Biasanya cukup diambil bilangan asli yang terkecil. Untuk membuktikan bahwa

$$\lim(x_n) \neq x$$

maka kita harus menujukkan berlakunya negasi atau ingkaran dari Definisi 6.2, yaitu ada $\varepsilon_0 > 0$ sehingga setiap bilangan asli n selalu ada $n_0 > n$ dengan $|x_{n_0} - x| \geq \varepsilon_0$.

Pembahasan barisan di sini ditekankan pada pemahaman teoritis bukan pada aspek teknis seperti menghitung nilai limit barisan. Pekerjaan dominan adalah membuktikan suatu barisan dengan limit telah diketahui, bukan menghitung berapa nilai limit suatu barisan. Contoh-contoh berikut memberikan gambaran penggunaan definisi untuk membuktikan kebenaran limit suatu barisan.

Contoh 6.4. Buktikan bahwa $\lim(1/n) = 0$.

Bukti. Secara intuitif fakta ini adalah benar karena kita membagi bilangan 1 dengan bilangan yang semakin membesar menuju takhingga sehingga hasilnya semakin mendekati nol. Tapi bukti ini tidak formal karena tidak didasarkan pada teori yang ada, misalnya definisi. Berikut bukti formalnya. Di sini kita mempunyai $x_n := \frac{1}{n}$, dan $x = 0$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Harus ditemukan bilangan asli N sehingga

$$|x_n - x| = |1/n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Mudah saja, pada bentuk terakhir ketaksamaan ini berlaku $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Diselesaikan, diperoleh $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Jadi N cukup diambil sebagai bilangan asli terkecil yang lebih besar dari $\frac{1}{\varepsilon}$, atau *ceiling* dari x yaitu

$$N = \lceil 1/\varepsilon \rceil .$$

Sebagai ilustrasi numerik, misalkan diberikan $\varepsilon := 0.013$ maka $\frac{1}{\varepsilon} = 76.9231$. Jadi cukup diambil $N := 77$. Untuk meyakinkan dapat diperiksa bahwa

$$x_{77} = 0.0130, x_{78} = 0.0128, x_{79} = 0.0127, x_{80} = 0.0125, x_{81} = 0.0123, x_{82} = 0.0122$$

kesemuanya kurang dari 0.013. Lebih telitinya $x_{77} = 0.012987$. Berdasarkan Definisi 6.2, terbukti bahwa $\lim(\frac{1}{n}) = 0$. □

Contoh 6.5. Buktikan $\lim\left(\frac{n+1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}$.

Sekarang untuk $n \geq$ maks $\{N_a, N_b\}$ maka berlaku

$$\begin{aligned} |x_a - x_b| &= |x_a - x_n + x_n - x_b| \\ &\leq |x_n - x_a| + |x_n - x_b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|x_a - x_b|. \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh $|x_a - x_b| < \frac{2}{3}|x_a - x_b|$ suatu pernyataan yang kontradiksi. Pengandaian $x_a \neq x_b$ salah dan haruslah $x_a = x_b$, yaitu limitnya mesti tunggal. $\square$

Contoh 6.6. Gunakan definisi limit barisan untuk membuktikan

$$\lim \left(\frac{3n+1}{2n+5}\right) = \frac{3}{2}.$$

Tentukan bilangan asli terkecil N yang dapat diambil jika diberikan $\varepsilon = 0.0023$, juga $\varepsilon = 0.0132$. Ujilah kebenarannya untuk $n = N, N+1, N+2, N+3, N+4$.

PENYELESAIAN. Misal diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Bentuklah suku $|x_n - x|$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| &= \left|\frac{6n+2-6n-15}{2(2n+5)}\right| \\ &= \left|\frac{-13}{2(2n+5)}\right| = \frac{13}{2(2n+5)}. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita selesaikan pertidaksamaan untuk ε yang diperoleh dengan menetapkan bentuk terakhir ini kurang dari ε.

$$\frac{13}{2(2n+5)} < \varepsilon \longleftrightarrow (4n+10)\varepsilon > 13 \longleftrightarrow n > \frac{13-10\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Berdasarkan hasil ini maka cukup diambil $n = \left\lceil \frac{13-10\varepsilon}{4\varepsilon} \right\rceil$. Untuk $\varepsilon = 0.0023$ maka diperoleh $n = \left\lceil \frac{13-(10)(0.0023)}{4(0.0023)} \right\rceil = 1411$. Kita uji kebenaran untuk $N = 1411, 1412, 1413$, dan 1414, diperoleh

$$|x_{1411} - x| = 0.002299, |x_{1412} - x| = 0.002298, |x_{1413} - x| = 0.002296, |x_{1414} - x| = 0.002294.$$

Ini menunjukkan kesemuanya kurang dari $\varepsilon = 0.0023$. Untuk nilai epsilon lainnya dapat dicoba sendiri oleh pembaca. $\square$

Dari beberapa contoh yang telah diberikan mestinya dapat dipahami bahwa semakin kecil $\varepsilon > 0$ yang diberikan maka semakin besar indeks N yang dapat diambil. Kenyataan ini sesuai dengan definisi bahwa semakin kecil $\varepsilon > 0$ maka semakin sempit "kerangkeng" dan semakin lama pula suku-suku barisan mulai mengumpul di dalam "kerangkeng" ini.

Latihan 6.3. Perhatikan kedua barisan (x_n) dan (y_n) dengan $x_n := \frac{1}{n}$ dan $y_n := \frac{1}{n^2}$. Buktikan bahwa kedua barisan ini konvergen ke bilangan yang sama yaitu 0. Selanjutnya jika diberikan $\varepsilon = 0.0012$, kapan suku-suku kedua barisan ini mulai masuk interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Barisan mana yang lebih cepat konvergen ke 0?

BUKTI. Misalkan $\lim(y_n) = y$ dengan teorema ekor barisan diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim(y_{n+1}) &= \frac{1}{2}\left(\lim(y_n) + \frac{2}{\lim(y_n)}\right) \\
y &= \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right) \\
2y &= y + \frac{2}{y} \\
2y^2 &= y^2 + 2 \\
y^2 &= 2 \\
y &= \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Karena barisan (y_n) suku-sukunya selalu positif maka diambil $\lim(y_n) = 2$. □

Pada pengerjaan soal ini telah digunakan dua sifat limit barisan yang akan dibahas secara formal pada bagian berikutnya. Sifat pertama yang digunakan adalah sifat aljabar barisan ketika memecah jumlahan masing-masing limit dan ketika membawa limit ke bagian penyebut pada baris pertama. Sifat kedua adalah ketika mengambil bilangan taknegatif sebagai limit barisan yang suku-sukunya juga taknegatif.

Latihan 6.4. Diasumsikan barisan (z_n) berikut adalah konvergen. Hitunglah $\lim(z_n)$.

$$z_1 := 1, \quad z_2 := 2, \quad z_{n+2} := (z_{n+1} + z_n)/(z_{n+1} - z_n), n \geq 1.$$

Pembuktikan limit barisan langsung dari definisi akan menjadi sulit bilamana bentuk barisan yang dihadapi cukup rumit. Melalui definisi ini dikembangkan "alat-alat" sederhana yang dapat digunakan untuk membuktikan limit barisan, khususnya barisan yang mempunyai bentuk tertentu. Alat-alat yang dimaksud berupa teorema-teorema yang mendasari metode untuk pembuktian kekonvergenan barisan. Berikut sebuah teorema sederhana yang dapat mendeteksi dengan mudah kekonvergenan suatu barisan.

Teorema kekonvergenan dominasi (TKD)

Teorema 6.3. *Misalkan ada dua barisan bilangan real (a_n) dan (x_n). Jika ada $C > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku*

$$|x_n - x| \leq C|a_n| \text{ untuk semua } n \geq m \text{ dan } \lim(a_n) = 0$$

maka $\lim(x_n) = x$.

BUKTI. Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\lim(a_n) = 0$ maka ada $N_a \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|a_n| < \varepsilon/C \text{ untuk setiap } n \geq N_a.$$

Jadi untuk setiap $n \geq N :=$ maks $\{N_a, m\}$ berlaku

$$|x_n - x| \leq C|a_n| < C(\varepsilon/C) = \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $\lim(x_n) = x$. □

Istilah dominasi pada teorema ini merujuk pada perilaku suku-suku $|x_n - x|$ yang pada akhirnya selalu terdominasi dari atas oleh barisan (a_n) yang konvergen ke nol. Untuk penggunaan teorema ini perlu ditemukan barisan (a_n) dan konstanta $C > 0$ yang dimaksud.

Bukti. Secara intuitif hasil ini dapat diterima kebenarannya. Sebagaimama dipahami bahwa nilai dari $1/n$ menuju nol tatkala n menuju takhingga sehingga $c^{1/n}$ menuju c^0, yakni 1. Ilustrasi keadaan ini diberikan pada Gambar 6.2. Sayangnya, argumen dengan intuisi ini tidak dapat diterima sebagai bukti formal. Untuk soal ini kita tetap menggunakan ketaksamaan Bernoulli seperti sebelumnya dengan membagi kemungkinan nilai c ke dalam tiga kasus. Untuk kasus $c = 1$ maka diperoleh barisan konstan $(1, 1, 1, \cdots)$ sehingga jelas limitnya 1. Untuk $0 < c < 1$ maka dipenuhi $0 < c^{1/n} < 1$ sehingga dapat ditulis sebagai

$$c^{1/n} = \frac{1}{1 + d_n} \text{ untuk suatu } d_n > 0.$$

Pendefinisian ini dapat ditulis $c = \frac{1}{(1+d_n)^n}$. Terapkan ketaksamaan Bernoulli pada bentuk $(1 + d_n)$, yaitu $(1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n$ sehingga diperoleh

$$c = \frac{1}{(1 + d_n)^n} \leq \frac{1}{1 + nd_n} \leq \frac{1}{nd_n}.$$

Dari bentuk ini diperoleh hasil $nc \leq \frac{1}{d_n}$ atau $0 < d_n \leq \frac{1}{nc}$. Selanjutnya,

$$0 < 1 - c^{1/n} = 1 - \frac{1}{1 + d_n} = \frac{d_n}{1 + d_n} < d_n < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{c}.$$

Bentuk terakhir ini sudah dapat diarahkan ke TKD, yaitu $\left|c^{1/n} - 1\right| = \left|1 - c^{1/n}\right| \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n} \to 0$ sehingga disimpulkan $\lim(c^{1/n} - 1) = 0$ atau $\lim(c^{1/n}) = 1$. Untuk $c > 1$ maka $c^{1/n} > 1$ sehingga dapat ditulis sebagai

$$c^{1/n} = 1 + p_n \text{ untuk suatu } p_n > 0.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Bernoulli lagi diperoleh $c = (1 + p_n)^n \geq 1 + np_n$. Akibatnya, $c - 1 \geq np_n$ sehingga $p_n \leq \frac{c-1}{n}$. Dengan fakta ini kita dapat menulis relasi berikut.

$$\left|c^{1/n} - 1\right| = p_n \leq \frac{c - 1}{n} = (c - 1) \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

Dengan TKD maka disimpulkan $\lim(c^{1/n}) = 1$. Jadi untuk semua kasus $c > 1$, terbukti bahwa barisan $\left(c^{1/n}\right)$ konvergen ke 1. □

Latihan 6.5. Buktikan $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$ dan simpulkan dari hasil ini bahwa $\lim(c^{1/n}) = 1$ untuk sebarang $c > 0$. [Petunjuk: karena $x_n := n^{1/n} > 1$ maka $\sqrt{n^{1/n}} > 0$ sehingga dapat ditulis $\sqrt{n^{1/n}} = 1 + \alpha_n$ dengan $\alpha_n > 0$. Diperoleh $\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^n$. Selanjutkan gunakan ketaksamaan Bernoulli dan TKD.

6.2 Sifat-sifat Limit Barisan

Berikut ini diberikan sifat aljabar barisan konvergen. Sifat-sifat ini banyak digunakan dalam keperluan praktis terutama dalam menghitung nilai limit barisan. Sifat pertama adalah keterbatasan barisan konvergen.

Definisi 6.4. (Barisan terbatas) Barisan (x_n) dikatakan terbatas jika ada bilangan $M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, barisan (x_n) terbatas jika dan hanya jika $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ merupakan himpunan terbatas pada $\mathbb{R}$.

Sebaliknya barisan yang terbatas belum tentu konvergen seperti ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 6.13. Diberikan barisan $((-1)^n : n \in \mathbb{N})$. Jelas barisan ini terbatas karena $|x_n| < 1$ untuk setiap n. Buktikan barisan ini tidak konvergen.

BUKTI. Gunakan metode kontradiksi. Andaikan ia konvergen, katakan $\lim(x_n) = a$. Ambil $\varepsilon := 1$, maka terdapat bilangan asli N sehingga

$$|(-1)^n - a| < 1 \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Bilangan $n \geq N$ dapat berupa bilangan genap atau bilangan ganjil. Untuk n ganjil maka $(-1)^n = -1$, sehingga diperoleh

$$|(-1)^n - a| = |-1 - a| < 1 \Rightarrow -2 < a < 0. \qquad (*)$$

Untuk n genap maka $(-1)^n = 1$, sehingga diperoleh

$$|(-1)^n - a| = |1 - a| < 1 \Rightarrow 0 < a < 2. \qquad (**)$$

Dua pernyataan (*) dan (**) saling kontradiksi, sehingga pengandaian salah. Jadi terbukti barisan $((-1)^n : n \in \mathbb{N})$ divergen. □

Sifat aljabar limit barisan

Teorema 6.5. *Jika $X := (x_n)$ dan $Y := (y_n)$ dua barisan yang berturut-turut konvergen ke x dan y maka*

1. *barisan $X \pm Y := (x_n + y_n)$ konvergen ke $x \pm y$,*
2. *barisan $XY := (x_n y_n)$ konvergen ke xy*
3. *barisan $cX := (cx_n)$ konvergen ke cx untuk sebuah skalar c.*

BUKTI. (1) Untuk membuktikan $\lim(x_n + y_n) \to (x + y)$, kita harus memberikan estimasi pada $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Oleh karena $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$ maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat N_1 dan N_2 sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n \geq N_1 \text{ dan } |y_n - y| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n \geq N_2.$$

Jadi untuk setiap $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $(x_n - y_n)$ konvergen ke $(x - y)$.
(2) Oleh karena (x_n) konvergen maka ia terbatas, yaitu ada $M_1 > 0$ sehingga $|x_n| \leq M_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ambil $M := \max\{M_1, |y|\}$. Oleh karena $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$ maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat N_1 dan N_2 sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon/2M \text{ untuk setiap } n \geq N_1 \text{ dan } |y_n - y| < \varepsilon/2M \text{ untuk setiap } n \geq N_2.$$

yaitu

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n y - x y_n}{y_n y}\right| \frac{1}{|y_n||y|}|x_n y - x y_n| \\
&= \frac{1}{|y_n||y|}|x_n y - x_n y_n + x_n y_n - x y_n| \\
&= \frac{1}{|y_n||y|}|x_n(y - y_n) + y_n(x_n - x)| \\
&\le \frac{|x_n|}{|y_n||y|}|y_n - y| + \frac{1}{|y|}|x_n - x|
\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita perlu memberikan batas untuk suku $\frac{|x_n|}{|y_n||y|}$. Oleh karena (x_n) konvergen maka ia terbatas yaitu ada $M > 0$ sehingga $|x_n| \le M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena $\lim(y_n) = y$ maka diberikan $\varepsilon := \frac{1}{2}|y| > 0$ ada $N_1 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|y_n - y| < \frac{1}{2}|y| \text{ untuk setiap } n \ge N_1.$$

Dengan ketaksamaan segitiga $||y_n| - |y|| \le |y_n - y|$ dan $|y_n - y| < \frac{1}{2}|y|$ maka dengan menerapkan sifat nilai mutlak diperoleh

$$||y_n| - |y|| < \frac{1}{2}|y| \longleftrightarrow \frac{1}{2}|y| < |y_n| < \frac{3}{2}|y| \to |y_n| > \frac{1}{2}|y| \text{ untuk setiap } n \ge N_1.$$

Jadi berlaku

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|} \text{ untuk setiap } n \ge N_1.$$

Dengan demikian kita mempunyai estimasi

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| \le \frac{|x_n|}{|y_n||y|}|y_n - y| + \frac{1}{|y|}|x_n - x| < \frac{2M}{|y|^2}|y_n - y| + \frac{1}{|y|}|x_n - x|. \tag{*}$$

Sekarang diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Oleh karena $\lim(y_n) = y$ dan $\lim(x_n) = x$ maka ada $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|x_n - x| < \frac{|y|}{2}\varepsilon \text{ untuk setiap } n \ge N_2, \text{ dan } |y_n - y| < \frac{|y|^2}{4M}\varepsilon \text{ untuk setiap } n \ge N_3.$$

Dengan mengambil $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$ maka berdasarkan (*), diperoleh

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ untuk setiap } n \ge N.$$

Merunut dari awal kita peroleh bahwa setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli N sehingga $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \varepsilon$ untuk setiap $n \ge N$. Ini berarti $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$. □

Contoh 6.15. Kita tunjukkan bahwa $\lim\left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = 2$. Pertama kita ubah dulu ke dalam bentuk barisan konvergen, yaitu

$$\left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = \frac{2 + 1/n}{1 + 5/n}.$$

Selanjutnya, diambil $X := (2 + 1/n)$ dan $Y := (1 + 5/n)$. Jelas bahwa $\lim X = 2$ dan $\lim Y = 1$ maka $\lim \frac{X}{Y} = \frac{2}{1} = 2$.

Bukti. Misalkan $w := \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat bilangan asli N_1 dan N_2 sehingga

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_1 \text{ dan } |z_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_2.$$

Bila diambil $N := \max\{N_1, N_2\}$ maka berlaku

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ dan } |z_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Dari hasil ini diperoleh

$$-\varepsilon < x_n - w \text{ dan } z_n - w < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Oleh karena diketahui $x_n \leq y_n \leq z_n$, maka dengan menambahkan w pada ketiga ruas diperoleh

$$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Dengan hasil sebelumnya, diperoleh

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon \Longleftrightarrow |y_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Jadi terbukti $\lim(y_n) = w$. □

Teorema kekonvergenan jepit ini dikenal juga istilah teorema ***sequeeze*** atau teorema ***sandwich***. Dalam bahasa Indonesia ada juga yang menyebut teorema apit.

Contoh 6.16. Buktikan $\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$.

Bukti. Perhatikan untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Dengan mengambil $x_n = -1/n$, $y_n = \left(\frac{\sin n}{n}\right)$ dan $z_n = 1/n$ maka dengan TKJ diperoleh

$$\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = \lim(-1/n) = \lim(1/n) = 0.$$

Terbuktilah bahwa $\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$. □

Latihan 6.7. Buktikan $\lim\left(n \sin \frac{1}{n}\right) = 1$.

Latihan 6.8. Misalkan barisan (x_n) didefinisikan sebagai $x_n := \frac{n - \cos(n)}{n}$. Buktikan barisan (x_n) konvergen dan hitunglah limitnya.

Versi lainnya TKJ ini akan muncul lagi dalam bentuk limit fungsi yang akan diberikan pada bab selanjutnya. Satu lagi alat cepat dan mudah untuk menyelidiki kekonvergenan barisan adalah uji rasio berikut.

Teorema 6.11. *Misalkan (x_n) barisan bilangan real positif sehingga $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} := L$ ada. Jika $L < 1$ maka (x_n) konvergen dan $\lim(x_n) = 0$.*

2. *Jika* $x_n \geq 0$ *maka barisan* $(\sqrt{x_n})$ *konvergen dengan* $\lim(\sqrt{x_n}) = \left(\sqrt{\lim(x_n)}\right)$.

BUKTI. (1) Misalkan $\lim(x_n) = x$. Kita telah mempunyai sifat nilai mutlak bahwa

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|, \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Jadi kekonvergenan $(|x_n|)$ langsung diakibatkan oleh kekonvergenan (x_n).
(2) Oleh karena $x > 0$ maka $\sqrt{x} > 0$. Selanjutnya dibentuk

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}. \qquad (*)$$

Mengingat $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$ maka $\frac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ sehingga dari (*) diperoleh

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) |x_n - x|.$$

Oleh karena $x_n \to x$ maka $(x_n - x) \to 0$, dan dengan menggunakan teorema kekonvergenan dominasi maka terbukti $\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{x} = \left(\sqrt{\lim(x_n)}\right)$. □

Teorema 6.13. *Misalkan* (x_n) *dan* (y_n) *dua barisan konvergen dengan masing-masing limit* x *dan* y. *Maka barisan maksimum* (M_n) *dan minimum* (m_n) *yang didefinisikan sebagai berikut*

$$M_n := \max\{x_n, y_n\} \text{ dan } m_n := \min\{x_n, y_n\}$$

juga konvergen dengan

$$\lim(M_n) = \max\{x, y\} \text{ dan } \lim(m_n) = \min\{x, y\}.$$

BUKTI. Pertama, kita sajikan maksimum dan minimum dalam bentuk nilai mutlak berikut.

$$\max\{x_n, y_n\} = \frac{x_n + y_n}{2} + \left|\frac{x_n - y_n}{2}\right| \text{ dan } \min\{x_n, y_n\} = \frac{x_n + y_n}{2} - \left|\frac{x_n - y_n}{2}\right|.$$

Selanjutnya gunakan sifat limit jumlah dan limit nilai mutlak. Kita hanya tunjukkan untuk barisan maksimum, sedangkan untuk barisan minimum dapat dikerjakan sendiri.

$$\begin{aligned}
\lim(M_n) &= \lim\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) + \lim\left|\frac{x_n - y_n}{2}\right| \\
&= \frac{\lim(x_n) + \lim(y_n)}{2} + \left|\frac{\lim(x_n) - \lim(y_n)}{2}\right| \\
&= \frac{x + y}{2} + \left|\frac{x - y}{2}\right| \\
&= \max\{x, y\}.
\end{aligned}$$

□

Latihan 6.9. Pada teorema kekonvergenan barisan akar sebelumnya diperoleh fakta bahwa urutan operasi limit dan akar dapat dipertukarkan, yaitu limit akar barisan sama dengan akar limit barisan. Lebih umum, misalkan (x_n) barisan konvergen taknegatif, buktikan

$$\lim\left(x_n^{1/k}\right) = (\lim(x_n))^{1/k}.$$

BAB 7

Kekonvergenan Barisan Khusus

Mathematics is music for the mind, music is mathematics for the soul.

ANONYMOUS

Menguji apakah suatu barisan konvergen atau divergen bukanlah pekerjaan yang mudah. Pada bab sebelumnya kita telah membahas beberapa cara untuk mengujikan kekonvergenan barisan. Cara yang paling mendasar adalah menggunakan definisi limit barisan. Untuk barisan yang bentuknya cukup rumit, cara ini sulit diterapkan. Beberapa kriteria kekonvergenan barisan telah dibangun melalui beberapa teorema, seperti teorema ekor barisan, teorema kekonvergan dominasi (TKD), teorema kekonvergenan jepit (TKJ), teorema uji rasio dan uji akar, serta teorema yang berkenaan sifat-sifat aljabar kekonvergenan barisan.

Walaupun alat-alat uji konvergensi barisan tersebut berlaku untuk barisan umum, namun terkadang ia tidak dapat diterapkan pada barisan yang rumit. Di lain pihak, ada beberapa barisan dengan bentuk suku rumit ternyata memiliki sifat khusus. Selanjutnya, alat uji konvergensi dikembangkan untuk barisan yang memiliki sifat khusus tersebut. Beberapa barisan khusus yang dibahas pada bab ini adalah barisan monoton terbatas (BMT), barisan bagian, barisan Cauchy, barisan kontraksi. Sebagai pengembangan konsep limit barisan, bab ini juga membahas sekilas materi limit superior dan limit inferior sebuah barisan.

7.1 Barisan Monoton Terbatas (BMT)

Sebelumnya sudah dibahas bahwa barisan konvergen pasti terbatas, tetapi barisan terbatas belum tentu konvergen. Pada bagian ini dibahas syarat cukup agar barisan terbatas konvergen.

Definisi 7.1. (Barisan monoton) Suatu barisan (x_n) dikatakan **monoton naik** jika

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots, \text{ atau } x_n \leq x_{n+1} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

dan dikatakan **monoton turun** jika

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots, \text{ atau } x_n \geq x_{n+1} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Barisan (x_n) dikatakan monoton jika ia monoton naik saja atau monoton turun saja. Istilah monoton naik selanjutnya hanya disebut naik saja dan begitu juga untuk monoton turun. Istilah monoton tegas (*strictly*) dimaksudkan untuk kasus tidak termuatnya tanda sama dengan "=" pada tanda ketaksamaan di atas.

Perlu diingatkan kembali pembedaan dalam penulisan barisan dan himpunan. Dalam buku ini kita menggunakan penulisan $\lim(x_n)$ dan $\sup\{x_n\}$, bukan sebaliknya yaitu $\sup(x_n)$ dan $\lim\{x_n\}$. Hati-hati, penggunaan istilah dan notasi diupayakan konsisten; supremum atau infimum untuk himpunan dengan kurung kurawal sedangkan limit untuk barisan dengan kurung biasa.

Pada bab berikutnya kita akan mempelajari deret bilangan real yang didefinisikan sebagai jumlahan takberhingga suku-suku barisan. Jumlahan berhingga suku-suku awal sebuah deret membentuk sebuah barisan yang disebut barisan jumlah parsial deret. Contoh berikut adalah barisan yang didefinisikan sebagai jumlah parsial sebuah deret.

Contoh 7.3. Buktikan apakah barisan (x_n) yang didefinisikan oleh

$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

konvergen atau divergen.

Sebelum dibuktikan, ada baiknya kita amati ilustrasi numerik suku-suku barisan ini untuk beberapa n yang cukup besar. Jika nilai suku-sukunya cenderung tetap (*steady*) ini mengindikasikan barisan konvergen. Sebaliknya, jika suku-sukunya cenderung membesar takterkendali maka ini mengindikasi barisan divergen. Untuk $n = 10^k$, $k = 1, 2, 3, 4$ diperoleh

$$2.990,\ 5.1874,\ 7.4855,\ 9.7876.$$

Terlihat peningkatan suku-sukunya sangat lambat. Sebagai contoh $x_{10000} = 7.4855$ dan $x_{10000} = 9.7876$ hanya berselisih sekitar 2.3 pada jarak antarsukunya sangat besar, yaitu ada 9000 suku yang dilaluinya. Untuk itu hasil komputasi numerik tidak dapat dijadikan dasar untuk menduga apakah barisan ini konvergen atau tidak. Untuk itu bukti secara analisis perlu diterapkan.

Bukti. Jelas barisan ini monoton naik karena berlaku

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n} \geq x_n \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Selanjutnya dibuktikan apakah barisan ini terbatas atau tidak. Untuk melihat pola barisan ini secara numerik, kita perhatikan suku ke n berikut

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Komputasi numerik memberikan data sebagai berikut :

$$x_{10} = 2.9290,\ x_{100} = 5.1874,\ x_{1000} = 7.4855,\ x_{10000} = 9.7876,\ x_{100000} = 12.0901.$$

Terlihat bahwa kenaikannya sangat lambat sehingga berdasarkan data ini seolah-olah suku-suku barisan ini akan menuju bilangan tertentu atau konvergen. Baiklah, kita perhatikan suku-suku ke $2^n, n \in \mathbb{N}$, yaitu x_{2^n}. Untuk $n = 1$, $x_{2^1} = 1 + \frac{1}{2}$. Untuk $n = 2$, $x_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$. Untuk $n = 3$, $x_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$. Secara umum

Terlihat indikasi bahwa supremumnya adalah 2. Secara teoretis masih harus dibuktikan bahwa 2 benar-benar sebagai supremumnya. Cara kedua adalah dengan menggunakan sifat ekor barisan dan barisan akar. Misalkan $x = \lim(x_n)$, maka

$$\begin{aligned}\lim(x_{n+1}) &= \lim(\sqrt{2x_n}) = \sqrt{\lim(2x_n)}\\ x &= \sqrt{2x}\\ x^2 &= 2x \Rightarrow x(x-2) = 0.\end{aligned}$$

Diperoleh $x = 0$ atau $x = 2$. Mengingat $x_n > 1$ untuk setiap n maka nilai yang memenuhi adalah $x = 2$. Cara ketiga adalah dengan mengamati bahwa untuk limit ini menghasilkan bentuk akar kontinu berikut,

$$\lim(x_n) = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}.$$

Misalkan $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$ maka diperoleh

$$x^2 = 2x \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2.$$

Ini memberikan hasil yang sama yaitu $\lim(x_n) = 2$. □

Latihan 7.2. Buktikan barisan dalam bentuk rekursif berikut konvergen. Kemudian, tentukan limitnya.

$$x_1 := a \text{ dengan } 0 < a < 1$$
$$x_{n+1} := x_n^2 \text{ untuk } n = 1, 2, 3\cdots.$$

Teorema kekonvergenan monoton (TKM) hanya dapat diterapkan pada barisan monoton, tetapi tidak berlaku untuk barisan yang tidak monoton. Pembahasan berikutnya adalah teorema kekonvergenan barisan bagian (TKBB) yang dapat diterapkan pada barisan tidak monoton.

7.2 Barisan Bagian

Pada bagian awal bab ini telah diperkenalkan istilah ekor barisan. Ekor barisan ini merupakan bentuk khusus dari barisan bagian. Berikut ini diberikan definisi barisan bagian.

Definisi 7.2. (Barisan bagian) Misalkan $X := (x_n)$ barisan bilangan real dan misalkan diambil barisan bilangan asli naik tegas, yaitu $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ maka barisan X' yang diberikan oleh

$$(x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \cdots, x_{r_n}, \cdots)$$

disebut **barisan bagian** (*subsequence*) dari X. Barisan bagian ini ditulis

$$X' := (x_{r_n} : n \in \mathbb{N})$$

Contoh 7.5. Diberikan barisan $X := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots)$. Beberapa barisan bagian dari X adalah

1. $X' := (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2n}, \cdots)$.
2. $X'' := (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \cdots)$.

Bukti. Misalkan $z_n = c^{1/n}$, diambil $z_{2n} = c^{1/2n} = (c^{1/n})^{1/2} = (z_n)^{1/2}$ sebagai barisan bagiannya. Tulis $z = \lim(z_n)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim(z_n) &= \lim(z_{2n})\\
\lim(z_n) &= \lim((z_n)^{1/2}) = (\lim(z_n))^{1/2}\\
z &= z^{1/2} \to \sqrt{z}(\sqrt{z}-1) = 0 \to z = 0 \text{ atau } z = 1.
\end{aligned}$$

Mengingat $z_n > 0$ untuk setiap n dan (z_n) monoton naik maka diambil $z = 1$. □

Melalui TKBB kita dapat membuat kriteria barisan divergen. Perhatikan kontraposisinya, jika ada dua barisan bagian konvergen tetapi limit keduanya tidak sama maka barisan induknya divergen.

Contoh 7.8. Perhatikan barisan $X := ((-1)^n)$ mempunyai dua barisan bagian $X' := (x_{2n}) = ((-1)^{2n})$ dan $X'' := (x_{2n-1}) = ((-1)^{2n-1})$. Oleh karena

$$\lim X' = 1 \neq -1 = \lim X''$$

maka barisan $((-1)^n)$ divergen. Kesimpulan yang sama seperti telah dibuktikan pada bagian sebelumnya.

Tidak semua barisan adalah monoton, tetapi pada setiap barisan selalu dapat dikonstruksi barisan bagian yang monoton. Bila barisan induknya terbatas maka jelas setiap barisan bagian juga terbatas. Konsekuensi dari kenyataan ini dijustifikasi oleh Teorema Bolzano Weierstrass (TBW).

Teorema 7.3 (Teorema Bolzano-Weierstrass)**.** *Setiap barisan terbatas selalu memuat barisan bagian yang konvergen.*

Bukti. Pembuktian ini akan mengikuti ide pada pembuktian teorema lokasi akar, yakni sebuah interval dipecah dua terus-menerus dan suku-suku barisan bagian diambil dari setiap subinterval yang terbentuk. Karena barisan (x_n) terbatas maka ada dua bilangan real a_1 dan b_1 dengan $a_1 < b_1$ dan $a_1 < x_n < b_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Secara induktif kita akan membangun barisan bagian (x_{n_k}), barisan bilangan (a_k), (b_k) sedemikian hingga $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $\lim(a_k) = \lim(b_k)$. Dengan TKJ disimpulkan barisan bagian (x_{n_k}) konvergen. Langkah-langkah konstruksinya sebagai berikut:

- Untuk $k = 1$ kita sudah mempunyai $a_1 < x_1 < b_1$. Diambil $n_1 := 1$ sehingga berlaku $a_1 < x_{n_1} < b_1$.
- Andaikan kita sudah berhasil membangun sebanyak k suku barisan $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k})$, $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, dan $(b_1, b_2, \cdots, b_k)$ yang memenuhi $a_k < x_{n_k} < b_k$.
- Selanjutnya untuk $n = k+1$ kita akan mendefinisikan a_{k+1}, b_{k+1} dan n_{k+1}. Untuk itu ambil median interval $[a_k, b_k]$ melalui

  $$y = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

  Dengan demikian interval $[a_k, b_k]$ terpecah menjadi dua subinterval yang sama, yaitu $[a_k, y]$ dan $[y, b_k]$. Karena banyak suku-suku barisannya adalah takberhingga maka salah satu subinterval ini pasti memuat suku-suku yang takberhingga banyak. Bila subinterval $[a_k, y]$ memuat takberhingga suku-suku (x_n), tetapkan $a_{k+1} := a_k$ dan

Khususnya, untuk $m = K$ maka berlaku

$$|x_n - x_K| < 1, \text{ akibatnya } |x_n| < 1 + |x_K| \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Ambil $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{K-1}|, 1 + |x_K|\}$ maka diperoleh $|x_n| < M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ yaitu (x_n) terbatas. $\square$

Keterbatasan dan kekonvergenan barisan Cauchy dibahas pada beberapa teorema berikut.

Teorema 7.5. *Suatu barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika ia barisan Cauchy.*

Bukti. $(\rightarrow)$ Diketahui (x_n) konvergen, katakan $\lim(x_n) = x$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada bilangan asli K sehingga $|x_n - x| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K$. Jadi untuk setiap $m, n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &\leq |x - x_n| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti (x_n) barisan Cauchy.
$(\leftarrow)$ Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Oleh karena (x_n) adalah barisan Cauchy maka ada bilangan asli K_1 sehingga

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } m, n \geq K_1.$$

Mengingat barisan Cauchy (x_n) ini terbatas maka berdasarkan teorema BW terdapat barisan bagian (x_{r_n}) yang konvergen, katakan $\lim(x_{r_n}) = x^*$. Oleh karena itu terdapat bilangan asli K_2 sehingga

$$|x_{r_n} - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } r_n \geq K_2.$$

Ambil $K := \max\{K_1, K_2\}$ maka keduanya berlaku

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ dan } |x_{r_n} - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n, m, r_n \geq K.$$

Khususnya untuk $m = K = r_n$ berlaku

$$|x_n - x_K| < \varepsilon/2 \text{ dan } |x_K - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Akhirnya diperoleh untuk setiap $n \geq K$ berlaku, diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_K + x_K - x^*| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

yaitu (x_n) konvergen ke x^*. $\square$

Perlu diingatkan bahwa barisan Cauchy konvergen hanya dalam kasus barisan bilangan real. Secara umum barisan Cauchy belum tentu konvergen. Pada analisis real lanjutan, suatu barisan Cauchy konvergen hanya dijamin bila ia terdefinisi pada ruang Hilbert.

Contoh 7.9. Tunjukkan $(\frac{1}{n})$ adalah barisan Cauchy tetapi $((-1)^n)$ bukan Cauchy.

Bukti. Untuk barisan $x_n := \frac{1}{n}$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Dengan sifat Archimedes, selalu ada bilangan asli K sehingga $K > \frac{2}{\varepsilon}$. Jadi untuk setiap $m, n \geq M$ berlaku $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Diperoleh

$$|x_m - x_n| = |1/m - 1/n| \leq 1/m + 1/n < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \text{ untuk setiap } m, n \geq K.$$

Pada penjabaran ini kita telah menggunakan fakta bahwa $|x_2 - x_1| = 1$. Misalkan $m > n$, kita amati suku-suku ke $n, n+1, n+2, \cdots, m-1, m$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+2} - x_{n+3}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \\ &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(2 - (1/2)^{m-n-1}\right) < \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}\end{aligned}$$

Diambil K bilangan asli terkecil yang lebih besar (*flooring*) dari $(2 -{}^2 \log \varepsilon)$ atau $K = \lceil 2 -{}^2 \log \varepsilon \rceil$, maka

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ untuk setiap } m, n \geq K.$$

Jadi, ini adalah barisan Cauchy sehingga terbukti ia konvergen. Selanjutnya, limit barisan tidak dapat diperoleh dengan menggunakan sifat ekor barisan karena akan menghasilkan relasi $x = \frac{1}{2}(x + x)$. Relasi ini selalu benar tetapi tidak memberikan informasi apapun. Sekarang digunakan TKBB. Ambil suku-suku ganjil $(x_{2n+1} : n \in \mathbb{N})$. Untuk $n = 1$ diperoleh $x_3 = 1 + \frac{1}{2}$. Mengingat $x_4 = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$, maka untuk $n = 2$ diperoleh $x_5 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$. Oleh karena $x_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$, maka untuk $n = 3$ diperoleh $x_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}$. Secara umum, dengan menggunakan prinsip induksi matematika dapat dibuktikan bahwa setiap bilangan asli n berlaku

$$\begin{aligned}x_{2n+1} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}}_{\text{deret geometri } n \text{ suku}} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - (\frac{1}{4})^n\right)}{3/4} \\ &= 1 + \frac{2}{3}\left(1 - (1/4^n)\right).\end{aligned}$$

Berdasarkan ini diperoleh

$$\lim(x_n) = \lim(x_{2n+1}) = \lim\left(1 + \frac{2}{3}(1 - (1/4^n))\right) = 1 + 2/3 = 5/3.$$

□

Barisan pada contoh soal ini cukup menarik dan sulit untuk dipelajari kekonvergenannya. Gambar 7.3 mengilustrasi dinamika suku barisan ini menuju limit $5/3 = 1.67$.

Sifat selanjutnya yang dapat digunakan untuk mempelajari kekonvergenan barisan adalah sifat kontraksi.

Definisi 7.4. (Barisan kontraksi) Barisan bilangan real $X := (x_n)$ dikatakan **kontraksi** jika ada bilangan real C dengan $0 < C < 1$ sehingga berlaku

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < C|x_{n+1} - x_n|$$

untuk setiap bilangan asli n. Kita sebut saja bilangan C sebagai konstanta kontraksi.

suku $|x_2 - x_1|$.

$$\begin{aligned}|x_{n+2} - x_{n+1}| &\leq C|x_{n+1} - x_n| \\ &\leq CC|x_n - x_{n-1}| = C^2|x_n - x_{n-1}| \\ &= C^2C|x_{n-1} - x_{n-2}| = C^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\vdots \\ &\leq C^n|x_2 - x_1|.\end{aligned}$$

Sekarang kita estimasi selisih $|x_m - x_n|$ dengan cukup mengasumsikan $m > n$. Diperoleh

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+2} - x_{n+3}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \\ &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+3} - x_{n+2}| + \cdots + |x_m - x_{m-1}| \\ &\leq \underbrace{\left(C^{n-1} + C^n + C^{n+1} + \cdots + C^{m-2}\right)}_{(m-n) \text{ suku deret geometri}} |x_2 - x_1| \\ &= C^{n-1}\left(\frac{1 - C^{m-n}}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \\ &\leq C^{n-1}\left(\frac{1}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \to 0\end{aligned}$$

sebab $0 < C < 1$. Jadi (x_n) barisan Cauchy, dan disimpulkan ia konvergen. □

Pada pembuktian teorema ini kita peroleh sebuah hubungan implikatif bahwa sebuah barisan kontraksi adalah barisan Cauchy.

Latihan 7.3. Apakah berlaku sebaliknya bahwa jika barisan Cauchy maka ia kontraksi. Jika tidak, berikan sebuah contoh pengingkarannya.

Contoh 7.12. Buktikan bahwa barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{n}$ merupakan barisan kontraksi sehingga ia konvergen.

Bukti. Perhatikan

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{(n+2)(n+1)}\right| = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

dan

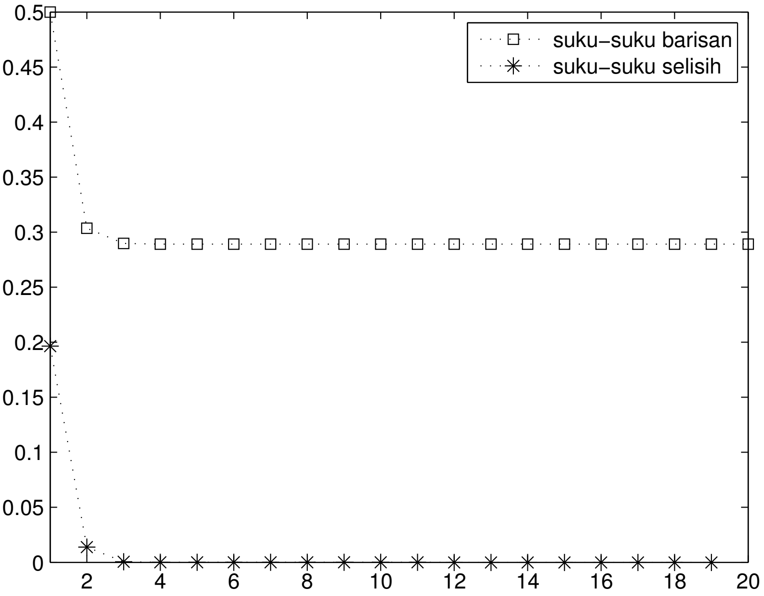
$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Oleh karena $\frac{1}{(n+2)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)}$ maka terbukti $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|$, yaitu (x_n) suatu barisan kontraksi. □

Contoh 7.13. Misalkan x_1 suatu bilangan real dengan $0 < x_1 < 1$. Didefinisikan

$$x_{n+1} := \frac{1}{7}(x_n^3 + 2), \ n \geq 1.$$

Buktikan apakah barisan ini konvergen.



Gambar 7.5: Ilustrasi barisan kontraksi dan kekonvergenannya

Kedua, pada pembahasan awal juga diberikan contoh barisan alternating $((-1)^n : n \in \mathbb{N})$. Barisan ini sudah kita buktikan dengan berbagai cara bahwa ia divergen alias tidak mempunyai limit. Untuk contoh ini suku-suku barisan mengumpul di dua bilangan yaitu 1 dan -1. Oleh karena nilai limit suatu barisan harus tunggal maka tidak mungkin kedua bilangan ini menjadi limit barisan tadi.

Pada pokok bahasan ini kita mengembangkan konsep limit yang dapat mengakomodasi kedua permasalahan tersebut di atas, yaitu limit superior dan limit inferior. Pendefinisian limit superior dan limit inferior menggunakan dua pendekatan. Pendekatan pertama menggunakan barisan bagian (*subsequence*) (Rudin, 1976) dan pendekatan kedua menggunakan ekor barisan (Royden, 1989).

Definisi 7.5. (Limit sup dan Limit inf) Misalkan (x_n) barisan bilangan real dan E adalah himpunan bilangan $x \in \mathbb{R}^*$ sehingga ada barisan bagian (x_{n_k}) dengan $x_{n_k} \to x$. Definisikan bilangan x^* dan x_* sebagai berikut:

$$x^* := \sup E \text{ dan } x_* := \inf E, \tag{7.4.1}$$

maka x^* disebut limit superior dan x_* disebut limit inferior dari (x_n) dan ditulis sebagai

$$x^* = \limsup(x_n) \text{ dan } x_* = \liminf(x_n).$$

Definisi ini menggunakan barisan bagian. Pada definisi ini, E tidak lain adalah himpunan titik-titik limit dari semua barisan bagian dari (x_n). Untuk definisi yang menggunakan ekor barisan adalah sebagai berikut.

Definisi 7.6. Misalkan (x_n) barisan bilangan real. Limit superior dan limit inferior barisan (x_n) adalah

$$\limsup(x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{x_k : k \geq n\} \text{ dan } \liminf(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{x_k : k \geq n\}. \tag{7.4.2}$$

Proses komputasi limit superior pada definisi ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

Hasil ini diperoleh mengingat supremum hanya dapat dicapai pada suku-suku bernilai positif, yakni pada suku-suku genapnya. Karena barisan (y_n) dengan $y_n := \frac{1}{1+\frac{1}{2n}}$ monoton naik dan terbatas maka berdasarkan TKM ia konvergen ke supremumnya, yaitu

$$\sup\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}, \frac{1}{1+\frac{1}{2(n+1)}}, \frac{1}{1+\frac{1}{2(n+1)}}, \cdots\right\} = \lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right) = 1.$$

Karena hasil ini membentuk himpunan tunggal (*singleton*) maka $\limsup_n\{1\} = 1$. Dengan argumen yang sama maka diperoleh limit inferior sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\liminf(x_n) &= \sup_n \inf\left\{\frac{(-1)^k}{1+1/k} : k \geq n\right\} \\
&= \sup_n \inf\left\{\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}, \frac{(-1)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}, \frac{(-1)^{n+2}}{1+\frac{1}{n+2}}, \cdots\right\} \\
&= \sup_n \inf\left\{\frac{(-1)^{2n-1}}{1+\frac{1}{2n-1}}, \frac{(-1)^{2(n+1)-1}}{1+\frac{1}{2(n+1)-1}}, \frac{(-1)^{2(n+2)-1}}{1+\frac{1}{2(n+2)-1}}, \cdots\right\} \\
&= \sup_n \inf\left\{\frac{-1}{1+\frac{1}{2n-1}}, \frac{-1}{1+\frac{1}{2(n+1)-1}}, \frac{-1}{1+\frac{1}{2(n+2)-1}}, \cdots\right\} \\
&= \sup_n\{-1\} = -1.
\end{aligned}$$

Hasil ini diperoleh karena infimum hanya dicapai pada suku-suku ganjil. Akhirnya disimpulkan $\liminf(x) = -1$. □

Latihan 7.4. Tentukan limit superior dan limit inferior baris (x_n) yang didefinisikan sebagai berikut

$$x_n := \begin{cases} \frac{n+2}{n} & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 0 & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Tentunya sangat mudah dipahami bahwa jika (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ maka $\limsup(x_n) = 1$ dan $\liminf(x_n) = -1$. Kedua limit ini tidak sama. Limit barisan ini tidak ada dalam konteks biasa. Berdasarkan ilustrasi ini dan pembahasan di atas maka secara intuitif dapat dipahami bahwa $\lim(x_n) = x$ jika dan hanya jika $\liminf(x_n) = \limsup(x_n) = \lim(x_n)$. Ini berarti jika kedua limit superior dan inferior ada dan nilai sama maka limit barisannya ada, begitu juga sebaliknya.

7.5 Sifat-sifat Limit Superior dan Limit Inferior

Sifat-sifat limit inferior dan limit superior diberikan dalam bentuk teorema sebagai berikut.

Teorema 7.7. *Misalkan (x_n) barisan terbatas. Limit inferiornya tidak akan pernah melebihi limit superiornya, yaitu*

$$\liminf(x_n) \leq \limsup(x_n).$$

Bukti. Gunakan definisi melalui pendekatan ekor barisan. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ selalu berlaku $\inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\}$. Ruas kiri diambil supremum dan ruas kanan diambil infimum, diperoleh

$$\liminf(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{x_k : k \geq n\} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{x_k : k \geq n\} = \limsup(x_n).$$

Bukti. ($\leftarrow$): Seperti biasa definisikan $a_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$ dan $b_n := \inf\{x_k : k \geq n\}$. Maka untuk ini berlaku $b_n \leq x_n \leq a_n$. Karena $\lim(b_n) = \limsup(x_n) = \liminf(x_n) = \lim(a_n)$ maka (x_n) konvergen berdasarkan TKJ, yaitu $\lim(x_n) = \limsup(x_n) = \liminf(x_n)$.
($\rightarrow$): Karena (x_n) konvergen maka ia terbatas. Berdasarkan teorema sebelumnya terdapat barisan bagian (x_{n_k}) dan (x_{m_k}) sehingga $\lim(x_{n_k}) = \limsup(x_n)$ dan $\lim(x_{m_k}) = \liminf(x_n)$. Karena berlaku $\lim(x_{n_k}) = \lim(x_{m_k})$ maka disimpulkan $\limsup(x_n) = \liminf(x_n)$. $\square$

Teorema 7.10. *Misalkan (x_n) dan (y_n) barisan terbatas dengan $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n \geq N$ dengan N bilangan asli tertentu, maka berlaku*

$$\begin{aligned} \liminf(x_n) &\leq \liminf(y_n) \\ \limsup(x_n) &\leq \limsup(y_n). \end{aligned}$$

Bukti. Untuk setiap $n \geq N$, definisikan $a_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$ dan $b_n := \sup\{y_k : k \geq n\}$. Jelas bahwa $a_n \leq b_n$ untuk setiap $n \geq N$. Dengan sifat limit berlaku $\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$, yakni $\liminf(x_n) \leq \limsup(x_n)$. Untuk pernyataan kedua diambil sebagai bahan latihan. $\square$

Latihan 7.6. Misalkan (x_n) dan (y_n) barisan terbatas dengan $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n \geq N$ dengan N bilangan asli tertentu, buktikan $\limsup(x_n) \leq \limsup(y_n)$.

Lebih lanjut dikatakan bahwa limit inferior dan limit superior suatu barisan adalah tunggal (Rudin, 1970). Satu lagi sifat menarik limit superior dan limit inferior adalah kaitan dengan barisan bagiannya seperti diberikan pada latihan berikut.

Latihan 7.7. Misalkan (x_n) barisan terbatas dan (x_{n_k}) barisan bagiannya. Buktikan kebenaran pernyataan berikut.

$$\liminf(x_n) \leq \liminf(x_{n_k}) \leq \limsup(x_{n_k}) \leq \limsup(x_n).$$

BAB 8

Deret Bilangan Real

Science is organized knowledge. Wisdom is organized life.

Immanuel KANT

Barisan (*sequences*) dan deret (*series*) adalah dua topik yang biasanya dibahas secara terpadu dan terurut. Konsep deret dikembangkan dari konsep barisan, mulai dari pendefinisiannya sampai kepada penurunan teorema kekonvergenannya. Oleh karena itu pembahasan deret selalu didahului oleh pembahasan barisan. Deret banyak digunakan dalam pengembangan teori-teori matematika lainnya seperti metode numerik untuk aproksimasi, matematika diskret, persamaan diferensial dan statistika. Deret juga sering digunakan dalam pemecahan masalah-masalah dalam ilmu terapan (*applied sciences*) seperti ilmu teknik, ilmu ekonomi, bahkan humaniora untuk menghitung nilai akumulasi kuantifikasi tertentu.

Bab ini membahas deret sebagai pengembangan konsep barisan. Berbagai definisi dan teorema terkait dengan deret dan kekonvergenan dibahas secara hierarki sampai kepada contoh implementasinya. Untuk membantu pemahaman berbagai konsep abstrak dalam deret, beberapa ilustrasi grafis dan numeris disertakan dalam pembahasan. Pada bagian akhir bab ini diberikan sebuah kasus menarik berupa sebuah deret unik yang kekonvergenan sangat sulit diungkap secara teoritis, namun sudah mulai terungkap melalui ilustrasi numeris dan grafis.

8.1 Pengertian Deret Bilangan Real

Sebelumnya kita telah menyelidiki kekonvergenan barisan (x_n) dengan $x_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Bila diamati, barisan ini merupakan jumlahan n suku pertama barisan (a_k) dengan $a_k := \frac{1}{k}$. Barisan (x_n) dapat ditulis sebagai

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Bentuk seperti ini disebut dengan jumlah parsial ke-n barisan (a_k). Bila diambil limit $n \to \infty$ maka diperoleh bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Berdasarkan definisi jumlah deret takberhingga diperoleh

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1.$$

□

Contoh 8.2 (Deret divergen). Tentukan formula barisan parsial s_n deret berikut dan buktikan deret divergen.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

Penyelesaian. Perhatikan bahwa deret ini dapat diekspansi sebagai berikut

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

sehingga jumlah parsialnya adalah

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{jika } n \text{ganjil,} \\ 0 & \text{jika } n \text{genap,} \end{cases}$$

atau dapat ditulis sebagai $s_n := (-1)^n$. Oleh karena (s_n) tidak mempunyai limit (divergen) maka disimpulkan deret $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ divergen. □

Contoh 8.3 (Deret teleskoping). Tunjukkan bahwa deret berikut konvergen.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}.$$

Penyelesaian. Dengan menggunakan pecahan parsial kita dapat menyajikan

$$a_k = \frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}.$$

Jadi, jumlah parsial n suku pertamanya dapat disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1} \right) \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Jadi jumlah deret adalah

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

□

Teorema 8.1. *Deret* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergen jika dan hanya jika deret* $\sum_{k=M}^{\infty} x_k$ *konvergen.*

BUKTI. Pecahlah jumlah parsial dalam dua bentuk berikut:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \left(\sum_{k=1}^{M-1} x_k\right) + \sum_{k=M}^{n} x_k.$$

Suku pertama ruas kanan berupa konstanta, katakan $\sum_{k=1}^{M-1} x_k := c$ sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{M-1} x_k\right) + \sum_{k=M}^{n} x_k\right) = c + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=M}^{n} x_k.$$

Terlihat bahwa kekonvergenan deret pada salah ruas mengakibatkan kekonvergenan deret pada ruas lainnya. □

Terkadang kita menulis $\sum x_n$ untuk maksud $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Berikut ini diberikan hubungan kekonvergenan deret dan kekonvergenan barisan yang membangun deret tersebut.

Teorema 8.2. *Jika deret* $\sum x_n$ *konvergen maka barisan* (x_n) *konvergen dengan* $\lim(x_n) = 0$.

BUKTI. Karena diketahui deret $\sum x_n$ konvergen maka barisan jumlah parsial (s_n) juga konvergen. Berdasarkan teori pada pokok bahasan barisan Cauchy, disimpulkan (s_n) adalah barisan Cauchy, yaitu setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga setiap $m, n \geq K$ berlaku

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon.$$

Cukup diasumsikan $n > m$ dan diambil khusus $n := m + 1$ atau $m = n - 1$ maka diperoleh $|\sum_{k=n}^{n} x_k| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa $\sum_{k=n}^{n} x_k$ tidak lain adalah x_n. Jadi diperoleh $|x_n| < \varepsilon$. Bila dirunut dari atas kita mendapatkan pernyataan bahwa setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - 0| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq K$. Dengan definisi limit barisan, kita simpulkan bahwa barisan (x_n) konvergen dengan $\lim(x_n) = 0$. □

Hati-hati, kebalikan teorema ini belum tentu berlaku. Pada latihan sebelumnya, deret harmonik berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ternyata tidak konvergen walaupun barisan $(\frac{1}{n})$ konvergen dengan $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Jadi $\lim(x_n) = 0$ hanya merupakan syarat perlu bagi deret konvergen, bukan syarat cukup. Berdasarkan ini kita mempunyai kriteria kedivergenan deret berikut.

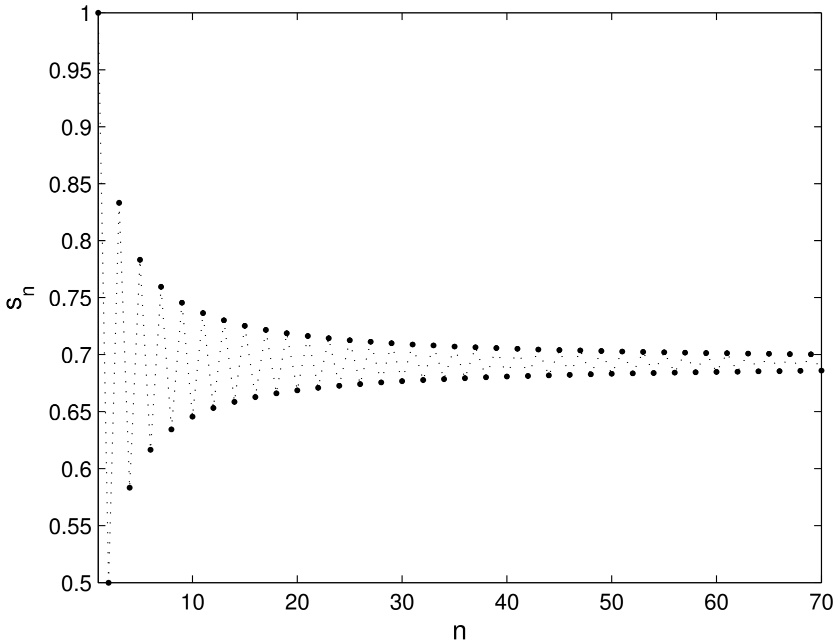
Teorema 8.3. *Jika* $\lim(x_n) \neq 0$ *maka deret* $\sum x_n$ *divergen.*

BUKTI. Bukti teorema ini cukup mengambil kontraposisi teorema sebelumnya. □

Sejauh ini kita baru memiliki dua kriteria umum kedivergenan deret, yaitu ketika limit barisan jumlah parsialnya (s_n) tidak ada dan ketika $\lim(x_n) \neq 0$.

Contoh 8.5. Selidikilah apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

PENYELESAIAN. Perhatikan $x_n = \frac{n}{n+1}$. Diperoleh $\lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) \neq 1$. Jadi disimpulkan deret ini divergen. □



Gambar 8.1: Pola kekonvergenan jumlah parsial deret harmonik alternating

Kalau kita amati barisan bagian (s_{2n}) monoton naik dan terbatas di atas oleh 1 dan barisan bagian (s_{2n+1}) monoton turun dan terbatas dari bawah oleh 0. Keterbatasan ini dapat dijelaskan sebagai berikut

$$0 < s_{2n} < s_{2n} + \frac{1}{2n+1} := s_{2n+1} < 1.$$

Dengan teorema sebelumnya maka disimpulkan bahwa kedua subbarisan ini konvergen. Jadi, barisan jumlah parsial yang terbentuk dari kedua barisan ini juga konvergen. Akhirnya, disimpulkan deret harmonis alternating konvergen. Fakta numeriknya, deret ini mempunyai jumlah 0.6931. □

Untuk lebih jelasnya, kelakuan deret harmonik alternating ini dapat dilihat pada Gambar 8.1. Pada gambar ini terlihat bahwa barisan jumlah parsialnya juga membentuk barisan alternating. Untuk 70 suku pertama barisan (s_n) terlihat kecenderungan konvergen ke bilangan 0.6931 seperti disebutkan sebelumnya. Perhatikan bahwa kedua deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ dan deret $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$ walaupun mirip namun mempunyai sifat konvergen yang berbeda sekali, satunya divergen dan lainnya konvergen.

Salah satu kendala penerapan TKM deret adalah sulit mengidentifikasi keterbatasan barisan jumlah parsial $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$ khususnya dalam kasus suku-sukunya alternating yaitu bergonta-ganti positif dan negatif, yaitu apakah ada bilangan $M > 0$ sehingga $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_n < M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Kriteria lain yang dapat digunakan adalah kriteria Cauchy sebagai berikut.

Definisi 8.3. (Kriteria Cauchy deret) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dikatakan memenuhi kriteria Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $\mathbb{N}$ sehingga

$$\left| \sum_{k=m}^{n} x_k \right| < \varepsilon$$

berlaku untuk setiap $n > m \geq N$.

Selanjutnya kita akan membahas beberapa metode untuk mengetahui kekonvergenan suatu deret. Namun sebelumnya kita perhatikan sebuah contoh penggunaan kriteria konvergensi deret, khususnya kriteria keterbatasan barisan jumlah parsial deret.

Contoh 8.8. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

Bukti. Mengingat suku-suku $x_n := \frac{1}{n^2}$ selalu positif maka barisan (s_n) dengan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ adalah monoton naik. Cukup dibuktikan barisan (s_n) ini terbatas. Untuk ini cukup ditemukan adanya barisan bagian yang terbatas. Kita perhatikan suku-suku yang berbentuk $2^k - 1$, yaitu suku ke $1, 3, 7, \cdots$. Untuk $k_1 = 2^1 - 1 = 1$ maka $s_{k_1} = 1$. Untuk $k_2 = 2^2 - 1 = 3$ maka

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Untuk $k_3 = 2^3 - 1$ maka

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

Dengan melihat pola ini, bila proses ini diteruskan maka akan diperoleh bentuk

$$0 < s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$

Perhatikan bahwa suku-suku barisan (s_{k_j}) terdominasi dari atas oleh sebuah deret geometri dengan $a = 1$ dan rasio $r = \frac{1}{2}$. Jumlah sampai takhingga deret geometri ini adalah $s = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = 2$. Jadi barisan bagian (s_{k_n}) dengan $k_n := 2^n - 1$ adalah terbatas, yaitu $0 < s_{k_j} < 2$. Dengan TKM maka barisan jumlah parsial konvergen dan akhirnya disimpulkan deret tersebut konvergen. □

Deret-p

Secara umum deret yang berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

dengan $p > 0$ disebut deret-p. Kekonvergenannya bergantung pada nilai p. Baru saja kita buktikan untuk $p = 2$ deret konvergen dan sebelumnya deret harmonik yang berkaitan dengan $p = 1$ adalah divergen. Lebih rinci pembahasan kriteria kekonvergenan deret-p ini akan dibahas pada contoh berikut.

Contoh 8.9. Buktikan deret-p konvergen untuk $p > 1$ dan divergen untuk $0 < p \leq 1$.

Bukti. Untuk kasus $p > 1$ kita menggunakan ide yang mirip dengan contoh sebelumnya, yaitu $p = 2$. Untuk $k_1 = 2^1 - 1 = 1$ maka $s_{k_1} = 1$. Untuk $k_2 = 2^2 - 1 = 3$ dengan mengingat $2^p < 3^p$ maka diperoleh

$$s_{k_2} = \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Untuk $k_3 = 2^3 - 1$ maka

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}.$$

Uji banding dan uji banding limit

Teorema 8.8. *Misalkan* (x_n) *dan* (y_n) *barisan dan untuk suatu* $K \in \mathbb{N}$ *berlaku*

$$0 \leq x_n \leq y_n \text{ untuk semua } n \geq K$$

maka berlaku proposisi berikut:

1. *Jika* $\sum y_n$ *konvergen maka* $\sum x_n$ *juga konvergen.*
2. *Jika* $\sum x_n$ *divergen maka* $\sum y_n$ *juga divergen.*

BUKTI. Digunakan kriteria Cauchy untuk deret.

1. Oleh karena diketahui $\sum y_n$ konvergen maka berdasarkan kriteria Cauchy, setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga
$$\left|\sum_{k=m}^{n} y_k\right| < \varepsilon$$
untuk setiap $n > m \geq N$. Dengan mengambil $N_1 := \max\{K, N\}$ maka kriteria Cauchy juga dipenuhi oleh deret $\sum x_n$ yaitu
$$\left|\sum_{k=m}^{n} x_k\right| < \varepsilon$$
untuk setiap $n > m \geq N_1$. Ini menunjukkan deret $\sum x_n$ konvergen.
2. Pernyataan ini tidak lain adalah kontraposisi dari pernyataan (1) sehingga dengan sendirinya terbukti.

□

Pada penggunaannya, teorema ini membutuhkan sebuah deret yang sudah dipastikan konvergen atau divergen, kemudian dibandingkan dengan deret yang akan diselidiki kekonvergenannnya.

Contoh 8.10. Selidikilah apakah deret berikut ini konvergen?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k^3+k+1}$$

PENYELESAIAN. Untuk keperluan ini diambil deret-p dengan $p = 2$, yaitu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Diselidiki perbandingan berikut:

$$\frac{k+3}{k^3+k+1} = \frac{1+\frac{3}{k}}{k^2+1+\frac{1}{k}} = \frac{1+\frac{3}{k}}{k^2(1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3})} \leq \frac{4}{k^2}.$$

Ketaksamaan ini diperoleh dari fakta bahwa $1+\frac{3}{k} \leq 4$ dan $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3} > 1$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots$. Diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k^3+k+1} \leq 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Oleh karena deret didominasi dari atas oleh sebuah deret konvergen maka berdasarkan teorema sebelumnya disimpulkan deret ini konvergen. Fakta numeriknya, $s_{50,000} = s_{100,000} = 2.3714$. Nilai ini dapat diambil sebagai jumlah deret ini untuk 5 digit signifikan. □

Seperti uji banding biasa, uji banding limit membutuhkan deret lain yang sudah diketahui sifat kekonvergenannya.

Contoh 8.12. Buktikan deret berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

konvergen.

BUKTI. Di sini $x_n := \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$ untuk setiap $n \geq 4$. Jadi kita ambil $\sum y_n := \sum \frac{1}{n^2}$ sebagai deret pembanding. Limit perbandingan suku-suku tersebut diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) &= \lim \left(\frac{n^2}{n!}\right) = \lim \left(\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)}\right) \\ &= \lim \left(\frac{n}{(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)}\right) \leq \lim \left(\frac{1}{n-1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Oleh karena deret $\sum y_n$ konvergen maka dengan proposisi 2 teorema di atas disimpulkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergen. Faktan numeriknya, jumlah deret ini adalah 1.7183. □

Uji rasio dan uji akar

Uji rasio ini idenya hampir sama dengan uji banding dengan barisan geometri (r^n) digunakan sebagai pembanding.

Teorema 8.10. *Misalkan deret $\sum x_n$ suku-sukunya postif dan misalkan*

$$L = \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right).$$

Maka berlaku pernyataan berikut:

1. *Jika $L < 1$ maka deret konvergen.*
2. *Jika $L > 1$ maka deret divergen.*
3. *Jika $L = 1$ maka uji gagal, yaitu tidak dapat ditarik kesimpulan apapun.*

BUKTI. (1): Berdasarkan definisi limit barisan maka terdapat K bilangan asli cukup besar sehingga

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Secara rekursif diperoleh hubungan sebagai berikut

$$x_{n+1} < L\,x_n < L^2 x_{n-1} < L^3 x_{n-2} < \cdots < L^n x_1.$$

Dengan mengambil deret geometri $\sum L^n$ sebagai pembanding maka diperoleh hubungan $\sum x_{n+1} < x_1 \sum L^n$. Mengingat $L < 1$ maka deret geometri ini konvergen, sehingga deret $\sum x_{n+1}$ konvergen. Dengan sifat ekor deret maka disimpulkan deret $\sum x_n$ konvergen. Bukti (2): Dengan argumen sejalan maka diperoleh $\frac{x_{n+1}}{x_n} > L > 1$ untuk setiap $n \geq K$ sehingga diperoleh perbandingan $\sum x_{n+1} > x_1 \sum L^n$. Oleh karena deret geometri ini divergen maka deret $\sum x_{n+1}$ juga divergen. Bukti (3): Untuk $L = 1$ kita tidak dapat membuat perbandingan dengan deret geometri. Pada kasus ini kita tidak dapat membandingkan dua suku berurutan x_n dan x_{n+1}. Walaupun limitnya bernilai 1 namun kedua suku tersebut dapat saja saling mendominasi (kadang lebih besar, kadang lebih kecil) sehingga tidak dapat disimpulkan. □

Penyelesaian. Lakukan uji rasio sebagai berikut:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{2(n+1)-3}}{\frac{1}{2n-3}} = \frac{2n-3}{2n-1}.$$

Jadi diperoleh $L = \lim \left(\frac{2n-3}{2n-1}\right) = \lim \left(\frac{2-\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right) = 1$. Uji rasio ternyata gagal karena tidak ada kesimpulan tentang kekonvergenan deret ini. Di lain pihak, jika kita gunakan uji banding dengan menggunakan deret-p, $p = 1$ sebagai pembanding maka diperoleh:

$$\sum \frac{1}{2n-3} > \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} \to \infty.$$

Ini menyimpulkan bahwa deret tersebut divergen. □

Berikut ini diberikan uji yang mirip dengan uji rasio yaitu uji akar.

Teorema 8.11. *Misalkan deret $\sum x_n$ suku-sukunya taknegatif dan misalkan*

$$L = \lim \left(\sqrt[n]{x_n} \right).$$

Maka berlaku pernyataan berikut:

1. *Jika $L < 1$ maka deret konvergen.*
2. *Jika $L > 1$ maka deret divergen.*
3. *Jika $L = 1$ maka uji gagal, yaitu tidak dapat ditarik kesimpulan apapun*

Bukti. Mirip dengan pembuktian uji rasio, untuk $L < 1$ maka ada $K \in \mathbb{N}$ sehingga

$$(x_n)^{1/n} < L < 1 \to x_n < L^n \text{ berlaku untuk setiap } n \geq K.$$

Dengan menggunakan deret geometri yang konvergen sebagai pembanding, yaitu $\sum x_n \leq \sum L^n$ maka disimpulkan deret $\sum x_n$ konvergen. Kasus lainnya mengikuti agumen seperti pada pembuktian uji rasio. □

Contoh 8.15. Ujilah kekonvergenan deret berikut dengan menggunakan uji akar.

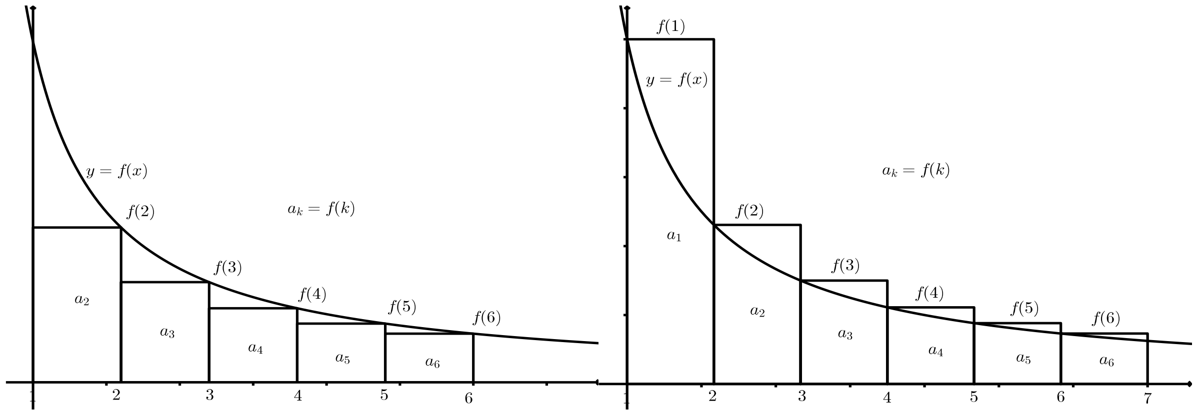
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Penyelesaian. Di sini kita mempunyai $x_n = \frac{1}{(\ln n)^{1/n}}$. Langsung diambil limit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L &= \lim (x_n)^{1/n} \\ &= \lim \left(\frac{1}{(\ln n)^n}\right)^{1/n} \\ &= \lim \left(\frac{1}{\ln n}\right) = 0. \end{aligned}$$

Oleh karena $L < 1$ maka disimpulkan deret ini konvergen. Fakta numeriknya, jumlah deret ini adalah 3.2426. □

Misalkan interval $[1, N]$ dipartisi menjadi $[1, 2], [2, 3], \cdots, [N-1, N]$. Jelas, nilai integral ini terletak di antara aproksimasi bawah dan aproksimasi atas. Kedua aproksimasi ini disajikan pada Gambar 8.3. Aproksimasi bawah diberikan pada panel kiri dan aproksimasi atas pada panel kanan.



Gambar 8.3: Ilustrasi uji integral

Amati bahwa masing-masing persegi panjang mempunyai luas $a_1, a_2, \cdots, a_N$ yaitu sama dengan tingginya. Hal ini terjadi karena masing-masing alas mempunyai panjang 1. Perhatikan pada Gambar 8.3 (panel kiri), jumlah bawah tersusun atas $N-1$ persegipanjang dengan luas $a_2, a_3, \cdot, a_N$ dengan $a_n = f(n)$. Sedangkan pada panel kanan, jumlah atas tersusun atas N persegipanjang dengan masing-masing luas $a_1, a_2, \cdots, a_N$ dengan $a_n = f(n)$. Melalui Gambar ini dapat dipahami berlakunya ketaksamaan berikut.

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + \cdots + a_N &< \int_1^N f(x)\,dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N &< a_1 + \int_1^N f(x)\,dx < a_1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ S_N &< a_1 + \int_1^N f(x)\,dx < a_1 + S_N. \end{aligned}$$

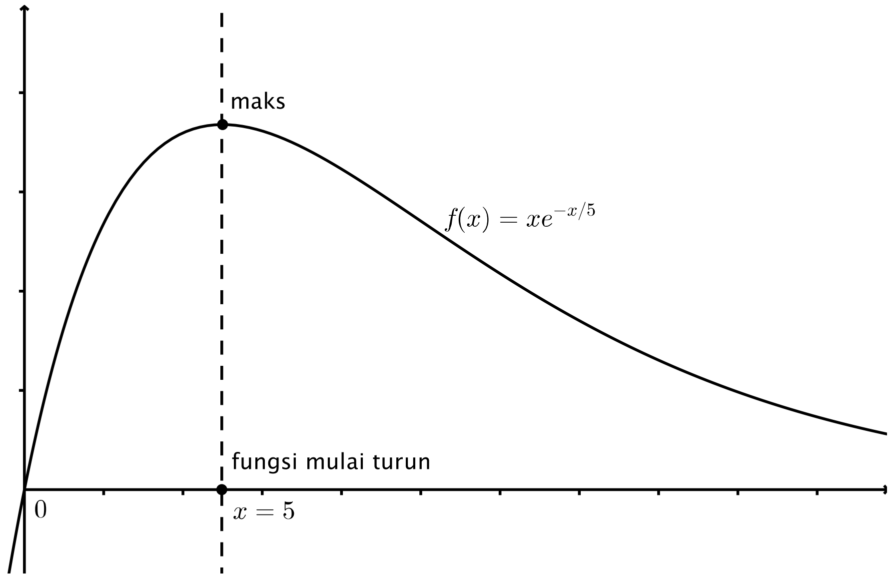
Dengan mengambil limit untuk $N \to \infty$ pada ketiga ruas ketaksamaan ini maka diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} S_N &< a_1 + \lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)\,dx < a_1 + \lim_{N\to\infty} S_N \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n &< a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx < a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Bila deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen maka gunakan ketaksamaan ruas kanan untuk menghasilkan $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan menyimpulkan integral juga konvergen. Kekonvergenan integral mengakibatkan kekonvergenan deret diperoleh dari ketaksamaan ruas kiri. Bila integral divergen maka ketaksamaan ruas kanan menyimpulkan deret juga divergen. Bila deret divergen maka ketaksamaan ruas kiri menyimpulkan integral juga divergen. □

Contoh 8.17. Uji kekonvergenan deret-p dengan menggunakan uji integral.

Penyelesaian. Pada deret-p kita mempunyai $a_k = \frac{1}{k^p}$. Definisikan $f(x) := \frac{1}{x^p}$ maka dipenuhi $f(k) = \frac{1}{k^p} = a_k$, fungsi f kontinu dan monoton turun untuk $x \geq 1$ dan $p > 1$. Lebih jelasnya, keadaan ini dapat dilihat pada Gambar 8.4.



Gambar 8.5: Grafik fungsi dengan $a_k = f(k)$

pada Gambar 8.5. Diselesaikan integral takwajar berikut

$$\begin{aligned}
\int_5^\infty xe^{-x/5}dx &= -5 \int xd(e^{-x/5}) \\
&= -5 \lim_{b\to\infty} \left[xe^{-x/5} - \int e^{-x/5}dx\right]_5^b \\
&= -5 \lim_{b\to\infty} \left[xe^{-x/5} + 5e\right]_5^b \\
&= -5 \lim_{b\to\infty} \left[\left(be^{-b/5} + 5e^{-b/5}\right) - \left(5e^{-1} + 5e^{-1}\right)\right] \\
&= -5 \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b+5}{e^{b/5}} - 10e^{-1}\right] \\
&= -5 \lim_{b\to\infty} \left[\left(be^{-b/5} + 5e^{-b/5}\right) - \left(5e^{-1} + 5e^{-1}\right)\right] \\
&= -5 \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b+5}{e^{b/5}} - 10e^{-1}\right] \\
&= -5 \left[0 - 10e^{-1}\right] = 50e^{-1}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil ini maka disimpulkan deret konvergen. Faktanya deret ini mempunyai jumlah 24.9168. □

Latihan 8.8. Ujilah kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^\infty (1 + \frac{1}{n})^n$.

Latihan 8.9. Ujilah kekonvergenan deret$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

Sesungguhnya batas integral tidak harus dimulai dari 1, tapi cukup dimulai dari saat fungsi mulai turun monoton. Perlu hati-hati bahwa nilai integral takwajar hasil uji tidak terkait dengan nilai atau jumlah deret. Dalam kasus di atas nilai integral adalah $50e^{-1} = 18.3940$ berbeda dari nilai deret yaitu 24.9168.

Masih banyak bentuk uji lainnya yang tidak sempat dibahas pada buku ini seperti uji Kummer, uji rasio Raabe, uji rasio Gauss, uji kondensasi Cauchy dan banyak lagi lainnya. Lebih detail uji konvergensi deret dapat dibaca pada buku Thomson, dkk (2001). Sebagai materi akhir bab ini, berikut diberikan deret alternating.

Kita amati barisan bagian (s_{2n}) dari barisan jumlah parsial (s_n) seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
s_2 &= a_1 - a_2 \\
s_4 &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \\
s_6 &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) \\
&\vdots \\
s_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).
\end{aligned}$$

Mengingat barisan (a_n) turun maka suku-suku $(a_1-a_2), (a_3-a_4), (a_4-a_5), \cdots, (a_{2n-1}-a_{2n})$ semua positif sehingga barisan (s_{2n}) naik. Lebih lanjut kita dapatkan bahwa $s_2 = a_1 - a_2 < a_1, s_4 = a_1 - (a_2 - a_3) - a_4 < a_1$ dan seterusnya $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$ sehingga disimpulkan barisan (s_{2n}) terbatas ke atas oleh a_1. Dengan menggunakan teorema konvergensi monoton maka barisan (s_{2n}) konvergen. Akibatnya, dengan teorema kekonvergenan barisan bagian (TKBB) maka barisan induknya (s_n) juga konvergen. Berdasarkan definisi kekonvergenan deret maka disimpulkan deret alternating tersebut konvergen. □

Latihan 8.10. Buktikan teorema di atas untuk deret alternating yang berbentuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots .$$

Keunikan lain deret alternating adalah kita dapat mengetahui estimasi kesalahan pada aproksimasi melalui jumlah parsialnya seperti diungkapkan pada teorema berikut.

Teorema 8.14. *Bila deret alternating konvergen maka berlaku*

$$|s - s_N| < a_{N+1}$$

dengan s jumlah deret dan s_N jumlah parsial ke N.

Bukti. Seperti sebelumnya cukup perhatikan deret alternating $s = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ dan $s_N = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}a_k$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
s - s_N &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k - \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}a_k = \sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \\
&= (-1)^{N+2}a_{N+1} + (-1)^{N+3}a_{N+2} + (-1)^{N+4}a_{N+3} + \cdots \\
&= (-1)^N \left[a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - a_{N+4} + \cdots\right] \\
&= (-1)^N \left[a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) - \cdots\right]
\end{aligned}$$

Oleh karena setiap suku di dalam kurung selalu bernilai positif, yaitu $a_{N+k} - a_{N+k+1} > 0$ untuk setiap $k = 2, 3, \cdots$ maka diperoleh

$$a_{N+1} - [(a_{N+2} - a_{N+3}) + (a_{N+4} - a_{N+5}) + \cdots] \le a_{N+1}$$

Perhatikan pula suku-suku berikut:

$$a_{N+1} - [(a_{N+2} - a_{N+3}) + (a_{N+4} - a_{N+5}) + \cdots] = \underbrace{(a_{N+1} - a_{N+2})}_{>0} + \underbrace{(a_{N+3} - a_{N+4})}_{>0} + \cdots > 0.$$

Penyelesaian. Diketahui $a_k = \frac{1}{k^3}$. Untuk (1): jelas suku-suku ini semakin menurun dan limitnya nol. Disimpulkan deret alternating ini konvergen. Untuk (2): kita menggunakan $s_5 = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3}$ untuk mengaproksimasi deret $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$. Berdasarkan teorema sebelumnya diperoleh estimasi kesalahan

$$|s - s_5| < a_6 = \frac{1}{6^3} = 0.00463.$$

Faktanya numeriknya, diperoleh $s_5 = 0.904412037$ dan $s = 0.901542677$ dan $|s - s_5| = 0.00287 < 0.0046$. Hasil ini cocok dengan teori bahwa kesalahan nyata memang semestinya kurang dari estimasi kesalahan. Untuk (3): kita perlu menentukan indeks N sehingga $a_{N+1} < 0.0012$, yaitu

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &= \frac{1}{(N+1)^3} < 0.0012 \\
(N+1)^3 &> \frac{1}{0.0012} \\
N &> -1 + \sqrt[3]{\frac{1}{0.0012}} \\
&= 8.41.
\end{aligned}$$

Jadi, cukup diambil $N = 9$. Dengan menggunakan 9 suku pertama sebagai aproksimasi deret maka terjamin kesalahannya tidak akan melebihi 0.0012. Fakta numeriknya, $s_9 = 0.902116476$ sehingga diperoleh $|s - s_9| = 0.00054$ kurang dari toleransi 0.0012. □

Latihan 8.11. Selidikilah kekonvergenan deret alternating berikut ini. Kemudian tentukan estimasi kesalahan jika deret ini diaproksimasi oleh jumlah parsial ke-20.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Selanjutnya, tentukan banyak suku minimal yang dibutuhkan untuk mengaproksimasi deret ini dengan kesalahan tidak melebihi 0.0032. Verifikasilah hasil Anda secara numerik.

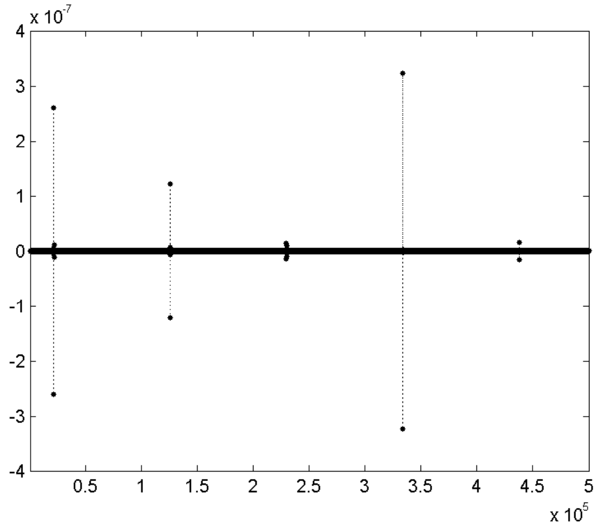
Bab ini kita tutup dengan sebuah fenomena unik dan menarik pada deret bilangan real. Fenomena ini diharapkan dapat menyadarkan kita bahwa penggunaan komputer khususnya untuk komputasi numerik dan visualisasi grafis akan sangat membantu dalam memahami masalah-masalah matematika yang rumit dan abstrak.

Interpretasi Numeris dan Grafis Deret Unik

Diberikan deret unik sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}.$$

Sejauh ini deret unik ini belum dapat diketahui apakah ia konvergen atau divergen (Thomas, 2005). Sebelumnya deret ini sudah muncul pada seri diskusi *Chapter 72 of Mazes for the Mind by Clifford A. Pickover, St. Martin's Press, Inc., New York, 1992.*



Gambar 8.9: Fluktuasi barisan selisih

bukanlah aproksimasi yang baik karena masih jauh dari nol. Untuk $n = 355$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{355}{\pi} - \left\lfloor \frac{355}{\pi} \right\rfloor &= 113.000009595246 - 113 \\ &= 0.000009595246. \end{aligned}$$

Ini sebuah aproksimasi yang cukup akurat. Untuk $n = 356$ diperoleh $\frac{356}{\pi} - \left\lfloor \frac{356}{\pi} \right\rfloor = 0.318$, bukan aproksimasi yang baik. Ternyata $n = 354$ sangat berbeda hasilnya dengan $n = 355$ walaupun keduanya berdekatan.

Dengan bantuan MATLAB, aproksimasi penyelesaian persamaan ini dengan toleransi 0.0001 adalah

$$355, 710, 1065, 1420, 1775, 2130, 2485, 2840, 3195.$$

Ternyata fenomena ini terjadi secara periodik dengan periode 355. Pertanyaan lebih lanjut, apakah nilai lompatan (*jump*) barisan jumlah parsial (s_n) ini tetap, menaik atau menurun. Bila nilai lompatan ini menurun maka dapat diduga bahwa deret konvergen, yaitu didasarkan pada kriteria Cauchy. Untuk itu kita lakukan eksperimen numerik pada nilai-nilai n sebelumnya. Tabel berikut memberikan jumlah parsial yang dimaksud. Bila diamati lebih teliti, jumlah parsial deret sudah menunjukkan keadaan *steady* di angka 30.313.

Tabel 8.1: Jumlah parsial deret pada titik-titik lompatan

n	355	710	1065	1420	1775	2130	2485	2840	3195
s_n	29.4056	30.1747	30.2760	30.3001	30.3079	30.3111	30.3126	30.3133	30.3138

Bila dilanjutkan untuk n yang sangat besar, yaitu $n = 10^k$ dengan $k = 4, 5, 6, 7$ maka diperoleh jumlah parsialnya adalah sama untuk 4 tempat desimal, yaitu 30.3145. Hasil numerik ini sangat kuat mengindikasikan bahwa deret ini konvergen ke 30.3145.

Analisis selanjutnya kita gunakan sifat Cauchy dan sifat Lipschitz barisan. Pertama kita hitung jumlah parsial s_n dengan $n = 1, 2, \cdots, 10^6$. Kemudian kita hitung selisih antara dua suku berdekatan, yaitu

$$d_n := |s_n - s_{n-1}|, n = 1, 2, \cdots, 10^6.$$

Diberikan $\varepsilon = 0.0001$ maka ditemukan $K = 6390$ sehingga $|s_n - s_{n-1}| < \varepsilon$ untuk setiap $K \leq n \leq 10^6$. Ini mengindikasikan barisan jumlah parsial (s_n) adalah barisan Cauchy. Selanjutnya kita amati lebih detail barisan (d_n). Berdasarkan fluktuasi barisan ini tidak

Barisan kontraksi: barisan yang magnitudo selisih dua suku berurutannya selalu kurang dari magnitudo selisih dua suku berurutan sebelumnya.

Limit superior: infimum dari semua supremum ekor barisan.

Limit inferior: supremum dari semua infimum ekor barisan.

Jumlah parsial: jumlah sebanyak berhingga suku-suku barisan.

Deret: jumlahan suku-suku barisan atau limit jumlah parsial barisan.

Deret konvergen: deret yang mempunyai nilai bilangan real (berhingga), kebalikannya deret divergen.

Deret teleskoping: deret yang suku-suku antaranya saling menghapus sehingga tersisa suku awal dan suku akhir.

Deret geometri: deret yang rasio suku-sukunya tetap.

Kriteria kekonvergenan deret: syarat cukup agar sebuah deret konvergen.

Deret harmonik: deret yang berbentuk $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$.

Deret harmonik alternating: deret yang berbentuk $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$.

Kriteria Cauchy: salah satu kriteria kekonvergenan deret.

Deret mutlak: deret yang dibentuk dengan cara membubuhkan nilai mutlak pada setiap suku-sukunya.

Konvergen mutlak: istilah kekonvergenan deret jika deret mutlaknya konvergen.

Konvergen bersyarat: istilah untuk suatu deret divergen tetapi deret mutlaknya konvergen.

Uji konvergensi deret: metode untuk mengecek apakah sebuah deret konvergen atau divergen.

Deret alternating: deret yang suku-sukunya berganti tanda dari positif ke negatif, dan sebaliknya.

Soal Latihan Bagian III Kerjakan soal-soal latihan berikut ini untuk memperkuat pemahaman materi barisan dan deret bilangan real.

1. Pada pendefinisian barisan sebagai fungsi dengan domain himpunan bilangan asli, ilustrasikan barisan dengan menggunakan diagram Venn.

2. Apa perbedaan barisan bilangan real dengan himpunan bilangan real?

3. Diberikan sebuah barisan bilangan real (x_n) dan sebuah bilangan real L. Apa perbedaan dua istilah berikut? "semakin lama x_n semakin mendekati L" dan "x_n dapat dibuat sedekat mungkin dengan L".

4. Apakah setiap barisan pasti mempunyai limit? Apa yang dimaksud ketunggalan limit barisan?

5. Apa perbedaan barisan terbatas dan himpunan terbatas?

20. Bila barisan (b_n) terbatas dan $\lim(a_n) = 0$, tunjukkan $\lim(a_n b_n) = 0$.

21. Bila didefinisikan $y_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, buktikan (y_n) dan $(\sqrt{n} y_n)$ konvergen dan hitunglah limit masing-masingnya.

22. Bila $a > 0$ dan $b > 0$, buktikan
$$\lim \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \right) = \max\{a, b\}.$$

23. Bila $a > 0$, $b > 0$, tunjukkan
$$\lim \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n \right) = \frac{a+b}{2}.$$

24. Diberikan barisan (x_n) dengan suku-sukunya didefinisikan sebagai berikut
$$x_n := \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}.$$
    (a) Hitunglah $\lim(x_n)$.
    (b) Buktikan kebenaran jawaban Anda pada (a) dengan menggunakan definisi limit barisan.

25. Hitunglah limit barisan berikut
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

26. Buktikan jika (x_n) monoton turun maka ia konvergen dan $\lim(x_n) = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.

27. Gunakan TKD untuk menghitung nilai limit berikut
    (a) $\left(n^{1/n^2}\right)$.
    (b) $(n!)^{1/n^2}$.

28. Diberikan barisan (z_n) yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:
$$\begin{cases} z_1 := 1, \\ z_{n+1} := \frac{1}{4}(2z_n + 3) & \text{untuk } n \geq 1. \end{cases}$$
Selidikilah kekonvergenan barisan ini. Jika ia konvergen, hitunglah limitnya.

29. Misalkan $a > 0$ dan $z_1 > 0$. Didefinisikan $z_{n+1} := (a + z_n)^{1/2}$. Selidikilah kekonvergenan barisan ini. Jika ia konvergen, hitunglah limitnya.

30. Buktikan dengan menggunakan TKM, jika $0 < b < 1$ maka $\lim(b^n) = 0$.

31. Dengan menggunakan TKM untuk buktikan $\lim(c^{1/n}) = 1$ dimana $c > 0$.

32. Misalkan barisan (x_n) terbatas dan didefinisikan barisan (y_n) dengan $y_n := \frac{x_n}{n}$. Buktikan barisan (y_n) konvergen.

42. Hitunglah jumlah deret berikut (bila ia konvergen).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

43. Buktikan bahwa deret-p alternating berikut

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$$

konvergen untuk setiap $p > 0$.

44. Ujilah kekonvergenan deret berikut

 (a) $\sum_{k=1}^{\infty} 3e^{-2k}$.
 (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{1+k^2}$.
 (c) $\sum \frac{1}{k(\ln k)^2}$.
 (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$.

45. Tentukan semua nilai $p > 0$ agar deret berikut konvergen

 (a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k^2-1)^p}$.
 (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^p}$.
 (c) $\frac{1}{k \ln k(\ln(\ln k))^p}$.

46. Buktikan deret berikut konvergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{(k+3)!}.$$

47. Diberikan deret sebagai berikut

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Gunakan uji rasio dan uji akar untuk menyelidiki kekonvergenan deret ini. Bagaimana kesimpulan hasil uji yang diperoleh dari kedua metode tersebut?

48. Buktikan deret berikut konvergen

$$1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}.$$

49. Diberikan (s_n) barisan jumlah parsial deret sebagai berikut

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Buktikan (s_n) konvergen. Faktanya berdasarkan komputasi numerik, nilai limitnya adalah 0.57722.

Bagian IV

LIMIT DAN KEKONTINUAN

BAB 9

Limit Fungsi dan Fungsi Kontinu

Everything should made as simple as possible, but no simpler.

Albert EINSTEIN

Menurut Bartle dan Sherbet (1994), “analisis matematika” secara umum dipahami sebagai tubuhnya matematika yang dibangun dari berbagai konsep limit. Pada bab sebelumnya kita telah mempelajari limit barisan dan kekonvergenan barisan bilangan real. Sebagaimana diketahui bahwa barisan merupakan bentuk khusus fungsi, yaitu fungsi bernilai real dengan domain bilangan asli. Pada bab ini kita memperluas konsep limit kepada bentuk fungsi bernilai real secara umum.

Konsep limit dan kekontinuan fungsi merupakan dua konsep terpadu di dalam analisis seperti halnya dengan diferensial dan integral. Umumnya konsep limit dibahas terlebih dulu sampai tuntas, baru kemudian dibahas kekontinuan fungsi. Pertimbangannya adalah banyak konsep dalam kekontinuan fungsi dikembangkan dari konsep limit. Pada bab ini kedua topik ini dibahas secara bersamaan sehingga lebih memperjelas hubungan, kemiripan dan perbedaan teori-teori yang dikembangkan pada keduanya.

9.1 Pengertian Limit Fungsi dan Fungsi Kontinu

Biasanya, notasi

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

dipahami secara intuitif dengan berbagai pernyataan berikut:

1. Jika x mendekati c maka $f(x)$ mendekati L, semakin dekat x kepada c semakin dekat pula $f(x)$ kepada L.

2. Nilai-nilai $f(x)$ adalah dekat dengan L untuk x dekat dengan c.

Pada pernyataan pertama, dekatnya $f(x)$ terhadap L karena dekatnya x kepada c. Pada pernyataan ini, jika ada dua bilangan x_1 dan x_2 di mana x_1 lebih dekat terhadap c daripada x_2 maka $f(x_1)$ lebih dekat terhadap L daripada $f(x_2)$. Konsekuensinya, jika $x = c$ maka $f(x) = L$. Keadaan ini banyak dipahami sebagai pengertian limit khususnya bagi mereka yang belum belajar analisis. Padahal pengertian limit secara formal tidak demikian.

Sesungguhnya pernyataan kedua lebih sesuai untuk definisi limit. Pada pernyataan ini, ada dua kriteria untuk ukuran dekat yang berbeda. Kriteria dekatnya $f(x)$ terhadap L

PENYELESAIAN. Perhatikan bahwa setiap $x \in [0,1]$ dan setiap $\delta > 0$ maka berlaku $(x-\delta, x+\delta) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Jadi setiap $x \in [0,1]$ merupakan titik limit A. Perhatikan $x = -1 \in A$. Kita dapat memilih $\delta_1 > 0$ (misalnya $\delta_1 = \frac{1}{2}$) sehingga $(-1-\delta_1, -1+\delta_1) \cap A = \{-1\}$. Akibatnya, $(-1-\delta_1, -1+\delta_1) \cap A \setminus \{-1\} = \emptyset$. Disimpulkan $x = -1$ bukan titik limit A. Argumen yang sama diterapkan untuk $x = 2$. Diperoleh himpunan titik limit A adalah $[0,1]$. □

Perhatikan pada contoh ini, $1 \notin A$ tetapi 1 titik limit A. Sebaliknya, $2 \in A$ tetapi 2 bukan titik limit A. Bilangan di dalam interval $[0,1)$ kesemuanya anggota A dan sekaligus titik limit A.

Berikut diberikan beberapa fakta sederhana tentang titik limit:

- Himpunan A yang banyak anggotanya berhingga tidak mempunyai titik limit. Kita dapat mengambil $\delta > 0$ lebih kecil dari jarak antara ketiga bilangan yang berdekatan. Untuk menunjukkan $c \in A$ bukan titik limit, misalkan ketiga bilangan yang berdekatan tersebut adalah x_1, c dan x_2 dengan $x_1 < c < x_2$. Ambil $\delta := \frac{1}{2}\min\{|x_1 - c|, |c - x_2|\}$. Maka pasti berlaku $(c-\delta, c+\delta) \cap A \setminus \{c\} = \emptyset$.
- Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ tidak mempunyai titik limit.
- Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ mempunyai titik limit semua bilangan real. Hal ini karena adanya sifat kepadatan bilangan rasional di dalam $\mathbb{R}$.
- Himpunan $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ hanya mempunyai titik limit 0. Dalam kasus ini tidak satupun anggota A menjadi titik limitnya.

Selanjutnya definisi limit fungsi diberikan sebagai berikut.

Definisi 9.2. [LIMIT FUNGSI] Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, c titik limit A. Bilangan L dikatakan limit fungsi f di c, ditulis

$$L = \lim_{x \to c} f(x) \tag{9.1.2}$$

jika hanya jika setiap diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku pernyataan berikut.

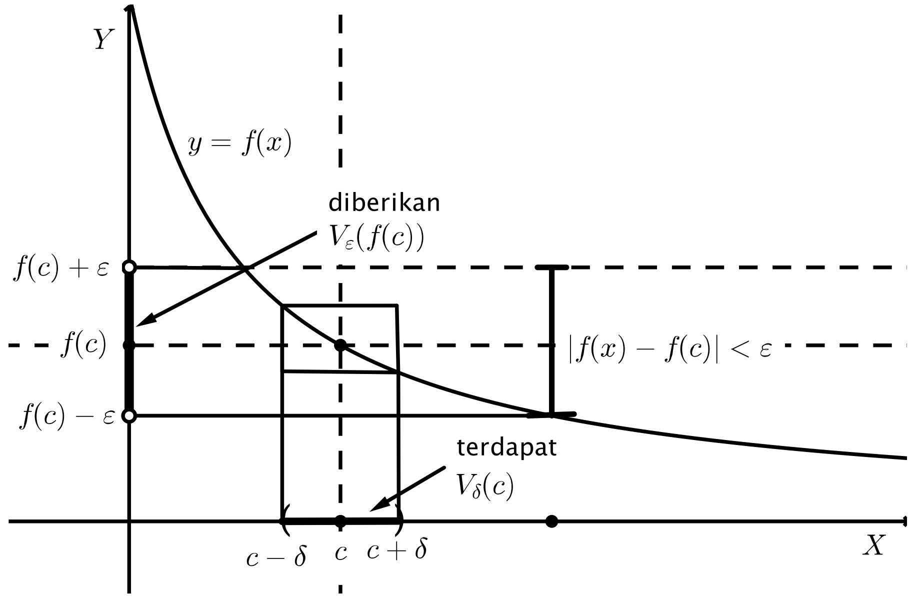
$$0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{9.1.3}$$

Pada definisi ini, nilai δ biasanya bergantung pada nilai $\varepsilon > 0$ yang diberikan sehingga kadang-kadang ditulis sebagai $\delta = \delta(\varepsilon)$ untuk menunjukkan ketergantungan δ pada ε yang diberikan. Bila limit L ini ada maka fungsi f dikatakan juga **konvergen** ke L di c. Secara praktis, dapat dikatakan "$f(x)$ mendekati L" bilamana "x mendekati c". Ukuran dekat $f(x)$ terhadap L dicirikan oleh ε, sedangkan kedekatan x terhadap c dicirikan oleh δ. Pada ekspresi (9.1.4) kita dapat membuat $f(x)$ sedekat mungkin dengan L dengan memilih x yang dekat dengan c. Ilustrasi definisi limit fungsi diberikan pada Gambar 9.2. Pernyataan $0 < |x - c| < \delta$ pada (9.1.4) menunjukkan bahwa untuk berlakunya $|f(x) - L| < \varepsilon$ tidak diharuskan memperhitungkan $x = c$. Perhatikan pada gambar tersebut $x = c$ dibolongi. Ini berarti, pada definisi limit, nilai $f(c)$ tidak harus ada. Perlu diingat bahwa titik limit himpunan A tidak harus di dalam A. Oleh karena itulah, ilustrasi grafik definisi limit menggunakan dot "$\circ$" di titik $x = c$.

Contoh 9.2. Prosedur menghitung limit berikut sering dilakukan pada pelajaran kalkulus atau sewaktu di SMA dulu.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 2 + 2 = 4.$$

Ada 2 hal kritis yang jarang dipedulikan oleh mahasiswa, yaitu:



Gambar 9.3: Ilustrasi definisi fungsi kontinu

1. f kontinu di c
2. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Bukti. Untuk mudahnya kita bentuk dua himpunan berikut.

$$E_1 := \{x \in A : 0 < |x - c| < \delta\}, \ E_2 := \{x \in A : |x - c| < \delta\}.$$

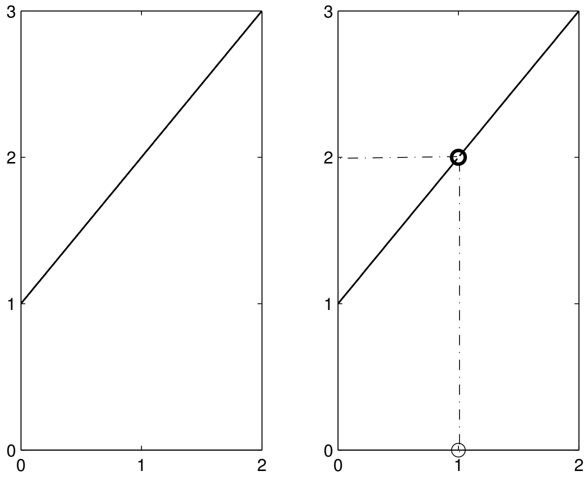
Dengan konstruksi ini maka berlaku $E_1 \subset E_2$. Jelasnya, mereka hanya berbeda satu titik yaitu $c \in E_2$ tetapi $c \notin E_1$. Bukti ($1 \to 2$): Diketahui f kontinu di c berarti $x \in E_2 \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Misalkan $x \in E_1$ maka $x \in E_2$. Jadi, kondisi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ berlaku juga untuk $x \in E_1$. Ini berarti $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Bukti ($2 \to 1$): Diketahui $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ yaitu $x \in E_1 \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Oleh karena $E_1 \subset E_2$ maka untuk $x \in E_2$ terdapat dua kemungkinan, yaitu $x \in E_1$ atau $x = c$. Untuk $x \in E_1$ maka berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Untuk $x = c$ maka diperoleh $|f(x) - f(c)| = |f(c) - f(c)| = 0 < \varepsilon$. Oleh karena setiap $x \in E_1$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ maka terbukti f kontinu di c. $\square$

Pada beberapa buku, definisi fungsi kontinu diadopsi teorema ini. Berpijak dari teorema ini kita memperoleh syarat cukup dan perlu sebuah fungsi kontinu di $x = c$, yaitu

- $f(c)$ ada
- $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
- nilai keduanya harus sama.

Kewujudan $\delta > 0$ pada (9.1.4) dan (9.1.3) perlu ditunjukkan dalam proses pembuktian limit dan fungsi kontinu. Berikut berbagai kasus cara penentuan bilangan $\delta > 0$ ini.

Contoh 9.3. Misalkan f fungsi konstan pada $\mathbb{R}$, katakan $f(x) = b$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Buktikan untuk sebarang $c \in \mathbb{R}$, berlaku $\lim_{x \to c} b = b$. Kemudian simpulkan bahwa f kontinu di c.



Gambar 9.4: Perluasan fungsi $\widetilde{f}$ (kiri) dan fungsi asli f (kanan)

Perhatikan pada contoh ini pemilihan δ bergantung pada ε dan titik c yang diambil. Misal diberikan $\varepsilon = 0.12$. Untuk $c = 0.5$, diperoleh $\frac{\varepsilon}{2|c|+1} = 0.06$. Untuk $c = 0.2$, diperoleh $\frac{\varepsilon}{2|c|+1} = 0.09$. Jadi, untuk $c = 0.5$ dapat diambil $\delta = 0.06$ atau lebih kecil lagi. Sedangkan untuk $c = 0.2$ kita dapat memilih $\delta = 0.09$ atau lebih kecil lagi, misalnya $\delta = 0.05$. Pada pembahasan lebih lanjut, kebergantungan δ pada $\varepsilon > 0$ dan titik c yang diberikan melahirkan konsep kontinu seragam.

Ada kalanya sebuah fungsi tidak kontinu di suatu titik c karena ia tidak terdefinisi di c, yaitu $f(c)$ tidak ada. Namun demikian, fungsi tersebut masih dapat diperluas menjadi fungsi kontinu (*continuous extension*) asalkan limitnya di c ada. Diperluas di sini berarti domain fungsi baru diperoleh dengan mengembangkan domain fungsi semula. Pada domain semula, definisi kedua fungsi adalah sama (*coincide*).

Contoh 9.6. Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 0$. Jelas fungsi ini tidak kontinu di $x = 1$ sebab $f(1)$ tidak ada atau tidak didefinisikan. Namun, berlaku limit berikut.

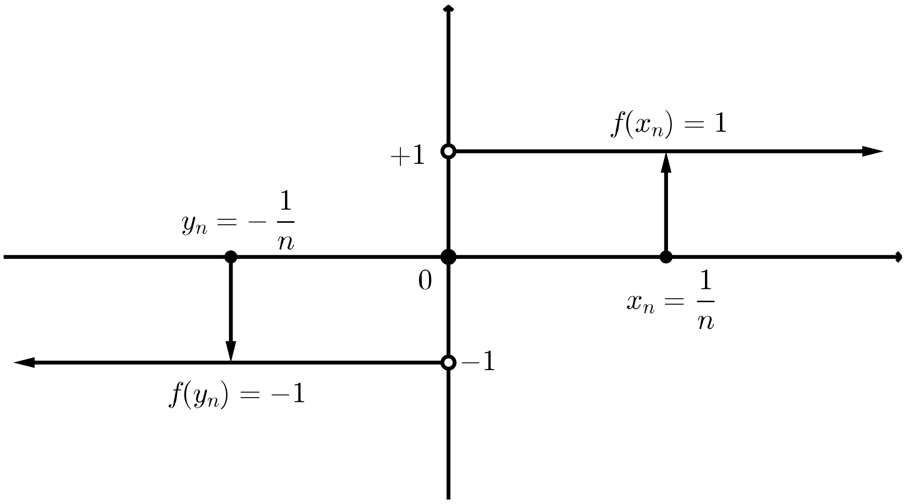
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Jadi fungsi ini dapat diperluas menjadi fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{untuk } x \neq 1 \\ 2 & \text{untuk } x = 1. \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ dibaca "f -tilde" merupakan perluasan kontinu fungsi f. Perhatikan kedua fungsi ini hanya berbeda satu titik pada domain, yaitu $1 \in \text{Dom}(\widetilde{f})$ tetapi $1 \notin \text{Dom}(f)$. Keadaan kedua fungsi ini dapat dilihat pada Gambar 9.4. Pada gambar ini, fungsi f sesungguhnya sebuah garis lurus (fungsi linear) dengan satu titik, yaitu $x = 1$ dikeluarkan. Sedangkan pada perluasannya, titik $x = 1$ tadi dimasukkan sehingga fungsi perluasan $\widetilde{f}$ kontinu di $x = 1$. Faktanya, $\widetilde{f}$ adalah fungsi linear dan dapat ditulis sebagai $\widetilde{f}(x) = x + 1$.

Latihan 9.1. Buktikan fungsi $f(x) := x^2+x+1, x \in \mathbb{R}$ kontinu di setiap $c \in \mathbb{R}$. Selanjutnya, bila diberikan $\varepsilon = 0.015$, tentukan $\delta > 0$ agar $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $c - \delta < x < c + \delta$.



Gambar 9.5: Grafik fungsi signum

Bukti. Di sini kita mempunyai $f(x) = \frac{1}{x}$. Ambil barisan (x_n) dengan $x_n := \frac{1}{n}$. Jelas barisan ini konvergen ke 0, $x_n \neq 0$. Sekarang perhatikan barisan $(f(x_n)) = \left(\frac{1}{1/n}\right) = (n) = (1, 2, 3, \cdots)$ tidak konvergen. Berdasarkan kriteria kedua maka terbukti limitnya tidak ada. □

Contoh 9.8. Diberikan fungsi signum yang didefinisikan sebagai berikut

$$\text{sgn}(x) : \;= \begin{cases} +1 & \text{untuk } x > 0, \\ 0 & \text{untuk } x = 0, \\ -1 & \text{untuk } x < 0. \end{cases}$$

Buktikan $\lim_{x\to 0} \text{sgn}(x)$ tidak ada.

Bukti. Ambil dua barisan (x_n) dan (y_n) dengan $x_n := \frac{1}{n}$ dan $y_n := -\frac{1}{n}$. Jelas kedua barisan ini konvergen ke 0 dan setiap sukunya tidak ada yang sama dengan 0. Perhatikan bahwa barisan $(\text{sgn}(x_n)) = \left(\text{sgn}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (1) = (1, 1, \cdots)$ konvergen ke 1, tetapi $(\text{sgn}(y_n)) = \left(\text{sgn}(-\frac{1}{n})\right) = (-1) = (-1, -1, \cdots)$ konvergen ke -1. Berdasarkan kriteria ketiga maka terbukti limitnya tidak ada. □

Cara lain dapat menggunakan sifat bahwa $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ untuk $x \neq 0$. Dengan mengambil $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$ maka barisan (x_n) konvergen ke 0, $x_n \neq 0$. Tetapi $(\text{sgn}(x_n)) = \left(\text{sgn}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right) = (-1)^n = (-1, +1, -1, \cdots)$ divergen. Ilustrasi grafis fungsi sgn diberikan pada Gambar 9.5. Pada gambar ini ditunjukkan nilai suku barisan $f(x_n)$ selalu 1 dan $f(y_n)$ selalu -1.

Contoh 9.9. Buktikan $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ tidak ada.

Bukti. Di sini kita mempunyai $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Ambil dua barisan (x_n) dan (y_n) dengan $x_n := \frac{1}{n\pi}$, $y_n := \frac{1}{(\pi/2+2\pi n)}$. Maka jelas kedua barisan ini konvergen ke nol dan suku-sukunya tidak pernah sama dengan nol. Namun, barisan

$$\begin{aligned} (f(x_n)) &= (\sin n\pi) = (1, 1, \cdots) \to 1 \\ (f(y_n)) &= (\sin(\pi/2 + 2\pi n)) = (0, 0, \cdots) \to 0, \end{aligned}$$

sehingga berdasarkan kriteria ketiga disimpulkan limitnya tidak ada. □

Bukti. Misalkan c bilangan real sebarang. Ditunjukkan f tidak kontinu di c.

- Untuk c bilangan rasional maka dengan sifat kepadatan bilangan rasional, selalu terdapat barisan bilangan irrasional (x_n) yang konvergen ke c. Jadi $\lim(x_n) = c$, tetapi barisan $(f(x_n)) = (0, 0, 0, \cdots)$ konvergen ke 0 sehingga $\lim(f(x_n)) = 0 \neq f(c) = 1$.
- Sebaliknya bila c bilangan irrasional maka terdapat barisan bilangan rasional (y_n) yang konvergen ke c. Dengan argumen yang sama seperti sebelumnya, diperoleh $\lim(f(x_n)) = 1 \neq f(c) = 0$. Jadi f tidak kontinu di c untuk setiap $c \in \mathbb{R}$.

□

Latihan 9.4. Buatlah sketsa grafik fungsi $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ yang membagi 3 domain $[-1, 0,], [0, 1]$ dan $[1, 3]$ menjadi tiga cabang definisi untuk f dengan kondisi:

- $f(1)$ ada tetapi f tidak kontinu di $x = 1$.
- $f(1)$ ada dan $\lim_{x\to 2} f(x)$ tetapi f tidak kontinu di $x = 2$.

  Kemudian, berikan contoh nyata fungsi yang memenuhi kondisi tersebut.

9.3 Sifat-sifat Limit Fungsi

Pada pembahasan limit barisan, berlaku bahwa jika barisan konvergen maka ia terbatas tetapi tidak berlaku sebaliknya. Sifat yang sama berlaku pada fungsi yang mempunyai limit, tetapi keterbatasannya dalam arti lokal.

Definisi 9.4. (Terbatas lokal) Misalkan $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dan $c \in \mathbb{R}$ titik limit A. Fungsi f dikatakan **terbatas lokal** di c jika terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ dan konstanta $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A \cap V_\delta(c)$.

Contoh 9.12. Buktikan fungsi $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := \frac{1}{x}$ tidak terbatas lokal di $c = 0$, tetapi terbatas lokal di setiap $c \neq 0$.

Sebelum menyelesaikan soal ini, kita perlu menyusun definisi untuk takterbatas lokal sebagai berikut: fungsi f dikatakan takterbatas lokal di c jika setiap $M > 0$ dan setiap persekitaran $V_\delta(c)$ selalu ada $x_0 \in A \cap V_\delta(x_0)$ sehingga $|f(x_0)| > M$.

Bukti. Di sini $A = (0, 1]$. Pertama perhatikan untuk $c = 0$. Untuk setiap persekitaran $V_\delta(0)$ dan setiap $M > 0$ selalu ada $x_0 \in A \cap V_\delta(0)$ dengan $|f(x_0)| > M$, misalnya diambil $x_0 = \frac{1}{2}\min\{\frac{1}{M}, \delta\}$. Jelas $x_0 \in A \cap V_\delta(0)$ dan $x_0 < \frac{1}{M}$ sehingga $f(x_0) = \frac{1}{x_0} > M$. Selanjutnya, untuk $c \neq 0$, ambil $\delta := \frac{1}{2}c$. Dengan pengambilan ini terjamin bahwa persekitaran $V_\delta(c)$ tidak memuat nol. Ambil juga $M := f(c - \delta)$, yaitu supremum fungsi ini di dalam interval $(c - \delta, c + \delta) =: V_\delta(c)$. Dengan pengambilan ini maka dipastikan $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A \cap V_\delta(c)$ sehingga disimpulkan f terbatas lokal. □

Ilustrasi grafis kedua kasus ini diberikan pada Gambar 9.7. Pada panel kiri terlihat bagaimana mengambil x_0 sehingga $|f(x_0)| > M$. Sedangkan pada panel kanan ditunjukkan adanya $\delta > 0$ yang menjamin $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A \cap V_\delta(c)$.

Teorema 9.5. *Bila $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ mempunyai limit di $c \in \mathbb{R}$ maka f terbatas lokal di c.*

Bukti. Misalkan $L := \lim_{x\to c} f(x)$, maka berdasarkan definisi untuk $\varepsilon = 1$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < 1$. Akibatnya, $|f(x)| < |L| + 1$. Sedangkan untuk $x = c$ maka $|f(x)| = |f(c)|$. Dengan mengambil $M := \sup\{|f(c)|, |L| + 1\}$ maka diperoleh $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A \cap V_\delta(c)$. □

Mengingat $\lim_{x\to c} f(x) = F$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = G$ maka terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga berlaku kedua ekspresi berikut:

$$|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } x \in A \text{ dan } 0 < |x - c| < \delta_1$$
$$|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } x \in A \text{ dan } 0 < |x - c| < \delta_2.$$

Dengan mengambil $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ maka kedua ekspresi berlaku. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (F+G)| &= |(f(x) - F) + (g(x) - G)| \\ &\leq |f(x) - F| + |g(x) - G| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

berlaku untuk setiap $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$. Jadi disimpulkan pernyataan 1 berlaku. Untuk pernyataan lainnya dapat dibuktikan dengan cara yang mirip dan dijadikan sebagai latihan. □

Latihan 9.5. Lengkapi bukti teorema di atas dengan menggunakan dua cara, yaitu kriteria limit barisan untuk limit fungsi dan definisi limit fungsi.

Perhatikan khusus untuk perkalian. Bila terdapat beberapa fungsi $f_1, f_2, \cdots, f_n$ dengan masing-masing $\lim_{x\to c} f_k(x) = F_k$ maka berlaku

$$\lim_{x\to c} (f_1 f_2 \cdots f_n)(x) = \left(\lim_{x\to c} f_1(x)\right)\left(\lim_{x\to c} f_2(x)\right) \cdots \left(\lim_{x\to c} f_n(x)\right) = F_1 F_2 \cdots F_n.$$

Lebih khusus, jika $f_1 = f_2 = \cdots = f_n := f$ maka diperoleh

$$\lim_{x\to c} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n = F^n.$$

Jika p suatu polinomial pada $\mathbb{R}$, yaitu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ maka dengan menggunakan sifat limit hasil kali fungsi diperoleh

$$\lim_{x\to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = p(c).$$

Selanjutnya, jika $p(x)$ dan $q(x)$ polinomial dan jika $q(c) \neq 0$ maka berlaku

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

Teorema berikut memberikan kepastian bahwa bila nilai fungsi $f(x)$ terbatas di dalam suatu interval, maka begitu juga nilai limitnya.

Teorema 9.7. *Misalkan $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ titik limit A. Bila $a \leq f(x) \leq b$ untuk setiap $x \in A$, $x \neq 0$ dan $\lim_{x\to c} f(x)$ ada maka*

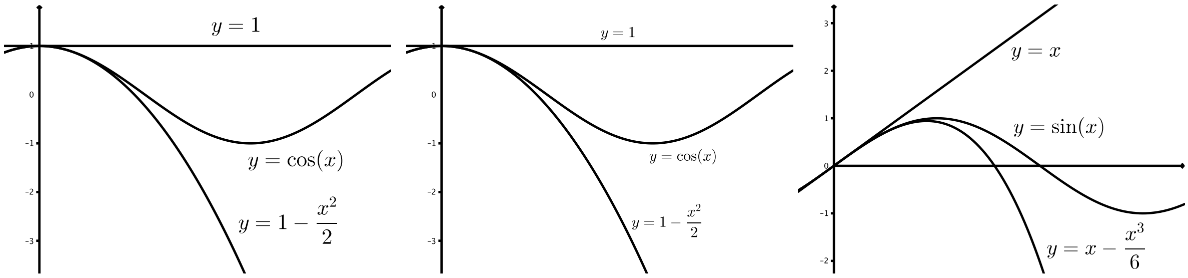
$$a \leq \lim_{x\to c} f(x) \leq b.$$

Bukti. Misalkan (x_n) suatu barisan di dalam A dengan $x_n \neq c$ dan $\lim(x_n) = c$ maka berlaku $\lim(f(x_n)) = \lim_{x\to c} f(x)$. Mengingat $a \leq f(x_n) \leq b$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $a \leq \lim_{x\to c}(f(x_n)) \leq b$. Jadi, $a \leq \lim_{x\to c}(f(x)) \leq b$. □

Teorema 9.8. *Misalkan $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$ titik limit A. Bila diketahui*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

untuk setiap $x \in A$, $x \neq c$ dan $\lim_{x\to c} f(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$ maka $\lim_{x\to c} g(x) = L$.



Gambar 9.9: Ilustrasi ketaksamaan melalui grafik fungsi

Contoh 9.13. Buktikan limit sebagai berikut.

1. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$,
2. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$,
3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = 0$,
4. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$,
5. $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Bukti. Teorema kekonvergenan jepit (TKJ) untuk limit fungsi memainkan peran sentral pada pembuktian berikut.

1. Oleh karena berlaku $-x \le \sin x \le x$ untuk setiap $x \ge 0$ dan $\lim_{x\to 0}(-x) = \lim_{x\to 0} x = 0$ maka dengan TKJ di peroleh

$$0 = \lim_{x\to 0} -x \le \lim_{x\to 0} \sin x \le \lim_{x\to 0} x = 0$$

sehingga terbukti $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

2. Untuk membuktikan $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, gunakan fakta $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$. Mengingat $\lim_{x\to 0}(1 - \frac{x^2}{2}) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$ maka diperoleh $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

3. Selanjutnya, dengan mengurangi ketiga ruas ketaksamaan ini dengan 1 maka diperoleh

$$-\frac{x^2}{2} \quad \le \quad \cos x - 1 \le 0, \text{ untuk } x \ge 0.$$

Selanjutnya ketiga ruas dibagi dengan $x \ne 0$. Untuk $x > 0$ berlaku

$$-\frac{x}{2} \le \frac{\cos x - 1}{x} \le 0$$

dan untuk $x < 0$ berlaku

$$0 \le \frac{\cos x - 1}{x} \le \frac{x}{2}.$$

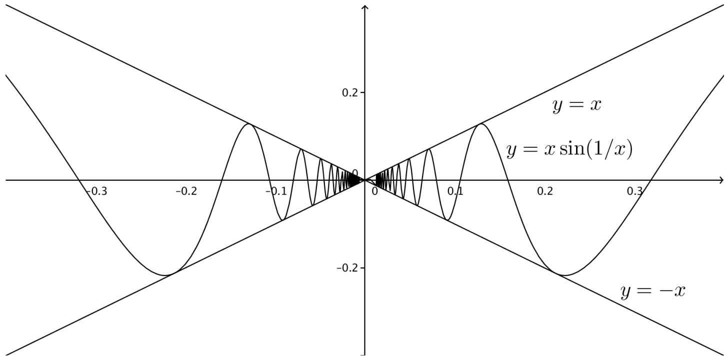
Selanjutnya definisikan fungsi f dan h sebagai berikut:

$$f(x) : \quad = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{untuk } x \ge 0 \\ 0 & \text{untuk } x < 0 \end{cases}, \quad h(x) := \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \ge 0 \\ -\frac{x}{2} & \text{untuk } x < 0. \end{cases}$$

Untuk $x \ne 0$ berlaku

$$f(x) \le \frac{\cos x - 1}{x} \le h(x).$$

Mengingat $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$ maka disimpulkan $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = 0$.



Gambar 9.10: Pola fungsi $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$di sekitar 0

Sifat aljabar fungsi kontinu. Sifat aljabar fungsi kontinu adalah sifat yang berlaku pada penjumlahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian terhadap dua fungsi kontiu, serta perkalian skalar fungsi kontinu.

Teorema 9.9. *Misalkan $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in A$. Bila f dan g kontinu di c maka*

1. *Fungsi-fungsi $f \pm g, fg$ dan αf kontinu di c.*
2. *Bila $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ dan $h(x) \neq 0$ untuk semua $x \in A$ maka fungsi $\frac{f}{h}$ kontinu di c.*

Bukti. Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kekontinuan fungsi, yaitu dengan definisi fungsi kontinu dan dengan kriteria limit fungsi. Kali ini akan digunakan kriteria limit fungsi untuk pernyataan 2. Sisanya dibuktikan sendiri oleh pembaca sebagai latihan. Gunakan fakta $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, dan $\lim_{x\to c} h(x) = h(c)$. Oleh karena $c \in A$ dan $h(c) \neq 0$ maka berlaku

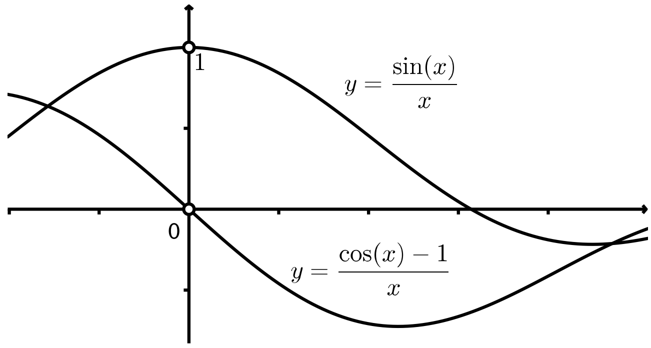
$$\frac{f}{h}(c) = \frac{f(c)}{h(c)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} h(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f}{h}(x)$$

sehingga disimpulkan $\frac{f}{h}$ kontinu di c. □

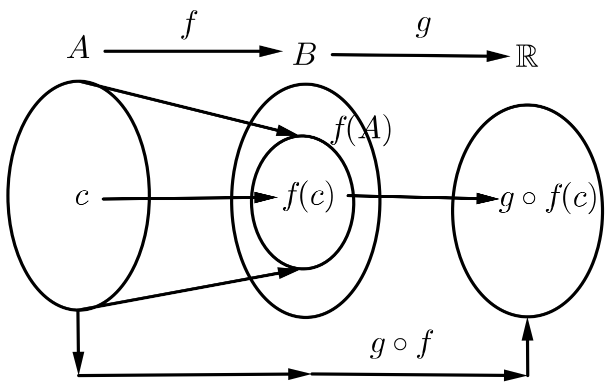
Latihan 9.6. Lengkapi pembuktian teorema di atas, masing-masing menggunakan definisi kekontinuan fungsi dan kriteria limit fungsi.

Contoh 9.14. Beberapa bentuk fungsi kontinu.

1. Fungsi polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kontinu untuk setiap $c \in \mathbb{R}$.



Gambar 9.11: Pola fungsi f dan g di sekitar titik limit 0.



Gambar 9.12: Ilustrasi grafis kekontinuan fungsi komposisi

Oleh karena $f(A) \subseteq f(B)$ maka $f(x) \in B$ sehingga ruas kiri pada implikasi $(*)$ dipenuhi oleh $y = f(x)$ pada $(**)$. Jadi ruas kanan $(*)$ berlaku dengan $y = f(x)$, yaitu

$$|g(f(x) - g(f(c))| = |g \circ f(x) - g \circ f(c)| < \varepsilon.$$

Kesimpulannya, setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$x \in A \text{ dan } |x - c| < \delta \to |g \circ f(x) - g \circ f(c)| < \varepsilon,$$

yakni $g \circ f$ kontinu di c. $\square$

Ilustrasi kekontinuan fungsi komposisi diberikan pada Gambar 9.12. Pada Gambar ini, bayangan (*image*) himpunan A terhadap fungsi f yaitu $f(A)$ termuat di dalam domain fungsi g, yaitu B.

Contoh 9.15. Buktikan fungsi nilai mutlak $|f|$ kontinu dengan menggunakan teorema kekontinuan komposisi fungsi.

BUKTI. Definisikan fungsi $g_1(x) := |x|, x \in \mathbb{R}$. Dibuktikan dulu g_1 kontinu pada $\mathbb{R}$. Misalkan $c \in \mathbb{R}$ sebarang. Perhatikan selalu berlaku:

$$|g_1(x) - g_1(c)| = ||x| - |c|| \leq |x - c|.$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, cukup diambil $\delta := \varepsilon$. Jadi, jika $|x - c| < \delta$ maka $|g_1(x) - g_1(c)| = |x - c| < \delta = \varepsilon$. Terbukti g_1 kontinu pada $\mathbb{R}$. Untuk $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebarang fungsi kontinu pada A maka $g_1 \circ f$ yang tidak lain adalah $|f|$ kontinu pada $\mathbb{R}$.

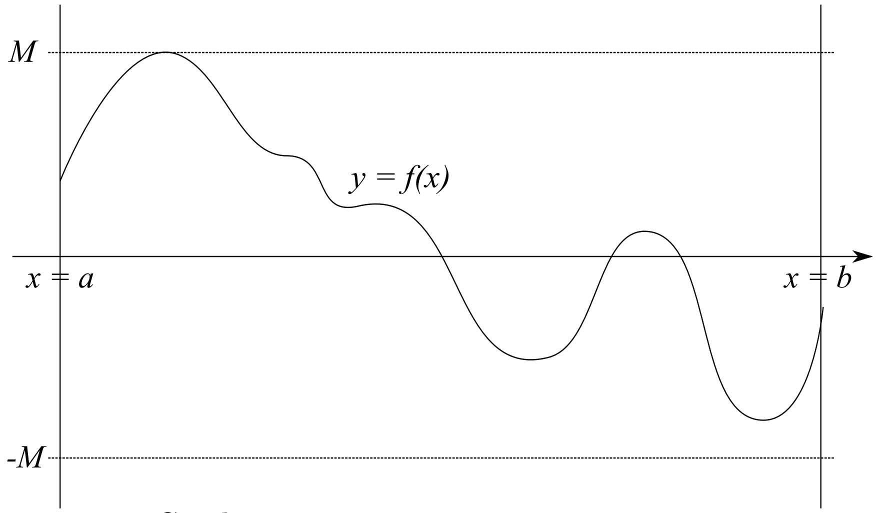
$\square$

Latihan 9.7. Dengan menggunakan teorema kekontinuan komposisi fungsi, buktikan bahwa jika $f(x) \geq 0$ dan f kontinu pada A maka $\sqrt{f}$ kontinu pada A.

Bila syarat $f(A) \subseteq B$ atau g kontinu di $f(c)$ tidak terpenuhi maka ada kemungkinan komposisi dua fungsi kontinu tidak kontinu, seperti yang ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 9.16. Diberikan fungsi f dan g yang didefinisikan sebagai berikut:

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{bila } x = 1 \\ 2 & \text{bila } x \neq 1 \end{cases}, \quad f(x) := x + 1,\, x \in \mathbb{R}.$$



Gambar 9.13: Ilustrasi grafis fungsi terbatas

Bukti. Gunakan metode kontradiksi. Andai f tidak terbatas pada I. Maka, untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ terdapat bilangan $x_n \in I$ sehingga $|f(x_n)| > n$. Mengingat I terbatas maka ia memuat barisan bagian $X' = (x_{n_r})$ dari $X = (x_n)$ yang konvergen ke suatu bilangan x (Teorema Bolzano-Weierstrass). Oleh karena I tertutup dan $x_{n_r} \in I$ maka $x \in I$. Diketahui f kontinu di setiap anggota I, jadi f kontinu di x. Dengan kriteria barisan untuk fungsi kontinu haruslah barisan $(f(x_{n_r}))$ konvergen ke $f(x)$. Barisan $(f(x_{n_r}))$ terbatas karena ia barisan yang konvergen. Padahal berlaku fakta berikut:

$$|f(x_{n_r})| > n \geq n_r \text{ untuk setiap } r \in \mathbb{N}.$$

Pernyataan ini mengatakan bahwa $(f(x_{n_r}))$ tidak terbatas. Ini adalah sebuah kontradiksi. Jadi, pengandaian f tidak terbatas adalah salah. Kesimpulannya f terbatas. □

Definisi 9.6. (Ekstrem global) Misalkan $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan mempunyai sebuah maksimum mutlak (*absolute maximum*) pada A jika terdapat titik $x^* \in A$ sehingga

$$f(x^*) \geq f(x) \text{ untuk semua } x \in A.$$

Fungsi f dikatakan mempunyai minimum mutlak pada A jika terdapat titik $x_* \in A$ sehingga

$$f(x_*) \leq f(x) \text{ untuk setiap } x \in A.$$

Selanjutnya, titik x^* disebut titik maksimum mutlak dan x_* disebut titik minimum mutlak.

Istilah ekstrem global juga sering digunakan untuk ekstrem mutlak. Ilustrasi grafis ekstrem global ditunjukkan pada Gambar 9.14. Pada ilustrasi ini terdapat pula ekstrem bukan global. Ekstrem seperti ini disebut dengan ekstrem relatif atau lokal dan akan dibahas pada bab diferensial.

Contoh 9.18. Contoh berikut memberikan eksistensi ekstrem global pada berbagai domain

1. Fungsi $f(x) := \frac{1}{x}$ tidak mempunyai maksimum maupun minimum mutlak pada domain $A = (0, \infty)$. Di sini domainnya berupa himpunan takterbatas. Fungsi ini mempunyai maksimum global pada $[1, \infty)$, yaitu dengan $x^* = 1$ tetapi tidak mempunyai minimum. Di sini domainnya takterbatas di atas. Tetapi, pada domain $B = [1, 3]$, fungsi ini mempunyai maksimum mutlak dan minimum mutlak dengan $x^* = 1$ dan $x_* = 3$. Lihat Gambar 9.15(kiri).

Mengingat I terbatas maka barisan $X := (x_n)$ juga terbatas, sehingga ia memuat barisan bagian $X' = (x_{n_r})$ yang konvergen ke suatu $x^* \in I$. Karena f kontinu pada I berarti f kontinu di x^*. Akibatnya, $\lim(f(x_{n_r})) = f(x^*)$. Mengikuti (#), diperoleh

$$s^* - \frac{1}{n_r} < f(x_{n_r}) \leq s^* \text{ untuk setiap } r \in \mathbb{N}.$$

Oleh karena $\lim(s^* - \frac{1}{n_r}) = \lim(s^*) = s$ maka dengan TKJ, disimpulkan bahwa

$$\lim\left(f(x_{n_r})\right) = f(x^*) = s^*.$$

Untuk eksistensi titik minimum x_* dapat dibuktikan sejalan sebagi latihan. □

Latihan 9.8. Lengkapi pembuktian teorema di atas dengan menunjukkan bahwa ada $x_* \in I$ sehingga $f(x_*) = \inf f(I)$.

Teorema ini dikenal dengan nama teorema maksimum-minimum (max-min). Perhatikan bahwa domain tertutup dan terbatas hanyalah syarat cukup adanya ekstrem global. Sebaliknya, ada kasus di mana ekstrem globalnya ada tetapi fungsinya tidak kontinu.

Latihan 9.9. Diberikan fungsi $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{jika } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{jika } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Gambarkan grafik fungsi ini. Selidikilah ekstrem global dan kekontinuan fungsi ini pada domain $[0, 2]$.

BAB 10

Perluasan Konsep Limit

The opposite of a right statement is a wrong statement. The opposite of a deep truth can also be a deep truth.

Niels BOHR

Sebelumnya telah ditunjukkan bahwa limit fungsi signum di 0 tidak ada. Tetapi jika domainnya dibatasi pada interval $(0, \infty)$ maka limitnya ada yaitu bernilai 1. Juga, bila domainnya hanya dibatasi pada interval $(-\infty, 0)$ maka limitnya juga ada yaitu -1. Kasus seperti ini mengilhami pengertian limit kanan dan limit kiri yang dimodifikasi langsung dari pengertian limit biasa. Limit kiri dan limit kanan dikenal dengan istilah limit satu sisi, sedangkan limit biasa dikenal dengan limit dua sisi.

10.1 Limit Satu Sisi

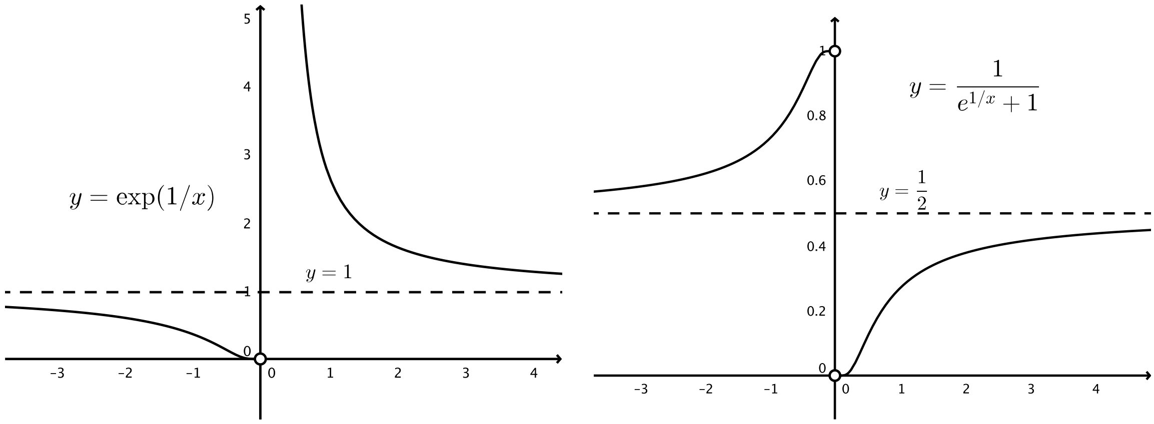
Definisi 10.1. Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Bila $c \in \mathbb{R}$ titik limit $A \cap (c, \infty) = \{x \in A : x > c\}$, maka bilangan real L dikatakan **limit kanan** f di c, ditulis
$$L = \lim_{x \to c^+} f(x)$$
jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua $x \in A$ dengan $0 < x < c + \delta$ maka berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2. Bila $c \in \mathbb{R}$ titik limit $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A : x < c\}$, maka bilangan real L dikatakan **limit kiri** f di c, ditulis
$$L = \lim_{x \to c^-} f(x)$$
jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua $x \in A$ dengan $c - \delta < x < 0$ maka berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Biasanya notasi $L = \lim_{x \to c^+} f(x)$ dibaca "L adalah limit fungsi f untuk x mendekati c dari kanan". Untuk limit kiri menyesuaikan. Ilustrasi geometris pengertian kedua jenis limit ini diberikan pada Gambar 10.1. Pada kedua definisi ini, adanya nilai $f(c)$ tidak disyaratkan sama sekali.

Seperti halnya pada limit dua sisi, kriteria barisan untuk limit diadaptasikan langsung pada limit satu sisi seperti diungkapkan pada teorema berikut.



Gambar 10.2: Grafik fungsi $y = e^{\frac{1}{x}}$ (kiri) dan $y = \frac{1}{e^{1/x}+1}$ (kanan)

Ilustrasi grafis Sebelum dibuktikan secara formal, kita amati kelakuan fungsi di sekitar nol melalui grafik seperti diberikan pada Gambar 10.2 (panel kiri).

Perhatikan pada grafik fungsi $y = e^{1/x}$ bahwa nilai fungsi semakin mendekati 0 untuk x semakin mendekati 0 dari kiri. Sebaliknya untuk x mendekati 0 dari kanan maka nilai fungsi semakin besar. Fakta ini dapat dianalisa sebagai berikut.

- Untuk $x \to 0^-$ maka $\frac{1}{x} \to -\infty$ sehingga $e^{1/x} \to e^{-\infty} \to 0$.
- Untuk $x \to 0^+$ maka $\frac{1}{x} \to \infty$ sehingga $e^{1/x} \to e^{\infty} \to \infty$.

Bukti. Untuk membuktikan hal ini, kita gunakan berlakunya pernyataan berikut

$$0 < z < e^z, \text{ untuk setiap } z \geq 0.$$

Fakta ini dapat diyakini melalui ilustrasi grafis atau numeris. Secara grafis kenaikan fungsi $g(z) = e^z$ jauh lebih cepat dari $f(z) = z$ karena kemiringannya (*slope*) $g'(z) = e^z$ selalu lebih besar dari $f'(z) = 1$, padahal awal berangkatnya adalah $f(0) = 0 < 1 = e^0 = g(0)$. Ambil (x_n) dengan $x_n := \frac{1}{n} > 0$. Jadi $\lim(x_n) = 0$. Selanjutnya, $g(x_n) = e^{1/x_n} > \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1/n} = n$. Oleh karena barisan $(g(x_n)) = (n) = (1, 2, 3, \cdots)$ divergen maka disimpulkan $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ tidak ada. Pernyataan berikutnya dapat dibuktikan dengan menggunakan TKJ yang diterapkan pada limit satu sisi khususnya limit kiri. Untuk $x < 0$ maka $-x > 0$. Terapkan ketaksamaan di atas dengan mengambil $z := -\frac{1}{x} > 0$, diperoleh

$$0 < -\frac{1}{x} < e^{-1/x}.$$

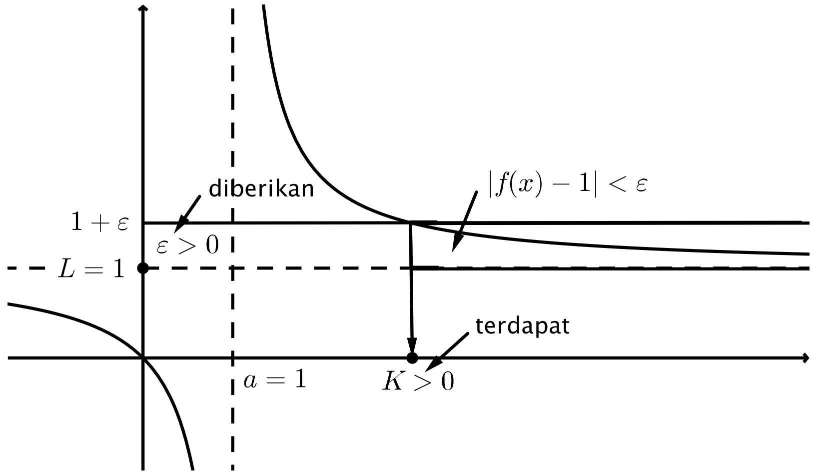
Setelah ketiga ruas digandakan dengan $-xe^{1/x} > 0$ maka diperoleh $0 < e^{1/x} < -x$. Oleh karena $\lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$ maka disimpulkan $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$. $\square$

Contoh 10.3. Fungsi $h(x) := \frac{1}{e^{1/x}+1}$, $x \neq 0$. Buktikan:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 \text{ dan } \lim_{x\to 0^-} h(x) = 1.$$

Ilustrasi grafis Grafik fungsi ini diberikan pada Gambar 10.2 (panel kanan). Terlihat jelas bahwa $h(x)$ mendekati 1 untuk x mendekati 0 dari kiri dan $h(x)$ mendekati 0 untuk x mendekati 1 dari kanan. Penjelasan fakta ini secara sederhana adalah sebagai berikut.

- Untuk $x \to 0^-$ maka $\frac{1}{x} \to -\infty$. Akibatnya, $e^{1/x} \to 0$ sehingga $\frac{1}{e^{1/x}+1} \to \frac{1}{0+1} = 1$.



Gambar 10.3: Ilustrasi grafis limit di takberhingga

Limit takberhingga tipe 1

Definisi 10.2. Misalkan $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$. Kita katakan $L\in\mathbb{R}$ adalah limit $f(x)$ untuk $x\to\infty$, ditulis

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

jika dan hanya jika setiap $\varepsilon>0$ terdapat bilangan positif K sehingga berlaku $|f(x)-L|<\varepsilon$ untuk setiap $x\geq K$.

Contoh 10.4. Buktikan $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$.

Bukti. Pada soal ini kita mempunyai $f(x):=\frac{x}{x-1}$, $x>1=:a$. Misalkan $\varepsilon>0$ sebarang. Mengingat $x-1>0$ maka dapat dijabarkan sebagai berikut

$$|f(x)-L|=\left|\frac{x}{x-1}-1\right|=\left|\frac{x-(x-1)}{x-1}\right|=\frac{1}{x-1}.$$

Agar kuantitas ini kurang dari $\varepsilon>0$ maka haruslah

$$\frac{1}{x-1}<\varepsilon\to(x-1)\varepsilon>1\to x\varepsilon>\varepsilon+1\to x>\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}.$$

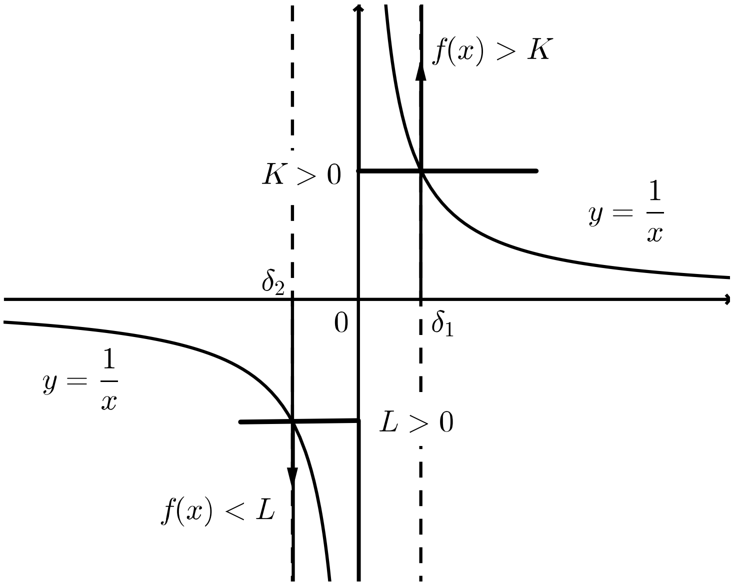
Untuk mudahnya, cukup diambil $K:=\left\lceil\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right\rceil$ yaitu pembulatan ke atas (*ceiling*) dari $\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$. □

Ilustrasi numerisnya dapat dipahami sebagai berikut: Misalkan diberikan $\varepsilon=0.0013$ maka diperoleh $\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}=770.23$. Jadi cukup diambil $K=\lceil 770.23\rceil=771$. Dapat diperiksa selisih $|f(x)-1|$ untuk $x=771,772,773.4,775,778,780,785$ adalah berturut-turut

$$0.00129870, 00129700, 0.0012947, 00129200, 00128700, 00128370, 0012755$$

kesemuanya kurang dari $\varepsilon=0.0013$. Ilustrasi grafisnya dapat dilhat pada Gambar 10.3. Pada gambar ini terlihat bagaimana kita memilih bilangan bulat K yang memenuhi definisi di atas.

Dengan cara analogi kita mendapatkan pengertian limit di $x\to-\infty$ sebagai berikut.



Gambar 10.4: Ilustrasi grafis limit satu sisi bernilai takhingga

Contoh 10.6. Buktikan $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Bukti. Misalkan $K > 0$ sebarang. Agar $|f(x)| > K$ maka haruslah $\frac{1}{x^2} > K$. Setelah pertidaksamaan ini diselesaikan maka diperoleh $-\sqrt{\frac{1}{K}} < x < \sqrt{\frac{1}{K}}$. Dengan mengambil $\delta := \sqrt{\frac{1}{K}}$ maka definisi di atas terpenuhi. □

Contoh 10.7. Selidikilah kelakukan fungsi $f(x) := \frac{1}{x}, x \neq 0$ untuk $x \to 0$.

Penyelesaian. Pada pembahasan limit biasa, kita simpulkan bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada. Dalam perluasan konsep limit ini keadaan ini masih memungkinkan mempunyai limit. Secara intuitif, nilai $\frac{1}{x}$ menuju ∞ ketika x mendekati 0 dari kanan dan menuju $-\infty$ ketika x mendekati 0 dari kiri. Secara normatif, perhatikan untuk setiap $\delta > 0$, x yang memenuhi $0 < |x - 0| < \delta$ memuat bilangan negatif dan bilangan positif dekat dengan nol. Untuk $K > 0$ dapat dipilih $x_0 < 0$ sehingga $f(x_0) < K$. Ini berarti $f(x)$ tidak menuju ∞. Sebaliknya untuk $L < 0$ dapat dipilih $x_0 > 0$ sehingga $f(x_0) < L$. Ini berarti $f(x)$ tidak menuju $-\infty$. Kesimpulannya $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \neq \infty$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \neq -\infty$. □

Ilustrasi grafis fungsi $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ diberikan pada Gambar 10.4. Bila diamati dari satu sisi, katakan $x \to 0^+$ maka fungsi ini menuju ∞. Sedangkan bila $x \to 0^-$ maka fungsi ini menuju $-\infty$. Keadaan ini dapat ditulis sebagai

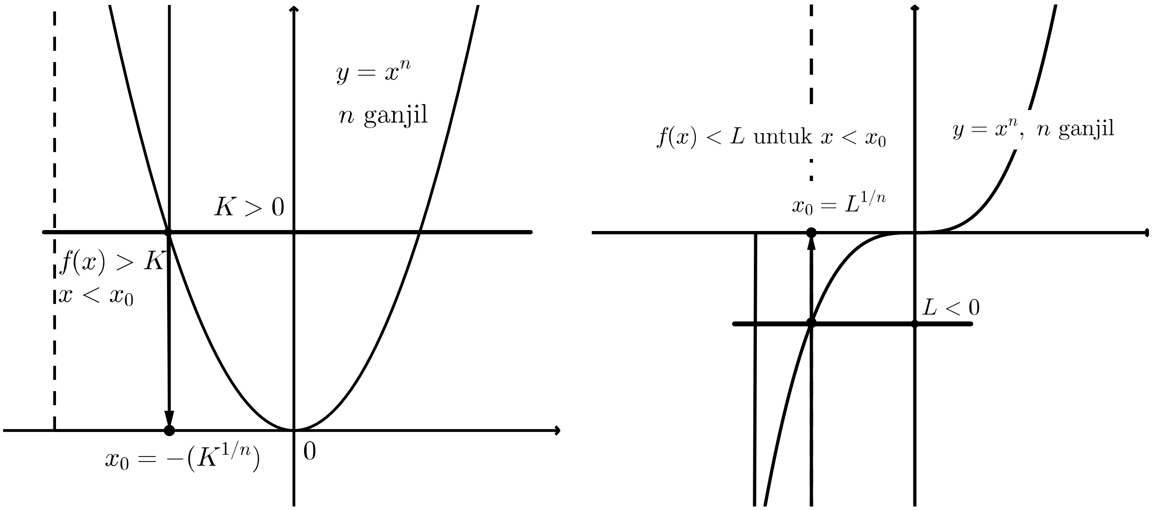
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \text{ dan } \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Berikut dirumuskan definisi limit takberhingga satu sisi.

Definisi 10.5. Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ dan c titik limit $A \cap (c, \infty)$.

1. Kita katakan $f(x)$ menuju ∞ untuk $x \to c^+$, ditulis $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$, jika dan hanya jika setiap $K > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$c < x < c + \delta \to f(x) > K.$$



Gambar 10.5: Ilustrasi grafis limit takberhingga tipe 3

Contoh 10.8. Perhatikan fungsi $f(x) := x^n, n \in \mathbb{N}$.

1. Kita tunjukkan $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Untuk sebarang $K > 0$, kita ambil $x_0 := \max\{1, K\}$. Maka untuk $x > x_0$ berarti $x > 1$. Oleh karena itu berlaku $f(x) = x^n > x$ untuk setiap $x > x_0$.

2. Sekarang kita selidiki $\lim_{x\to-\infty} x^n$. Kita pecah dalam dua kasus, yaitu kasus n ganjil dan n genap. Mengingat bilangan negatif berpangkat genap hasilnya positif, tetapi jika berpangkat ganjil hasilnya negatif maka secara intuitif kita memperoleh

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{bila } n \text{ genap} \\ -\infty & \text{bila } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Bukti formalnya sebagai berikut: untuk n ganjil, misalkan $n = 2k+1$. Diberikan $L < 0$ sebarang. Ambil $x_0 := \min\{L, -1\}$. Jika $x < x_0$ maka $x < -1$. Oleh karena $x^{2k} \geq 1$ dan $x < 0$ maka diperoleh $f(x) = x^n = x^{2k+1} = x^{2k}x < x < x_0 \leq L$. Jadi berlaku $f(x) < L$ untuk setiap $x < x_0$. Cara lainnnya adalah cukup diambil x_0 bilangan yang kurang dari $\sqrt[n]{L}$. Oleh karena n ganjil maka akar bilangan ini ada dan bernilai negatif. Perhatikan Gambar 10.5 (panel kiri). Untuk n genap, misalkan $n = 2k$. Diberikan $K > 0$, cukup diambil $x_0 := -\sqrt[n]{K}$. Konstruksi pengambilan x_0 ini dapat dilhat pada Gambar 10.5 (panel kanan).

Kriteria barisan yang berlaku pada limit dua sisi dapat pula diadaptasikan pada limit yang memuat ketakberhinggaan. Pembaca dapat menyusun sendiri formulasi kriteria tersebut. Selain itu, teorema kekonvergen jepit (TKJ) atau teorema *squezee* dapat pula diadaptasikan pada limit bentuk ini. Oleh karena keterbatasan ruang pembahasan maka sifat-sifat lebih lanjut limit bentuk ini tidak dibahas secara detail.

Kita telah membahas limit yang memuat ketakberhinggaan $\pm\infty$. Dalam konsep limit biasa, adanya limit dipahami dalam konteks bilangan real. Oleh karena $\pm\infty$ bukan bilangan real maka kita sepakati fungsi yang menuju $\pm\infty$ dianggap tidak mempunyai limit. Oleh karena itu kita harus dapat membedakan adanya limit di dalam bilangan real dan kecenderungan fungsi menuju $\pm\infty$. Sebaiknya kita ulangi kedua notasi berikut.

1. $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ dibaca " limit f di c adalah L" atau "L adalah limit f di c ".

2. $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ dibaca "f menuju ∞ untuk x mendekati c ".

2. Kita katakan $f(x) = o\,(g(x))\,,\, x \to a$ dibaca "f adalah little-oh dari g untuk x mendekati a " jika dan hanya jika

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Pada kasus $f(x) = o\,(g(x))\,,\, x \to a$ dapat diinterprestasikan bahwa kedua fungsi sama-sama menuju nol di sekitar a, tetapi kecepatan f menuju nol lebih cepat daripada g.

Contoh 10.10. Diberikan fungsi $f(x) = 3x^3 + 4x^2$. Buktikan pernyataan berikut ini.

1. $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ untuk $x \to 0$.
2. $f(x) = o(x)$ untuk $x \to 0$.

Penyelesaian. Untuk kedua pertanyaan kita mempunyai $a = 0$.

1. Untuk *big-O*, kita mempunyai $g(x) = x^2$. Diperoleh

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{|3x^3 + 4x^2|}{|x^2|} = |3x + 4|\,.$$

Cukup diambil $\delta := 0.5$ sehingga untuk $0 < |x| < 0.5$ maka dipenuhi $|3x + 4| \leq 3|x| + 4 < 5.5 =: M$. Jadi definisi di atas dipenuhi dengan δ dan M ini.

2. Untuk *little-o*, kita mempunyai $g(x) = x$. Diperoleh

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{|3x^3 + 4x^2|}{|x|} = \left|3x^2 + 4x\right|.$$

Mudah dihitung bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x \to 0} |3x^2 + 4x| = 0$.

□

Ilustrasi *big-O* dan *little-o* ini diberikan pada Gambar 10.6. Pada panel kiri terlihat bahwa fungsi $y = |g(x)|$ didominasi dari atas oleh fungsi $y = M|f(x)|$. Inilah makna grafis dari $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$. Pada panel kanan, terdapat daerah di mana $|f(x)|$ menuju nol lebih cepat daripada $|g(x)|$. Inilah makna grafis dari $f(x) = o(g(x))$. Jadi, perbedaan kedua notasi ini adalah terletak pada keluasan daerah di mana fungsi satu mendominasi fungsi lainnya. Notasi big-O untuk dominasi pada semua domain, sedangkan notasi little-o hanya untuk sebagian kecil domain saja.

Definisi 10.9. Misalkan $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$.

1. $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, untuk $x \to \infty$ jika dan hanya jika ada $A > 0$ dan $x_0 > 0$ sehingga $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} < A$ untuk setiap $x > x_0$.
2. $f(x) = o(g(x))$, untuk $x \to \infty$ jika dan hanya jika ada $\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

Contoh 10.11. Tunjukkan $f(x) = 3x^3 + 4x^2$ adalah $\mathcal{O}(x^3)$ untuk $x \to \infty$.

Penyelesaian. Di sini kita mempunyai $g(x) = x^3$. Diperoleh

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left|\frac{3x^3 + 4x^2}{x^3}\right| = \left|3 + \frac{4}{x}\right| \leq 3 + \frac{4}{|x|}.$$

Ambil $x_0 = 1$ maka $\frac{4}{|x|} \leq 4$ untuk setiap $x \geq x_0$. Dengan mengambil $A = 7$ maka diperoleh $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} < A$ untuk setiap $x > x_0$. □

BAB 11

Perluasan Konsep Kekontinuan

By denying scientific principles, one may maintain any paradox.

Galileo GALILEI

Pada definisi kekontinuan fungsi f, ada tiga unsur yang terlibat yaitu titik c, $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$. Sekedar mengingatkan kembali bahwa fungsi f dikatakan kontinu di c, adalah bilamana diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku

$$|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

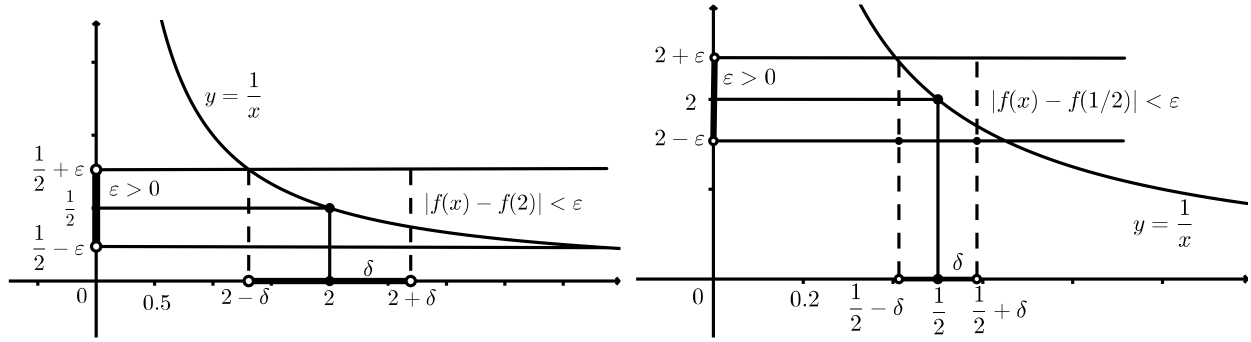
Keberadaan $\delta > 0$ bergantung pada $\epsilon > 0$ yang diberikan. Oleh karena itu kadangkala ditulis $\delta = \delta(\varepsilon)$ yang menunjukkan ketergantungan δ pada ε. Secara implisit keberadaan $\delta > 0$ ini juga bergantung pada titik c yang diberikan sehingga kadangkala ditulis sebagai $\delta = \delta(\varepsilon, c)$. Kemungkinan bahwa δ hanya bergantung pada $\varepsilon > 0$ yang diberikan dan berlaku untuk setiap titik c, sejauh ini belum dibahas. Inilah ide awal yang mengilhami pengertian kontinu seragam.

11.1 Kontinu Seragam dan Fungsi Lipschitz

Pada bab sebelumnya, kita telah membuktikan bahwa fungsi $f(x) := x^2, x \in \mathbb{R}$ kontinu di sebarang titik c, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ kita mengambil $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|c|+1}\}$. Perhatikan bahwa δ di sini tidak hanya bergantung pada ε tetapi juga pada c. Juga, kita telah membuktikan bahwa fungsi $f(x) := \alpha x$, α suatu konstanta, adalah kontinu di sebarang titik c. Pada kasus ini, setiap $\varepsilon > 0$ kita dapat mengambil $\delta := \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Di sini δ hanya bergantung pada $\varepsilon > 0$ yang diberikan, tidak bergantung pada c. Jadi, walaupun keduanya kontinu tetapi berbeda sifat ketergantungannya pada c. Inilah yang melahirkan konsep kontinu seragam. Kekontinuan dengan δ hanya bergantung pada ε akan disebut kontinu seragam, sedangkan kekontinuan yang bergantung pada ε dan juga titik c itu sendiri disebut kontinu tidak seragam.

Definisi 11.1. [KONTINU SERAGAM] Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada A jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sehingga setiap $x, u \in A$ dengan $|x - u| < \delta$ maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Pada definisi ini jelas adanya $\delta > 0$ tidak bergantung pada titik c yang diberikan seperti pada kontinu biasa. Jelas juga bahwa jika fungsi f kontinu seragam pada A maka ia kontinu



Gambar 11.1: Ilustrasi grafis kontinu takseragam

Contoh 11.3. Buktikan fungsi $f(x) := \sin(x)$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

PENYELESAIAN. Ingat pada bab sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $|\sin x| \leq |x|$. Misalkan $c \in \mathbb{R}$ sebarang. Dengan identitas trigonometri, kita peroleh penjabaran berikut:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(c)| &= |\sin x - \sin c| \\
&= \left|2 \sin\left(\frac{x-c}{2}\right) \cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \left|\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\left|\frac{x-c}{2}\right| \cdot 1 = |x-c|.
\end{aligned}$$

Baris terakhir diperoleh dengan mengingat $|\cos z| \leq 1$ untuk setiap z. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, kita dapat mengambil $\delta := \varepsilon$ untuk memenuhi definisi kontinu seragam. □

Latihan 11.1. Buktikan fungsi $f(x) := \cos(x)$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Kriteria barisan tidak kontinu seragam. Sebelumnya kita telah membahas kriteria fungsi kontinu. Permasalahannya adalah bagaimana memeriksa apakah kekontinuan tersebut seragam atau tidak. Kedua istilah "tidak kontinu seragam" dan "kontinu tidak seragam" barangkali agak membingungkan. Mengingat kita bicara pada ruang fungsi kontinu maka tidak kontinu seragam dimaksudkan untuk fungsi kontinu yang tidak seragam. Jadi kedua istilah ini memiliki maksud yang sama. Berikut diberikan kriteria barisan untuk kekontinuan tak seragam:

> Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f tidak kontinu seragam pada A jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan barisan $(x_n), (u_n) \subset A$ dengan $\lim(x_n - u_n) = 0$, tetapi $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 11.4. Kembali kepada fungsi $f(x) := \frac{1}{x}, x \neq 0$. Buktikan fungsi ini kontinu tapi tidak seragam.

PENYELESAIAN. Bahwa fungsi ini kontinu sudah dibahas sebelumnya. Sekarang dibuktikan kekontinuan ini tidak seragam. Ambil $\varepsilon_0 := 1$. Bangun dua barisan (x_n) dan (u_n) dengan $x_n := \frac{1}{n}$ dan $u_n := \frac{1}{n+1}$. Jelas $(x_n), (u_n) \subset A := (0, \infty)$. Diperoleh $\lim(x_n - u_n) = \lim(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \lim\left(\frac{n+1-1}{n(n+1)}\right) = \lim\left(\frac{n}{n(n+1)}\right) = \lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$. Tetapi

$$|f(x_n) - f(u_n)| = \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = |n - (n+1)| = 1 \geq \varepsilon_0,$$

Teorema 11.2. *Bila $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi Lipschitz maka f kontinu seragam pada A.*

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Misalkan f Lipschitz dengan konstanta K, ambil $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$. Maka untuk setiap $x, u \in A$ dengan $|x - u| < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$ berlaku

$$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa$f$ kontinu seragam pada A. □

Fungsi $f(x) := x^2, x \in \mathbb{R}$ tidak kontinu seragam karena keberadaan $\delta > 0$ bergantung pada titik di mana f kontinu. Tetapi bila fungsi ini didefinisikan pada interval tertutup dan terbatas, katakan $[0, b]$ maka ia kontinu seragam. Hal ini dapat dibenarkan dengan menggunakan Teorema 11.1. Cara lain untuk membuktikan kekontinuan seragam ini adalah melalui fungsi Lipschitz seperti diberikan pada contoh berikut.

Contoh 11.5. Buktikan fungsi $f(x) := x^2, x \in [0, b]$ merupakan fungsi Lipschitz pada $I := [0, b]$. Kemudian, simpulkan f kontinu seragam pada I.

Bukti. Misalkan $x, u \in [0, b]$. Dengan ketaksamaan segitiga diperoleh $|x + u| \leq |x| + |u| \leq b + b = 2b$. Akan ditentukan konstanta Lipschitz K sebagai berikut

$$|f(x) - f(u)| = |x^2 - u^2| = |x + u||x - u| \leq 2b|x - u|.$$

Ambil $K := 2b$, terbukti f fungsi Lipschitz. Berdasarkan teorema di atas maka disimpulkan $f(x) := x^2$ kontinu seragam pada $[0, b]$. □

Perlu diingat bahwa fungsi Lipschitz hanyalah merupakan syarat cukup untuk kontinu seragam, tapi bukan syarat perlu. Artinya, fungsi kontinu seragam tidak harus memenuhi kondisi Lipschitz.

Contoh 11.6. Buktikan $f(x) := \sqrt{x}$ kontinu seragam pada $[0, 1]$ tetapi tidak Lipschitz pada himpunan ini.

Bukti. Untuk kontinu seragam jelas karena f merupakan fungsi kontinu pada interval tertutup dan terbatas $[0, 1]$. Selanjutnya ditunjukkan f tidak Lipschitz pada $[0, 1]$. Mengingat $(x - u) = (\sqrt{x} + \sqrt{u})(\sqrt{x} - \sqrt{u})$ maka diperoleh

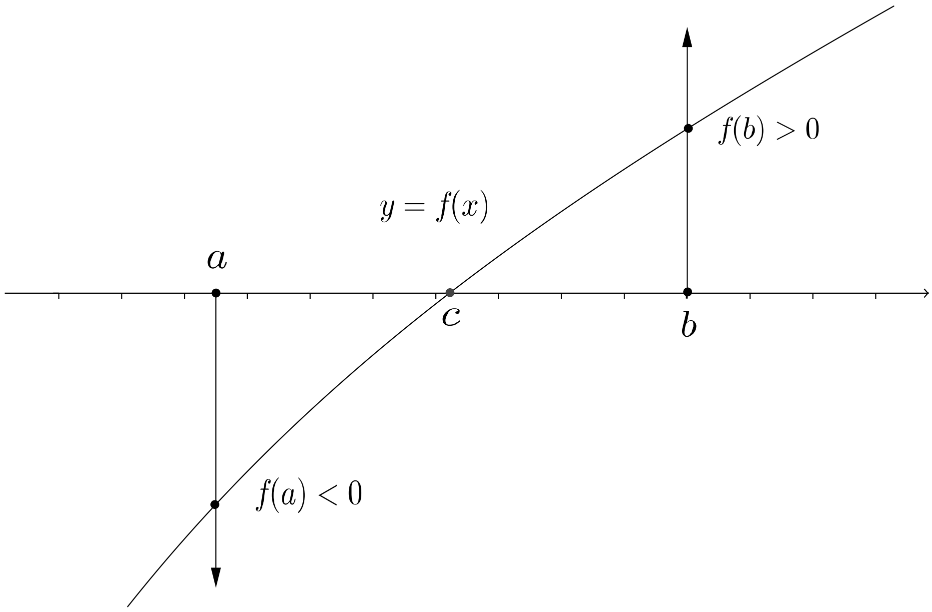
$$|f(x) - f(u)| = |\sqrt{x} - \sqrt{u}| = \left|\frac{x - u}{\sqrt{x} + \sqrt{u}}\right| = \frac{|x - u|}{|\sqrt{x} + \sqrt{u}|}, \text{ asalkan } \sqrt{x} + \sqrt{u} \neq 0.$$

Kondisi $\sqrt{x} + \sqrt{u} \neq 0$ dipenuhi oleh $x, u > 0$. Andai ada konstanta Lipschitz $K > 0$ maka haruslah

$$\frac{|x - u|}{|\sqrt{x} + \sqrt{u}|} \leq K|x - u|,$$

yakni $K \geq \frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{u}|}$ untuk setiap $x, u > 0$. Di lain pihak dengan sifat Archimedes, untuk setiap bilangan $\alpha \in \mathbb{R}$, kita dapat menemukan $x_0, u_0 > 0$ sehingga $\frac{1}{|\sqrt{x_0}+\sqrt{u_0}|} > \alpha$. Jadi $K > \alpha$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Jadi $K \to \infty$. Ini menunjukkan sebuah kontradiksi karena K bilangan real terbatas. Jadi tidak mungkin ditemukan konstanta Lipschitz $K > 0$. Disimpulkan fungsi ini bukan Lipschitz. □

Kekontinuan seragam dan sifat Lipschitz fungsi bergantung pada interval di mana fungsi tersebut didefinisikan. Keterbatasan dan ketertutupan domain fungsi kontinu hanya merupakan syarat cukup untuk kontinu seragam. Artinya, kontinu seragam tidak harus terdefinisi pada himpunan tertutup dan terbatas.



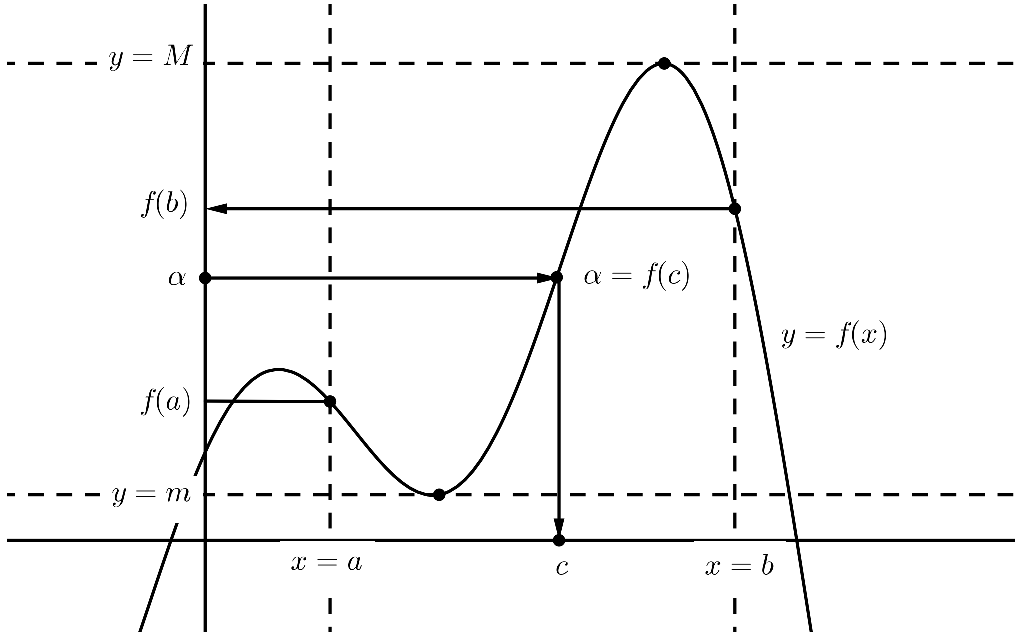
Gambar 11.2: Situasi yang memenuhi $f(a)f(b) < 0$

Ulasan Secara intuitif teorema ini dapat dijelaskan sebagai berikut: sebuah fungsi kontinu pada $[a, b]$ selalu mempunyai nilai di setiap titik di dalam $[a, b]$. Hipotesis $f(a)f(b) < 0$ mengisyaratkan bahwa nilai fungsi pada kedua ujung domain bertanda beda, satu positif dan lainnya negatif atau sebaliknya. Perubahan nilai fungsi dari positif di salah satu ujung interval menjadi negatif di ujung interval lainnya, atau sebaliknya memaksa grafik fungsi melewati nol atau sumbu X. Titik $x = c$ dengan $f(c) = 0$ tersebut adalah akar persamaan taklinear $f(x) = 0$. Ilustrasi grafis keadaan ini diberikan pada Gambar 11.2.

Bukti. Asumsikan $f(a) > 0 > f(b)$, yaitu dengan kata lain $f(a)$ positif dan $f(b)$ negatif atau sebaliknya. Situasi ini diberikan pada Gambar 11.2. Selanjutnya, kita bangun subinterval pertama $I_1 := [a_1, b_1]$ dengan $a_1 := a$ dan $b_1 := b$. Ambil titik tengah $p_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Bila $f(p_1) = 0$ maka p_1 inilah titik c yang dimaksud. Tetapi bila $f(p_1) \neq 0$ maka kita periksa apakah $f(p_1) > 0$ atau $f(p_1) < 0$. Bila $f(p_1) < 0$ ambil $a_2 := a_1$ dan $b_2 := p_1$, tetapi bila $f(p_1) > 0$ maka diambil $a_2 := p_1$ dan $b_2 := b_1$ sehingga diperoleh subinterval $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ dengan $f(a_2)$ dan $f(b_2)$ berbeda tanda yaitu $f(a_2) > 0$ dan $f(b_2) < 0$. Dengan cara yang sama diambil titik tengah berikutnya $p_2 := \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ untuk membangun subinterval $[a_3, b_3]$ yang mempunyai sifat yang sama dengan sebelumnya. Proses seperti ini merupakan skema pada metode bagidua (*bisection*) untuk aproksimasi akar persamaan taklinear. Berikut Ilustrasi grafis yang diberikan dalam (Hernadi, 2012), lihat Gambar 11.3.

Bila di dalam proses ini ditemukan p_k sehingga $f(p_k) = 0$ maka proses dihentikan dan p_k adalah akar yang dimaksud. Bila tidak ditemukan p_k seperti ini, proses diteruskan dan diperoleh barisan interval bersarang $I_n := [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$ dalam arti $[a_{n-1}, b_n] \subset [a_n, b_n]$, $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$ dengan lebar interval $\ell(I_1) = b_1 - a_1 = b - a$, $\ell(I_2) = b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2}(a - b)$, $\cdots$, $\ell(I_n) = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$. Berdasarkan sifat interval bersarang yang telah dibahas pada Bab 2 maka disimpulkan ada $c \in I_n$ untuk setiap $n = 1, 2, 3, \cdots$. Oleh karena $a_n \leq c \leq b_n$ maka berlaku

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \text{ dan } 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$



Gambar 11.4: Ilustrasi teorema nilai antara Bolzano (TNA-B)

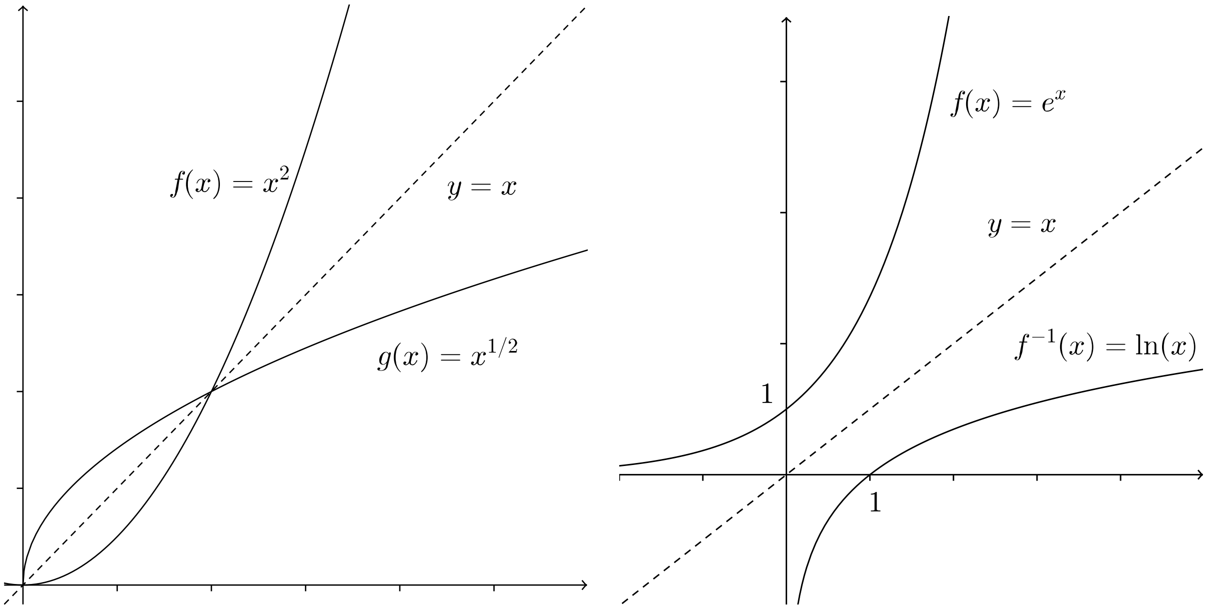
Nilai $f(a)$ dan $f(b)$ belum tentu maksimum atau minimum. Oleh karena f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ maka ia mencapai ekstrem mutlak, yaitu terdapat $c^*, c_* \in [a, b]$ sehingga $m = f(x_*)$ dan $M = f(x^*)$. Dengan TNA-B maka untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan $m < \alpha < M$, terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = \alpha$. Ilustrasi TNA-B diberikan pada Gambar 11.4. Berdasarkan Gambar ini, fungsi f membawa interval $[a, b]$ menjadi interval $[m, M]$, bukan interval $[f(a), f(b)]$.

Secara umum dapat dibuktikan bahwa jika I interval tertutup maka $f(I)$ juga berupa interval tertutup. Sebelum kita buktikan pernyataan ini, kita perhatikan contoh berikut di mana hipotesis tertutup interval I tidak dipenuhi maka bayangan I terhadap fungsi f belum tentu berupa interval tertutup.

Contoh 11.10. Diberikan fungsi $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Kita akan menyelidiki bayangan interval $I_1 := (-1, 1)$ dan $I_2 := [0, \infty)$ terhadap fungsi f. Pertama, perhatikan nilai fungsi $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$. Fungsi ini mencapai maksimum di $x = 0 \in (-1, 1)$ dengan $M = \max_{x\in(-1,1)} f(x) = 1$ maka diperoleh $f((-1, 1)) = (\frac{1}{2}, 1]$ bukan interval tertutup. Begitu juga fungsi ini menurun untuk $x > 0$ menuju nol sehingga $f([0, \infty)) = [1, 0)$ juga bukan interval tertutup. Ilustrasinya diberikan pada Gambar 11.5.

Teorema 11.5. *Jika I interval tertutup dan f fungsi yang didefinisikan pada I maka $f(I)$ berupa interval tertutup. Dengan kata lain, bayangan interval tertutup terhadap fungsi kontinu berupa interval tertutup.*

Bukti. Karena f kontinu pada interval tertutup I maka ia mencapai maksimum dan minimum pada I dengan c^* dan c_* secara berurutan adalah titik maksimum dan minimum. Misalkan $M := \max f(I)$ dan $m = \min f(I)$. Jelas berlaku $f(x) \in [m, M]$ untuk setiap $x \in I$, yakni $f(I) := \{f(x) : x \in I\} \subseteq [m, M]$. Sebaliknya, untuk sebarang $y \in [m, M]$, yaitu $f(c_*) < y < f(c^*)$ maka ada c di antara c_* dan c^* sehingga $f(c) = y$. Ini berarti $y \in f(I)$, yakni $[m, M] \subseteq f(I)$. Akhirnya disimpulkan $f(I) = [m, M]$ sebuah interval tertutup. $\square$



Gambar 11.6: Grafik fungsi dan inversnya

range dari f. Sebuah fungsi monoton tegas selalu injektif, jadi mempunyai invers. Pada kesempatan ini kita ingin mengetahui sifat kontinu fungsi invers yang diturunkan dari fungsi asalnya.

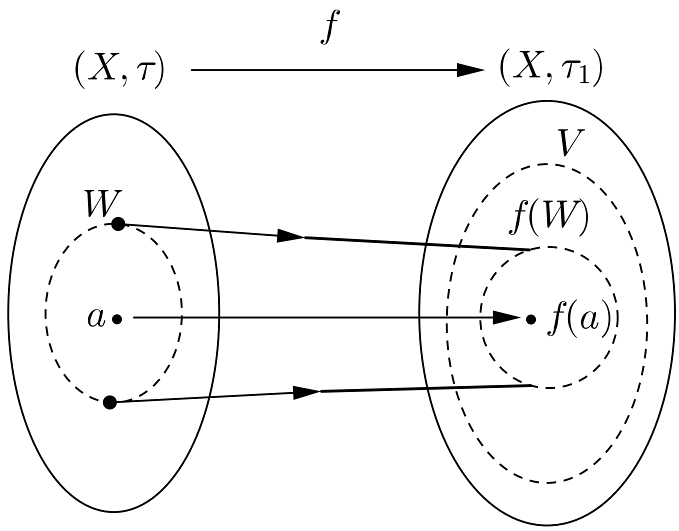
Teorema 11.6. *Misalkan I sebuah interval dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ monoton tegas dan kontinu pada I. Maka fungsi invers $g := f^{-1}$ juga monoton tegas dan kontinu pada $J = f(I)$.*

BUKTI. Asumsikan f naik tegas. Karena I sebuah interval dan f kontinu maka $J = f(I)$ juga sebuah interval. Selanjutnya, karena f naik tegas maka ia injektif sehingga inversnya $g = f^{-1}$ ada pada J. Pertama akan ditunjukkan g juga naik tegas. Misalkan $y_1, y_2 \in J$ dengan $y_1 < y_2$. Maka ada $x_1, x_2 \in I$ sehingga $f(x_1) = y_1$ dan $f(x_2) = y_2$. Karena $f(x_1) < f(x_2)$ dan f naik tegas maka haruslah $x_1 < x_2$, yakni $g(y_1) < g(y_2)$. Terbukti $g = f^{-1}$ naik juga naik tegas. Untuk membuktikan g kontinu pada J, andaikan ada $c \in J$ di mana g tidak kontinu di c. Ini berarti ada loncatan (jump) nilai fungsi di c, yaitu $a = \lim_{x\to c^-} g(x) < \lim_{x\to c^+} g(x) = b$. Ilustrasi keadaan ini diberikan pada Gambar 11.7. Melalui gambar ini, jelas kita dapat mengambil sebuah x dengan $x \neq g(c)$ dan $a < x < b$. Maka x ini mempunyai sifat $x \neq g(y)$ untuk setiap $y \in J$. Ini berarti $x \notin I$, padahal I sebuah interval. Keadaan ini melahirkan kontradiksi. Jadi, haruslah g kontinu di setiap $y \in J$. □

Contoh 11.12. Fungsi akar pangkat-n yang didefinisikan sebagai $g(x) := \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ adalah kontinu pada $[0, \infty)$ karena g adalah invers dari fungsi $f(x) = x^n$. Karena fungsi eksponen $f(x) = e^x$ kontinu pada $\mathbb{R}$ maka inversnya $f^{-1}(x) = \ln(x)$ kontinu pada $(0, \infty)$.

11.4 Kekontinuan dalam Ruang Topologi

Pada bagian ini kita perluas konsep kontinu pada ruang topologi khususnya ruang metrik. Kalau sebelumnya, sebuah fungsi didefinisikan pada domain dan kodomain dengan metrik yang sama, yaitu metrik nilai mutlak, maka sekarang kedua himpunan dilengkapi oleh dua metrik yang berbeda. Berikut ini adalah definisi fungsi kontinu dalam ruang metrik.



Gambar 11.8: Ilustrasi kontinu pada ruang topologi

Teorema 11.8. *Misalkan (X, d) sebuah ruang metrik. Maka, $K \subseteq X$ kompak jika dan hanya jika setiap barisan di dalam K selalu memuat barisan bagian yang konvergen ke sebuah titik di dalam K.*

Bukti. Lihat Lebl (2012) □

Berikut ini adalah teorema pengawetan fungsi kontinu untuk himpunan kompak.

Teorema 11.9. *Misalkan (X, d_Y) dan (Y, d_Y) ruang metrik dan $f : X \to Y$ kontinu. Jika K kompak di dalam X maka $f(K)$ kompak di dalam Y.*

Bukti. Misalkan (y_n) sebarang barisan di dalam $f(K)$. Maka dapat ditulis $y_n = f(x_n)$ dengan (x_n) barisan di dalam K. Karena K kompak, berdasarkan teorema sebelumnya terdapat barisan bagian (x_{n_k}) yang konvergen ke $x \in K$. Karena f kontinu maka selalu berlaku

$$\lim(y_n) = \lim\left(f(x_{n_k})\right) = f\left(\lim(x_{n_k})\right) = f(x) \in f(K).$$

Ini berarti setiap barisan (y_n) di dalam $f(K)$ memuat barisan bagian yang konvergen ke sebuah titik di dalam $f(K)$. Berdasarkan teorema sebelumnya, terbukti $f(K)$ kompak. □

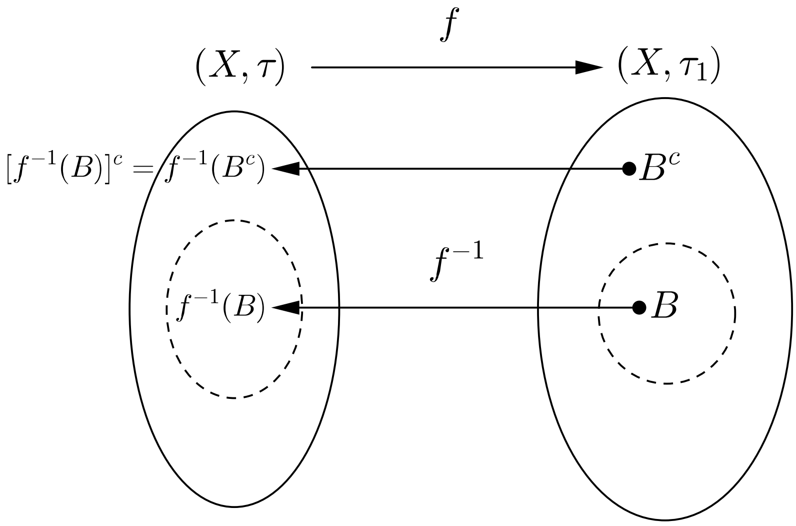
Teorema max-min yang menjamin adanya ekstrem mutlak juga mempunyai versi dalam bentuk himpunan kompak, yaitu jika f fungsi kontinu yang didefinisikan pada himpunan kompak maka ia mencapai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada himpunan tersebut (Lebl, 2012).

Sekarang kita perumum konsep kekontinuan pada ruang topologi.

Definisi 11.4. (Kontinu dalam ruang topologi) Misalkan (X, τ) dan (Y, τ_1) dua ruang topologi. Fungsi $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ dikatakan kontinu di titik $a \in X$ jika dan hanya jika setiap persekitaran V dari $f(a)$ terdapat persekitaran W dari a sehingga $f(x) \in V$ untuk setiap $x \in W$.

Ilustrasi kekontinuan fungsi dalam ruang topologi diberikan pada Gambar 11.8. Pada gambar ini, adanya persekitaran W untuk titik a diakibatkan oleh persekitaran V yang diberikan untuk $f(a)$.

Berikut ini adalah karakterisasi fungsi kontinu yang didefinisikan pada ruang topologi.



Gambar 11.9: Hubungan pre-image dan komplemennya

Latihan 11.5. Bila f kontinu, buktikan himpunan $\{x \in X : f(x) \geq 0\}$ tertutup, sedangkan $\{x \in X : f(x) > 0\}$ terbuka.

Latihan 11.6. Misalkan (X, d_Y) dan (Y, d_Y) ruang metrik dan $f : X \to Y$. Buktikan: jika X terhubung maka $f(X)$ juga terhubung.

Istilah Kunci Bagian IV. Berikut diberikan pengertian praktis beberapa istilah kunci yang sering digunakan dalam Bagian IV ini. Untuk pengertian lebih formal dapat dibaca kembali pada pembahasan lengkapnya.

Titik limit: titik di mana banyak anggota himpunan mengumpul.

Limit fungsi: nilai yang didekati oleh sebuah fungsi ketika variabel bebasnya (argumennya) mendekati sebuah titik limit.

Fungsi konvergen: fungsi yang mempunyai limit di titik limit tertentu.

Fungsi kontinu: fungsi dengan nilai limit dan nilai fungsi sama di setiap titik limit domainnya. Grafiknya fungsinya tidak terputus jika domainnya sebuah interval.

Fungsi perluasan: fungsi yang diperoleh dengan memperluas domain fungsi semula dan bernilai sama kecuali pada domain perluasannya.

Kriteria divergen: syarat cukup bagi sebuah fungsi untuk tidak mempunyai limit di titik limit tertentu.

Fungsi terbatas: fungsi yang magnitudonya dibatasi oleh sebuah bilangan real positif, lawannya takterbatas.

Terbatas lokal: fungsi terbatas hanya di persekitaran titik limit tertentu.

Fungsi nilai mutlak: fungsi yang diperoleh dengan mengambil nilai mutlak fungsi semula.

3. Bagaimanakah hubungan keterbatasan fungsi, kekontinuan, dan adanya limit di sebuah titik?

4. Bagaimana pendapat Anda yang mengatakan bahwa grafik fungsi kontinu tidak pernah terputus?

5. Misalkan sebuah fungsi f didefinisikan pada himpunan diskret $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Buktikan f selalu kontinu di setiap $x_k \in A$. Bagaimana eksistensi limit berikut?

$$\lim_{x \to x_k} f(x).$$

6. Misalkan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(n) := \frac{1}{n^2}$. Selidikilah apakah f kontinu pada $\mathbb{N}$.

7. Tentukan bilangan real x_0 yang harus dikecualikan agar limit berikut ada.

   (a) $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x^2 - 2}$.

   (b) $\lim_{x \to x_0} \arcsin |x + 2|$.

8. Berikan nilai δ yang memenuhi agar setiap x yang berada di dalam daerah $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

   (a) $f(x) = x^2$, $c = 1$, $L = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

   (b) $f(x) = x^3$, $c = 1$, $L = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{10^3}$.

   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 4$, $L = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

9. Misalkan fungsi $f(x) := x^2$ didefinisikan pada interval $I := (0, a)$, $a > 0$ dan $c \in I$.

   (a) Buktikan $\left|f(x) - c^2\right| \leq 2a\,|x - c|$untuk setiap $x \in I$.

   (b) Dengan ketaksamaan ini, buktikan $\lim_{x \to c} f(x) = c^2$.

10. Buktikan limit berikut dengan menggunakan definisi.

   (a) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{1-x} = -1$.

   (b) $\lim_{x \to -1} \frac{x+4}{2x+3} = 3$.

   (c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$.

11. Buktikan limit berikut tidak ada

   (a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

   (b) $\lim_{x \to 0} (x + \operatorname{sgn} x)$.

   (c) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

12. Buktikan $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ tidak ada tetapi $\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ada. Gambarkan pola grafik kedua fungsi ini di sekitar titik limit $x = 0$.

22. Diberikan fungsi Thomae sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x = 0 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ rasional} \\ \frac{1}{n} & \text{untuk } x = \frac{m}{n} \text{ dan } m, n \text{ prima relatif.} \end{cases}$$

Sebagai ilustrasi beberapa nilai fungsi ini adalah sebagai berikut: $f(0) = 1, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}, f\left(\frac{2}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Buktikan fungsi ini kontinu pada pada himpunan bilangan irrasional tetapi tidak kontinu pada himpunan bilangan rasional.

23. Diberikan fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{jika } x \text{ rasional} \\ 1 - x & \text{jika } x \text{ irrasional.} \end{cases}$$

 (a) Buktikan f injektif dan $f(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in [0, 1]$.
 (b) Buktikan f kontinu hanya di $x = 1/2$.

24. Sebuah fungsi dikatakan aditif jika $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap x, y pada domain. Jika fungsi aditif f kontinu di 0 maka ia kontinu di mana-mana.

25. Sebuah fungsi dikatakan multiplikatif jika $f(x+y) = f(x)f(y)$ untuk setiap x, y pada domain. Jika fungsi multiplikatif kontinu di 0 maka ia kontinu di mana-mana.

26. Pada teorema maksimum-minimun, fungsi kontinu pada interval tertutup dipastikan memiliki maksimum dan minimum global. Sebaliknya, fungsi yang mempunyai maksimum dan minimum global belum tentu kontinu seperti pernah diberikan pada sebuah contoh. Berikan contoh fungsi yang tidak kontinu pada interval tertutup sekaligus tidak mempunyai maksimum global.

27. Apa perbedaan prinsip antara kontinu biasa dan kontinu seragam?

28. Misalkan f dan g kontinu seragam pada A. Buktikan!

 (a) $f + g$ juga kontinu seragam pada A.
 (b) fg juga kontinu seragam pada A asalkan f dan g terbatas pada A.
 (c) Tunjukkan bahwa syarat terbatasnya f dan g pada A adalah krusial. (Berikan contoh dua fungsi kontinu seragam, tidak terbatas dan hasil kalinya tidak kontinu seragam)

29. Buktikan fungsi $f(x) := 1/x^2$ kontinu seragam pada himpunan $A := [1, \infty)$, tetapi tidak kontinu seragam pada $B := (0, \infty)$. Selanjutnya, misalkan diberikan $\varepsilon = 0.05$, tentukan $\delta > 0$ yang dapat diambil untuk menunjukkan f kontinu di $x = \frac{1}{2}$ dan $x = \frac{3}{2}$.

30. Misalkan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) := \frac{1}{1 + x^2}.$$

 (a) Buktikan f kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

44. Perhatikan fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0. \end{cases}$$

Jelas bahwa fungsi ini tidak kontinu pada $I := [0,1]$. Buktikan fungsi ini masih memenuhi sifat nilai tengah, yaitu diberikan $a, b \in I$ dengan $a < b$ dan sebuah y yang terletak di antara $f(a)$ dan $f(b)$ ($f(a) < y < f(b)$ atau $f(b) < y < f(a)$), maka ada $c \in I$ dengan $f(c) = y$.

45. Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ naik tegas. Buktikan $D = \{c \in [a,b] : f \text{ tidak kontinu di } c\}$ merupakan himpunan terbilang. Apakah kesimpulan yang sama untuk fungsi turun tegas? (Petunjuk: bila f tidak kontinu di c maka terjadi loncatan (*jump*) di $x = c$, yaitu $j_f(c) := \lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x\to c^-} f(x) > 0$ untuk f naik tegas. Kemudian, total lebar loncatan ini tidak akan melebihi $f(b) - f(a)$, yakni $\sum_{c\in D} j_f(c) \leq f(b) - f(a)$).

46. Diberikan fungsi $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{jika } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{jika } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

   (a) Tentukan $R(f)$.
   (b) Temukan formula untuk $f^{-1} : R(f) \to [0,2]$, kemudian gambarkan grafik keduanya pada dua bidang koordinat yang berbeda.
   (c) Apakah f dan f^{-1} kontinu pada domainnya masing-masing?
   (d) Apakah ada pertentangan hasil yang Anda peroleh dengan teorema kekontinuan invers fungsi?

47. Buktikan sifat-sifat "big-O" dan "little-o" sebagai berikut.

   (a) Jika $f(x) = o\left(g(x)\right)$ maka $f(x) = \mathcal{O}\left(g(x)\right)$.
   (b) Jika $f(x) = \mathcal{O}\left(g(x)\right)$ maka $\mathcal{O}\left(f(x) + g(x)\right) = \mathcal{O}\left(g(x)\right)$ dan $o\left(f(x) + g(x)\right) = o\left(g(x)\right)$.
   (c) $\mathcal{O}\left(f(x)\right)\mathcal{O}\left(g(x)\right) = \mathcal{O}\left(f(x)g(x)\right)$ dan $o\left(f(x)\right)o\left(g(x)\right) = o\left(f(x)g(x)\right)$.
   (d) Jika $g(x) = o(1)$ maka $\frac{1}{1+o(g(x))} = 1 + o\left(g(x)\right)$ dan $\frac{1}{1+\mathcal{O}(g(x))} = 1 + \mathcal{O}\left(g(x)\right)$.

48. Untuk x di sekitar 0, buktikan pernyataan berikut berlaku.

   (a) $x^a = \mathcal{O}(x^b)$ untuk semua $b \leq a$ dan $x^a = o(x^b)$ untuk semua $b < a$.
   (b) $\mathcal{O}(x^a) + \mathcal{O}(x^b) = \mathcal{O}\left(x^{\min\{a,b\}}\right)$, $o(x^a) + o(x^b) = o\left(x^{\min\{a,b\}}\right)$ dan

$$\mathcal{O}(x^a) + o(x^b) = \begin{cases} o(x^b) & \text{jika } b < a \\ \mathcal{O}(x^a) & \text{jika } b \geq a. \end{cases}$$

49. Misalkan (X, τ) dan (Y, τ_1) ruang topologi dan $f : (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$. Buktikan bahwa f kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(B^o) \subseteq \left[f^{-1}(B)\right]^o$ untuk setiap $B \subseteq Y$.

50. Misalkan (X,τ), (Y,τ_1), dan (Z,τ_2) adalah ruang topologi. Misalkan $f : (X,\tau) \to (Y,\tau_1)$, $g : (Y,\tau_1) \to (Z,\tau_2)$ kontinu, buktikan komposisi $g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\tau_2)$ juga kontinu.

Bagian V

TEORI DIFERENSIAL

BAB 12

Derivatif dan Keterdiferensialan

Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them.

Joseph FOURIER

Dua topik sentral di dalam kalkulus adalah diferensial dan integral. Kedua topik ini selama ini dianggap sebuah satu kesatuan dengan hierarki yang sangat ketat, misalnya integral baru dapat dipelajari setelah mempelajari diferensial. Pada kuliah kalkulus, mahasiswa mengembangkan keterampilan teknis dalam perhitungan derivatif dan juga penerapannya. Istilah derivatif muncul pada topik diferensial. Di sini kita akan mempelajari diferensial dari aspek teoretis secara mendalam dengan mengurangi aspek-aspek perhitungan dan penerapannya seperti pada kalkulus.

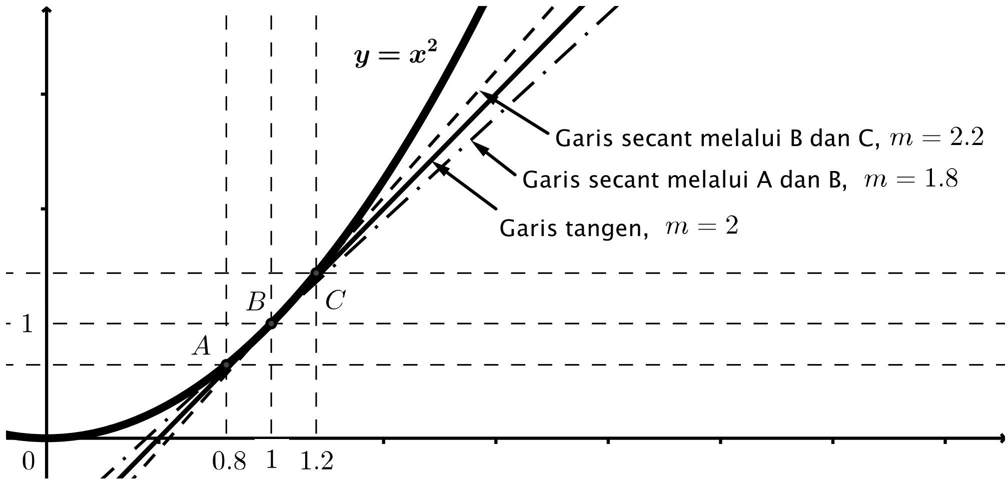
Sebelumnya kita kilas balik sejarah ditemukannya kalkulus diferensial dan integral seperti dikutip dari Bartle dan Sherbert (2000) berikut ini. Diferensial merupakan topik yang cukup 'baru' dalam matematika. Dimulai sekitar tahun 1630-an oleh Fermat ketika menghadapi masalah menentukan garis singgung kurva, dan juga masalah menentukan maksimum atau minimum sebuah fungsi. Kemudian, kaitan antara garis singgung kurva dan velositas atau kecepatan suatu benda bergerak diungkap pada masa berikutnya sekitar tahun 1660 an oleh Sir Isaac Newton (1642-1727). Selanjutnya, Newton mengembangkan temuan ini menjadi teori fluksi yang didasarkan ide intuitif limit; di dalamnya muncul konsep diferensial dengan beberapa istilah dan notasi diciptakan.

Di pihak lain, secara terpisah Gottfried Leibniz (1646-1716) sekitar tahun 1680 menyelidiki bahwa luas daerah di bawah kurva dapat dihitung dengan membalik proses diferensial. Teknik menarik Leibniz ini ternyata dapat memecahkan masalah yang sebelumnya sangat sulit menjadi sangat mudah. Teknik inilah diperkirakan sebagai pemicu ketertarikan bagi banyak matematikawan melakukan riset pengembangan yang pada akhirnya dihasilkan teori koheren yang dewasa ini menjadi kalkulus diferensial dan kalkulus integral.

Perlu ditekankan bahwa teori diferensial dan teori integral adalah dua topik yang konsepnya berbeda. Dikatakan berbeda karena kedua topik pada awalnya berkembang sendiri-sendiri sebelum pada akhirnya dihubungkan oleh teorema fundamental kalkulus. Teorema inilah yang membuat kalkulus menjadi cabang matematika yang paling banyak digunakan dalam bidang terapan. Pada bab ini dipelajari teori diferensial mulai dari pendefinisian, interpretasi, dan sifat-sifat mendasarnya. Untuk teori integral akan dipelajari pada bagian lainnya.

Tabel 12.1: Gradien beberapa garis secant di sekitar garis tangen

x	f(x)	$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$
1.2	1.4400	2.200
1.1	1.2100	2.100
1.05	1.1025	2.050
1	1	–
0.95	0.9025	1.950
0.9	0.8100	1.900
0.8	0.6400	1.800



Gambar 12.2: Garis tangen dan beberapa garis secant di sekitarnya

Ilustrasi lain dari gradien dan derivatif adalah dari mekanika. Kalau diasumsikan x menyatakan waktu tempuh sebuah benda dan $f(x)$ formula jarak tempuhnya maka $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ dapat diinterpretasikan sebagai kecepatan rerata benda tersebut dalam rentang $[c, x]$. Jadi $f'(c)$ merupakan kecepatan benda tersebut di saat $x = c$. Definisi formal derivatif secara matematis diberikan sebagai berikut.

Definisi 12.1. Misalkan $I \subset \mathbb{R}$ suatu interval, dan $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in I$. Bilangan real $L \in \mathbb{R}$ dikatakan derivatif f di titik c jika dan hanya jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga berlaku

$$x \in I \text{ dan } 0 < |x - c| < \delta \longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon. \tag{12.1.1}$$

Bila keadaan ini dipenuhi oleh fungsi f maka dikatakan f terdiferensial di c, ditulis $f'(c) = L$.

Ekspresi $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ disebut hasil bagi selisih (*divided difference*). Penamaan ini sesuai dengan bentuknya sebagai pembagian dua buah selisih $f(x) - f(c)$ dan $x - c$. Jika definisi ini dibandingkan dengan definisi $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dengan mengambil $g(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ pada ekspresi (12.1.1) maka diperoleh:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{12.1.2}$$

Jika limit ini ada maka ia adalah nilai derivatif f di c. Limit dikatakan ada jika nilainya berhingga, yakni $-\infty < L < \infty$. Bila L bernilai $\pm\infty$ maka derivatifnya dianggap tidak ada.

limit hasil kali fungsi maka diperoleh

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)-f(c)\right)=\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)(x-c)$$
$$\lim_{x\to c} f(x)-f(c)=\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\underbrace{\lim_{x\to c}(x-c)}_{=0}$$
$$=f'(c)\cdot 0=0.$$

Diperoleh $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$, yaitu f kontinu di c. □

Pada penjabaran di atas khususnya pada baris terakhir kita telah menyimpulkan perkalian $f'(c)\cdot 0=0$. Persyaratan bahwa $f'(c)$ ada sangatlah penting sebab bila $f'(c)$ tidak ada maka perkalian $f'(c)\cdot 0$ tidaklah terdefinisi.

Berdasarkan teorema ini jelas bahwa himpunan fungsi-fungsi terdiferensial $\mathcal{C}'(I)$ lebih sempit daripada himpunan fungsi-fungsi kontinu $\mathcal{C}(I)$. Secara umum berlaku hubungan inklusif berikut:

$$\mathcal{C}(I)\supset\mathcal{C}'(I)\supset\mathcal{C}''(I)\supset\cdots.$$

Teorema ini tidak mengatakan bahwa jika f kontinu maka f terdiferensial. Sebagai contoh pengingkar, perhatikan fungsi $f(x):=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. Fungsi ini jelas kontinu di 0 seperti yang telah dibahas pada bab limit dan kekontinuan. Perhatikan untuk $x\neq 0$ berlaku:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{jika } x>0\\ -1 & \text{jika } x<0.\end{cases}$$

Dengan mengambil limit satu sisi di 0 maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1 \text{ dan } \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=+1.$$

Mengingat kedua limit satu sisi tidak sama maka disimpulkan $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tidak ada sehingga $f'(0)$ tidak ada. Jadi, f tidak terdiferensial di 0. Ini merupakan kasus fungsi kontinu di mana-mana tetapi tidak terdiferensial di $x=0$. Grafik fungsinya dapat dilihat pada Gambar 12.3 (panel kiri). Di $x=0$, kurvanya tersambung (kontinu) tapi perubahan fungsi di titik baliknya terjadi secara mendadak atau tidak mulus. Oleh karena itu fungsi terdiferensial disebut juga fungsi mulus (*smooth function*).

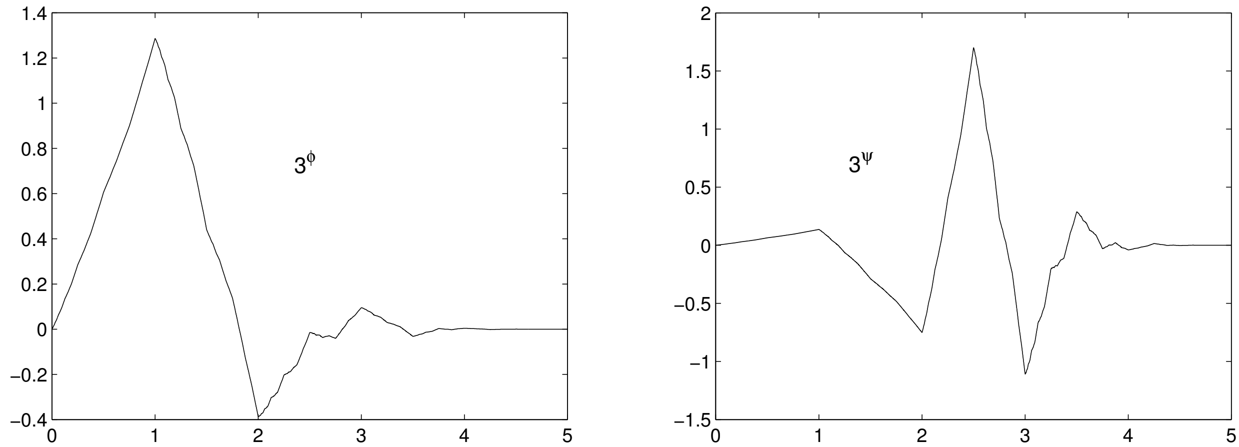
Dengan mengambil kontraposisi pernyataan pada teorema di atas maka disimpulkan bahwa fungsi yang tidak kontinu pasti tidak terdiferensial. Fungsi tangga *flooring* $f(x):=\lfloor x\rfloor$ merupakan contoh fungsi tidak kontinu dan tidak terdiferensial pada himpunan bilangan bulat. Grafik fungsi *flooring* ditunjukkan pada Gambar 12.3 (panel kanan).

Pada tahun 1872, Karl Weierstrass mendefinisikan fungsi f dalam bentuk deret takberhingga berikut:

$$w(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x).$$

Ternyata fungsi ini kontinu di mana-mana tetapi tidak terdiferensial di mana pun (Bartle dan Sherbert, 2000). Buktinya cukup sulit, oleh karena itu tidak diberikan di sini namun akan diberikan pada bab deret fungsi pada bagian akhir buku ini. Untuk jumlah parsial N suku pertama selain dari suku $\cos x$, fungsi ini berbentuk

$$w_N(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 9x+\frac{1}{8}\cos 27x+\cdots+\frac{1}{2^N}\cos 3^N x.$$



Gambar 12.5: Grafik fungsi wavelet Daubechies $N = 3$

Derivatif satu sisi

Mengingat derivatif didefinisikan melalui konsep limit dan pada konsep limit memuat pengertian limit satu sisi maka kita dapat mengembangkan hal yang sama pada derivatif. Misalkan f terdefinisi pada interval I dan $c \in I$. Derivatif kanan fungsi f di c, dinyatakan $f'_+(c)$ didefinisikan sebagai

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{12.1.3}$$

Sejalan dengan itu, derivatif kiri fungsi f di c, dinyatakan $f'_-(c)$ didefinisikan sebagai

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{12.1.4}$$

Jelaslah bahwa jika c titik interior maka $f'(c)$ ada jika dan hanya jika $f'_+(c) = f'_-(c)$. Berdasarkan penjelasan sebelumnya maka fungsi $f(x) := |x|$ mempunyai derivatif kiri dan derivatif kanan tetapi nilainya tidak sama.

Latihan 12.1. Tentukan derivatif kiri dan derivatif kanan fungsi pembulatan $f(x) := \lfloor x \rfloor$ di c bilangan bulat sebarang.

Latihan 12.2. Diberikan fungsi $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai:

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{jika } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & \text{jika } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Hitunglah $f'_-(1)$ dan $f'_+(1)$. Apakah yang dapat Anda simpulkan tentang $f'(1)$? Bagaimana kekontinuan fungsi ini di $x = 1$?

Sebagaimana halnya pada kekontinuan fungsi ternyata sifat aljabar fungsi terdiferensial memiliki pola yang hampir sama. Bahkan, pengembangannya pun banyak menggunakan sifat aljabar fungsi kontinu dan limit fungsi.

12.2 Sifat Aljabar Derivatif

Teorema 12.2. *Misalkan $I \subset \mathbb{R}$ suatu interval, dan $c \in I$ sebuah titik limit. Bila fungsi $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dan $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial di c maka*

maka ia juga kontinu di c seperti telah dijelaskan pada teorema sebelumnya, yaitu $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$. Dengan mengambil limit untuk $x \to c$ pada kedua ruas diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{p(x)-p(c)}{x-c} &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(x) + \lim_{x\to c} f(c)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\lim_{x\to c} g(x) + f(c)\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\ &= f'(c)g(c)+f(c)g'(c).\end{aligned}$$

Akhirnya, kita simpulkan $p = fg$ terdiferensial di c dengan derivatif yang dimaksud.

4. Untuk pembagian dibuktikan sebagai . Untuk $x \neq c$ dibentuk

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c)}{g(c)}}{x-c} &= \frac{\frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)}}{x-c}\\ &= \frac{\frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{x-c}}{g(x)g(c)}\\ &= \frac{\frac{f(x)g(c)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(c)g(x)}{x-c}}{g(x)g(c)}\\ &= \frac{\frac{f(x)(g(c)-g(x))}{x-c}+\frac{(f(x)-f(c))g(x)}{x-c}}{g(x)g(c)}\end{aligned}$$

Dengan mengambil limit kedua ruas dan menerapkan sifat aljabar limit diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{\lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{g(c)-g(x)}{x-c} + \lim_{x\to c} g(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{f(c)-f(x)}{x-c}}{g(c)\cdot\lim_{x\to c} g(x)}\\ &= \frac{f(c)\left(-g'(c)\right)+g(c)f'(c)}{g(c)g(c)}\\ &= \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{\left(g(c)\right)^2}.\end{aligned}$$

□

Latihan 12.3. Lengkapi bukti teorema untuk penjumlahan dan pengurangan dua fungsi terdiferensial.

Pada teorema ini hanya melibatkan dua fungsi f dan g. Sesungguhnya dapat dikembangkan untuk berhingga banyak fungsi $f_1, f_2, \cdots, f_n$ dengan menggunakan prinsip induksi matematika. Untuk sifat jumlahan diperoleh sifat:

$$\left(f_1+f_2+\cdots+f_n\right)'(c) = f_1'(c)+f_2'(c)+\cdots+f_n'(c).$$

Dengan kata-kata, sifat ini dapat dinyatakan bahwa derivatif dari jumlahan fungsi sama dengan jumlah masing-masing derivatif. Pembuktian dengan induksi matematika: untuk $n = 2$ seperti pernyataan teorema. Andai berlaku untuk $n = k$, yaitu $\left(f_1+f_2+\cdots+f_k\right)'(c) = f_1'(c)+f_2'(c)+\cdots+f_k'(c)$, maka untuk $n = k+1$ diperoleh

$$\begin{aligned}\left(f_1+f_2+\cdots+f_k+f_{k+1}\right)'(c) &= \left(f_1(c)+f_2(c)+\cdots+f_k(c)\right)'+f_{k+1}'(c)\\ &= f_1'(c)+f_2'(c)+\cdots+f_k'(c)+f_{k+1}'(c).\end{aligned}$$

Pada bagian ini kita membahas derivatif fungsi komposisi $g \circ f$. Aturan rantai (*chain rule*) merupakan aturan yang dipakai untuk menentukan derivatif komposisi fungsi. Berikut ini teorema yang mendasari aturan rantai ini.

Teorema 12.3. *Misalkan I dan J interval pada $\mathbb{R}$, dan misalkan $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ adalah fungsi-fungsi di mana $f(J) \subseteq I$, dan misalkan $c \in J$. Bila f terdiferensial di c dan g terdiferensial di $f(c)$ maka fungsi komposisi $g \circ f$ terdiferensial di c dengan*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c). \tag{12.3.1}$$

Persamaan (12.3.1) disebut aturan rantai yaitu aturan yang digunakan untuk menentukan derivatif komposisi dua fungsi. Sebelum dibuktikan secara formal berikut ini diberikan dulu ide sederhana pembuktian teorema. Untuk $x \neq c$, bentuk selisih terbagi sebagai berikut:

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} = \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Karena f kontinu maka kondisi $x \to c$ berakibat pada $f(x) \to f(c)$, sehingga dengan mengambil limit kedua ruas untuk $x \to c$ maka (12.3.1) langsung terbukti. Tapi tunggu dulu. Amati pendefinisian suku pertama ruas kanan dapat gagal ketika $f(x) = f(c)$, meskipun $x \neq c$. Oleh karena itu, ide ini belum dapat diterapkan.

Bukti. Fakta yang diketahui pada teorema ini adalah $c \in J$, $f(J) \subseteq I$, f terdiferensial di c dan g terdiferensial di $f(c)$. Tulis $d := f(c)$ dan definisikan $G : I \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$G(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(d)}{y-d} & \text{bila } y \in I,\ y \neq d, \\ g'(d) & \text{bila } y = d. \end{cases}$$

Oleh karena g terdiferensial di d, yaitu $g'(d)$ ada dan berlaku $\lim_{y \to d} G(y) = g'(d) = G(d)$ maka diperoleh G kontinu di d. Oleh karena f kontinu di c dan $f(J) \subseteq I$ maka disimpulkan $G \circ f$ juga kontinu di c, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c}(G \circ f)(x) &= (G \circ f)(c) \\ &= G(f(c)) = G(d) = \lim_{y \to d} G(y) = g'(d) = g'(f(c))\end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis $\lim_{x \to c}(G \circ f)(x) = g'(f(c))$. Menurut definisi fungsi G maka diperoleh

$$g(y) - g(d) = G(y)(y - d)$$

untuk setiap $y \in I$. Jadi, untuk $x \in J$ dan misalkan $y = f(x)$ maka berlaku

$$\begin{aligned} g \circ f(x) - g \circ f(c) &= g\left(f(x)\right) - g\left(f(c)\right) \\ &= g(y) - g(d) \\ &= G(y)(y - d) \\ &= G\left(f(x)\right)(y - d) \\ &= G \circ f(x)(f(x) - f(c)). \end{aligned}$$

Untuk $x \neq c$, bagilah kedua ruas persamaan yang baru dengan $x - c$ untuk mendapatkan relasi berikut:

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(c)}{x - c} = G \circ f(x) \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Derivatif fungsi belum tentu kontinu. Fungsi yang terdiferensial dipastikan kontinu, tetapi derivatif fungsinya belum tentu kontinu. Contoh berikut ini menjelaskan fakta ini.

Contoh 12.6. Misalkan fungsi f didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{bila } x \neq 0 \\ 0 & \text{bila } x = 0. \end{cases}$$

Selidikilah apakah $f'(x)$ ada. Bila ada, apakah ia kontinu.

PENYELESAIAN. Untuk $x \neq 0$ kita dapat menggunakan aturan rantai bersamaan dengan formula derivatif hasil kali pada cabang atas, yaitu diperoleh

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), \text{ untuk } x \neq 0.$$

Untuk $x = 0$ tidak ada aturan yang dapat digunakan. Oleh karena itu dikembalikan ke definisi derivatifnya, yaitu

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0.$$

Langkah terakhir menggunakan hasil yang pernah dipelajari pada pokok bahasan limit. Jadi fungsi f terdiferensial pada $\mathbb{R}$ dengan derivatifnya diberikan oleh

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{bila } x \neq 0 \\ 0 & \text{bila } x = 0. \end{cases}$$

Perhatikan nilai 0 pada derivatif f' (cabang bawah) tidak diperoleh dari $f(0) = 0$, tapi melalui definisi derivatif. Perhatikan pula bahwa fungsi f kontinu di $x = 0$ tetapi fungsi f' tidak kontinu di $x = 0$ karena limitnya tidak ada di $x = 0$. Fakta ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f'(x) &= \lim_{x \to 0} (2x \sin(1/x) - \cos(1/x)) \\ &= \lim_{x \to 0} 2x \sin(1/x) - \lim_{x \to 0} \cos(1/x) \\ &= 0 - \lim_{x \to 0} \cos(1/x). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kriteria divergen pada pokok bahasan limit maka dapat ditunjukkan $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$ tidak ada. Akhirnya disimpulkan $\lim_{x \to 0} f'(x)$ tidak ada. Oleh karena itu f' tidak kontinu di 0. □

Contoh ini merupakan kasus di mana fungsi f kontinu tetapi derivatifnya tidak kontinu di suatu titik. Grafik fungsi dan derivatifnya diberikan pada Gambar 12.6. Perhatikan suku x^2 pada $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ membuat fungsi ini terjepit dalam kerangkeng kurva $y = \pm x^2$ (panel kiri), sehingga dengan TKJ pada limit fungsi disimpulkan f konvergen di 0. Sedangkan suku $\cos(1/x)$ pada $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ membuat grafiknya berosilasi terus menerus tanpa ada titik yang dituju alias divergen (panel kanan).

Aturan pangkat. Aturan pangkat adalah formula derivatif untuk fungsi $f(x) := x^p$ yang diberikan oleh

$$f'(x) = px^{p-1}. \tag{12.4.1}$$

12.5 Derivatif Fungsi Invers

Diingatkan kembali bahwa sebuah fungsi $f : I \to J$ dikatakan mempunyai invers jika terdapat fungsi $g : J \to I$ sehingga dipenuhi kondisi berikut:

$$f(a) = b \leftrightarrow g(b) = a$$

untuk setiap $a \in I$ dan $b \in J$. Selanjutnya, fungsi g disebut invers fungsi f, ditulis $g := f^{-1}$. Tidak semua fungsi mempunyai fungsi invers. Syarat cukup bagi sebuah fungsi agar ia mempunyai fungsi invers adalah monoton tegas dan kontinu.

Sekarang kita akan menentukan hubungan antara derivatif fungsi dan derivatif inversnya. Andaikan f terdiferensial di $x_0 \in I$ maka kita akan menyelidiki keterdiferensialan fungsi g di titik bayangan $z_0 = f(x_0)$. Mengingat f dan g saling invers maka kita mempunyai dua fakta berikut:

$$f(g(x)) = x \text{ untuk setiap } x \in J$$
$$g(f(x)) = x \text{ untuk setiap } x \in I.$$

Kemudian, aturan rantai sebelumnya diterapkan pada bentuk kedua dan diperoleh

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$
$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{12.5.1}$$

Berdasarkan penjabaran ini, agar supaya g terdiferensial di $z_0 = f(x_0)$ maka haruslah derivatifnya di x_0 tidak nol, yaitu $f'(x_0) \neq 0$. Bila dijabarkan lebih lanjut dengan mengambil $y := f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, dan $g := f^{-1}$ maka diperoleh hasil berikut:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Selanjutnya, variabel y diganti dengan simbol yang lebih umum, misalkan x maka diperoleh derivatif fungsi invers sebagai berikut:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{12.5.2}$$

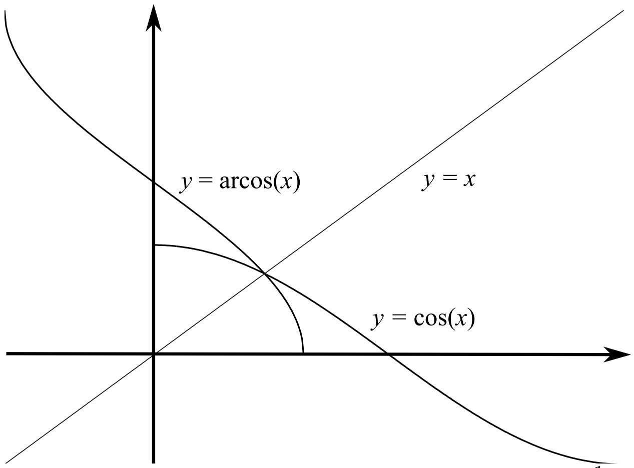
Contoh 12.7. Misalkan $n \in \mathbb{N}$, $I := [0, \infty)$ dan misalkan $f(x) = x^n$. Tentukan formula untuk derivatif invers fungsi f.

Penyelesaian. Dengan mudah dapat dimengerti bahwa f monoton tegas dan kontinu pada I, sehingga inversnya ada yaitu $g(y) = y^{1/n}$ untuk $y \in J := [0, \infty)$ juga monoton tegas, kontinu. Diketahui pula $f'(x) = nx^{n-1}$ untuk semua $x \in I$. Jadi berdasarkan hal ini, jika $y > 0$ maka $g'(y)$ ada, yaitu

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n\left(g(y)\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\left(y^{1/n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{ny^{(n-1)/n}}.$$

Akhirnya disimpulkan $g'(y) = \frac{1}{n}y^{(1/n)-1}$, $y > 0$. □

Contoh ini mengatakan bahwa jika $g(x) := x^{1/n}, x \geq 0$ maka derivatifnya adalah $g'(x) = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$. Ini merupakan cara lain untuk membuktikan aturan pangkat (12.4.1) untuk p bulat negatif, yaitu $p = -n$ dengan n bulat positif.



Gambar 12.7: Grafik fungsi $f(x) = \cos(x)$ dan inversnya $f^{-1}(x) = \text{arc}\cos(x)$

Grafik fungsi $f(x) = \cos(x)$ dan inversnya $f^{-1}(x) = \text{arc}\cos(x)$ diberikan pada Gambar 12.7. Pada Gambar ini juga dilengkapi grafik garis $y = x$ untuk mempertegas kembali bahwa grafik invers fungsi merupakan bayangan pencerminan grafik fungsi asal terhadap garis $y = x$.

Latihan 12.6. Diberikan fungsi $f(x) := x^5 + 3x^3 + 2, x \in \mathbb{R}$. Selidikilah apakah f^{-1} ada pada $\mathbb{R}$ tanpa harus mendapatkan formulanya. Selanjutnya tentukan nilai $f^{-1}(-1), f^{-1}(0)$, dan $f^{-1}(1)$.

Latihan 12.7. Misalkan $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := \sin(x)$. Di dalam interval ini, f naik tegas sehingga dipastikan ia memiliki invers. Sebagaimana diketahui inversnya adalah $f^{-1}(x) = \text{arc}\sin(x)$ dengan $x \in [0, 1]$. Tentukan derivatif dari $f^{-1}(x)$ dan identifikasilah titik-titik di mana invers ini tidak terdiferensial.

Latihan 12.8. Kembali ke aturan pangkat formula (12.4.1). Buktikan jika $y = f(x) = x^p$ maka $f'(x) = px^{p-1}$ di mana p bilangan real sebarang (termasuk bilangan irrasional). (Petunjuk: gunakan notasi Leibnitz dy/dx dengan terlebih dahulu mengambil $\ln y = \ln x^p = p \ln x$, kemudian gunakan formula derivatif untuk logaritma natural ln seperti yang telah diperoleh sebelumnya.

BAB 13

Teorema Nilai Rerata dan Aturan L'Hospital

Those [scientists] who dislike entertaining contradictory thoughts are unlikely to enrich their science with new ideas.

Max PLANCK

Bila kita diberikan informasi tentang derivatif maka kita dapat mengetahui sebagian informasi tentang fungsi itu sendiri. Sebagai ilustrasi, kita andaikan sebuah fungsi f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b). Misalkan x sebuah titik di dalam (a, b). Untuk $y \neq x$ maka kuantitas

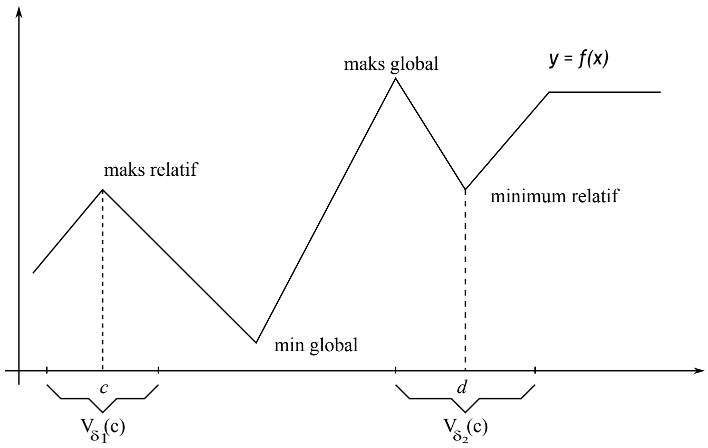
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

merupakan gradien garis secant (tali busur) yang melalui $(x, f(x))$ dan $(y, f(y))$. Gradien ini akan menjadi aproksimasi yang baik bagi derivatif $f'(x)$ ketika y cukup dekat dengan x. Bila y tidak dekat dengan x maka tidak ada jaminan kuantitas ini dapat digunakan sebagai aproksimasi yang baik untuk $f'(x)$. Hal ini diilustrasikan pada Gambar 13.1.

Hubungan antara nilai fungsi dan nilai derivatifnya akan lebih mudah diungkapkan melalui teorema nilai rerata (TNR). Teorema nilai rerata ini memberikan jaminan bahwa pada sebarang subinterval $[x, y]$ pada $[a, b]$ selalu terdapat sebuah titik $c \in (x, y)$ sehingga derivatifnya $f'(c)$ sama dengan gradien tali busur yang melalui $(x, f(x))$ dan $(y, f(y))$ tersebut. Inilah salah satu bentuk hubungan antara nilai fungsi dan nilai derivatif. Lebih dari itu, banyak sifat fungsi yang dapat diketahui melalui derivatifnya seperti adanya ekstrem relatif, sifat kemonotonan, sifat urutan fungsi (ketaksamaan), similaritas fungsi, dan adanya akar atau nilai nol fungsi. Semua sifat-sifat ini dapat diungkap dengan bantuan TNR. Bab ini membahas teorema nilai rerata, interpretasi dan aplikasinya dalam pengembangan teori-teori yang ada di kalkulus. Selain itu dibahas pula aturan L'Hospital untuk menghitung limit fungsi yang bentuknya taktentu.

13.1 Ekstrem Relatif

Ketika mempelajari materi kekontinuan fungsi sebelumnya, kita mengenal istilah ekstrem global yaitu ekstrem yang berlaku pada keseluruhan domain secara global. Dalam banyak kasus, fungsi mempunyai ekstrem-ekstrem yang bersifat lokal artinya hanya ekstrem di daerah



Gambar 13.2: Ilustrasi ekstrem relatif dan ekstrem global

Pengandaian $f'(c) > 0$ berarti $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$. Berdasarkan sifat limit fungsi, terdapat persekitaran V_2 dari c sehingga

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \text{ untuk setiap } x \in V_2.$$

Dengan mengambil $V := V_1 \cap V_2$ maka kedua ketaksamaan ini berlaku untuk setiap $x \in V$. Bayangkan V sebuah interval terbuka $(c-\delta_1, c+\delta_2)$. Interval ini memuat takberhingga banyak x yang terletak di kiri maupun di kanan c. Ambil $x \in V$ dan $x < c$ sehingga berlaku $x - c < 0$. Di lain pihak diperoleh

$$f(x) - f(c) = \underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{>0} \underbrace{(x-c)}_{<0} < 0 \to f(x) < f(c).$$

Fakta ini kontradiksi dengan $f(c) \le f(x)$. Pengandaian berikutnya $f'(c) < 0$ juga akan menghasilkan kontradiksi pula. Jadi, disimpulkan $f'(c) = 0$. □

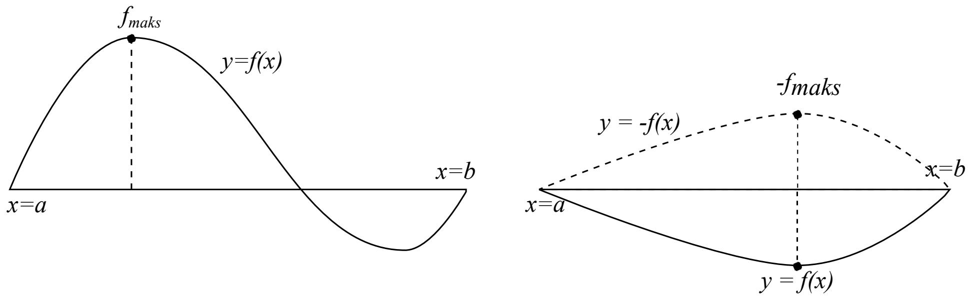
Latihan 13.1. Lengkapi bukti TEI di atas untuk kasus f mempunyai maksimum relatif.

Dua masalah kritis:

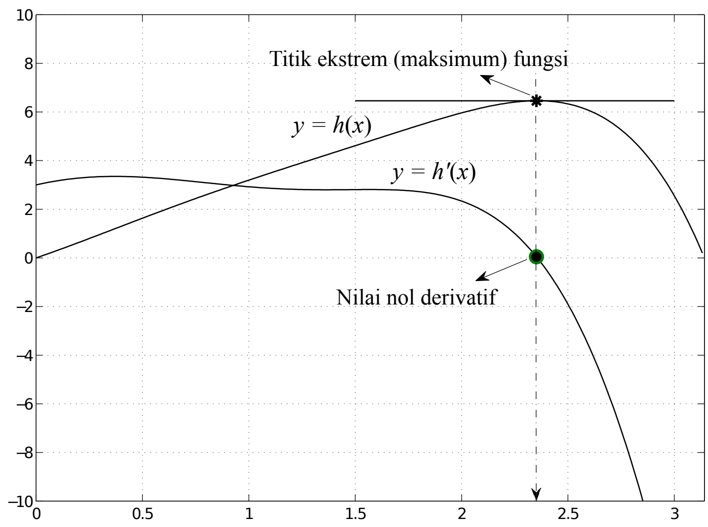
1. Fungsi $f(x) := x^3$ mempunyai sifat $f'(0) = 0$ tetapi $x = 0$ bukan titik ekstrem. Ini berarti $f'(0) = 0$ bukan syarat cukup agar c menjadi titik ekstrem. Ilustrasinya lihat pada Gambar 13.3 (kiri). Terkait dengan masalah kritis ini, kebiasaan mengambil derivatif pertama kemudian diambil harga nolnya bukanlah cara yang sempurna dalam menentukan nilai ekstrem baik minimum maupun maksimum. Ada tahapan lagi untuk memastikan bahwa nilai nol turunan pertama merupakan ekstrem, yaitu menggunakan uji derivatif pertama yang akan dibahas berikutnya.

2. Fungsi $f(x) := |x|$ jelas mempunyai minimum relatif di $x = 0$, tetapi $f'(0)$ tidak ada. Adanya ekstrem relatif tidak berhubungan langsung dengan adanya derivatif dan sebaliknya. Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar 13.3 (kanan). Pada gambar ini fungsi memiliki ekstrem walaupun tderivatifnya tidak ada.

Teorema 13.2. (Teorema Rolle) *Bila fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada interval $I := [a, b]$, terdiferensial pada interval (a, b) dan $f(a) = f(b) = 0$ maka ada $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = 0$.*



Gambar 13.5: Kemungkinan fungsi f tidak identik dengan nol



Gambar 13.6: Ilustrasi teorema Rolle fungsi $h(x) := e^x \sin x + \sin 2x$

Penyelesaian. Dapat diperiksa bahwa fungsi ini kontinu dan terdiferensial pada $[0, \pi]$. Juga, $h(0) = 0$ dan $h(\pi) = e^\pi \sin(\pi) + \sin 2\pi = 0$. Jadi hipotesis teorema Rolle dipenuhi oleh h pada $[0, \pi]$. Jadi terdapat $c \in (0, \pi)$ sehingga $h'(c) = 0$. Oleh karena $h'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + 2\cos 2x$ maka menurut TEI dipastikan persamaan taklinear

$$e^x(\sin x + \cos x) + 2\cos 2x = 0$$

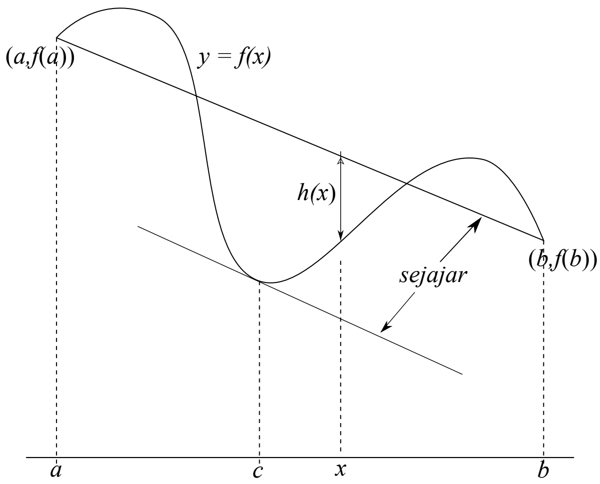
terjamin mempunyai akar di dalam $[0, \pi]$. Ada dua cara mengilustrasikan keadaan ini secara grafis. Dari sudut pandang fungsi asalnya, titik c yang dimaksud adalah titik di mana fungsi h mencapai ekstrem, dalam hal ini maksimum. Dari sudut pandang derivatif, titik c yang dimaksud adalah titik di mana grafik $y := h'(x)$ memotong sumbu X. Ilustrasi ini diberikan pada Gambar 13.6.

□

Eksistensi c pada teorema Rolle tidak harus tunggal. Artinya ada kemungkinan terdapat lebih dari satu c yang bersifat $f'(c) = 0$.

Contoh 13.2. Diberikan fungsi $f(x) := x^3 - x^2 - 2x$ pada interval $[-1, 2]$. Selidikilah eksistensi c pada teorema Rolle yang membuat $f'(c) = 0$.

Penyelesaian. Dapat diperiksa fungsi ini memenuhi hipotesis teorema Rolle pada interval ini. Jadi dipastikan ada $c \in (-1, 2)$ sehingga $f'(c) = 0$. Oleh karena $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$ maka c yang dimaksud tidak lain adalah akar persamaan kuadrat $3x^2 - 2x - 2 = 0$. Dengan



Gambar 13.8: Ilustrasi dan interpretasi TNR

Latihan 13.3. Terapkan fenomena pada contoh soal sebelumnya pada fungsi $f(x) = \sin x$. Gambarkan grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ dan amati pola titik potongnya dengan sumbu X. Apa yang dapat Anda simpulkan?

13.2 Teorema Nilai Rerata (TNR)

Sebagai konsekuensi langsung teorema Rolle, diperoleh teorema nilai rerata (TNR) berikut.

Teorema 13.3. (Teorema nilai rerata (TNR)) *Bila fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada interval $I := [a, b]$, terdiferensial pada interval (a, b) maka ada $c \in (a, b)$ sehingga*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ atau } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{13.2.1}$$

Ilustrasi Berdasarkan persamaan (13.2.1), TNR mengatakan bahwa c adalah suatu titik di mana gradien garis singung (garis tangen) kurva $y = f(x)$ di $x = c$ sejajar dengan garis secant yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ seperti diilustrasikan pada Gambar 13.8.

Bukti. Definisikan fungsi $h : I \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

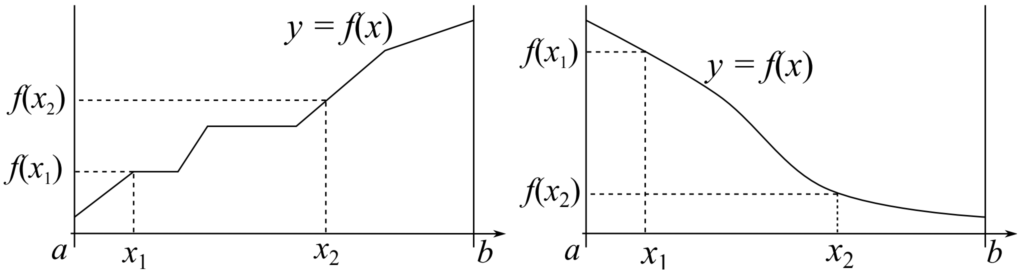
$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Selanjutnya ditunjukkan h memenuhi syarat pada Teorema Rolle:

- h kontinu pada $[a, b]$ karena ia tersusun atas fungsi-fungsi kontinu pada $[a, b]$,
- Dengan argumen yang sejalan, kita simpulkan h fungsi terdiferensial pada (a, b),
- $h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) = 0$ dan $h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = 0$.

Berdasarkan Teorema Rolle, terdapatlah $c \in (a, b)$ sehingga $h'(c) = 0$. Derivatif $h'(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Gambar 13.9: Fungsi naik tidak tegas (kiri) dan turun tegas (kanan)

Teorema 13.6. *Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ terdiferensial pada interval I. Maka*

1. *f naik pada I jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.*
2. *f turun pada I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.*

BUKTI. Kita akan buktikan nomor 1, sedangkan nomor 2 dapat dibuktikan sejalan sebagai latihan.
$(\to)$: Diketahui f terdiferensial dan naik pada I. Untuk $x \neq c$, bentuk suku $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

- Untuk $x > c$ diperoleh $x - c > 0$ dan $f(x) \geq f(c)$ atau $f(x) - f(c) \geq 0$ (karena f naik). Pembagian dua bilangan taknegatif pasti taknegatif, yakni $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$.
- Untuk $x < c$ diperoleh $x - c < 0$ dan $f(x) \leq f(c)$ atau $f(x) - f(c) \leq 0$. Oleh karena itu berlaku $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Menurut teorema pada limit fungsi bahwa limit fungsi taknegatif juga bernilai taknegatif, diperoleh $f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$.

$(\leftarrow)$: Diketahui $f'(x) \geq 0$. Misalkan x_1, x_2 dua titik sebarang pada I dengan $x_1 < x_2$. Terapkan TNR pada interval $[x_1, x_2]$, yaitu terdapat $c \in (x_1, x_2)$ sehingga

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0.$$

Diperoleh $f(x_2) \geq f(x_1)$. Karena x_1, x_2 dipilih sebarang maka disimpulkan f naik pada I. □

Latihan 13.4. Lengkapi bukti teorema ini untuk kasus f fungsi turun.

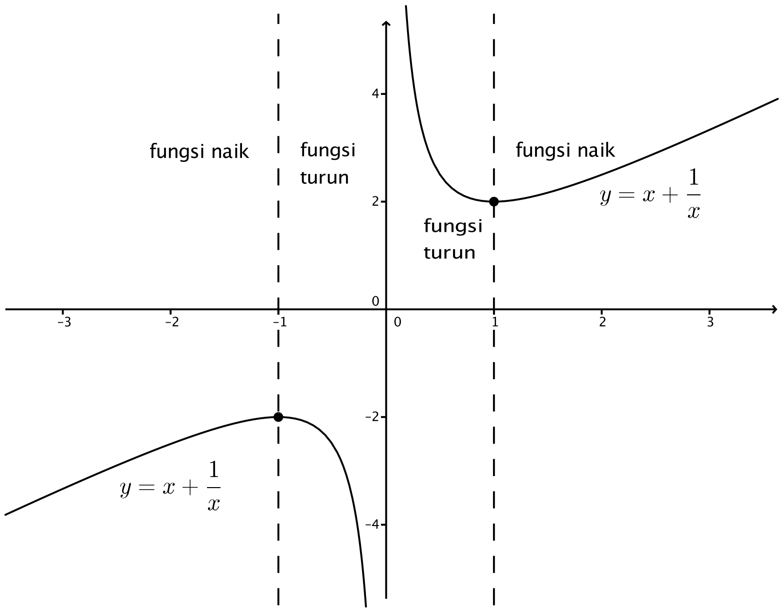
Contoh 13.5. Selidikilah interval di mana fungsi $f(x) = \frac{x}{2} - 2\sin(x/2)$ naik dan interval di mana ia turun dalam interval $[0, 2\pi]$.

PENYELESAIAN. Pertama ditentukan derivatifnya, yaitu $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x/2)$. Kemudian, ditentukan nilai nolnya dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\frac{1}{2} - \cos(x/2) = 0 \leftrightarrow \cos(x/2) = 1/2 \leftrightarrow x/2 = \pi/3 \leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \approx 2.09.$$

Jadi interval $[0, 2\pi]$ terpecah menjadi dua bagian yaitu $[0, \frac{2\pi}{3}]$ dan $[\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$. Pertama cek bagian kiri dengan mengambil sampel $x = \pi/3$, diperoleh $f(\pi/3) = \pi/6 - 2\sin(\pi/6) = \pi/6 - 1 < 0$ sebab $\pi/6 \approx \frac{3.14}{6} < 1$. Jadi fungsi turun pada $[0, \frac{2\pi}{3}]$ dan mudah ditunjukkan bahwa ia naik pada $[\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$. Grafik fungsi dan derivatifnya diberikan pada Gambar 13.10. Tampilan grafik pada gambar ini konsisten dengan hasil teoretisnya. Titik balik yang terjadi di $x = 2\pi/3$ menujukkan terjadi perubahan pola fungsi dari turun menjadi naik. □

Latihan 13.5. Tentukan interval di mana fungsi kuadrat $f(x) := ax^2 + bx + c, a \neq 0$ adalah naik dan juga interval di mana ia turun. Berikan alasan!



Gambar 13.12: Grafik fungsi $y = x + \frac{1}{x}$ dan identifikasi monotonnya

Bukti. Hanya dibuktikan pernyataan 1, sedangkan pernyataan 2 dapat dibuktikan sendiri sebagai latihan. Perhatikan untuk sebarang x dengan $c - \delta < x < c$, terapkan TNR pada $[x, c]$. Terdapatlah $c_x \in (x, c)$ sehingga $f(c) - f(x) = f'(c_x)(c - x) \geq 0$ karena $f'(c_x) \geq 0$. Jadi $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (c-\delta, c)$. Dengan argumen yang sama, untuk $x \in (c, c+\delta)$, terapkan TNR pada $[c, x]$, yaitu ada $c_x \in (c, x)$ sehingga $f(x) - f(c) = f'(c_x)(x - c) \leq 0$. Jadi $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (c, c + \delta)$. Dari kedua hasil ini disimpulkan $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (c - \delta, c + \delta)$, yaitu f mencapai maksimum relatif di c. □

Latihan 13.6. Lengkapi bukti teorema di atas untuk pernyataan 2.

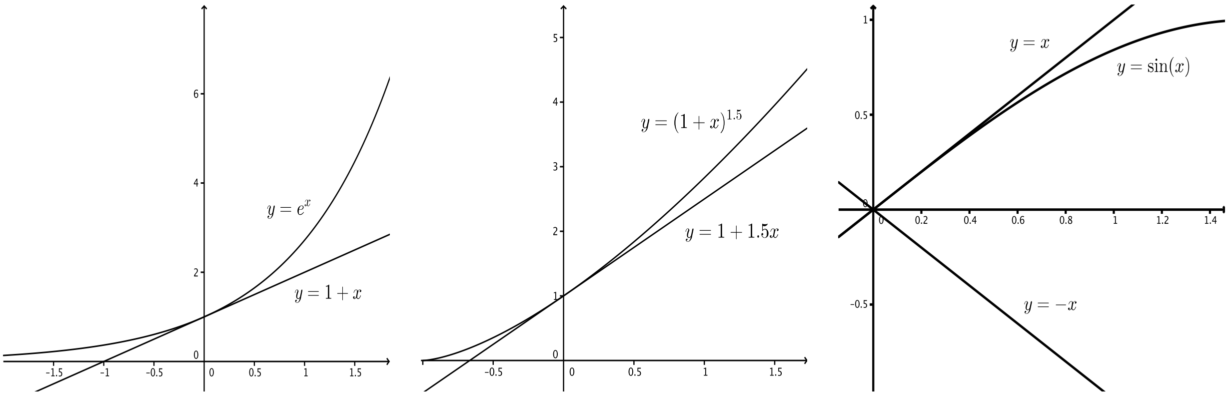
Contoh 13.6. Diberikan fungsi $f(x) := x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Tentukan ekstrem relatif, interval di mana fungsi ini naik dan interval di mana fungsi ini turun.

Bukti. Mulai dari derivatif, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Jadi derivatif terdefinisi kecuali di $x = 0$. Dicari nilai nol derivatif sebagai berikut:

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 1.$$

Mengingat 0 harus dikeluarkan maka kita peroleh partisi domain $(-\infty, -1], (-1, 0), (0, 1)$, dan $[1, \infty)$. Mudah dicek untuk $x \leq -1$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0$ sebab $0 < \frac{1}{x^2} \leq 1$. Untuk $-1 < x < 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 0$ sebab $\frac{1}{x^2} > 1$. Untuk $0 < x < 1$, sama seperti kasus $-1 < x < 0$ yaitu $\frac{1}{x^2} > 1$ sehingga $f'(x) < 0$. Terakhir untuk $x > 1$ maka $0 < \frac{1}{x^2} < 1$ sehingga $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$. Berdasarkan hasil ini maka disimpulkan fungsi naik pada interval $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ dan turun pada kedua interval lainnya. Ilustrasi grafiknya lihat Gambar 13.12. □

Latihan 13.7. Diberikan fungsi $f(x) := x|x^2 - 12|, x \in \mathbb{R}$. Tentukan ekstrem relatif, interval di mana fungsi ini naik dan interval di mana fungsi ini turun. (Petunjuk: hati-hati fungsi ini tidak terdiferensial di titik-titik transisinya $x = \pm 2\sqrt{3}$. Oleh karena itu gunakan teorema uji derivatif pertama.)



Gambar 13.13: Ilustrasi grafis beberapa ketaksamaan

- Untuk $x > 0$ terapkan TNR pada interval $[0, x]$ diperoleh adanya c dengan $0 < c < x$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f'(c)(x - 0) \\ (1+x)^\alpha - 1 &= \alpha(1+c)^{\alpha-1}(x) \\ &> \alpha x \text{ sebab } (1+c) > 1 \text{ dan } \alpha - 1 > 0. \end{aligned}$$

  Jadi disimpulkan $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ untuk $x > 0$.

- Untuk $-1 < x < 0$ terapkan TNR pada interval $[x, 0]$, yaitu ada $c \in (x, 0)$ (ingat di sini c negatif) sehingga

$$\begin{aligned} f(0) - f(x) &= f'(c)(0 - x) \\ 1 - (1+x)^\alpha &= \alpha(1+c)^{\alpha-1}(-x). \\ &\leq -\alpha x \text{ sebab } 0 < (1+c)^{\alpha-1} < 1. \end{aligned}$$

  Jadi disimpulkan $1 + \alpha x \leq (1+x)^\alpha$ untuk $-1 < x < 0$.

Berdasarkan pembahasan kasus demi kasus ini maka disimpulkan bahwa $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$ untuk setiap $x > -1$.

□

Contoh 13.9. Buktikan $-x \leq \sin x \leq x$, $x \geq 0$.

Bukti. Secara grafis, ketaksamaan ini mengatakan bahwa grafik fungsi $y = \sin x$ terkurung di antara grafik fungsi $y = -x$ dan $y = x$. Ilustrasinya diberikan pada Gambar 13.13 (kanan). Ambil $f(x) := \sin x$. Mudah ditunjukkan bahwa fungsi ini memenuhi hipotesis TNR pada interval $[0, x]$. Jadi terdapat $c \in (0, x)$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f'(c)(x - 0) \\ \sin x - \sin 0 &= \cos c \cdot x \\ \sin x &= x \cos c. \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa selalu berlaku $-1 \leq \cos c \leq 1$. Oleh karena $x \geq 0$ maka diperoleh $-x \leq x \cos c \leq x$. Oleh karena $x \cos c = \sin x$ maka disimpulkan $-x \leq \sin x \leq x$ untuk setiap $x \geq 0$. □

Pada mata kuliah analisis numerik, estimasi kesalahan aproksimasi biasanya memuat derivatif fungsi yang sedang diaproksimasi. Estimasi kesalahan menjadi sangat penting dalam metode aproksimasi karena ia memberikan informasi batas atas kemungkinan kesalahan sesungguhnya.

Latihan 13.8. Misalkan f terdiferensial pada $[a, b]$ dan $f(b) < f(a)$. Buktikan f' bernilai negatif untuk suatu titik di dalam $[a, b]$.

Latihan 13.9. Dengan menggunakan TNR, buktikan bahwa gradien garis secant kurva $y = \frac{1}{x}$ yang melalui titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ dengan $0 < a < b$ adalah $m = \sqrt{ab}$.

13.4 Teorema Nilai Antara untuk Derivatif (Darboux)

Pada topik kekontinuan dikenal teorema nilai antara Bolzano (TNA-B) yang mengatakan bahwa fungsi kontinu selalu mempunyai nilai di antara infimum dan supremum nilai fungsinya. Kali ini fenomena yang sama terjadi pada fungsi terdiferensial yang dikenal dengan teorema nilai antara Darboux (TNA-D).

Teorema 13.8. (Teorema nilai antara Darboux) *Misalkan f terdiferensial pada interval I dan derivatifnya kontinu pada I. Andaikan $a, b \in I, a < b$ dan $f'(a) \neq f'(b)$. Bila $\alpha \in \mathbb{R}$ terletak di antara $f'(a)$ dan $f'(b)$ maka ada $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = \alpha$.*

Ilustrasi Sebelum dibuktikan kita ilustrasikan dulu TNA-D ini secara grafis. Perhatikan Gambar 13.15. Kita mempunyai gradien garis singgung kurva di a, yaitu $m_1 = f'(a)$ lebih kecil dari gradien garis singgung di b, yaitu $m_2 = f'(b)$. Nah, untuk setiap α dengan $m_1 < \alpha < m_2$ maka kita menemukan titik c di antara a dan b sehingga garis singgung di titik ini mempunyai gradien α. Dalam ilustrasi ini gradien yang dimaksud adalah $m_3 = f'(c)$.

Bukti. Definisikan $g(x) := f(x) - \alpha x$. Asumsikan $f'(a) < \alpha < f'(b)$. Maka diperoleh $g'(x) = f'(x) - \alpha$ dan

$$g'(a) = f'(a) - \alpha < 0 \text{ dan } g'(b) = f'(b) - \alpha > 0.$$

Fungsi g' kontinu karena f' kontinu, $g'(a)$ dan $g'(b)$ berlainan tanda. Berdasarkan teorema lokasi akar pada bab sebelumnya maka disimpulkan ada $c \in (a, b)$ sehingga $g'(c) = 0$, yaitu

$$f'(c) - \alpha = 0 \to f'(c) = \alpha.$$

□

Pada TNA-D, fungsi derivatif f' diasumsikan kontinu pada $[a, b]$. Hal ini dimaksudkan agar teorema lokasi akar dapat diterapkan. Padahal sebuah fungsi terdiferensial, derivatifnya belum tentu kontinu. Berikut ini diberikan cara pembuktian dengan menghilangkan asumsi kontinu pada derivatif f'.

Bukti. [Alternatif] Definisikan $g(x) := \alpha x - f(x)$. Maka $g'(x) = \alpha - f'(x)$. Dengan tidak mengurangi umumnya pembuktian, kita tetap asumsikan $f'(a) < \alpha < f'(b)$. Maka diperoleh $g'(a) = \alpha - f'(a) > 0$. Ingat kembali definisi $g'(a)$ dalam bentuk limit berikut:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0.$$

Namun, jika $B = 0$ maka tidak ada kesimpulan yang dapat diambil karena nilainya bergantung pada A. Dalam kasus $A \neq 0$ maka limit tersebut menjadi ∞. Dalam kasus ini kita katakan bentuk tersebut tidak mempunyai limit bilangan real. Sebuah fakta menarik ketika $A = 0$ dan $B = 0$, yaitu ketika $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ disubstitusikan maka limit hasil bagi $\frac{f}{g}$ menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$. Bentuk ini disebut bentuk taktentu. Dikatakan taktentu karena nilai limitnya belum pasti, yaitu mungkin ada atau mungkin juga tidak ada. Kita perhatikan ilustrasi dua kasus pada contoh berikut.

Contoh 13.12. Misalkan $f(x) := \alpha x$ dan $g(x) := x$. Dalam kasus ini untuk $c = 0$ maka $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ sehingga muncul bentuk taktentu $\frac{0}{0}$. Selanjutnya, limit dihitung seperti berikut:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha.$$

Ternyata, dalam kasus ini bentuk taktentu $\frac{0}{0}$ memberikan hasil sebuah bilangan real. Selanjutnya untuk $f(x) := x^2$, $g(x) := x$, dan $c = 0$ juga memunculkan bentuk taktentu yang sama.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \infty.$$

Ternyata, dalam kasus ini bentuk taktentu tidak menghasilkan limit bilangan real atau limitnya tidak ada. Marquis Guillame Francois L'Hospital (1661-1704) banyak mempublikasikan teorema limit yang berkaitan dengan bentuk taktentu. Teorema-teorema ini dijadikan dasar untuk menghitung limit yang berbentuk taktentu dan disebut aturan L'Hospital. Aturan ini sangat mudah diterapkan tetapi cukup sulit pembuktian teoremanya.

Bentuk taktentu lainnya diberikan sebagai berikut.

$$\frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty, \infty^0, \infty - \infty.$$

Dari sekian banyak bentuk taktentu, aturan L'Hospital hanya membahas dua bentuk standar yaitu $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$, sedangkan bentuk taktentu lainnya biasanya dapat diarahkan ke salah bentuk standar tersebut.

Aturan L'Hospital Bentuk $\frac{0}{0}$

Dengan asumsi $f(c) = g(c) = 0$, perhatikan bentuk berikut.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}.$$

Dengan mengambil limit pada kedua ruas maka diperoleh

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{13.5.1}$$

Hasil ini akan valid jika semua syarat yang dibutuhkan dalam melakukan operasi hitung ini dipenuhi. Persyaratan tersebut diformalkan dalam teorema berikut.

Teorema 13.9. *Misalkan $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in (a, b)$, $f(c) = g(c) = 0$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $a < x < b$. Bila f dan g terdiferensial di c dan $g'(c) \neq 0$ maka*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Perhatikan, h kontinu pada $[a, b]$ dan kontinu pada (a, b) karena diwarisi oleh sifat fungsi f dan g. Amati bahwa $h(a) = h(b) = 0$. Jadi, h memenuhi hipotesis pada teorema Rolle sehingga terdapat $c \in (a, b)$ dengan $h'(c) = 0$. Dengan mudah derivatif h' diperoleh sebagai berikut:

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) - f'(x).$$

Konsekuensinya,

$$h'(c) \quad = \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) - f'(c).$$

Mengingat $h'(c) = 0$ maka kesimpulan pada teorema terbukti hanya dengan manipulasi ringan bentuk terakhir ini. □

Teorema 13.11. (Aturan L'Hospital bentuk $\frac{0}{0}$) *Misalkan f dan g terdiferensial pada $N := V(c) \setminus \{c\}$ persekitaran c tanpa c. Jika dipenuhi ketiga kondisi berikut:*

1. $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ *dan* $\lim_{x \to c} g(x) = 0$,
2. $g'(x) \neq 0$ *untuk setiap* $x \in N$,
3. $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada,*

maka berlaku

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bukti. Walaupun teorema ini tidak menuntut adanya nilai $f(c)$ maupun $g(c)$, namun kita dapat mendefinisikannya dengan mengambil $f(c) = g(c) = 0$, yakni menggunakan metode perluasan menjadi fungsi kontinu. Berdasarkan hipotesis 1 maka fungsi f dan g hasil perluasan ini kontinu di c karena $\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = 0$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = g(c) = 0$. Untuk $x > c$, terapkan TNR-C pada interval $[c, x]$, yaitu terdapat $c_x \in (c, x)$ sehingga

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Oleh karena $f(c) = g(c) = 0$ maka diperoleh

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{*}$$

Agar (*) terdefinisi dengan baik (*well-defined*) maka haruslah $g(x) \neq 0$ dan $g'(c_x) \neq 0$. Untuk $g'(c_x) \neq 0$ dibenarkan oleh asumsi 2. Untuk menunjukkan $g(x) \neq 0$ kita gunakan metode kontradiksi. Andai ada x sehingga $g(x) = 0$, maka dengan menerapkan teorema Rolle pada interval $[c, x]$ terdapat $c_t \in (c, x)$ sehingga $g'(c_t) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi 2. Argumen yang sama untuk $x < c$, yaitu dengan menerapkan TNR-C pada interval $[x, c]$. Jadi persamaan (*) berlaku untuk setiap $x \neq c$, tentunya dalam persekitaran $V(c)$. Dengan mengambil $x \to c$ maka $c_x \to x$ karena c_x terletak di antara x dan c, sehingga diperoleh

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Penyelesaian. Gunakan definisi derivatif versi kedua, yaitu $f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{1} = e^x \cdot e^0 = e^x. \end{aligned}$$

Aturan L'Hospital telah digunakan untuk menyelesaikan $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$. □

Dalam beberapa kasus, bentuk taktentu lain dapat dibawa ke bentuk $\frac{0}{0}$.

Contoh 13.18. Hitunglah limit berikut

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Penyelesaian. Ini adalah bentuk 1^∞. Misalkan $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ maka dengan mengambil logaritma natural diperoleh

$$\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ merupakan bentuk $\frac{0}{0}$. Dengan aturan L'Hospital diperoleh

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Oleh karena $\ln \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \ln y = 1$ maka diperoleh

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

□

Ilustrasi grafis kedua fungsi pada contoh ini di sekitar titik limit yang dimaksud diberikan pada Gambar 13.16. Hasil limit yang peroleh melalui penerapan aturan L'Hospital konsisten dengan visualisasi grafik yang ada. Ingat nilai $e \approx 2.7183$.

Latihan 13.10. Hitunglah limit berikut dengan menggunakan aturan L'Hospital.

$$\lim_{x\to} \frac{3^x - 2^x}{x}.$$

(Petunjuk: gunakan teknik pendiferensialan pada kalkulus, jika $y = a^x$ maka $y' = a^x \ln a$.)

Aturan L'Hospital Bentuk $\frac{\infty}{\infty}$

Ketika $f(x) \to \infty$ dan $g(x) \to \infty$ untuk $x \to c$ maka kita peroleh bentuk taktentu $\frac{\infty}{\infty}$. Sama halnya pada kasus $\frac{0}{0}$, bentuk taktentu ini pun belum dapat disimpulkan berkenaan ada tidaknya limit. Teorema berikut merupakan aturan L'Hospital bentuk $\frac{\infty}{\infty}$.

Ilustrasi konstruksi ini diberikan pada Gambar 13.17. Pada gambar ini jelas kita selalu dapat memilih δ_2 dengan kondisi yang dimaksud. Oleh karena itu kita memperoleh

$$\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} > 0 \text{ untuk setiap } x \in (c, c+\delta_2).$$

Kita kalikan kedua ruas persamaan (*) dengan bilangan positif $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$ untuk memperoleh

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)} &< r\left(\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\right)\\ \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} &= r\left(1-\frac{f(y)}{g(x)}\right)\\ \frac{f(x)}{g(x)} &= r - r\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Karena asumsi (1) $\lim_{x\to c^+} g(x) = \infty$ maka $\lim_{x\to c^+} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$ karena $f(y)$ sebuah konstanta. Dengan demikian kita mempunyai hasil berikut:

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = r.$$

Berdasarkan definisi limit, untuk $\varepsilon := q - r > 0$, terdapat $\delta_3 > 0$ sehingga

$$\begin{aligned}-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - r < \varepsilon = q - r\\ \frac{f(x)}{g(x)} < q \text{ untuk setiap } x \in (c, c+\delta_3).\end{aligned}$$

Untuk $\varepsilon := r - p > 0$, terdapat $\delta_4 > 0$ sehingga

$$\begin{aligned}-\varepsilon = -(r-p) < \frac{f(x)}{g(x)} - r < \varepsilon = r - p\\ r + p < \frac{f(x)}{g(x)} - r < r - p\\ \frac{f(x)}{g(x)} > p \text{ untuk setiap } x \in (c, c+\delta_4).\end{aligned}$$

Dengan mengambil $\delta := \min\{\delta_3, \delta_4\}$ maka diperoleh

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} < q \text{ untuk setiap } x \in (c, c+\delta).$$

Berdasarkan argumen di awal, akhirnya kita simpulkan

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Pembuktian teorema ini cukup sulit. Beberapa kasus lainnya dapat dibuktikan sendiri sebagai bahan latihan. Versi lain teorema L'Hospital dan pembuktiannya baik bentuk $\frac{0}{0}$ maupun bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dapat dibaca pada buku Bartle dan Sherbet (1994). Di sini teorema L'Hospital dan pembuktiannya merujuk pada Thomson, dkk (2001) dengan beberapa modifikasi untuk memperjelas alur pembuktiannya.

Ternyata masih merupakan bentuk taktentu $\frac{0}{0}$. Oleh karena itu diterapkan aturan L'Hospital sekali lagi untuk memperoleh hasil akhir berikut.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

□

Latihan 13.11. Pada pembuktian teorema L'Hospital di atas, kita baru memperhatikan kasus limit kanan, yaitu $x\to c^+$. Coba lengkapi bukti untuk kasus limit kiri, yaitu $x\to c^-$.

Latihan 13.12. [PENGAYAAN] Formulasikan kembali teorema L'Hospital bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ tersebut untuk beberapa kasus berikut, kemudian coba susun pembuktiannya.

1. $c\in\mathbb{R}$ dan $\lim_{x\to c} g(x)=-\infty$.
2. $c=\infty$ dan $\lim_{x\to c} g(x)=\infty$.
3. $c=\infty$ dan $\lim_{x\to c} g(x)=-\infty$.
4. $c=-\infty$ dan $\lim_{x\to c} g(x)=\infty$.
5. $c=-\infty$ dan $\lim_{x\to} g(x)=-\infty$.

Latihan 13.13. Hitunglah limit berikut:

1. $\lim_{x\to}(1+\frac{\alpha}{x})^x$ dengan α sebuah konstanta sebarang.
2. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{arc}\tan x}\right)$.
3. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$.

BAB 14

Teorema Taylor dan Aproksimasi Fungsi

We know nothing at all. All our knowledge is but the knowledge of schoolchildren. The real nature of things we shall never know.

Albert EINSTEIN

Dalam banyak kasus, fungsi f tersaji dalam bentuk rumit atau malah hanya tersedia dalam bentuk tabular tanpa adanya formula eksplisit. Fungsi-fungsi seperti ini sulit dianalisis, seperti dalam menghitung derivatif dan integralnya, menentukan akar-akarnya, atau menentukan nilai optimumnya. Kendala seperti ini biasanya diatasi dengan cara mengganti fungsi tersebut dengan fungsi yang lebih sederhana dalam konteks aproksimasi.

Fungsi konstan $g(x) := f(c)$ merupakan aproksimasi yang bagus untuk f hanya jika x sangat dekat dengan c, tetapi biasanya menjadi jelek ketika c cukup jauh terhadap x. Bila f terdiferensial pada $[x, c]$ maka dengan TNR terdapat $z \in (x, c)$ sehingga

$$f(x) - f(c) = f'(z)(x - c).$$

Selanjutnya kuantitas $R_0(x) := f'(z)(x - c)$ memberikan ukuran kesalahan aproksimasi fungsi f oleh fungsi konstan $P_0(x)$. Fungsi konstan dipandang sebagai polinomial derajat nol. Tentunya polinomial derajat nol ini tidak dapat diharapkan menjadi aproksimasi yang baik. Oleh karena itu diperlukan polinomial berderajat lebih tinggi untuk aproksimasi yang lebih baik. Alasan pemilihan polinomial untuk aproksimasi karena polinomial merupakan bentuk fungsi sederhana dan 'mudah diurus', antara lain mudah diintegralkan dan didiferensialkan, lebih mudah ditentukan akar-akarnya atau dicari ekstremnya. Selain itu, evaluasi atau perhitungan nilai polinomial pada komputer sangat cepat dibandingkan fungsi lainnya.

Salah satu metode aproksimasi fungsi dengan polinomial adalah menggunakan teknik interpolasi. Metode ini digunakan untuk mengaproksimasi nilai fungsi yang tidak diketahui atau hilang di antara nilai-nilai fungsi yang diketahui. Interpolasi berarti polinomial dipaksa bernilai sama dengan nilai fungsi di titik-titik yang diketahui (*nodes*). Selanjutnya, nilai fungsi yang tidak diketahui diaproksimasi oleh nilai polinomial hasil konstruksi tadi.

Selain itu, metode aproksimasi fungsi dengan polinomial adalah dengan menggunakan deret Taylor yang telah ditemukan oleh Brook Taylor (1685-1731). Namun, bentuk sisa aproksimasi dengan deret ini baru ditemukan pada generasi berikutnya yaitu oleh Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Teorema nilai rerata (TNR) memberikan relasi antara nilai

Jadi polinomial P_n tidak hanya menginterpolasi fungsi f di titik x_0, tetapi para derivatif $P_n^{(k)}$ juga menginterpolasi derivatif $f^{(k)}$ di titik x_0. Polinomial Taylor ini sering digunakan sebagai aproksimasi fungsi f di sekitar titik x_0. Permasalahan utama dalam teori aproksimasi adalah bagaimana pola kesalahan aproksimasi ini. Berikut teorema yang membahas tentang bentuk kesalahan aproksimasi fungsi dengan polinomial Taylor.

Teorema 14.1. (Teorema Taylor) *Misalkan $n \in \mathbb{N}$, $I := [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$. Asumsikan f beserta derivatifnya sampai dengan derajat n kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ terdefinisi (ada) pada (a, b). Jika $x_0 \in I$ maka setiap $x \in I$ terdapat c di antara x dan x_0 sehingga*

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{14.1.3}$$

dengan $P_n(x)$ adalah polinomial Taylor seperti pada (14.1.1) dan $R_n(x)$ disebut suku sisa.

Bukti. Misalkan J interval yang memuat titik ujung x_0 dan x. Jadi kemungkinannya $J := [x_0, x]$ atau $[x, x_0]$ bergantung posisi x di kanan atau di kiri x_0. Didefinisikan fungsi $F : J \to \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} F(t) :&= f(x) - f(t) - \frac{(x-t)}{1!}f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) - \\ &\cdots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Perhatikan F fungsi yang mempunyai variabel t. Dengan pendefinisian ini kita memperoleh $F(x_0) = f(x) - P_n(x) =: R_n(x)$ dan $F(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = 0$. Jadi akan ditunjukkan $F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$. Untuk itu kita definisikan fungsi $G : J \to \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$G(t) := F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0).$$

Diperoleh $G(x_0) = F(x_0) - \left(\frac{x-x_0}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0) = 0$ dan $G(x) = F(x) - \left(\frac{x-x}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0) = F(x) = 0$. Dengan demikian hipotesis teorema Rolle dipenuhi oleh G pada interval J. Jadi terdapat c di antara x dan x_0 sehingga $G'(c) = 0$. Selanjutnya derivatif $G'(t)$ ditentukan sebagai berikut

$$G'(t) = F'(t) + (n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0). \tag{*}$$

Dengan menggunakan formula derivatif hasil kali dan aturan rantai diperoleh derivatif $\frac{dF}{dt} := F'(t)$ sebagai berikut:

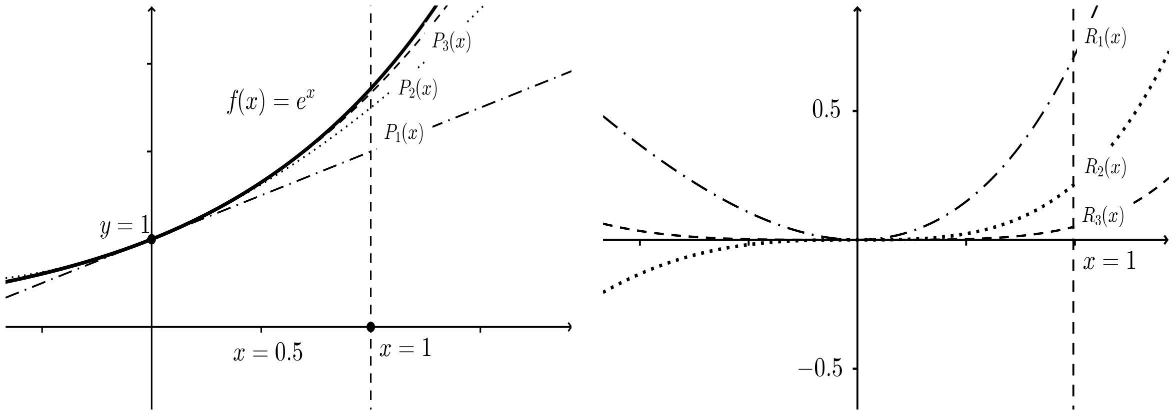
$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - (-f'(t) + (x-t)f''(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) + \cdots + \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right) \\ &= -(x-t)f''(t) - \left(-(x-t)f''(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\right) + \frac{d}{dt}\,(\text{suku selanjutnya}) \\ &= -(x-t)f''(t) + (x-t)f''(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) + \frac{d}{dt}\,(\text{suku selanjutnya}) \\ &= -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t). \end{aligned}$$

Diperhatikan derivatif suku demi suku menghasilkan suku yang saling menghabiskan, kecuali derivatif suku terakhir. Diperhatikan kembali (*), diperoleh

$$F'(c) + (n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0) \quad = \quad G'(c) = 0.$$

Tabel 14.1: Aproksimasi e dengan deret Taylor

n	P_n	Kesalahan mutlak
1	2.00000000000000	0.71828182845905
2	2.50000000000000	0.21828182845905
3	2.66666666666667	0.05161516179238
4	2.70833333333333	0.00994849512571
5	2.71666666666667	0.00161516179238
6	2.71805555555556	0.00022627290349
7	2.71825396825397	0.00002786020508
8	2.71827876984127	0.00000305861778
9	2.71828152557319	0.00000030288585



Gambar 14.1: Aproksimasi fungsi $f(x) = e^x$ dengan polinomial Taylor

Ilustrasi grafis aproksimasi fungsi $f(x) = e^x$ diberikan pada Gambar 14.1. Pada panel kiri disajikan grafik fungsi $y = e^x$ dan beberapa polinomial Taylornya, sedangkan fungsi kesalahan atau suku sisa diberikan pada panel kanan. Jelas bahwa semakin tinggi derajat polinomial semakin bagus aproksimasi fungsinya. Fakta lain kita lihat bahwa aproksimasi lebih baik untuk x yang lebih dekat dengan $x_0 = 0$, sedangkan di titik yang jauh dari x_0 kesalahannya lebih besar. Berdasarkan keadaan ini, aproksimasi Taylor dikatakan bersifat lokal, yaitu hanya di sekitar titik tertentu.

Walaupun secara teknis deret Taylor diperoleh dengan cara menemukan semua derivatif fungsinya, namun prakteknya cara ini tidak selalu sederhana. Oleh karena itu pemanfaatan deret geometri terkadang sangat membantu dalam menentukan deret Taylor.

Contoh 14.2. Tentukan deret Taylor $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ di sekitar $x_0 = 0$.

PENYELESAIAN. Derivatif tingkat tinggi fungsi $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ cukup sulit diperoleh dan bentuknya tidak sederhana. Oleh karena itu kita terapkan trik dengan menggunakan deret geometri berhingga berikut:

$$\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = 1 - x^2 + x^4 - \cdots (-x^2)^n = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

yaitu deret geometri dengan $a = 1$ dan $r = -x^2$. Ambil polinomial derajat $2n$, $P_{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots (-x^2)^n$ maka diperoleh selisih

$$\left|P_{2n} - \frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

$$= \frac{-\frac{2x^2}{3} + \mathcal{O}(x^4)}{x^2(1 - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^4))} = \frac{x^2(-\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x^2))}{x^2(1 - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^4))} = \frac{-2/3 + \mathcal{O}(x^2)}{1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)}.$$

Akhirnya diperoleh

$$\lim_{x \to 0}(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0}\frac{-2/3 + \mathcal{O}(x^2)}{1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)} = -\frac{2}{3}.$$

□

Sesungguhnya limit ini merupakan bentuk taktentu $\infty - \infty$ yang dapat diubah menjadi bentuk taktentu $\frac{0}{0}$.

Latihan 14.2. Selesaikan limit ini dengan menggunakan aturan L'Hospital.

Salah satu kelemahan deret Taylor adalah ketika tingkat kemulusan fungsi rendah. Untuk fungsi kontinu kita hanya dapat mengaproksimasinya dengan polinomial derajat nol (fungsi konstan), sedangkan fungsi terdiferensial order satu hanya dapat diaproksimasi oleh polinomial derajat satu (fungsi linear). Kelemahan berikutnya aproksimasi menggunakan polinomial Taylor adalah ia hanya bersifat lokal. Akibatnya, hasil aproksimasi ini kurang baik jika diterapkan untuk domain yang lebih luas karena *error*-nya akan semakin besar.

Untuk mengatasi kelemahan tersebut kita perlu mengembangkan aproksimasi yang bersifat global dan dapat mengakomodasi fungsi dengan regularitas atau tingkat kemulusan rendah. Misalkan f adalah sebuah fungsi pada $[a, b]$ yang akan diaproksimasi dengan sebuah polinomial p, maka kualitas aproksimasi ditentukan oleh norma maksimum yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|f - p\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|. \tag{14.1.4}$$

Semakin kecil nilai norma ini semakin bagus aproksimasinya. Norma ini disebut norma seragam dan aproksimasi dengan menggunakan norma ini disebut aproksimasi seragam (*uniform approximation*).

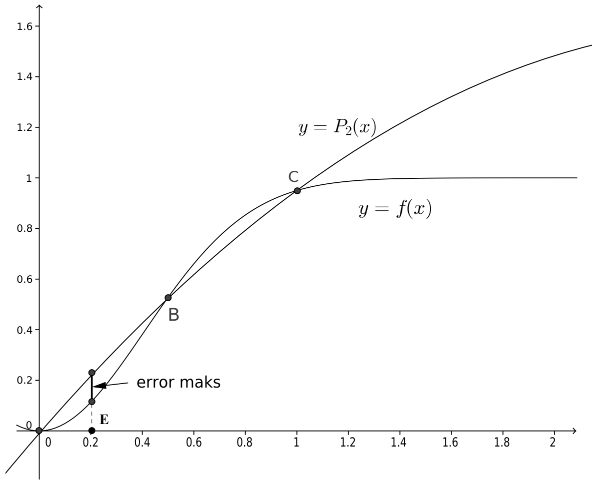
14.2 Interpolasi Polinomial

Ide awal interpolasi polinomial berasal dari bidang terapan untuk mengaproksimasi data yang tidak diketahui atau data yang hilang di antara data yang diketahui. Berangkat dari fakta bahwa melalui dua titik berlainan dapat dibentuk sebuah garis lurus (fungsi linear), melalui tiga titik berlainan dapat dibuat sebuah parabola (polinomial derajat dua), maka secara umum jika terdapat $n + 1$ titik berlainan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ maka selalu dapat dibangun P_n polinomial berderajat n dengan sifat

$$P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n. \tag{14.2.1}$$

Yang dimaksud titik berlainan adalah $x_j \neq x_k$ untuk $j \neq k$.

Polinomial P_n yang memenuhi sifat (14.2.1) disebut polinomial interpolasi. Bila $y = f(x)$ maka $y_i = f(x_i)$ yaitu nilai fungsi $f(x)$ di $x = x_i$ maka polinomial ini disebut polinomial interpolasi fungsi f di $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Titik-titik $x_0, x_1, \cdots, x_n$ ini biasanya disebut juga simpul (*nodes*). Permasalahannya adalah bagaimana menentukan nodes yang optimal dalam arti ia menghasilkan polinomial interpolasi yang akurat untuk fungsi f? Masalah berikutnya adalah bagaimana menentukan polinomial interpolasi yang dimaksud? Berikut ini diberikan beberapa metode interpolasi polinomial.



Gambar 14.2: Aproksimasi fungsi dengan interpolasi polinomial

Metode Lagrange

Pada metode ini, dibangun dulu para polinomial Lagrange untuk node yang diberikan $x_0, x_1, \cdots, x_n$ dengan formula sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_k(x) :&= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\cdots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}, k = 0, 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{14.2.2}$$

Notasi phi $\prod$ digunakan untuk perkalian suku-suku seperti halnya dengan notasi sigma $\sum$ untuk penjumlahan suku-suku. Perhatikan para polinomial Lagrange L_k ini bersifat interpolasi, yaitu

$$L_k(x_i) = \delta_{i,k} := \begin{cases} 1 & \text{jika } i = k \\ 0 & \text{jika } i \neq k. \end{cases} \tag{14.2.3}$$

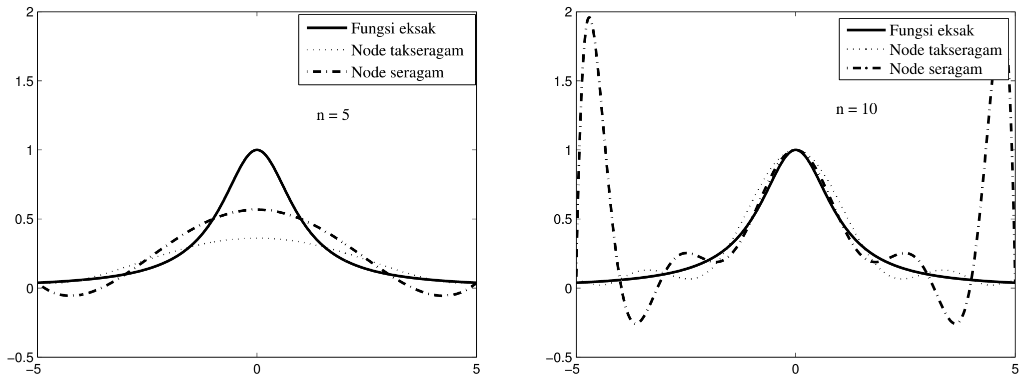
Notasi $\delta_{i,k}$ disebut kronecker delta, kadangkala ditulis juga sebagai $\delta(i,k)$ untuk menyatakan nilai biner 0 atau 1. Sifat interpolasi ini mudah diverifikasi dengan substitusi $x = x_i$ pada $L_k(x)$. Untuk node $x = x_k$ maka pembilang dan penyebut pada (14.2.2) adalah sama sehingga $L_k(x_k) = 1$. Sedangkan untuk node $x_i \neq x_k$ maka x_i sama dengan salah satu dari $x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots, x_1$ atau $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$. Jadi, salah satu suku $(x - x_j)$ pada pembilang bernilai nol, sehingga $L_k(x_i) = 0$.

Selanjutnya, untuk $n+1$ pasangan titik berlainan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ kita definisikan polinomial sebagai berikut:

$$P_n(x) := y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{14.2.4}$$

Maka berlaku $P_n(x_k) = y_0 L_0(x_k) + y_1 L_1(x_k) + \cdots + \underbrace{y_k L_k(x_k)}_{=y_k} + \cdots + y_n L_n(x_k) = y_k$ karena suku-suku lainnya bernilai nol. Dengan sifat ini maka $P_n(x)$ pada (14.2.4) adalah polinomial interpolasi dan biasanya disebut polinomial interpolasi Lagrange.

Contoh 14.5. Bangunlah polinomial interpolasi Lagrange untuk mengaproksimasi fungsi $y = 1 - e^{-3x^2}$ dengan menggunakan node $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_3 = 0.5, x_3 = 0.75$ dan $x_4 = 1$.



Gambar 14.4: Interpolasi polinomial node seragam versus node takseragam

Tabel 14.2: Kesalahan maksimum aproksimasi fungsi dengan polinomial interpolasi

n	*node seragam*	*node takseragam*
5	0.4327	0.6386
10	1.9156	0.1322
20	59.7683	0.0177
30	2.3847×10^3	2.4268×10^{-5}
40	1.0437×10^5	3.3962×10^{-8}

Koefisien $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ditentukan sedemikian hingga dipenuhi kondisi $P_n(x_k) = y_k$ untuk setiap $k = 0, 1, \cdots, n$. Ternyata koefisien ini merupakan selisih terbagi dari $x_0, x_1, \cdots, x_k$ yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= f[x_0] := f(x_0), a_1 = f[x_0, x_1] := \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_2}, \cdots \\ a_k &= f[x_0, x_1, \cdots, x_k] := \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \end{aligned} \tag{14.2.6}$$

Teknik perhitungan koefisien-koefisien ini lebih mudah dilakukan dengan menyusun tabel selisih terbagi dan contoh penerapan metode ini dapat dibaca pada (Hernadi, 2012). Polinomial interpolasi untuk pasangan titik yang diberikan selalu tunggal (Kress, 1998).

Secara intuisi sepintas, semakin banyak node semakin baik aproksimasi fungsi dengan polinomial interpolasi. Tetapi intuisi ini ternyata tidak berlaku. Untuk jelasnya, kita amati kasus pada contoh berikut.

Contoh 14.6. Kita akan mengaproksimasi fungsi $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ di dalam interval $[-5, 5]$ dengan polinomial interpolasi. Pertama tetapkan node $x_0, x_1, \cdots, x_n$ seragam, yaitu $x_i = x_0 + \frac{10i}{n}, i = 0, 1, \cdots, n$ dan pemilihan takseragam dengan $x_i = 5 \cos \frac{i\pi}{n}, i = 0, 1, \cdots, n$. Untuk $n = 5$, grafik fungsi dan kedua polinomial interpolasi ini diberikan pada Gambar 14.4 (panel kiri), sedangkan untuk $n = 10$ disajikan pada panel kanan. Untuk $n = 5$, node seragam diperoleh kesalahan aproksimasi 0.4327 lebih baik daripada node takseragam dengan kesalahan 0.6386. Di lain pihak jika banyaknya node bertambah maka diperoleh aproksimasi yang diberikan oleh node takseragam lebih baik daripada node seragam. Bahkan aproksimasi dengan node seragam divergen seperti ditunjukkan pada Tabel 14.2.

Berdasarkan contoh di atas, pemilihan node dalam interpolasi sangat penting. Berbagai strategi interpolasi banyak dikembangkan pada analisis numerik tingkat lanjut. Un-

Perhatikan $B_n f$ merupakan kombinasi linear dari para polinomial Bernstein dan berupa polinomial berderajat paling tinggi n. Juga, B_n dapat dipandang sebagai operator yang membawa fungsi $f \in \mathcal{C}[0,1]$ menjadi polinomial $B_n f \in \mathcal{P}_n[0,1] \subset \mathcal{C}[0,1]$. Beberapa sifat sederhana operator B_n ini adalah sebagai berikut:

- Linear, yaitu $B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha B_n f + \beta B_n g$, α, β konstanta sebarang.
- Monoton, yaitu jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [0,1]$ maka $(B_n f)(x) \leq (B_n g)(x)$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Sifat linear B_n jelas dipenuhi karena pendefinisian $B_n f$ hanya dipengaruhi oleh nilai $f(\frac{k}{n})$. Untuk sifat monoton, perhatikan jika $f(x) \geq 0$ maka $f(\frac{k}{n}) \geq 0$ untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$. Oleh karena $P_k^n(x) \geq 0$ maka $(B_n f)(x) \geq 0$. Dengan memandang $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0$ maka sifat monoton terbukti secara otomatis.

Dengan penjabaran yang cukup panjang kita dapat memperoleh bentuk eksplisit $B_n f$ untuk beberapa monomial awal $f(x) = 1, x, x^2$ berikut (Davidson & Donsig, 2002):

$$B_n 1 = 1, B_n x = x, B_n x^2 = x^2 + \frac{x - x^2}{n}.$$

Perhatikan untuk $n \to \infty$, $B_n x^2 = x^2 + \frac{x-x^2}{n} \to x^2$. Sifat ini ternyata dipenuhi oleh sebarang fungsi kontinu pada $[0,1]$. Berikut bukti teorema aproksimasi Weierstrass melalui polinomial Bernstein.

Bukti Teorema Weierstrass. Diketahui f kontinu pada $[0,1]$. Maka diperoleh f kontinu seragam dan terbatas pada $[0,1]$, yaitu

- untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dengan $|x - y| < \delta$,
- terdapat $M > 0$ sehingga $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq M$.

Ambil sebarang $a \in [0,1]$. Untuk setiap $x \in [0,1]$, kita mempunyai dua kemungkinan berikut:

- untuk $|x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2$ karena $\frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2 \geq 0$.
- untuk $|x - a| \geq \delta$ kita gunakan konsekuensi langsung kondisi ini $\frac{|x-a|}{\delta} \geq 1 \to \left(\frac{x-a}{\delta}\right)^2 \geq 1$ dan keterbatasan f, yaitu $|f(x) - f(a)| \leq |f(x)| + |f(a)| \leq 2M \leq 2M\left(\frac{x-a}{\delta}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2$. Jadi apapun keadaan a dan x di dalam $[0,1]$, kita selalu mempunyai hubungan
$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2. \tag{*}$$
Dengan sifat linear B_n dan mengingat $B_n 1 = 1$ maka diperoleh
$$B_n(f - f(a)) = B_n f - f(a). \tag{**}$$
Sifat monoton B_n diterapkan pada (*), gunakan (**), dan formula $B_n(x-a)^2 = B_n(x^2 - 2ax + a^2) = x + \frac{x-x^2}{n} - 2ax + a^2$ maka diperoleh penjabaran berikut:
$$\begin{aligned} |B_n f(x) - f(a)| &\leq B_n\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\left(x + \frac{x - x^2}{n} - 2ax + a^2\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\left((x-a)^2 + \frac{x-x^2}{n}\right). \end{aligned}$$

Contoh 14.8. Misalkan kita ingin mengaproksimasi fungsi $f(x) := |x - \frac{1}{2}|$ pada $[0,1]$ dengan polinomial $B_n f$, berapa besar derajat polinomial Bernstein yang dibutuhkan agar $\|B_n f - f\|_\infty < 0.02$?

PENYELESAIAN. Dengan mengikuti tahapan pembuktian teorema Weierstrass, kita tentukan dulu $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Dalam hal ini mudah diperoleh bahwa $M = \frac{1}{2}$. Diketahui $\varepsilon = 0.02$, ditentukan $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} = 0.001$ untuk setiap $|x - y| < \delta$. Gunakan sifat nilai mutlak $||a| - |b|| \le |a - b|$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| |x - \frac{1}{2}| - |y - \frac{1}{2}| \right| \\ &\le \left| x - \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} \right| = |x - y|. \end{aligned}$$

Melihat bentuk terakhir ini kita dapat mengambil $\delta := \varepsilon = 0.02$. Selanjutnya pada bagian akhir pembuktian teorema Weierstrass bahwa $n \ge \left\lceil \frac{M}{\varepsilon\delta^2} \right\rceil := K$, maka cukup diambil $p = \left\lceil \frac{M}{\varepsilon\delta^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1/2}{(0.02)(0.02)^2} \right\rceil = \lceil 62499.9 \rceil = 62500$. Ini merupakan sebuah derajat polinomial yang sangat besar. □

Contoh ini memperjelas betapa lambatnya kekonvergenan aproksimasi Bernstein ini. Oleh karenanya polinomial Bernstein jarang digunakan dalam implementasi aproksimasi sesungguhnya. Sebagai gantinya, penggunakan polinomial sepotong-sepotong lebih menarik dan menguntungkan.

Sebelum membahas aproksimasi sepotong-sepotong, berikut diberikan latihan tentang keistimewaan aproksimasi Bernstein, yaitu derivatif barisan aproksimasi $(B_n f)'$ dapat mengaproksimasi derivatif fungsi f.

Latihan 14.3. Buktikan bahwa derivatif dari $B_{n+1} f$ diberikan oleh

$$(B_{n+1} f)'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k}.$$

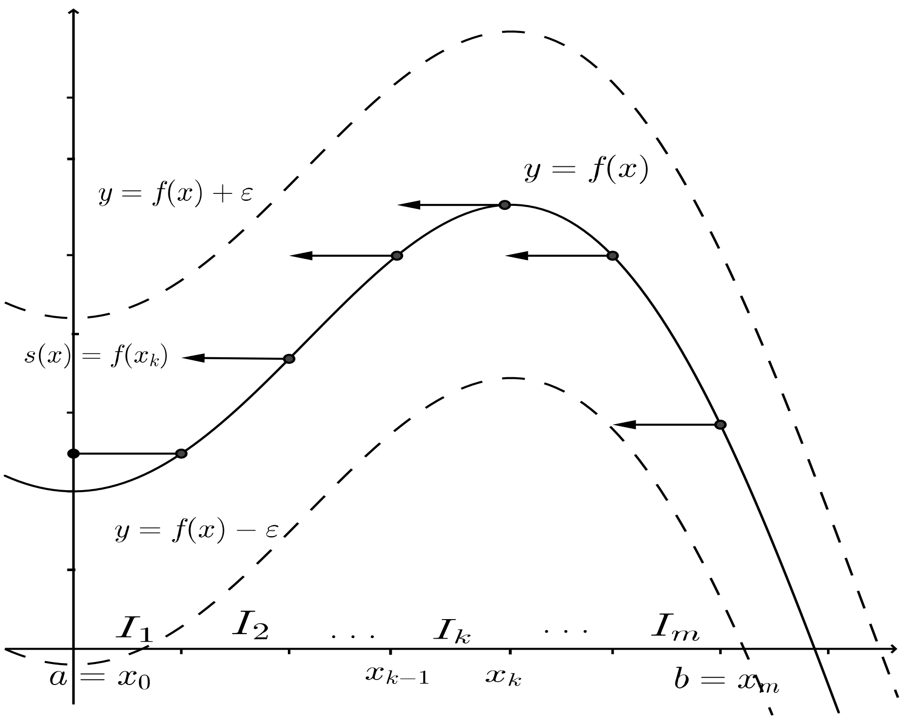
Kemudian, buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \|(B_n f)' - f'\|_\infty = 0$.

14.4 Aproksimasi Sepotong-sepotong

Dalam bidang terapan banyak dibutuhkan aproksimasi fungsi dengan fungsi-fungsi elementer sehingga pengerjaan hitungnya lebih sederhana. Fungsi-fungsi elementer yang dimaksud adalah fungsi konstan (polinomial derajat nol) atau fungsi linear (polinomial derajat satu). Sayangnya, penggunaan fungsi-fungsi elementer ini akan sangat jelek jika diterapkan sekaligus pada keseluruhan domain. Oleh karena itu, domain perlu dipecah-pecah dulu baru kemudian diterapkan aproksimasi dengan menggunakan fungsi-fungsi elementer.

Strategi memecah domain dan menggunakan fungsi elementer untuk mengaproksimasi fungsi pada sub-sub domain yang ada dikenal dengan aproksimasi sepotong-sepotong (*piece-wise approximation*).

Definisi 14.1. (FUNGSI TANGGA) Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ suatu interval dan $s : I \to \mathbb{R}$. Jika s mempunyai hanya berhingga banyak nilai pada I, yakni terdapat subinterval saling asing $I_1, I_2, \cdots I_n$ dengan $I = \cup_{k=1}^{n} I_k$ dan $s(x) = a_k, x \in I_k$ maka s disebut fungsi tangga (*step function*) atau fungsi konstan sepotong-sepotong (*piece-wise constant*).



Gambar 14.7: Konstruksi fungsi tangga untuk aproksimasi fungsi kontinu

Teorema 14.4. *Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ suatu interval dan $f : I \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi kontinu. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat dibangun fungsi kontinu sepotong-sepotong $\ell : I \to \mathbb{R}$ sehingga $|f(x) - \ell(x)| < \varepsilon$ untuk setiap $x \in I$.*

Bukti. Diketahui f kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas I, berarti f kontinu seragam pada I. Berikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat $\delta = \delta(\varepsilon)$ sehingga $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ untuk setiap $x, y \in I$ dengan $|x - y| < \delta$. Misalkan saja $I := [a, b]$, ambil bilangan asli m cukup besar sehingga $h := \frac{b-a}{m} < \delta$. Bagilah interval I menjadi m subinterval seragam $I_1 := [a, a+h]$, $I_k := (a+(k-1)h, a+kh], k = 2, \cdots, m$. Jelas para subinterval I_k ini saling asing dan gabungannya adalah I. Selanjutnya fungsi linear $\ell : I \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai garis yang melalui titik $(a+(k-1)h, f(a+(k-1)h))$ dan $(a+kh, f(a+kh))$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Kita dapat mengambil bentuk $y - y_1 = m(x - x_1)$ untuk formula garis lurus. Dalam kaitan ini ditetapkan $x_1 = a + kh$, $y_1 = f(a + kh)$ dan diperoleh $m = \frac{f(a+kh)-f(a+(k-1)h)}{h}$. Jadi, untuk $x \in I_k$ diperoleh formula untuk $\ell(x)$ sebagai berikut:

$$\ell(x) = f(a + kh) + \frac{f(a + kh) - f(a + (k-1)h)}{h}(x - (a + kh)).$$

Perhatikan untuk $x \in I_k$ maka $|(a + kh) - x| < h$ sehingga $|(a + kh) - x|/h < 1$. Perhatikan juga bahwa $|(a + kh) - (a + (k-1)h| = h < \delta$. Jadi diperoleh

$$\begin{aligned}
|f(x) - \ell(x)| &= \left| f(x) - f(a + kh) + (f(a + (k-1)h) - f(a + kh)) \, \frac{x - (a + kh)}{h} \right| \\
&\leq |f(x) - f(a + kh)| + |f(a + (k-1)h) - f(a + kh)| \frac{|x - (a + kh)|}{h} \\
&\leq |f(x) - f(a + kh)| + |f(a + (k-1)h) - f(a + kh)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Istilah Kunci Bagian V. Berikut diberikan pengertian praktis beberapa istilah kunci yang sering digunakan dalam Bagian V ini. Untuk pengertian lebih formal dapat dibaca kembali pada pembahasan lengkapnya.

Gradien: ukuran kemiringan garis, kadangkala disebut juga slope.

Garis secant: garis yang melalui dua titik pada sebuah kurva, kadangkala disebut juga tali busur.

Garis tangen: nama lain dari garis singgung kurva.

Derivatif: istilah lain dari turunan, didefinisikan sebagai gradien garis singgung kurva di sebuah titik.

Diferensial: operasi untuk mendapatkan derivatif.

Terdiferensial: sifat fungsi yang mempunyai derivatif.

Derivatif kedua: derivatif terhadap derivatif.

Fungsi mulus: istilah yang menggambarkan fungsi terdiferensial karena mulusnya perubahan pola kurvanya.

Fungsi Weierstrass: fungsi unik, yaitu kontinu di mana-mana tetapi tidak terdiferensial di mana-mana.

Wavelet Daubechies: keluarga fungsi yang didefinisikan secara implisit melalui persamaan skala dua, ditemukan oleh Inggrid Daubechies dan banyak digunakan pada pengolahan sinyal digital.

Derivatif satu sisi: derivatif yang hanya memperhatikan limit satu sisi.

Aturan rantai: formula untuk memperoleh derivatif fungsi komposisi.

Teorema nilai rerata: teorema yang menghubungkan nilai fungsi dan nilai derivatifnya.

Aturan pangkat: formula untuk menentukan derivatif monomial $f(x) := x^n$.

Fungsi invers: fungsi arah sebaliknya dari sebuah fungsi.

Ekstrem relatif: maksimum atau minimum yang hanya berlaku di sebuah persekitaran.

Ekstrem interior: maksimum atau minimum yang terjadi di titik interior.

Teorema Rolle: teorema yang menjamin adanya titik di mana garis tangennya di titik tersebut mendatar.

Similaritas fungsi: kemiripan beberapa fungsi yang hanya dibedakan oleh pergeseran nilai pada sumbu Y.

Uji kemonotonan: uji fungsi naik atau fungsi turun.

Fungsi naik: fungsi yang grafiknya tidak pernah turun, lawannya fungsi turun.

Fungsi naik tegas: fungsi yang grafiknya selalu naik, lawannya fungsi turun tegas.

Uji derivatif pertama: uji untuk mengecek apakah di sebuah titik interior terjadi ekstrem relatif.

Estimasi kesalahan: kemungkin terbesar atau batas atas kesalahan aproksimasi.

Polinomial sepotong-sepotong: polinomial yang memiliki berhingga banyak nilai pada domainnya.

Fungsi tangga: polinomial sepotong-sepotong berderajat nol, disebut juga fungsi konstan sepotong-sepotong (*piece-wise constant*).

Regularitas fungsi: tingkat kemulusan fungsi, biasanya diukur dari tingkat derivatif yang dimiliki fungsi tersebut.

Soal Latihan Bagian V Kerjakan soal-soal latihan berikut ini untuk memperkuat pemahaman materi diferensial.

1. Tuliskan perbedaan istilah diferensial dan derivatif. Bagaimana pula makna diferensial pada notasi Leibniz?

2. Misalkan sebuah fungsi f memberikan informasi bahwa $f'(c) = 1$, apa yang dapat diketahui pada grafik fungsi ini? Sketsa dua grafik fungsi f dan g di mana $f'(c) = 1$ dan $g'(c) = \frac{1}{2}$. Titik c dapat dipilih sebarang.

3. Berikan ilustrasi grafis sebuah fungsi yang bersifat $f'(x) \to \infty$ jika $x \to a$ dan $f(x) \to 0$ jika $x \to b$.

4. Gunakan definisi untuk menemukan formula derivatif masing-masing fungsi berikut.

   (a) $f(x) := x^3$.
   (b) $g(x) := \sqrt{x}$.
   (c) $h(x) := \sqrt{x}$.
   (d) $c(x) := \cos(x)$.
   (e) $s(x) := \sin(x)$.

5. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$. Bila f terdiferensial di c, buktikan

$$f(x) - f(c) = (x - c)\,[f'(c) + u(x)]$$

   untuk suatu fungsi u yang bersifat $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$.

6. Jika f terdiferensial di x_0 dan $a \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0)}{h} = af'(x_0).$$

7. Untuk fungsi yang didefinisikan berikut ini, gambarkan grafiknya. Kemudian, tentukan daerah di mana ia terdiferensial dan daerah di mana ia tidak terdiferensial.

   (a) $f(x) := \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) := \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$.

8. Misalkan $n = 2, 3, \cdots$ dan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) := \begin{cases} x^n & \text{jika } x \text{ rasional} \\ 0 & \text{jika } x \text{ irasional.} \end{cases}$$

   Buktikan bahwa f terdiferensial di $x = 0$.

(d) $\ell(x) := L\left(\frac{1}{L(x)}\right)$.

17. Misalkan f dan g terdiferensial sampai dengan order ke-n dan didefinisikan $h(x) := f(x)g(x)$. Buktikan bahwa

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(petunjuk: gunakan induksi matematika pada n). Ekspresi ini disebut formula Leibniz untuk derivatif ke-n untuk perkalian fungsi.

18. Telah dibahas sebelumnya hubungan derivatif fungsi invers sebagai berikut $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ dengan $y = f(x)$. Jika diberikan $f(x) = x^3 - 2x + 1$, tentukan nilai $\left(f^{-1}\right)'(y)$ yang bersesuaian dengan $x = -1, 0$ dan 1.

19. Misalkan fungsi f terdefinisi pad $[a, b]$ dan $a < c < b$. Apa yang dapat terjadi dengan fungsi f jika ternyata $f'(c) = 0$. Sebaliknya, apa yang terjadi pada $f'(c)$ jika fungsi f mencapai ekstrem relatif di c.

20. Jika diketahui $f'(c) = 0$, apa yang harus dilakukan lagi untuk memastikan bahwa f mencapai ekstrem di c.

21. Untuk fungsi di bawah ini, tentukan ekstrem relatif pada domain yang diberikan. Kemudian gambarkan grafik fungsi tersebut dengan menggunakan salah satu program aplikasi yang disukai misalnya GeoGebra.

    (a) $f(x) := x\left|x^2 - 12\right|$, $-2 \leq x \leq 3$.

    (b) $g(x) := 1 - (x-1)^{2/3}$, $0 \leq x \leq 2$.

    (c) $k(x) := x(x-8)^{1/3}$, $x \leq x \leq 9$.

22. Diberikan fungsi f pada $\mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin x^{-1}) & \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0. \end{cases}$$

    (a) Buktikan f terdiferensial pada $\mathbb{R}$.

    (b) Tunjukkan f mencapai minimum mutlak di 0.

    (c) Buktikan nilai f' positif sekaligus negatif pada setiap persekitaran 0.

    Situasi seperti ini sulit dalam menerapkan uji ekstrem. Ilustrasi grafik fungsi dan derivatifnya diberikan pada Gambar 14.9.

23. Diberikan fungsi $f(x) := xe^{-\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}$, $x \neq 0$. Gambarkan grafik fungsi f, kemudian

    (a) Selidikilah kelakuan asimptotik di $\pm\infty$. (fungsi f dikatakan asimptotik ke kurva $c(x)$ untuk $x \to \infty$ jika $\lim_{x\to\infty} |f(x) - c(x)| = 0$. Untuk $x \to -\infty$ menyesuaikan)

    (b) Tentukan semua titik kritisnya, yaitu titik di mana derivatifnya bernilai nol.

    (c) Hitunglah $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ dan $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.

29. Dengan menggunakan teorema Rolle, buktikan bahwa di antara setiap dua akar persamaan suku banyak $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ selalu terdapat sebuah akar persamaan $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$.

30. Menyambung pertanyaan sebelumnya, jika persamaan polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mempunyai n akar berbeda, tentukan banyak akar yang dimiliki oleh persamaan $p'(x) = 0$.

31. Untuk setiap fungsi f berikut, temukan c yang memenuhi TNR pada interval yang dirujuk.

    (a) $f(x) := x^2 + 2x - 1$, $[0, 1]$.

    (b) $f(x) := x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

    (c) $f(x) := \sqrt{x-1}$, $[1, 3]$.

32. Gunakan teorema nilai rerata (TNR) untuk membuktikan kebenaran ketaksamaan berikut.

    (a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$.

    (b) $a^{1/n} - b^{1/n} < (a-b)^{1/n}$ dengan $a > b > 0$ dan $n = 2, 3, \cdots$.

    (c) $(x-1)/x < \ln x < x - 1$ untuk $x > 1$.

33. Gunakan TNR untuk membuktikan membuktikan kebenaran ketaksamaan berikut.

    (a) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ pada $(0, \pi/2]$.

    (b) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$ pada $(0, \pi/2]$.

    (c) $\tan x < x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$ untuk $0 < x < 1$.

34. Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) kecuali mungkin di sebuah titik $x_0 \in (a, b)$. Jika $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ ada, buktikan $f'(x_0)$ dengan $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.

35. Diberikan tiga fungsi unik sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \text{ dan } f(0) = 0, \\
g(x) &= 2x^2 + f(x), \\
h(x) &= x + 2f(x).
\end{aligned}
$$

    Grafik ketiga fungsi ini diberikan pada Gambar 14.10.

    (a) Buktikan $x = 0$ adalah titik kritis f tetapi bukan titik ekstrem lokal maupun titik balik.

    (b) Buktikan g mencapai global minimum di 0, tetapi g' berosilasi takhingga kali di dalam $(-\varepsilon, 0)$ dan $(0, \varepsilon)$ untuk $\varepsilon > 0$ sebarang. Apakah fakta ini bertentangan dengan uji derivatif pertama?

    (c) Tunjukkan $h'(0) > 0$, tetapi h tidak monoton naik pada sebarang interval yang memuat 0.

39. Pada pembahasan sebelumnya diketahui bahwa walaupun sebuah fungsi terdiferensial, namun derivatifnya belum tentu kontinu. Bila f konveks pada interval terbuka $I := (a,b)$ dan f terdiferensial pada (a,b), buktikan f' kontinu pada (a,b).

40. Misalkan $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ sebuah himpunan bilangan real terbilang. Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - a_k|}{10^k}.$$

   (a) Buktikan f konveks pada $\mathbb{R}$.

   (b) Buktikan f terdiferensial pada $\mathbb{R} \backslash A$, tetapi tidak terdiferensial pada A.

41. Sebagaimana diketahui teorema Taylor adalah berkaitan dengan aproksimasi lokal. Artinya, bila polinomial Taylor di sekitar x_0 digunakan untuk mengaproksimasi fungsi maka aproksimasi akurat hanya di sekitar x_0. Semakin jauh x dari x_0 semakin besar error aproksimasinya. Misal diberikan fungsi $f(x) = \sin x$ dan $x_0 = 0$.

   (a) Temukan $p_3(x)$ polinomial Taylor derajat 3 di sekitar x_0 untuk fungsi f.

   (b) Tentukan persekitaran $V_\delta(0)$ sehingga aproksimasi fungsi f dengan P_3 di dalam persekitaran ini errornya tidak melebihi 3×10^{-4}.

   (c) Gambarkan grafik fungsi f berikut polinomial Taylornya $p_3(x), p_5(x)$ dan $p_7(x)$. Apa yang dapat Anda simpulkan dari visualisasi ini.

42. Berikan estimasi *error* jika fungsi $f(x) = \sqrt{1+x}$ diaproksimasi oleh $1 + x/2$ pada daerah $|x| < 0.01$.

43. Temukan polinomial derajat tiga dari fungsi berikut ini di sekitar x_0, kemudian hitunglah estimasi *error*-nya di titik b.

   (a) $f(x) = \tan x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ dan $b = 0.75$.

   (b) $h(x) = x^4$, $x_0 = 1$ dan $b = 0.99$.

   (c) $k(x) = \sinh x$, $x_0 = 0$ dan $b = 0.0025$.

44. Gunakan deret Taylor dan estimasi *error* pada deret alternating untuk membuktikan ketaksamaan berikut.

   (a) $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1, x \neq 0$.

   (b) $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$, $x \neq 0$.

45. Bila $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$, buktikan bahwa

$$\left| \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \right) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

   Kemudian aproksimasilah nilai $\ln 1.5$ dengan error tidak melebihi 0.013. (Petunjuk: tentukan banyak suku yang dibutuhkan terlebih dahulu).

Bagian VI

TEORI INTEGRAL

BAB 15

Pendefinisian Integral

One can not understand . . . the universality of law of nature, the relationship of things, without an understanding of mathematics. There is no way to do it. .

Richard P. FEYNMAN

Pada kalkulus dikenal dua macam integral yaitu integral taktentu dan integral tertentu. Untuk memahami istilah ini, perhatikan dua ilustrasi berikut.

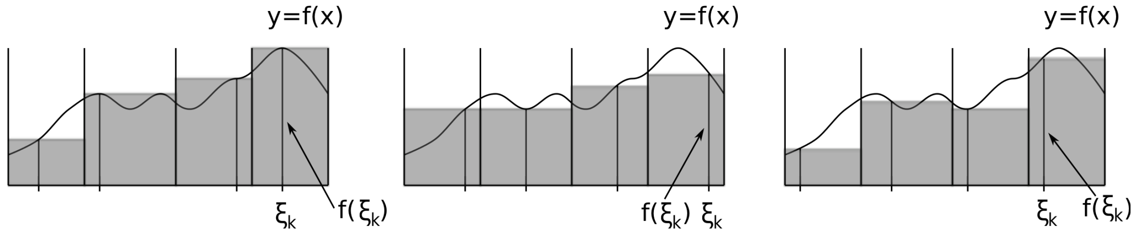
$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

dengan C adalah konstanta sebarang, dan

$$\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^4 - 1^4\right) = \frac{15}{4}.$$

Ekspresi pertama adalah integral taktentu (*indefinite integral*) atau antiderivatif dan ekspresi kedua adalah integral tertentu (*definite integral*). Sepintas lalu kedua bentuk integral ini identik dan teori yang mendasarinya adalah sama yaitu menggunakan konsep derivatif. Selama puluhan tahun para matematikawan mendefinisikan integral tertentu langsung dari antiderivatif. Padahal sesungguhnya cara ini kurang pas karena dapat menghambat perkembangan teori integral itu sendiri seperti pernah dikemukan oleh Cauchy (Thomson, 2001). Cauchy melihat bahwa pengertian integral tertentu dapat dipisahkan dari integral taktentu. Untuk ini dia kembali ke geometri orang-orang Yunani kuno yang menyajikan metode menghitung luas daerah di dalam kurva tertutup dengan pendekatan bangun-bangun sederhana (persegi panjang, segitiga, bujursangkar).

Kembali ke contoh ilustrasi di atas, bahwa integral berikut $\int_1^2 x^3\,dx$ dapat diinterpretasikan sebagai luas daerah di dalam kurva yang dibatasi oleh grafik $y = x^3$, garis $x = 1$ dan $x = 2$ serta garis $y = 0$ (sumbu X). Tidak satupun rumus luas bangun geometri yang dapat menghitung luas daerah ini secara eksak. Untuk menyelesaikan masalah ini ditempuh dengan cara aproksimasi melalui sekumpulan persegi panjang yang disusun pada luasan yang dimaksud. Caranya adalah dengan membagi interval $[1, 2]$ dalam n subinterval $[1, 1 + \frac{1}{n}]$, $[1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}], \cdots, [1 + \frac{n-1}{n}, 2]$. Selanjutnya dibangun para persegi panjang dengan alas subinterval tersebut. Secara khusus, ada dua kemungkinan dari sekian banyak kemungkinan pemilihan tinggi persegipanjang, yaitu diambil ujung kiri dan ujung kanan subinterval seperti disajikan pada Gambar 15.1. Pada panel kiri, luas diaproksimasi oleh



Gambar 15.2: Berbagai jumlahan Riemann

Lebar masing-masing subinterval tidak harus sama. Berdasarkan definisi ini, maka partisi paling sedikit memuat dua titik ujung interval a dan b.

Contoh 15.1. Berikut ini contoh partisi dan bukan partisi pada $I := [0, 1]$.

1. $\pi_1 = \{0, 1\}$ adalah partisi pada I dengan norma $|\pi_1| = 1$.

2. $\pi_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ adalah partisi dengan norma $|\pi_2| = \max\{(\frac{1}{3}-0), (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}), (1-\frac{1}{2})\} = \frac{1}{2}$.

3. $\pi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\}$ partisi pada I dengan norma $|\pi_n| = \frac{1}{n}$. Partisi π_n disebut partisi seragam karena lebar setiap subintervalnya sama. Banyak titik pada partisi ini bergantung pada $n \in \mathbb{N}$.

4. $Q_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ bukan partisi karena titik ujung interval $x = 1$ tidak masuk Q_1.

5. $Q_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\}$ bukan partisi sebab urutan $0 := x_0 < x_1 := \frac{1}{3} < x_2 := \frac{1}{4} < x_3 := 1$ tidak dipenuhi. Dengan kata lain Q_2 bukan himpunan terurut sehingga bukan partisi.

Pembahasan konsep partisi lebih detail akan diberikan pada pokok bahasan berikutnya. Selanjutnya dibentuk jumlahan berikut.

$$S(\pi, f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{15.1.1}$$

dengan $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ disebut label (*tag*) subinterval $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Ekspresi (15.1.1) disebut **jumlahan Riemann** (*Riemann sum*). Jumlah Riemann ini sesungguhnya fungsi dari label ξ_k. Artinya setiap label berganti maka nilai jumlahan Riemann juga berubah. Interpretasi beberapa jumlahan Riemann ditunjukkan pada Gambar 15.2.

Contoh 15.2. Misalkan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := x^2$. Hitunglah jumlahan Riemann fungsi f pada partisi berikut labelnya berikut:

1. $\pi_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ dan $\xi = \{\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}\}$.

2. $\pi_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ dan $\xi = \{\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$.

Penyelesaian. Perhatikan kedua partisi sama persis, tetapi labelnya berbeda.

1. $S(f, \pi_1) = f(\frac{1}{6})(\frac{1}{3} - 0) + f(\frac{2}{6})(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + f(\frac{5}{6})(1 - \frac{2}{3}) = 0.2278$.

2. $S(f, \pi_2) = f(\frac{1}{6})(\frac{1}{3} - 0) + f(\frac{4}{9})(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + f(\frac{8}{9})(1 - \frac{2}{3}) = 0.3385$.

□

Bukti. Untuk sebarang partisi $\pi = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ kita memperoleh jumlahan Riemann berikut.

$$\begin{aligned} S(\pi, f) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= \alpha(x_n - x_0) = \alpha(b - a). \end{aligned}$$

Oleh karena sebarang partisi dan sebarang label (ξ_k), nilai $S(\pi, f) = \alpha(b-a)$ tidak bergantung pada n maka berdasarkan (15.1.2) disimpulkan $\int_a^b f(x)\, dx = \alpha(b-a)$. □

Contoh 15.4. Buktikan $\int_1^2 x^3\, dx = \frac{15}{4}$ dengan menggunakan partisi seragam.

Bukti. Cukup gunakan (15.1.2) dengan $a = 1$, $b = 2$ dan $f(x) = x^3$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(1 + \frac{k}{n}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n})^3 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + 3\frac{k}{n} + 3\frac{k^2}{n^2} + \frac{k^3}{n^3}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1}_{} + \frac{3}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 =: p \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan rumus jumlahan $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ dan $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} p &= 1 + \frac{3}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) + \frac{3}{n^3}\left(\frac{n}{6}(n+1)(2n+2)\right) + \frac{1}{n^4}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 \\ &= 1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \mathcal{O}(\frac{1}{n}) \\ &= \frac{15}{4} + \mathcal{O}(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

dengan $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ menyatakan sebuah suku yang didominasi dari atas oleh $\frac{1}{n}$, yaitu $\mathcal{O}(\frac{1}{n}) = K \cdot \frac{1}{n}$ untuk suatu konstanta K. Fakta ini mudah ditunjukkan dengan menjabarkan semua suku dalam operasi di atas (lihat definisi big-O pada bab sebelumnya). Perhatikan bahwa berlaku $\lim_{n\to\infty} \mathcal{O}(\frac{1}{n}) = 0$. Akhirnya diperoleh

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{15}{4} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})\right) \\ &= \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

□

Penyelesaian. Kita ubah dulu ke dalam bentuk standar berikut.

$$n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{k}{n})}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+(\frac{k}{n})\right)^2}.$$

Dengan membandingkan bentuk ini terhadap (15.1.2) maka diperoleh $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, $a=0$, $b=1$. Jadi, limit ini dapat dinyatakan dalam integral berikut

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right\}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx.$$

Selanjutnya diselesaikan dengan kalkulus biasa diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}&=\int_0^1(1+x)^{-2}d(1+x)\\&=\left[\frac{1}{-2+1}(1+x)^{-2+1}\right]_0^1=-\left(2^{-1}-1^{-1}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Oleh karena itu disimpulkan $\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right\}=\frac{1}{2}$. □

Latihan 15.1. Nyatakan limit berikut dalam bentuk integral, kemudian hitung nilainya dengan menggunakan kalkulus biasa.

1. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$.

Biasanya proses pembuktian integral menggunakan partisi seragam seperti telah terlihat pada beberapa contoh sebelumnya. Namun demikian kita dapat juga mengambil partisi takseragam seperti diberikan pada contoh berikut.

Contoh 15.8. Hitunglah integral $\int_a^b x^p\,dx$, $p\neq -1$ dengan memecah interval $[a,b]$ dalam subinterval $[a,aq]$, $[aq,aq^2],\cdots[aq^{n-1},aq^n]$ dengan $aq^n:=b$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa partisi $\pi_n=\{a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},aq^n=b\}$ bukan partisi seragam seperti sebelumnya. Karena $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$ maka titik partisi dapat pula dinyatakan secara eksplisit sebagai $x_k=a\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n}, k=0,1,\cdots,n$. Amati bahwa panjang subintervalnya membentuk barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio $q-1$, yaitu $a(q-1),aq(q-1),aq^2(q-1),\cdots$. Ini merupakan partisi takseragam. Dengan demikian subinterval $I_k=[aq^{k-1},aq^k]$ mempunyai lebar $|I_k|=\triangle x_k=aq^k-aq^{k-1}=aq^{k-1}(q-1)$. Mengingat $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$, maka $q\to 1$ bila $n\to\infty$. Amati bahwa bila $q\to 1$ maka lebar subinterval $|I_k|\to 0$. Jadi, norma partisi $|\pi_n|\to 0$ untuk $n\to\infty$. Jadi, kita dapat menghitung integral ini sebagai berikut

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\triangle x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)aq^{k-1}(q-1)$$

digunakan aturan L'Hospital, yaitu

$$\begin{aligned} L &= \lim_{q\to 1} \frac{q^{p+1}-q^p}{q^{p+1}-1} \\ &= \lim_{q\to 1} \frac{(p+1)q^p - pq^{p-1}}{(p+1)q^p} \\ &= 1 - \lim_{q\to 1} \frac{p}{(p+1)q} \\ &= 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh

$$\int_a^b x^p\,dx = \left(b^{p+1}-a^{p+1}\right) \underbrace{\lim_{q\to 1} \frac{q^{p+1}-q^p}{q^{p+1}-1}}_{L} = \frac{1}{p+1}\left(b^{p+1}-a^{p+1}\right).$$

□

Perhatikan dengan saksama bahwa metode perhitungan di atas tidak berlaku jika $a = 0$ sebab partisi yang dimaksud tidak terdefinisi.

Latihan 15.2. Diberikan fungsi $f(x) := \frac{1}{x}$, $x \in [a,b]$ di mana interval $[a,b]$ tidak memuat 0. Hitunglah jumlahan Riemann pada partisi $P_n := \{x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} : k = 0, 1, 2, \cdots, n\}$ dengan label diambil ujung kiri dan kanan subinterval. Dapatkah nilai integral $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ ditentukan?

15.2 Pendekatan Darboux

Misalkan f fungsi yang didefinisikan pada $[a,b]$, dan $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ partisi pada $[a,b]$. Kemudian, bentuklah dua jumlahan berikut

$$L(P;f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \text{ dan } U(P;f) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

dengan $m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ dan $M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Biasanya $L(P;f)$ disebut **jumlah bawah** (*lower sum*) fungsi f pada partisi P, sedangkan $U(P;f)$ disebut **jumlah atas** (*upper sum*). Jadi, jumlah atas dan jumlah bawah sebagai fungsi yang bergantung pada partisi dan fungsi f. Untuk f tertentu, bila partisinya diganti maka nilai jumlah atas dan jumlah bawahnya juga berubah. Misalkan

$$\mathcal{P}[a,b] := \text{himpunan semua partisi pada } [a,b].$$

Selanjutnya definisikan **integral bawah** (*lower integral*) $L(f)$ dan **integral atas** (*upper integral*) $U(f)$ sebagai berikut.

$$L(f) := \sup\{L(P;f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}, \text{ dan } U(f) := \inf\{U(P;f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$$

Definisi 15.2. (Fungsi terintegral) Misalkan $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi terbatas. Fungsi f dikatakan terintegral (Riemann) pada I jika $L(f) = U(f) := M$. Nilai M ini disebut integral fungsi f pada $[a,b]$, dinyatakan dengan

$$M = \int_a^b f \quad \text{atau } M = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k(z - x_{k-1}) + M_k(x_k - z) \geq M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z).$$

Oleh karena $m_k(x_k - x_{k-1}) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$ maka dengan menjumlahkan suku lainnya diperoleh

$$L(P; f) \quad \leq \quad L(Q; f).$$

Dengan argumen yang sama untuk $M_k(x_k - x_{k-1}) \geq M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z)$ diperoleh

$$U(P; f) \geq U(Q; f).$$

□

Lemma ini mengatakan bahwa jika partisi diperhalus maka jumlah bawahnya bertambah sedangkan jumlah atasnya berkurang.

Lemma 3. *Bila P_1 dan P_2 partisi sebarang pada I maka $L(P_1; f) \leq U(P_2; f)$.*

Bukti. Ambil $Q := P_1 \cup P_2$ maka Q penghalus dari P_1 dan P_2. Dengan menggunakan lemma sebelumnya maka diperoleh

$$L(P_1; f) \leq L(Q; f) \leq U(Q; f) \leq U(P_2; f).$$

□

Lemma ini mengatakan bahwa jumlah bawah tidak pernah melebihi jumlah atas, apapun partisinya.

Lemma 4. *Bila $f : I \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi terbatas maka integral bawah $L(f)$ dan integral atas $U(f)$ ada, dan berlaku*

$$L(f) \leq U(f).$$

Bukti. Misalkan P_1 dan P_2 partisi sebarang pada I, maka berdasarkan lemma sebelumnya berlaku $L(P_1; f) \leq U(P_2; f)$. Ini berarti $U(P_2; f)$ batas atas himpunan $\{L(P; f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$, sehingga

$$L(f) = \sup \{L(P; f) : P \in \mathcal{P}(I)\} \leq U(P_2; f).$$

Mengingat P_2 partisi sebarang dan $L(f)$ bilangan tertentu maka $L(f)$ batas bawah himpunan $\{U(P; f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$. Jadi, $L(f) \leq \inf \{U(P; f) : P \in \mathcal{P}(I)\} = U(f)$. □

Contoh 15.10. Buktikan $f(x) = x$ terintegral pada $[0, 1]$.

Bukti. Ambil partisi seragam $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. Diketahui f fungsi monoton naik maka infimumnya terjadi di ujung kiri subinterval dan supremumnya terjadi di kanan subinterval, seperti diilustrasikan pada Gambar 15.4. Oleh karena $x_k = \frac{k}{n}$ maka $m_k = x_{k-1} = \frac{k-1}{n}$, $M_k = x_k = \frac{k}{n}$ dan $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
L(P_n; f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} (k-1) \right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k - n \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}$$

Jadi, jumlahan atas dan jumlahan bawah fungsi f terhadap partisi P adalah

$$L(P;f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = 0 \text{ dan } U(P;f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = 1.$$

Oleh karena partisi P sebarang maka berlaku

$$L(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} L(P;f) = 0 \text{ dan } U(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}} P(P;f) = 1.$$

Diperoleh $L(f) \neq U(f)$ sehingga disimpulkan f tidak terintegral pada $[0,1]$. $\square$

Contoh ini memperjelas bahwa fungsi terbatas belum tentu terintegral, tetapi terintegral pasti terbatas.

Latihan 15.3. Buktikan fungsi $f(x) := x^2$ terintegral pada $[0,1]$ dan $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. (Petunjuk: gunakan formula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$).

Latihan 15.4. Misalkan f fungsi terbatas. Buktikan f terintegral pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegral pada $[0,1]$. (Petunjuk: gunakan transformasi variabel $x \to \frac{2x-a-b}{b-a}$, dan sebaliknya).

15.3 Pendekatan Riemann

Pada definisi ini tidak digunakan istilah jumlah bawah dan jumlah atas, integral bawah dan integral atas, namun tetap mengacu pada jumlahan Riemann secara umum. Misalkan $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ sebuah partisi pada interval I. Bila telah dipilih label (*tag*) $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk setiap k maka terbentuk himpunan pasangan subinterval dan labelnya sebagai berikut.

$$\dot{P} := \{([x_{k-1}, x_k], \xi_k) : k = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Himpunan $\dot{P}$ ini disebut partisi terlabel pada I. Selanjutnya jumlahan Riemann terhadap partisi terlabel $\dot{P}$ didefinisikan seperti biasa, yaitu

$$S(\dot{P};f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Definisi 15.4. (Terintegral Riemann) Fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika ada bilangan real L sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga setiap partisi terlabel $\dot{P}$ dengan $||\dot{P}|| < \delta$ berlaku

$$\left| S(\dot{P};f) - L \right| < \varepsilon. \tag{15.3.1}$$

Himpunan semua fungsi terintegral Riemann dinyatakan dengan $\mathcal{R}[a,b]$.

Definisi ini mengisyaratkan bahwa bilangan L adalah limit dari jumlahan Riemann untuk $||\dot{P}|| \to 0$. Bilangan L pada definisi ini adalah nilai dari integral, yaitu

$$L = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Penggunaan definisi ini dalam membuktikan suatu fungsi terintegral Riemann tidaklah mudah, jauh lebih sulit dari metode sebelumnya. Eksistensi bilangan L yang dimaksud terkadang harus ditebak dulu, baru dibuktikan ia memenuhi definisi yang ada. Tetapi untuk pengembangan teori integral, definisi ini banyak digunakan. Sesungguhnya definisi ini ekuivalen dengan definisi pendekatan Darboux.

Pembuktian ini cukup rumit. Sebagai perbandingan kita buktikan keterintegralan ini dengan menggunakan metode Darboux seperti yang dibahas sebelumnya.

[Cara 2] Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ambil partisi $\pi_n := \{0, 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 3\}$. Terhadap partisi ini diperoleh jumlah atas dan jumlah bawah sebagai berikut

$$L(\pi_n; f) = 2(1 - \frac{1}{n}) + 2(\frac{2}{n}) + 3(2 - \frac{1}{n}) = 8 - \frac{1}{n}$$

$$U(\pi_n; f) = 2(1 - \frac{1}{n}) + 3(\frac{2}{n}) + 3(2 - \frac{1}{n}) = 8 + \frac{1}{n}.$$

Dengan argumen seperti pada metode Darboux diperoleh

$$8 = \sup_n (8 - \frac{1}{n}) = \sup_n L(\pi_n; f) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P; f) = L(f)$$

$$8 = \inf_n (8 + \frac{1}{n}) = \inf_n U(\pi_n; f) \geq \inf_{P \in \mathcal{P}} U(P; f) = U(f)$$

Setelah kedua ketaksamaan ini digabungkan diperoleh

$$8 \leq L(f) \leq U(f) = 8$$

sehingga diperoleh $L(f) = U(f) = 8$. Kesimpulannya f terintegral pada $[0, 3]$ dengan $\int_0^3 f(x)\, dx = 8$.

□

Kedua macam bukti ini memberikan kesimpulan yang sama tetapi dengan pendekatan berbeda. Menunjukkan $U(f) = L(f)$ untuk membuktikan f terintegral lebih sederhana daripada menentukan $\delta > 0$ sehingga (15.3.1) berlaku.

Bila dicermati hanya ada dua tipe integral yang telah dibahas sebelumnya, yaitu integral Cauchy yang diperuntukkan fungsi kontinu dan integral Riemann yang juga mencakup fungsi tidak kontinu. Masih banyak lagi pendekatan integral yang telah diciptakan oleh para ahli. Salah satu yang paling populer adalah integral Lebesgue. Berbeda dari kedua tipe integral sebelumnya yang berangkat dari partisi domain, integral Lebesgue mendasarkan definisinya pada teori ukuran. Pembahasan integral Lebesgue tidak diberikan pada buku ini, namun dapat dibaca pada beberapa buku teks analisis lanjutan seperti Royden (1968), Hawkins (1975), Jones (1993). Selanjutnya pembahasan difokuskan pada integral Riemann. Integral Riemann-Stieltjes sebagai perumuman integral Riemann akan disinggung sedikit pada bagian akhir bagian ini.

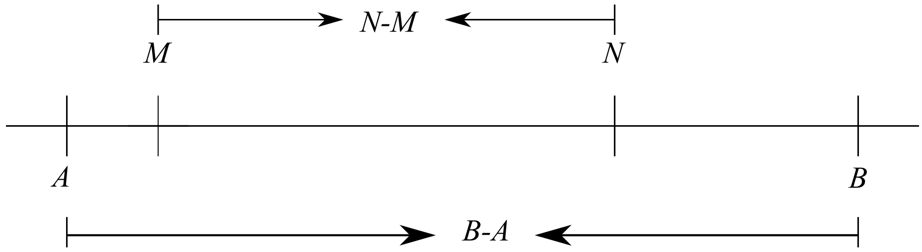
15.4 Sifat-sifat Integral Riemann

Sebuah fungsi terintegral dicirikan oleh adanya bilangan real yang menjadi nilai integral tersebut. Permasalahannya, apakah mungkin nilai integral ini lebih dari satu. Berikut teorema yang menjamin ketunggalan nilai integral.

Teorema 15.2. *Bila f terintegral pada $[a, b]$ maka nilai integralnya tunggal.*

Bukti. Andaikan ada lebih dari satu nilai integral, yaitu $\int_a^b f(x)\, dx = L_1$ dan $\int_a^a f(x)\, dx = L_2$. Berdasarkan definisi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga setiap partisi terlabel $\dot{P}_1$ dan $\dot{P}_2$ dengan $||\dot{P}_1|| < \delta_1$ dan $||\dot{P}_2|| < \delta_2$ berlaku

$$\left| S(\dot{P}_1; f) - L_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left| S(\dot{P}_2; f) - L_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$



Gambar 15.6: Pendekatan dengan lebar interval

Oleh karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka diperoleh $U(f) \leq L(f)$. Mengingat faktanya $L(f) \leq U(f)$ maka disimpulkan $U(f) = L(f)$. Ini berarti $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

$\square$

Sebagai akibat langsung dari teorema ini kita mendapatkan syarat cukup untuk sebuah fungsi terintegral Riemann.

Teorema 15.4. *Bila $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas dan terdapat $(P_n; n \in \mathbb{N})$ barisan partisi pada $[a,b]$ sehingga*

$$\lim_n \left(U(P_n;f) - L(P_n;f)\right) = 0 \tag{**}$$

maka $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $\lim_n U(P_n;f) = \lim_n L(P_n;f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Bukti. Berdasarkan definisi limit barisan, bila diberikan $\epsilon > 0$ sebarang maka terdapat bilangan positif $K > 0$ sehingga $\frac{1}{K} < \epsilon$. Nah, cukup diambil partisi P_K ini maka pasti berlaku $U(P_K;f) - L(P_K;f) < \epsilon$. Dengan kriteria Riemann sebelumnya maka disimpulkan $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Berdasarkan (**) maka diperoleh $\lim_n U(P_n;f) = \lim_n L(P_n;f)$. Oleh karena selalu berlaku

$$L(P_n;f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(P_n;f)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka dengan menggunakan teorema kekonvergenan jepit (TKJ) diperoleh $\lim_n U(P_n;f) = \lim_n L(P_n;f) = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Contoh 15.13. Kembali ke contoh sebelumnya ketika membuktikan fungsi $f(x) = x$ terintegral pada $[0,1]$ dengan $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ kita telah memperoleh bahwa $U(P_n;f) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$ dan $L(P_n;f) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$ untuk $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\}$. Dengan menggunakan teorema yang baru saja dibahas, kita dapat membuktikan keterintegralan ini dengan cara mengamati pola kekonvergenan barisan selisih $U(P_n;f) - L(P_n;f)$. Dengan mudah diperoleh

$$\begin{aligned} U(P_n;f) - L(P_n;f) &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n} \to 0. \end{aligned}$$

Disimpulkan fungsi ini terintegral pada $[0,1]$ dengan $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n;f) = \lim_{n\to\infty} L(P_n;f) = \frac{1}{2}$.

Latihan 15.5. Diberikan fungsi $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{bila } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{bila } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Bukti. Gunakan sifat supremum dan infimum sebagai berikut:

$$\inf_x (f(x) + g(x)) \geq \inf_x f(x) + \inf_x g(x)$$

$$\sup_x (f(x) + g(x)) \leq \sup_x f(x) + \sup_x g(x).$$

Selanjutnya, dengan sifat ini kita dapat membentuk jumlah bawah dan jumlah atas yang bersesuaian sehingga diperoleh

$$L(P; f+g) \geq L(P; f) + L(P; g) \text{ dan } U(P; f+g) \leq U(P; f) + U(P; g).$$

Oleh karena f dan g masing-masing terintegral maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_ε^f dan P_ε^g sehingga berlaku

$$U(P_\varepsilon^f; f) - L(P_\varepsilon^f; f) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ atau } U(P_\varepsilon^f; f) < L(P_\varepsilon^f; g) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P_\varepsilon^g; g) - L(P_\varepsilon^g; g) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ atau } U(P_\varepsilon^g; g) < L(P_\varepsilon^g; g) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil partisi $P_\varepsilon := P_\varepsilon^f \cup P_\varepsilon^g$ maka P_ε penghalus untuk P_ε^f dan P_ε^g. Berdasarkan lemma di awal diperoleh

$$\begin{aligned} U(P_\varepsilon; f+g) &\leq U(P_\varepsilon; f) + U(P_\varepsilon; g) \leq U(P_\varepsilon^f; f) + U(P_\varepsilon^g; g); \\ &\leq L(P_\varepsilon^f; g) + L(P_\varepsilon^g; g) + \varepsilon \\ &\leq L(P_\varepsilon; f) + L(P_\varepsilon; g) + \varepsilon \leq L(P_\varepsilon; f+g) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh adanya partisi P_ε dengan $U(P_\varepsilon; f+g) - L(P_\varepsilon; f+g) < \varepsilon$, yaitu disimpulkan $f+g$ terintegral. Untuk mengetahui nilai integralnya, kita gunakan ketaksamaan sebelumnya, yaitu:

$$\int_a^b (f+g) \quad \leq \quad U(P_\varepsilon; f+g) \leq L(P_\varepsilon; f) + L(P_\varepsilon; g) + \varepsilon \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon,$$

dan juga

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq U(P_\varepsilon; f) + U(P_\varepsilon; g) \leq L(P_\varepsilon; f+g) + \varepsilon \leq \int_a^b (f+g) + \varepsilon.$$

Dari kedua ketaksamaan ini diperoleh

$$\left| \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| < \varepsilon.$$

Mengingat $\varepsilon > 0$ sebarang maka terbukti bahwa $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. □

Sejauh ini kita baru mengetahui keterintegralan jumlahan dan perkalian skalar fungsi terintegral. Untuk perkalian akan segera dibahas pada bagian berikutnya, sedangkan untuk pembagian dikembalikan ke perkalian. Berikut ini kita bahas sifat monoton operasi integral.

Teorema 15.7. (Positivitas integral). *Bila $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$ maka $\int_a^b f \geq 0$. Lebih lanjut, jika ada fungsi terintegral $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$ maka $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Integral perkalian fungsi tidak mempunyai formula terkait dengan integral masing-masing fungsi seperti halnya formula derivatif perkalian fungsi. Perlu untuk diingatkan bahwa

$$\int_a^b fg \neq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right).$$

Sudah menjadi kebiasaan dalam perhitungan integral, bila domain integral $[a,b]$ terpecah oleh sebuah titik c, yaitu $a < c < b$ dan terbentuk dua subinterval $[a,c]$ dan $[c,b]$ maka formula berikut sering sekali digunakan.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Ini adalah sifat aditif integral yang dijustifikasi pada teorema berikut.

Teorema 15.10. *Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ fungsi terbatas. Maka f terintegral pada $[a,b]$ jika dan hanya jika ia terintegral pada $[a,c]$ dan $[c,b]$ dengan*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{15.4.5}$$

Bukti. ($\leftarrow$): Diberikan $\epsilon > 0$ sebarang. Misalkan $f_1 := f|_{[a,c]}$ yaitu restriksi fungsi f pada $[a,c]$ dan juga $f_2 := f|_{[c,b]}$. Mengingat f_1 dan f_2 terintegral maka terdapat partisi P_1 pada $[a,c]$ dan P_2 pada $[c,b]$ sehingga berlaku

$$U(P_1; f_1) - L(P_1; f_1) < \frac{\epsilon}{2} \text{ dan } U(P_2; f_2) - L(P_2; f_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ambil $P_\epsilon := P_1 \cup P_2$, maka P_ϵ adalah partisi pada $[a,b]$. Berdasarkan fakta-fakta ini maka diperoleh

$$\begin{aligned} U(P_\epsilon; f) - L(P_\epsilon; f) &= (U(P_1; f) + U(P_2; f)) - (L(P_1; f) + L(P_2; f)) \\ &= (U(P_1; f) - L(P_1; f)) + (U(P_2; f) - L(P_2; f)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan kriteria Riemann disimpulkan f terintegral pada $[a,b]$. ($\to$): Diketahui f terintegral pada $[a,b]$ maka untuk $\epsilon > 0$ sebarang, terdapat partisi P pada $[a,b]$ sehingga

$$U(P; f) - L(P; f) < \epsilon.$$

Jadikan c sebagai titik partisi dengan mengambil partisi $P' := P \cup \{c\}$. Mengingat P' penghalus P maka berlaku

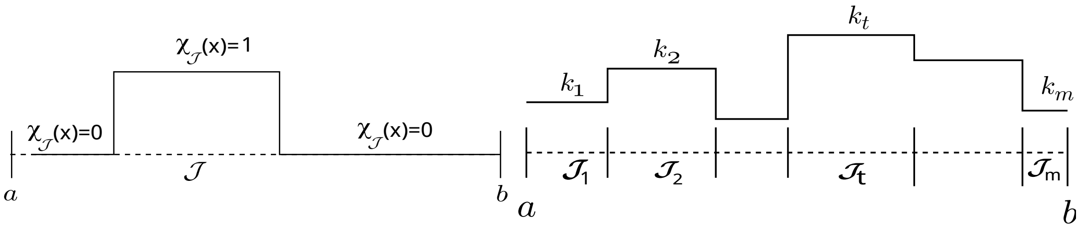
$$U(P'; f) - L(P'; f) \leq U(P; f) - L(P; f) < \epsilon.$$

Definisikan $P_1' := P' \cap [a,c]$ dan $P_2' := P' \cap [c,b]$. Dengan pendefinisian ini maka P_1' adalah partisi pada $[a,c]$ dan P_2' adalah partisi pada $[c,b]$ dan berlaku hubungan

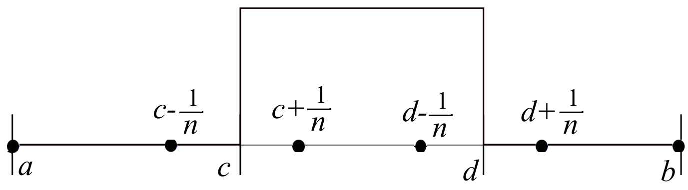
$$U(P'; f) = U(P_1'; f_1) + U(P_2'; f_2) \text{ dan } L(P'; f) = L(P_1'; f_1) + L(P_2'; f_2).$$

Dengan menggunakan ketaksamaan sebelumnya diperoleh

$$(U(P_1'; f_1) - L(P_1'; f_1)) + (U(P_2'; f_2) - L(P_2'; f_2)) = U(P'; f) - L(P'; f) < \epsilon.$$



Gambar 15.7: Fungsi karakteristik (kiri) dan fungsi tangga (kanan)



Gambar 15.8: Partisi P_n dan fungsi karakteristik $\chi_{[c,d]}$

Fungsi karakteristik dan fungsi tangga

Definisi 15.5. Misalkan $J \subset [a,b]$ dan $\chi_J : [a,b] \to \mathbb{R}$, definisikan sebagai

$$\chi_J(x) := \begin{cases} 1 & \text{bila } x \in J. \\ 0 & \text{bila } x \notin J \end{cases}$$

Selanjutnya, χ_J disebut **fungsi karakteristik** pada J.

Definisi 15.6. Fungsi tangga adalah fungsi yang hanya memiliki berhingga banyak nilai berbeda. Dengan kata lain, ia merupakan kombinasi linier fungsi-fungsi karakteristik

$$\varphi(x) := \sum_{i=1}^{m} k_i \chi_{J_i}(x). \tag{15.5.1}$$

Ilustrasi grafis fungsi karakteristik dan fungsi tangga diberikan pada Gambar 15.7. Pada panel kiri, fungsi karakteristik hanya mempunyai dua nilai, yaitu tidak nol pada subdomain $\mathcal{J}$ dan lainnya nol. Sedangkan pada panel kanan, fungsi tangga memiliki banyak nilai tidak nol tetapi masih berhingga. Sebagai pembanding fungsi $f(x) := x^2$ memiliki takberhingga banyak nilai taknol pada $[a,b]$, bahkan takterbilang.

Teorema 15.11. *Bila J suatu interval pada $[a,b]$, katakan $J = [c,d]$ maka fungsi $\chi_{[c,d]}$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ dengan*

$$\int_a^b \chi_{[c,d]}(x)\, dx = d - c. \tag{15.5.2}$$

Bukti. Ambil $P_n = \{a, c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}, d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}, b\}$ partisi pada $[a,b]$, seperti ditunjukkan pada Gambar 15.8. Ambil saja n cukup besar, misalnya $n \geq n_0$ untuk suatu bilangan asli n_0 agar semua titik-titik tersebut masuk di dalam interval $[a,b]$. Dengan mudah diperoleh hasil berikut.

$$U(P_n; f) = d - c + \frac{2}{n} \text{ dan } L(P_n; f) = d - c - \frac{2}{n}.$$

Kesederhanaan fungsi tangga ternyata memiliki kekuatan dalam pengembangan teori integral. Fungsi tangga tidak hanya dapat mengaproksimasi fungsi kontinu seakurat mungkin, tetapi juga integralnya dapat mengaproksimasi integral fungsi. Contoh soal berikut ini merupakan fakta bahwa setiap jumlahan Riemann sesungguhnya adalah integral dari sebuah fungsi tangga.

Contoh 15.14. Misalkan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Buktikan: jika $S(P,f)$ sebarang jumlahan Riemann maka terdapat fungsi tangga $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sehingga $\int_a^b \varphi(x)dx = S(P,f)$.

BUKTI. Misalkan $S(P,f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ dengan $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\cdots,n$. Selanjutnya definisikan fungsi tangga $\varphi(x) = f(\xi_k)$ jika $x \in [x_{k-1}, x_k)$,$k = 1,2,\cdots,n-1$ dan $\varphi(x) = f(\xi_n)$ untuk $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(x)dx &= \int_{a=x_0}^{x_1} \varphi(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} \varphi(x)dx \\
&= \int_{a=x_0}^{x_1} f(\xi_1)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi_2)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(\xi_n)dx \\
&= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\
&= S(P,f).
\end{aligned}$$

□

Jika sebuah fungsi bernilai nol, yaitu $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka jelas integralnya juga nol, yaitu $\int_a^b f(x)dx = 0$. Bagaimana sebaliknya? Apakah $\int_a^b f(x)dx = 0$ berakibat $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$? Ternyata keadaan ini tidak berlaku. Ambil saja fungsi $f(x) = 1$ untuk $x \in [0, \frac{1}{2})$ dan bernilai -1 untuk $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Jelas bahwa $\int_0^1 f(x)dx = 0$, tetapi $f(x) \neq 0$. Contoh berikut ini menjelaskan kondisi nilai nol integral yang berimplikasi pada nilai nol fungsi yang diintegralkan (integrannya).

Contoh 15.15. Misalkan f kontinu pada $[a,b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Buktikan bahwa jika $\int_a^b f(x)dx = 0$ maka $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

BUKTI. Kita buktikan dengan kontraposisi. Andai ada $c \in [a,b]$ sehingga $f(c) \neq 0$. Karena diketahui $f(x) \geq 0$ maka haruslah $f(c) > 0$. Mengingat f kontinu di c maka ada persekitaran $V := (c-\delta, c+\delta)$ sehingga $f(x) > 0$ untuk $x \in V$. Pada subdomain ini jelas bahwa $\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx > 0$. Akibatnya,

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\delta} f + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f + \int_{c+\delta}^b f > 0.$$

□

Latihan 15.7. Pada contoh sebelumnya, berikan contoh pengingkar untuk menunjukkan bahwa kesimpulan $f(x) = 0$ tidak berlaku jika syarat kontinu tidak dipenuhi.

Latihan 15.8. Pada materi diferensial berlaku bahwa jika $f'(x) = g'(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $f(x) = g(x) + c$, c konstanta. Apakah yang dapat disimpulkan pada fungsi f dan g jika diketahui kedua kontinu pada $[a,b]$ dan $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$?

BAB 16

Teorema Fundamental Kalkulus

Discovery is seeing what everyone else has seen and thinking what no one else has thought.

Albert SZENT-GYORGI

Sebelumnya kita telah membahas pendefinisian integral tanpa melibatkan konsep diferensial. Pada bagian ini kedua konsep ini dipadukan dalam suatu hubungan yang sangat menarik. Dua permasalahan pokok di sini adalah bagaimana urutan kedua operasi ini jika dikerjakan pada sebuah fungsi, yaitu bagaimana jika bentuk integral didiferensialkan (diferensial dari integral) dan bagaimana jika bentuk diferensial diintegralkan (integral dari diferensial). Kedua bentuk urutan operasi ini membentuk teorema fundamental kalkulus (TFK). Ada dua jenis TFK yaitu TFK tipe 1 dan TFK tipe 2.

16.1 Teorema Fundamental Kalkulus Tipe 1

Teorema fundamental kalkulus pertama berbentuk integral dari sebuah bentuk diferensial.

Teorema 16.1. (Integral dari Diferensial) *Misalkan* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *terintegral pada* $[a, b]$ *dan* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *kontinu pada* $[a, b]$ *dan terdiferensial pada* (a, b) *dengan* $F'(x) = f(x)$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$*. Maka berlaku hubungan*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{16.1.1}$$

Ulasan Inilah aturan yang sering digunakan dalam metode perhitungan integral pada kalkulus. Sebagai contoh fungsi $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ jika didiferensialkan akan menghasilkan $f(x) = x^3$, sehingga diperoleh

$$\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{15}{4}.$$

Barangkali kita melihat antiderivatif bergantung pada konstanta sebarang C, yaitu $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$. Dalam operasi pengurangan $F(b) - F(a)$, nilai konstanta C tidak berpengaruh karena akan tereliminasi dengan sendirinya.

16.2 Teorema Fundamental Kalkulus Tipe 2

Satu lagi tipe teorema fundamental kalkulus yang berbentuk diferensial dari integral. Teorema ini menunjukkan bahwa operasi diferensial merupakan kebalikan dari operasi integral, yaitu fungsi yang diintegralkan (integran) dapat diperoleh kembali dengan cara mendiferensialkan hasil integralnya. Selanjutnya, teorema ini disebut TFK tipe 2.

Teorema 16.2. (Diferensial dari integral) *Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral pada $[a, b]$ dan didefinisikan $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan*

$$F(x) := \int_a^x f. \tag{16.2.1}$$

Maka F kontinu pada $[a, b]$ dan jika f kontinu di $c \in [a, b]$ maka F terdiferensial di c dengan

$$F'(c) = f(c).$$

Ini berarti jika f kontinu pada $[a, b]$ maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), x \in [a, b].$$

Bukti. Mengingat f terintegral pada $[a, b]$ maka f terbatas pada $[a, b]$ sehingga terdapat $K > 0$ sehingga $|f(x)| \le K$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Ambil sebarang $x, y \in [a, b]$ dengan $x < y$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \\ &= \left|\int_x^y f\right| \\ &\le \int_x^y |f| \le K\,|y - x|\,. \end{aligned}$$

Dari hubungan ini dapat disimpulkan bahwa F kontinu karena F memenuhi kondisi Lipshitz pada $[a, b]$. Sekarang misalkan f kontinu di $c \in [a, b]$, dibuktikan f terdiferensial di c dengan $F'(c) = f(c)$. Oleh karena f kontinu maka untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \text{ untuk setiap } x \in [a, b] \text{ dengan } |x - c| < \delta.$$

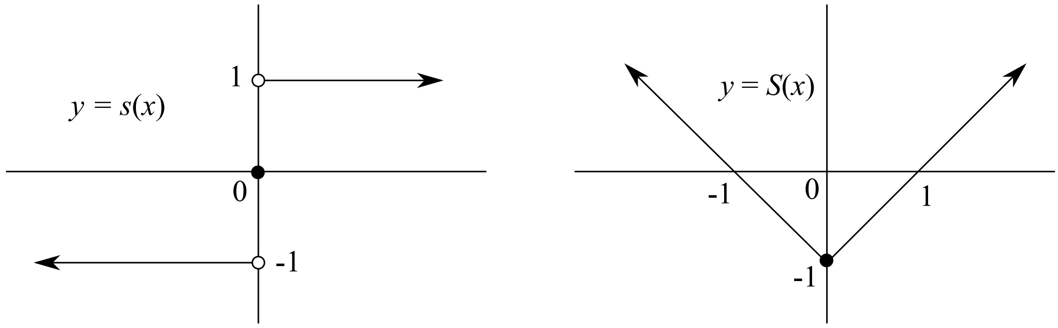
Jadi, untuk $x > c$ dan $|x - c| < \delta$ maka berlaku

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{x-c}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt\right) - \frac{1}{x-c}\int_c^x f(c)\,dt\right| \\ &= \frac{1}{x-c}\left|\int_c^x [f(t) - f(c)]\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{x-c}\int_c^x |f(t) - f(c)|\,dt \\ &< \frac{1}{x-c}\epsilon\int_c^x dt = \frac{1}{x-c}\epsilon(x - c) = \epsilon. \end{aligned}$$

Hasil yang sama akan diperoleh untuk $x < c$ yaitu dengan menggunakan sifat $\int_c^x f = -\int_x^c f$. Ekspresi ini dapat diterjemahkan ke dalam bahasa limit berikut,

$$\lim_{x \to c}\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c), \text{ atau } F'(c) = f(c).$$

□



Gambar 16.1: Grafik fungsi (kiri) dan primitifnya (kanan)

Contoh 16.2. Diberikan fungsi $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan

$$G(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\pi/x^2\right), & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Selanjutnya definisikan $g(x) := G'(x)$. Tunjukkan g mempunyai antiderivatif tetapi tidak mempunyai primitif. Kemudian, gambarkan grafik kedua fungsi ini.

Bukti. Pertama kita tentukan fungsi $g(x)$. Untuk $0 < x \leq 1$, gunakan langsung formula derivatif hasil kali dan aturan rantai, diperoleh

$$g(x) = 2x\sin(\pi/x^2) - \frac{2\pi}{x}\cos(\pi/x^2).$$

Untuk $x = 0$, gunakan definisi derivatif berikut.

$$\begin{aligned} g(0) &= G'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\pi/x^2) - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} x\sin(\pi/x^2) = 0. \end{aligned}$$

Jadi, derivatif $G'(x)$ ada, yaitu

$$G'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\pi/x^2\right) + \frac{2\pi}{x}\cos(\pi/x^2), & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Jelas antiderivatif g ada berdasarkan konstruksi. Di lain pihak g tidak terintegral pada $[0,1]$ karena g tidak terbatas di 0 sehingga primitif $G(x) := \int_0^x g(t)\,dt$ tidak ada. Grafik fungsi G dan g diberikan pada Gambar 16.2. Grafik ini telah digambar dengan bantuan MATLAB. □

Pengembangan bentuk TFK tipe 2. Misalkan

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt.$$

Dengan transformasi variabel $t \to g(t)$ maka diperoleh $dt = g'(t)dt$ dan batas-batas integral menjadi berturut-turut $g(0)$ dan x, sehingga bentuk integral ini menjadi

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt = \int_{g(0)}^{x} f(g(t))g'(t)dt.$$

2. $F(x) := \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}dt$

Bukti. Arahkan ke bentuk standar sehingga TFK tipe 2 dapat digunakan.

1. Dalam soal ini yaitu $F(x) = \int_0^{\sin x} \cos t\, dt$ kita mempunyai $f(x) = \cos x$ dan $g(x) = \sin x$. Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(g(x))\, g'(x) \\ &= \cos(\sin x) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Hasil ini dapat diverifikasi secara manual sebagai berikut:

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \cos t dt = [\sin t]_0^{\sin x} = \sin(\sin x).$$

Selanjutnya dihitung derivatif $F'(x)$ sebagai berikut:

$$F'(x) = \cos(\sin x)\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos(\sin x) \cdot \cos x.$$

2. Dalam hal ini kita mempunyai $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ dan

$$F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{x^2} f(t)dt.$$

Akhirnya, diperoleh

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) - f(x^2)\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= \sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{1+x^4}. \end{aligned}$$

□

Contoh 16.4. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan misalkan $\alpha > 0$. Definisikan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$g(x) := \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f, \; x \in \mathbb{R}.$$

Buktikan g terdiferensial dan tentukan g'.

Bukti. Misalkan $F(x) := \int_\alpha^x f$. Fungsi F terdiferensial berdasarkan TFK tipe 2 dengan $F'(x) = f(x)$. Oleh karena $\alpha > 0$ maka $[x-\alpha, x+\alpha]$ membentuk suatu interval. Selanjutnya diterapkan sifat aditif integral pada kasus-kasus berikut. Perhatikan Gambar 16.3 untuk pembagian domain integral.

- Untuk $x - \alpha < \alpha < x + \alpha$ atau $0 < x < 2\alpha$ maka dapat dibentuk

$$g(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f = \int_{x-\alpha}^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{x+\alpha} f = -F(x-\alpha) + F(x+\alpha).$$

- Untuk $\alpha \le x - \alpha$ atau $x \ge 2\alpha$ maka dapat dibentuk

$$g(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f = \int_{\alpha}^{x+\alpha} f - \int_{\alpha}^{x-\alpha} f = F(x+\alpha) - F(x-\alpha).$$

Bukti. Gunakan TFK tipe 2 dengan mengambil derivatif kedua ruas pada (*), yaitu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(2\int_0^x f\right) &= \frac{d}{dx}\left([f(x)]^2\right)\\ 2f(x) &= 2f(x)f'(x)\\ f'(x) &= 1.\end{aligned}$$

Ekspresi terakhir diperoleh dengan membagi kedua ruas baris sebelumnya dengan $2f(x) \neq 0$. Oleh karena $f'(x) = 1$ maka $f(x) = x + C$ untuk setiap $x \in [0, \infty)$. □

Latihan 16.1. Tentukan $F'(x)$ jika fungsi F didefinisikan sebagai berikut:

1. $F(x) := \int_0^{\tan x} \sec^2 y\, dy$.
2. $F(x) := \int_0^{x^2} \cos\sqrt{t}\, dt$.

Latihan 16.2. Misalkan f kontinu pada $\mathbb{R}$, dan $\beta > 0$. Definisikan

$$G(x) := \frac{1}{\beta}\int_x^{x+\beta} f(t)dt.$$

Buktikan G terdiferensial dan tentukan $G'(x)$.

Sebelum kita masuk pada pokok bahasan berikutnya, perlu ditegaskan bahwa istilah integral taktentu yang selama ini kita kenal tidak lain adalah antiderivatif, sedangkan integral tertentu adalah integral yang sesungguhnya. Kedua istilah ini dihubungkan oleh teorema fundamental kalkulus (TFK). Dengan TFK ini, pembahasan teori integral umumnya melibatkan teori diferensial. Mengingat pentingnya dan mendasarknya teorema ini untuk pengembangan kalkulus dan penerapannya maka ia disebut sebagai teorema fundamental.

16.3 Metode Integral Parsial dan Substitusi

Dalam kalkulus, dua metode populer yang sering digunakan untuk menghitung atau mengevaluasi integral adalah metode integral parsial (*integration by part*) dan metode substitusi. Salah satu penggunaan TFK adalah pada metode integral parsial berikut.

Teorema 16.4. (Integral parsial) *Jika $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ keduanya terintegral pada $[a, b]$ dan masing-masing mempunyai antiderivatif F dan G, maka*

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_a^b f(x)G(x)\, dx. \tag{16.3.1}$$

Ulasan Pada kalkulus biasanya formula ini ditulis dalam bentuk praktis berikut

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Bukti. Tulis $H(x) := F(x)G(x)$, $x \in [a, b]$. Maka fungsi H terdiferensial karena ia sebagai hasil kali 2 fungsi yang terdiferensial. Dengan menggunakan formula derivatif hasil kali diperoleh

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g'(x).$$

Di lain pihak kita mempunyai

$$H(b) = F(\varphi(b)) = F(d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

Mengingat $\varphi(a) = c$ dan $\varphi(b) = d$ maka terbukti $\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$. □

Contoh 16.8. Evaluasilah nilai integral

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$$

PENYELESAIAN. Di sini kita mempunyai $a = 0$, $b = 2$. Ambil $\varphi(t) = t^2$, dan $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ maka $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Batas integral baru adalah $\varphi([0,2]) = [0,4]$. Diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt &= \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\,dx.\\ &= \left[\sqrt{1+x}\right]_0^4 = \left(\sqrt{5}-1\right).\end{aligned}$$

Anda dapat mencoba dengan mengambil $\varphi(t) = 1 + t^2$. □

Satu lagi tipe metode substitusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan integral.

Teorema 16.6. *Diasumsikan $\varphi : J \to \mathbb{R}$ terdiferensial pada J dan $\varphi'(t) \neq 0$ pada J. Misalkan $\psi : \varphi(J) \to \mathbb{R}$ invers dari φ dengan derivatif $\psi'(\varphi(t)) = 1/\varphi'(t)$. Jika $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $\varphi(J) \subset [a,b]$ maka berlaku*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\;dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\psi'(x)\,dx. \tag{16.3.3}$$

BUKTI. Misalkan $G(t) := \int_a^t f(\varphi(s))\;ds$ sehingga $G'(t) = f(\varphi(t))$. Selanjutnya ambil $K(x) := G(\psi(x))$, maka K terdiferensial pada interval $\varphi(J)$ dengan $K'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) = f(\varphi \circ \psi(x))\,\psi'(x) = f(x)\psi'(x)$. Diperoleh

$$G(b) = \int_a^b f(\varphi(s))\,ds,$$

dan $K(\varphi(b)) = G(\psi(\varphi(b))) = G(b)$. Oleh karena

$$K(\varphi(b)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} K'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\psi'(x)dx$$

maka formula dalam teorema ini terbukti. □

Latihan 16.3. Hitunglah nilai integral $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$. (Petunjuk: terapkan metode integral parsial dengan mengambil $u := \tan^{-1} x \to du = \frac{1}{1+x^2}$ dan $dv = 1 \to v = x$.)

Latihan 16.4. Hitunglah nilai integral $\int_0^e (\ln x)^2\;dx$.

Kesulitan muncul pada evaluasi integral ketika antiderivatif integrannya tidak dapat ditemukan secara eksplisit. Sebagai contoh $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, atau $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$ tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa karena antiderivatifnya tidak dapat ditemukan. Untuk kasus rumit seperti ini, perhitungan integral tertentu dilakukan dengan metode numerik yang hasilnya berupa aproksimasi.

Bentuk lebih umum teorema nilai rerata integral diungkapkan pada teorema berikut.

Teorema 16.8. (Perumuman TNR Integral) *Bila $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan $g(x) \geq 0$ pada $[a, b]$ maka ada $c \in [a, b]$ sehingga*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{16.4.2}$$

Bukti. Lihat Bartle (1976). □

Syarat $g(x) \geq 0$ pada teorema ini dapat juga diganti dengan syarat $g(x)$ tidak berubah tanda di dalam $[a, b]$. Dalam kasus $g(x) \leq 0$ maka dapat diambil $-g$ sebagai penggantinya g sehingga syarat pada teorema tetap terpenuhi.

Contoh 16.9. Misalkan $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan berlaku $\int_a^b f = \int_a^b g$. Buktikan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = g(c)$.

Penyelesaian. Cukup gunakan TNR integral dan sifat aljabar integral, yaitu

$$\int_a^b f = \int_a^b g \to \int_a^b (f - g) = 0.$$

Dengan mengambil $h(x) := f(x) - g(x)$ maka terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $\int_a^b h(x)\,dx = h(c)$. Dengan menggabungkan kedua hasil ini diperoleh

$$f(c) - g(c) = h(c) = 0, \text{ yaitu } f(c) = g(c).$$

□

Keadaan pada soal ini dapat dinterpretasikan sebagai berikut: bila terdapat dua fungsi yang integralnya bernilai sama pada domain yang sama maka ada suatu titik dalam domain tersebut yang membuat nilai kedua fungsi sama di titik tersebut. Ingat, bila kedua fungsi sama maka nilai integralnya sama, tetapi sebaliknya tidak berlaku.

Latihan 16.5. Berikan contoh pengingkar untuk menunjukkan bahwa kesimpulan TNR integral, yaitu ada $c \in [a, b]$ sehingga $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$ gagal dipenuhi jika asumsi kekontinuan fungsi f dihilangkan.

Kalau pada teori diferensial kita mengenal deret Taylor dengan suku sisa dalam bentuk derivatif, maka di sini kita diperkenalkan suku sisa dalam bentuk integral.

Teorema 16.9. *Misalkan $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ ada pada $[a, b]$ dan $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a, b]$ maka*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + R_n, \tag{16.4.3}$$

dengan suku sisa R_n diberikan oleh

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b - t)^n dt. \tag{16.4.4}$$

$\frac{120}{(1+t^6)} \leq 120$ untuk $t \in [0, 1/2]$. Sehingga diperoleh estimasi berikut:

$$\begin{aligned} R_3 &\leq \frac{120}{6} \int_0^{1/2} (1/2 - t)^3 dt \\ &= 20 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) (\frac{1}{2} - t)^4 \Big|_0^{1/2} \\ &= -5 \left(- \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) = \frac{5}{16} = 0.312. \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil ini jelas bahwa kesalahan nyata 0.194 masih kurang dari estimasi kesalahan 0.312. Jika integral pada R_3 diselesaikan dengan pendekatan numerik diperoleh $R_3 = (20)(0.009722) = 0.194$, yaitu persis sama dengan kesalahan nyata. $\square$

BAB 17

Pengembangan Konsep Integral

The most beautiful thing we can experience is the mysterious. It is the source of all true art and science.

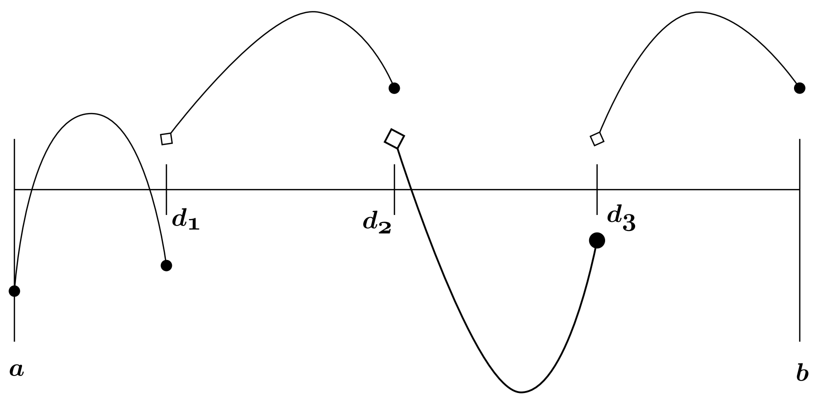
Albert EINSTEIN

Pada bab sebelumnya telah dibahas konsep yang cukup mendasar pada teori integral. Menilik definisi keterintegralan maka dapat dibayangkan begitu sulitnya menerapkan definisi tersebut untuk mendeteksi keterintegralan fungsi-fungsi yang sangat beragam. Untuk itu bab ini menguraikan beberapa sifat lanjutan keterintegralan pada fungsi-fungsi dengan sifat khusus. Selain itu, bab ini juga memperkenalkan beberapa konsep integral lanjutan seperti keterintegralan pada himpunan berukuran nol, integral Riemann-Stieltjes, dan integral takwajar.

17.1 Keterintegralan Fungsi Kontinu Sepotong-sepotong

Definisi 17.1. (KONTINU SEPOTONG-SEPOTONG) Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada $[a, b]$ kecuali pada berhingga titik-titik $E = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ maka f disebut fungsi kontinu sepotong-sepotong (*piece-wise continuous*) pada $[a, b]$.

Fungsi kontinu sepotong-sepotong sering juga dipandang sebagai fungsi yang diskontinu



Gambar 17.1: Profil fungsi kontinu sepotong-sepotong

Akhirnya kita periksa kriteria terintegral sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
U(P;f) - L(P;f) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\triangle x_k \\
&= \sum_{x_k \in P_1}(M_k - m_k)\triangle x_k + \sum_{x_k \in P_2}(M_k - m_k)\triangle x_k \\
&< \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{x_k \in P_1} \triangle x_k + 2M \sum_{x_k \in P_2} \triangle x_k \\
&< \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2M\frac{\epsilon}{4M} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Menurut kriteria terintegral Riemann maka disimpulkan f terintegral pada $[a, b]$. □

Contoh 17.1. Diberikan fungsi $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{jika } x \in [0,1), \\ 2(x-1) & \text{jika } x \in [1,2), \\ 2(x-2) & \text{jika } x \in [2,3), \\ 2(x-3) & \text{jika } x \in [3,4]. \end{cases}$$

Tunjukkan fungsi ini terintegral pada $[0, 4]$ dan tentukan nilai $\int_0^4 f(x)\, dx$.

Bukti. Perhatikan fungsi ini kontinu pada $[0, 4]$ kecuali di $x = 1, 2, 3$ dan 4. Jadi ia merupakan fungsi kontinu sepotong-sepotong, lebih jelasnya fungsi linear sepotong-sepotong. Berdasarkan teorema sebelumnya, fungsi ini terintegral pada $[0, 4]$. Karena fungsi ini terintegral pada setiap subinterval $[n - 1, n], n = 1, 2, 3, 4$. Perhatikan pada setiap subinterval diperoleh $\int_{n-1}^{n} f(x)dx = 1$ maka dengan menggunakan sifat aditif integral diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f &= \int_0^1 f + \int_1^2 f + \int_2^3 f + \int_3^4 f \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 = 4.
\end{aligned}$$

Grafik fungsi ini diberikan pada Gambar 17.3.

□

Pada teorema ini disyaratkan banyaknya titik di mana f tidak kontinu (diskontinu) adalah berhingga. Sesungguhnya kondisi ini dapat diperluas menjadi himpunan titik diskontinu berukuran nol (*measure of zero*).

17.2 Keterintegralan pada Himpunan Berukuran Nol

Definisi 17.2. Suatu himpunan $D \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **berukuran nol** (*measure of zero*) jika setiap $\epsilon > 0$ terdapat keluarga terbilang subinterval (a_n, b_n) sehingga

$$D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \text{ dan } \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \epsilon.$$

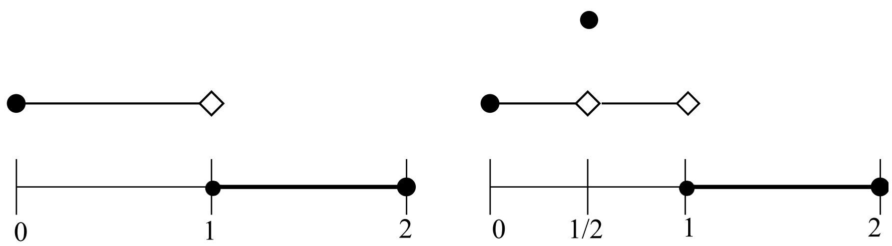
Himpunan semua bilangan rasional di dalam $[a, b]$, himpunan terbilang, himpunan Cantor seperti telah dibahas pada bab topologi adalah contoh-contoh himpunan berukuran nol. Berikut teorema Lebesgue yang memperlemah syarat fungsi terintegral Riemann.

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi terintegral tidak harus kontinu secara utuh pada interval $[a, b]$. Artinya, kalaupun ia tidak kontinu di titik-titik yang banyaknya berhingga maka fungsi terbatas tersebut tetap terintegral. Bahkan syarat berhingga banyak titik di mana f diskontinu dapat diperlemah menjadi himpunan titik berukuran nol. Himpunan berhingga pasti berukuran nol. Perlu diingatkan kembali bahwa perlu syarat terbatas untuk menjamin adanya jumlahan Riemann dalam pendefinisian integral sehingga syarat ini menjadi mutlak. Untuk kasus fungsi takterbatas akan melahirkan konsep integral takwajar yang akan dibahas pada bagian lainnya dalam bab ini.

Contoh 17.3. Diberikan fungsi $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dengan definisi

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{jika } x < 1 \\ 0 & \text{jika } x \geq 1. \end{cases}$$

Fungsi ini kontinu kecuali hanya di $x = 1$ sehingga ia terintegral. Buktikan $\int_0^2 f = 1$ dan berapakah nilai integral ini jika nilai fungsi diubah dengan $f(\frac{1}{2}) = 2$.



Gambar 17.4: Situasi fungsi sebelum dan sesudah dimodifikasi

Bukti. Untuk jelasnya bagaimana profil fungsi ini, lihat Gambar 17.4. Pada panel kiri fungsi f yang asli, sedangkan panel kanan fungsi setelah dimodifikasi dengan $f(\frac{1}{2}) = 2$. Ambil partisi $P_n = \{0, 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2\}$. Dengan mudah hasil berikut dapat dipahami.

$$U(P_n; f) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) + 1 \cdot (\frac{2}{n}) + 0 = 1 + \frac{1}{n},$$

$$L(P_n; f) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) + 0 + 0 = 1 - \frac{1}{n}.$$

Jelas sekali berlaku $U(P_n; f) - L(P_n; f) = \frac{2}{n} \to 0$ dan

$$\int_0^2 f = \lim_{n\to\infty} U(P_n; f) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1.$$

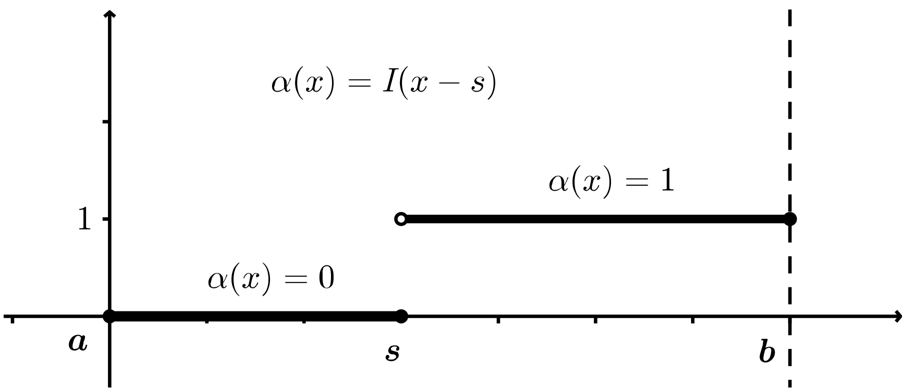
Dalam kasus berikutnya, ambil $Q_n = \{0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2\}, n \geq 4$. Terhadap partisi ini diperoleh relasi berikut.

$$U(Q_n; f) = 1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + 2 \cdot (\frac{2}{n}) + 1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{2}{n}) + 1 \cdot (\frac{2}{n}) + 0 = 1 + \frac{3}{n},$$

$$L(Q_n; f) = 1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + 1 \cdot (\frac{2}{n}) + 1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{2}{n}) + 0 = 1 - \frac{1}{n}.$$

Jelas berlaku $U(Q_n; f) - L(Q_n; f) = \frac{4}{n} \to 0$ dan

$$\int_0^2 f = \lim_{n\to\infty} L(Q_n; f) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1.$$



Gambar 17.5: Grafik fungsi tangga satuan

dengan $\mathcal{P}$ adalah himpunan semua partisi pada $[a, b]$. Selanjutnya nilai supremum atau infimum ini dikatakan integral Riemann-Stieltjes fungsi f pada $[a, b]$ terhadap α, ditulis

$$\int_a^b f\, d\alpha \text{ atau } \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Bila pada definisi ini diambil $\alpha(x) := x$ maka diperoleh definisi terintegral Riemann. Inilah sebabnya integral Riemann Stieltjes dikatakan perumuman integral Riemann. Sifat-sifat integral Stieltjes umumnya mirip dengan sifat-sifat integral Riemann. Pembahasan lengkap sifat-sifat Riemann-Stieltjes diberikan oleh Rudin (1976). Di sini diberikan sifat khusus integral Riemann-Stieltjes yang lebih umum daripada Riemann.

Teorema 17.3. *Misalkan $s \in (a, b)$ dan $\alpha(x) := I(x - s)$ dengan I adalah fungsi tangga satuan yang didefinisikan sebagai*

$$I(x) := \begin{cases} 1 & \textit{bila } x > 0 \\ 0 & \textit{bila } x \leq 0. \end{cases}$$

dengan grafik α ditunjukkan pada Gambar 17.5. Bila f kontinu pada $[a, b]$ maka

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha = f(s). \tag{17.3.1}$$

Bukti. Perhatikan partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ dengan $a =: x_0 < x_1 := s < x_2 < x_3 := b$. Dengan konstruksi ini maka s masuk anggota partisi. Untuk lebih jelasnya lihat Gambar 17.6. Maka terhadap partisi ini, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) &= M_1(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + M_2(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + M_3(\alpha(x_3) - \alpha(x_2)) \\ &= M_1(\alpha(s) - \alpha(a)) + M_2(\alpha(x_2) - \alpha(s)) + M_3(\alpha(b) - \alpha(s)) \\ &= M_1(0 - 0) + M_2(1 - 0) + M_3(1 - 1) = M_2. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan untuk jumlah atas sebagai berikut:

$$L(P, f, \alpha) = m_2.$$

Mengingat f kontinu, maka untuk $x_2 \to s$ diperoleh

$$M_2 = \sup_{x \in [s, x_2]} f(x) = \inf_{x \in [s, x_2]} f(x) = m_2 = f(s).$$

$\int_a^b f(x)\, d\alpha_1 + \int_a^b f(x)\, d\alpha_2$ (lihat Rudin, 1976). Dengan menggunakan sifat ini dan hasil yang telah diperoleh sebelumnya maka berlaku

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, d\alpha &= \int_a^b f(x)\, d\left(\sum_{k=1}^{p} c_k \underbrace{I(x - s_k)}_{\alpha_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} c_k \int_a^b f(x)\, d\alpha_k = \sum_{k=1}^{p} c_k f(s_k).\end{aligned}$$

□

Teorema 17.5. *Misalkan α monoton naik, terdiferensial pada $[a,b]$ dan α' terintegral Riemann pada $[a,b]$. Bila f fungsi terbatas pada $[a,b]$ maka berlaku implikasi berikut*

$$f \in \mathcal{RS}[a,b] \leftrightarrow f\alpha' \in \mathcal{R}[a,b]$$

dan

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx. \tag{17.3.3}$$

Di sini $\mathcal{RS}[a,b]$ menyatakan himpunan fungsi terintegral Riemann-Stieltjes pada $[a,b]$ dan $\mathcal{R}[a,b]$ himpunan fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$.

Bukti. Buktinya cukup rumit sehingga tidak diberikan di sini. Pembaca yang tertarik silakan lihat pada Rudin (1976). □

Relasi (17.3.3) memberikan hubungan antara integral Riemann-Stieltjes dan integral Riemann biasa. Pada dasarnya jika variabel integrasi α terdiferensial maka integral Riemann-Stieltjes dapat dikembalikan ke integral Riemann. Namun untuk syarat yang lebih lemah seperti kontinu atau bahkan kontinu sepotong-sepotong maka integral Riemann-Stieltjes tidak dapat diakomodasi oleh integral Riemann biasa. Bentuk integral Riemann-Stieltjes sering muncul pada masalah pengukuran optimal dalam statistika (Ucinski, 2005).

Berikut diberikan contoh penggunaan integral Riemann-Stieltjes pada statistika khusunya pada rancangan optimal (Bank, et al, 2010). Misalkan $f(t,\theta)$ keluaran model matematika dan $z(t)$ model statistika (proses observasi). Untuk membandingkan antara keluaran model dan proses observasi biasanya diambil sebuah fungsional *error* dalam bentuk umum berikut

$$J(y,\theta) := \int_0^T \frac{1}{\sigma^2(t)} \left(y(t) - f(t,\theta)\right)^2 \, dP(t) \tag{17.3.4}$$

dengan P sebuah ukuran umum terdefinisi pada $[0,T]$, khususnya ukuran probabilitas. Fungsional *error* ini tersajikan dalam bentuk integral Riemann-Stieltjes. Dalam rancangan optimal dipilih sampling waktu untuk pengukuran $\tau = \{t_1, \cdots, t_N : t_1 < t_2 < \cdots < t_N\}$ di dalam $[0,T]$ yang meminimumkan fungsional error tersebut. Pada implementasinya, diambil ukuran Dirac δ_{t_i} dengan

$$\delta_{t_i}(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \in A \\ 0 & \text{if } t_i \notin A. \end{cases}$$

2. Integral takwajar tipe 2, yaitu jika batas integralnya berhingga tetapi ada $c \in [a, b]$ di mana f takterbatas di c, yaitu $f(x)$ mendekati ∞ atau mendekati $-\infty$ untuk $x \to c$.

Definisi 17.4. (Integral takwajar tipe 1) Misalkan a suatu bilangan tertentu dan diasumsikan $\int_a^N f(x)\ dx$ ada untuk setiap $N \geq a$. Selanjutnya jika $\lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\ dx$ ada maka nilai integral takwajar didefinisikan sebagai

$$\int_a^\infty f(x)\ dx := \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\ dx. \tag{17.4.2}$$

Jika limit ini ada maka integral takwajar $\int_a^\infty f(x)\ dx$ dikatakan **konvergen**. Jika kedua integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ dan $\int_a^\infty |f(x)|\ dx$ maka ia disebut konvergen mutlak.

Definisi 17.5. (Integral takwajar tipe 2) Bila f takterbatas di a dan $\int_t^b f(x)\ dx$ ada untuk setiap $t > a$ maka integral takwajar didefinisikan sebagai:

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\ dx. \tag{17.4.3}$$

Bila f takterbatas di b dan $\int_a^t f(x)\ dx$ ada untuk setiap $t < b$ maka

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\ dx. \tag{17.4.4}$$

Selanjutnya, bila f takterbatas di c, dengan $a < c < b$ maka integral dipecah menjadi dua yaitu

$$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \tag{17.4.5}$$

dan selanjutnya digunakan definisi integral takwajar sebelumnya.

Contoh 17.5. Hitunglah integral takwajar berikut:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx.$$

Penyelesaian. Ini adalah integral takwajar tipe 1. Gunakan definisi di atas untuk memperoleh

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2}\ dx = \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{N} - (-1)\right] \\ &= 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Jadi, integral takwajar ini konvergen. □

Contoh 17.6. Hitunglah nilai integral takwajar berikut (bila ia konvergen).

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx.$$

Contoh 17.9. Selesaikan integral takwajar ini: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$.

Coba kita kerjakan dahulu integral ini dengan cara biasa tanpa menggunakan definisi integral takwajar. Hasilnya,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1} = -[1-(-1)] = -2$$

Integral ini kelihatannya konvergen, tapi cara ini salah karena integran $f(x) = \frac{1}{x^2}$ takterbatas di $x = 0$.

Penyelesaian. Domain integral dipecah, diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{t\to 0^-} \int_{0}^{t} \frac{1}{x^2}\, dx + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{t\to 0^-} \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+} \left.\frac{-1}{x}\right|_{t}^{1} \\
&= \infty - \infty.
\end{aligned}$$

Ternyata integral takwajar ini divergen, sebab $\infty - \infty$ takterdefinisi. □

Latihan 17.2. Hitunglah integral takwajar berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2+2)^3}\, dx.$$

Latihan 17.3. Tentukan semua nilai p sehingga integral takwajar $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^p}$ konvergen.

Bentuk integral banyak muncul dalam matematika terapan yang memodelkan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari. Teori integral yang telah dibahas pada bab ini digunakan untuk menjustifikasi kevalidan bentuk integral tersebut. Pada bidang terapan, bentuk integral umumnya tidak dapat diselesaikan secara analitik karena antiderivatifnya tidak tersedia secara eksplisit. Sebagi jalan keluarnya, integral diaproksimasi dengan menggunakan metode numerik. Berbagai metode aproksimasi numerik bentuk integral termasuk integral takwajar dapat dibaca lebih mendetail pada buku penulis lainnya (Hernadi, 2015).

Istilah Kunci Bagian VI Berikut diberikan beberapa istilah kunci, dan pengertian praktisnya yang sering digunakan pada bagian ini. Untuk pengertian lebih formal dapat dibaca kembali pada pembahasan lengkapnya.

Integral taktentu: integral yang tidak memuat batas, istilah lainnya adalah antiderivatif.

Integral tertentu: integral yang memuat batas bawah dan batas atas, istilah untuk integral yang sesungguhnya.

Partisi: himpunan terurut titik-titik pada domain $[a, b]$ yang memuat titik ujung kiri a dan ujung kanan b.

Mesh partisi: lebar maksimum subinterval yang dibentuk oleh partisi, disebut juga norma atau *mesh* partisi.

Fungsi monoton: fungsi yang naik saja atau turun saja.

Integral Riemann Stieltjes: perumuman integral Riemann dengan mengembangkan variabel integral x menjadi fungsi naik $\alpha(x)$.

Fungsi tangga satuan: fungsi bernilai 1 jika $x > 0$ dan bernilai 0 jika $x \leq 0$.

Ukuran dirac: mirip fungsi karakteristik dengan himpunan sebagai argumennya.

Fungsional kuadrat terbobot: fungsional yang mengukur jumlahan selisih kuadrat terbobot antara nilai eksak dan hasil pengukuran.

Integral takwajar: integral yang pada domain takterbatas atau integrannya takterbatas.

Integral takwajar konvergen: nilai integral takwajar yang berhingga, lawannya adalah divergen.

Soal Latihan Bagian VI Kerjakan soal-soal latihan berikut ini untuk memperkuat pemahaman materi teori integral.

1. Tuliskan perbedaan antara integral taktentu dan integral tertentu. Bagaimana hubungan kedua konsep ini?

2. Apakah yang dimaksud dengan jumlahan Riemann? Apa saja variabel yang mempengaruhi jumlah Riemann?

3. Bagaimana pendefinisian integral tertentu menurut Cauchy? Apa saja fungsi yang dapat diintegralkan melalui pendekatan Cauchy ini?

4. Mengapa definisi integral menurut Cauchy hanya berlaku untuk fungsi kontinu dan terbatas saja?

5. Pada pendefinisian integral metode Cauchy, pengambilan limit didasarkan banyaknya subinterval dan norma partisi biasanya digunakan bergantian. Apakah kedua ukuran ini mempunyai implikasi yang sama. Bagaimana hubungan implikatifnya?

6. Apa perbedaan mendasar antara metode Riemann dan metode Darboux dalam mendefinisikan integral $\int_a^b f(x)\,dx$?

7. Buktikan kebenaran limit berikut dengan menggunakan pendekatan integral Cauchy.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$.

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$.

8. Hitunglah limit berikut dengan terlebih dahulu mengidentifikasinya sebagai jumlahan Riemann.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+kc}$, $c > 1$.

   (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \frac{2^\alpha}{n^{\alpha+1}} + \cdots + \frac{(n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}} \right)$, $\alpha > -1$.

9. Diberikan fungsi $f(x) := x^2 - 4x + 6$ didefinisikan pada domain $[0, 4]$. Hitunglah jumlah bawah $L(P; f)$ dan jumlah atas $U(P; f)$ pada masing-masing partisi berikut.

16. Misalkan f kontinu dan taknegatif pada $[a, b]$ dan diasumsikan
$$\int_a^b f(x)\, dx = 0.$$
Tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

17. Diberikan fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = 0 \\ \frac{1}{2^n} & \text{jika } x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right), n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$
   (a) Berapa banyak titik diskontinu fungsi f di dalam $[0, 1]$?
   (b) Hitunglah integral $\int_0^1 f(x)\, dx$.

18. Misalkan f kontinu dan taknegatif pada $[a, b]$ dan diasumsikan
$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$$
untuk setiap fungsi kontinu g pada $[a, b]$. Tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

19. Misalkan $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in [a, b]$, kecuali pada berhingga titik $c_1, c_2, \cdots, c_n$ dalam $[a, b]$. Buktikan $g \in \mathcal{R}[a, b]$ dan
$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$
[Catatan: fakta ini menunjukkan integral sebagai sebuah proses yang cukup stabil dalam arti dua fungsi yang berbeda sedikit namun nilai integralnya sama. Berbeda sekali pada diferensial, yaitu walaupun dua fungsi hanya berbeda sedikit namun derivatifnya dapat berbeda sangat besar].

20. Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $g : [c, d] \to \mathbb{R}$. Tentukan syarat cukup pada f dan g agar fungsi komposisi $f \circ g$ terintegral pada $[a, b]$. Selanjutnya buktikan kebenaran klaim Anda tersebut.

21. Misalkan fungsi f Lipschitz pada $[0, 1]$ dengan konstanta Lipschitz L. Buktikan bahwa
$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{L}{n}.$$

22. Misalkan fungsi $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut.
$$h(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{jika } x \text{ rasional} \\ 0 & \text{jika } x \text{ irrasional.} \end{cases}$$
Buktikan h tidak terintegral Riemann pada $[0, 1]$.

23. Misalkan f dan g keduanya kontinu pada $[a, b]$. Jika $\int_a^b f = \int_a^b g$, buktikan terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = g(c)$.

30. Misalkan fungsi f kontinu dan taknegatif pada $[0,1]$. Misalkan $M := \sup\{f(x) : x \in [0,1]\}$. Buktikan!

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 (f(t))^n\,dt\right]^{\frac{1}{n}} = M.$$

31. Hitunglah integral berikut dengan menggunakan metode substitusi.

    (a) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$.

    (b) $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

    (c) $\int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}\,dt$.

32. Hitunglah integral berikut dengan metode integral parsial digabung dengan metode substitusi.

    (a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$.

    (b) $\int_1^\pi \ln(x+x^2)\,dx$.

    (c) $\int_{\pi/2}^e \sin(\ln x)\,dx$.

33. Jika $f, g \in \mathcal{L}[a,b]$, buktikan kebenaran ketaksamaan Schwarz berikut:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

Bandingkan dengan ketaksamaan serupa dalam bentuk: $\left(\sum a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k^2\right)$ yang telah dibahas pada Bagian 1 buku ini.

34. Misalkan u fungsi naik dan terdiferensial pada $[a,b]$. Perhatikan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = u(x)$ dengan sumbu X, plus daerah yang dibatasi kurva dengan sumbu Y.

    (a) Jelaskan secara grafis bahwa berlaku $\int_a^b u(x)dx + \int_{u(a)}^{u(b)} u^{-1}(t)dt = bu(b) - au(a)$.

    (b) Dengan menggunakan metode substitusi dan integral parsial, buktikan bahwa formula pada (a) berlaku.

35. Dengan menggunakan definisi integral Riemann-Stieltjes, buktikan

$$\int_a^b f\,d\alpha(x) = \alpha(a) - \alpha(b).$$

36. Jika f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α, yaitu $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ dan berlaku $\int_a^b f\,d\alpha = 0$ untuk setiap fungsi f yang monoton pada $[a,b]$, buktikan α adalah fungsi konstan.

37. Misalkan $\alpha(x) := -x + k$, $k \le x \le k+1$.

    (a) Gambarkan grafik fungsi α pada interval $[0,5]$.

    (b) Hitunglah integral Riemann-Stieltjes $\int_0^5 x^2 d\alpha$.

46. Pendefinisian integral takwajar tipe 1 dengan batas bawah $-\infty$ adalah sebagai berikut

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} f(x)dx + \lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c} f(x)dx.$$

Apakah definisi ini ekuivalen dengan integral berikut?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx.$$

47. Fungsi $\mathrm{Si}(x)$ didefinisikan dalam bentuk integral berikut

$$\mathrm{Si}(x) := \int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Fungsi ini biasanya disebut fungsi sin-integral.

(a) Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $0 < t \le 25$. Amati di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun.

(b) Selidikilah kekonvergenan

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Jika ia konvergen, berapa nilainya?

48. Biasanya cara yang digunakan untuk menghitung integral takwajar berikut

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

adalah dibentuk kuadratnya, yaitu

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy. \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan transformasi koordinat polar $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$.

(a) Hitunglah nilai I.

(b) Fungsi kesalahan didefinisikan sebagai

$$\mathrm{erf}(x) := \int_{0}^{x} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt.$$

Gambarkan grafik fungsi kesalahan ini pada interval $[0, 25]$.

(c) Selidikah kekonvergenan dari $\int_0^\infty \mathrm{erf}(x)\,dx$. Jika ia konvergen, berapa nilainya? Konfirmasikan jawaban Anda dengan hasil (a).

Bagian VII

BARISAN DAN DERET FUNGSI

BAB 18

Barisan Fungsi

Not everything that can be counted counts, and not everything that counts can be counted.

Albert EINSTEIN

Sebagaimana telah diketahui bahwa barisan bilangan real didefinisikan sebagai fungsi bernilai real dengan domain himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Lebih spesifiknya, barisan $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dengan $X(n) := x_n$ disebut suku ke-n barisan X. Barisan bilangan real X biasanya dinyatakan dalam bentuk $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$. Jadi, barisan bilangan real merupakan susunan (*array*) bilangan real yang berasal dari nilai fungsi X pada $\mathbb{N}$.

Pada bab ini, konsep barisan bilangan real diperluas menjadi barisan fungsi. Dilihat dari namanya, barisan fungsi dapat dibayangkan sebagai koleksi fungsi $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots)$ dengan $f_k, k = 1, 2, 3, \cdots$ adalah fungsi real dengan domain yang sama. Ketika nilai variabel x disubstitusi oleh sebuah bilangan maka barisan fungsi menjadi barisan bilangan real biasa. Oleh karena barisan yang terbentuk bergantung pada nilai x yang diberikan maka begitu juga kekonvergenannya. Pada kesempatan ini dibahas kekonvergenan barisan fungsi yang mencakup kekonvergenan titik demi titik (*point-wise*) dan kekonvergenan seragam (*uniformly*), sifat pertukaran antara limit dan diferensial, sifat pertukaran urutan operasi antara limit dan derivatif, dan antara limit dan integral.

18.1 Pengertian Barisan Fungsi dan Kekonvergenannya

Definisi 18.1. (Barisan fungsi) Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat fungsi $f_n : A \to \mathbb{R}$. Koleksi (f_n) disebut barisan fungsi pada A ke $\mathbb{R}$. Untuk setiap $x \in A$, diperoleh barisan bilangan real sebagai berikut:

$$(f_n(x)), \tag{18.1.1}$$

yaitu dengan mengevaluasi nilai semua fungsi f_n di x.

Contoh 18.1. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $f_n(x) := x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Maka terbentuklah barisan fungsi (f_n) yang menghasilkan beberapa barisan bilangan real sebagai berikut:

1. untuk $x = \frac{1}{2}$ diperoleh barisan $\left(f_n(\frac{1}{2})\right) = \left((\frac{1}{2})^n : n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\right)$. Barisan ini pada faktanya konvergen ke 0.

3. $f_n(x) := \frac{x^2+nx}{n}$.

PENYELESAIAN. Kita selidiki satu per satu melalui analisis sederhana sebagai berikut:

1. Perhatikan $f_n(x) := \frac{x}{n}$ berupa garis lurus dengan gradien $\frac{1}{n}$. Semakin lama gradien ini semakin mendekati nol dan grafiknya semakin berimpit dengan sumbu X. Jadi, dapat disimpulkan barisan fungsi ini konvergen ke $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

2. Bila barisan ini disajikan dalam bentuk panjang diperoleh barisan geometri dengan rasio x, yaitu $(x, x^2, x^3, \cdots)$. Untuk $-1 < x < 1$, jelas barisan ini konvergen ke 0. Untuk $x < -1$ atau $x > 1$, barisan ini divergen. Untuk $x = -1$ diperoleh $(-1, 1, -1, \cdots)$ sebuah barisan divergen. Untuk $x = 1$, diperoleh $(1, 1, 1, \cdots)$ sebuah barisan konstan yang konvergen ke 1. Dengan penyelidikan ini kita dapat mengkonstruksi fungsi $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{jika } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{jika } x = 1. \end{cases}$$

Berlaku $\lim_{n\to\infty} x^n = f(x)$. Sebuah fakta menarik pada contoh ini, yaitu (f_n) dengan $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ adalah barisan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$, namun ia konvergen ke fungsi yang tidak kontinu, yaitu f.

3. Pertama kita sederhanakan dulu:

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n} = \frac{x^2}{n} + x.$$

Kemudian diambil limit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^2}{n} + x \right) \\ &= x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + x \lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 0 + x = x \end{aligned}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jadi, jika diambil $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ maka berlaku $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Ini sebuah kasus di mana barisan fungsi kuadrat konvergen ke fungsi linear. Tidak seperti contoh sebelumnya, di sini limit barisan fungsi kontinu juga berupa fugsi kontinu. Ilustrasinya diberikan pada Gambar 18.2. Pada gambar ini kekonvergenan sangat lambat di titik yang jauh dari $x = 0$.

□

Pada contoh-contoh sebelumnya, parameter n seolah-olah hanya berpengaruh pada pendefinisian fungsinya namun secara umum dapat pula muncul pada partisi domainnya seperti diberikan pada contoh berikut ini.

Contoh 18.3. Diberikan barisan fungsi (g_n) yang didefinisikan pada $[0, 1]$ sebagai berikut:

$$g_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{jika } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right) & \text{jika } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{jika } \frac{2}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Selidikilah kekonvergenan barisan fungsi ini dan berikan ilustrasi grafisnya.

Secara geometris, integral

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx$$

dapat dipandang sebagai luas daerah segitiga dengan pajang alas $\frac{2}{n}$ dan tinggi n, yaitu bernilai $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1$ satuan luas untuk setiap n. Secara kalkulus, fakta ini dapat diverifikasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_n(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2(\frac{2}{n} - x)\,dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 0\,dx \\
&= \frac{1}{2}n^2x^2\Big|_0^{\frac{1}{n}} + n^2(\frac{2x}{n} - \frac{x^2}{2})\Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} + 0 \\
&= \frac{1}{2} + n^2\left(\frac{2}{n}(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}) - \frac{1}{2}\left((\frac{2}{n})^2 - (\frac{1}{n})^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + n^2\left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Sebuah keunikan terjadi di sini, yaitu nilai integral yang dipandang sebagai luas segitiga bernilai tetap tidak bergantung pada n. Fakta ini dapat ditulis dalam bentuk limit berikut:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = 1.$$

Padahal untuk n membesar akan terjadi penyempitan alas segitiga menuju 0 sehingga pada akhirnya menghasilkan luas 0. Fakta ini dapat disajikan dalam bentuk berikut:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

Sebuah fakta pada contoh ini adalah tidak berlakunya pertukaran urutan operasi limit dan integral, yaitu

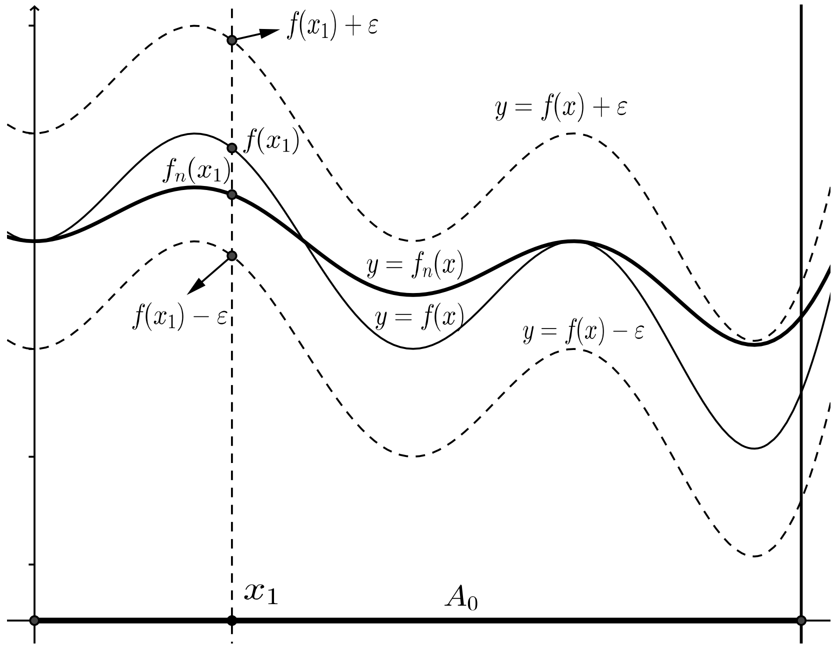
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx.$$

Sebagai pembanding kita perhatikan contoh sebelum ini, yaitu $f_n(x) = \frac{x^2}{n} + x$ dengan limitnya $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{n} + x\right) dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Di lain pihak kita juga mempuyai

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$



Gambar 18.4: Ilustrasi barisan fungsi konvergen seragam

Penyelesaian. Misalkan $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Ambil $n_k = k$, $x_k = k$ maka diperoleh $f_{n_k}(x_k) = f_k(k) = \frac{k}{k} = 1$ dan $f(x_k) = f(k) = 0$ untuk setiap k. Dengan pengambilan ini berlaku:

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon_0 = \frac{1}{2}.$$

Berdasarkan kriteria, disimpulkan (f_n) tidak konvergen seragam ke f. □

Latihan 18.2. Telah dibuktikan pada contoh sebelumnya bahwa barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = x^n$, $x \in (-1, 1]$ konvergen ke fungsi f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{jika } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{jika } x = 1. \end{cases}$$

Dengan menggunakan kriteria konvergen takseragam, buktikan bahwa kekonvergenan ini tidak seragam.

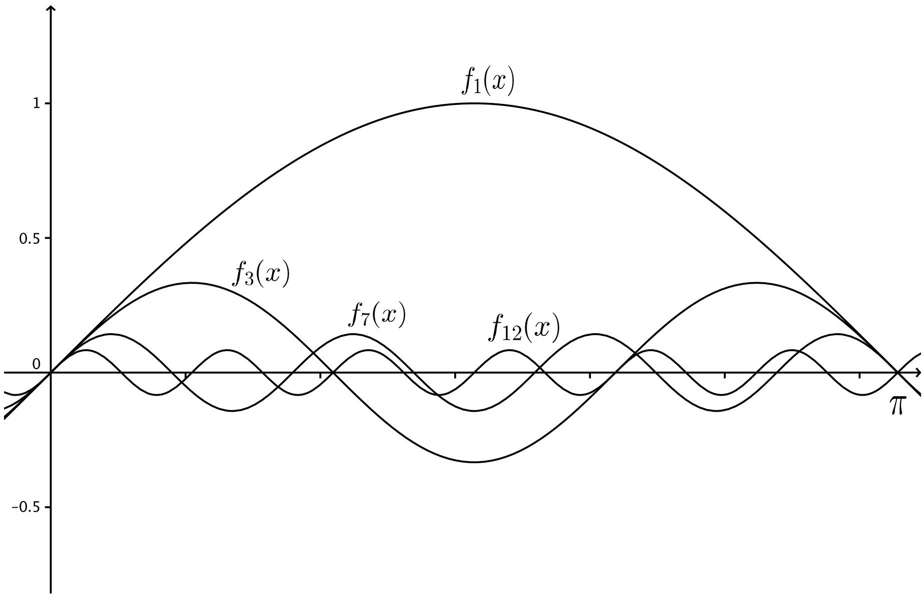
Untuk mendeteksi kekonvergenan seragam lebih mudah dilakukan dengan menggunakan norma seragam fungsi. Berikut definisi norma seragam sebuah fungsi.

Definisi 18.4. (Norma seragam) Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi terbatas, yaitu himpunan $f(A)$ merupakan himpunan terbatas pada $\mathbb{R}$. Norma seragam (*uniform norm*) fungsi f didefinisikan sebagai

$$\|f\|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|. \tag{18.1.5}$$

Sebelumnya sudah pernah diperkenalkan norma seragam ini dalam simbol $\|f\|_\infty$ dan dikenal dengan istilah norma supremum. Keterbatasan fungsi mutlak dipenuhi untuk menjamin adanya supremum. Kadangkala, norma ini didefinisikan pada ruang fungsi kontinu dan terbatas $\mathcal{C}_b(A)$. Sebuah hubungan implikatif antara $||f||_A$ dan $|f(x)|, x \in A$ adalah:

$$\|f\|_A < \varepsilon \longleftrightarrow |f(x)| < \varepsilon \text{ untuk setiap } x \in A. \tag{18.1.6}$$



Gambar 18.5: Grafik fungsi f_n untuk beberapa n

Grafik beberapa fungsi pada barisan ini diberikan pada Gambar 18.5. Berdasarkan gambar ini terlihat bahwa semakin besar n maka semakin tinggi frekuensi (gelombangnya semakin banyak) tetapi amplitudonya (ketinggian gelombangnya) semakin rendah yang pada akhirnya menuju 0.

Latihan 18.3. Diberikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := xne^{-nx}, x \in A := [0, \infty)$. Buktikan barisan fungsi ini konvergen titik demi titik ke fungsi $f(x) = 0$ pada A, tetapi tidak konvergen seragam.

Latihan 18.4. Diberikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := \frac{x}{x+n}$. Buktikan barisan fungsi ini konvergen seragam pada $[0, 1]$, tetapi konvergen takseragam pada $[0, \infty)$.

Latihan 18.5. Diberikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := nx(1 - x^2)^n, x \in [0, 1]$. Tentukan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Jelaskan, apakah konvergen ini seragam?

Latihan 18.6. Tentukan domain $A \subseteq \mathbb{R}$ di mana barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := \frac{x^{2n}}{n+x^{2n}}$ konvergen seragam pada A.

18.2 Konvergen Seragam dan Kekontinuan

Sebelumnya telah ditunjukkan bahwa barisan (f_n) dengan $f_n(x) := x^n$ konvergen ke $f(x) = \chi_{\{1\}}(x)$, $x \in (-1, 1]$. Ini adalah kasus barisan fungsi kontinu konvergen ke fungsi tidak kontinu. Kita juga telah menunjukkan bahwa kekonvergenan ini tidak seragam. Pertanyaannya adalah apakah ada jaminan bahwa limit barisan fungsi kontinu juga kontinu? Jawaban pertanyaan ini diberikan pada teorema berikut.

Teorema 18.2. *Misalkan (f_n) barisan fungsi kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$ yang konvergen seragam ke fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Maka fungsi f kontinu pada A.*

BUKTI. Misalkan $c \in A$ titik sebarang. Akan dibuktikan f kontinu di c. Lakukan manipulasi berikut, kemudian gunakan ketaksamaan segitiga.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \\ &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c).| \end{aligned}$$

Teorema 18.3. *Misalkan $\mathcal{C}(A)$ himpunan fungsi kontinu dan terbatas pada A. Maka $\mathcal{C}(A)$ lengkap terhadap norma seragam.*

Bukti. Misalkan (f_n) barisan Cauchy dalam $\mathcal{C}(A)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sehingga untuk setiap $m, n \geq K$ berlaku

$$\|f_m - f_n\|_A < \varepsilon.$$

Kita tunjukkan bahwa (f_n) konvergen ke sebuah fungsi $f \in \mathcal{C}(A)$. Ambil sebarang $x \in A$, diperoleh

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{t \in A} |f_n(t) - f_m(t)| =: \|f_n - f_m\|_A < \varepsilon,$$

berlaku untuk setiap $m, n \geq K$. Ini berarti $(f_n(x))$ merupakan barisan Cauchy pada $\mathbb{R}$. Mengingat $\mathbb{R}$ lengkap maka barisan ini konvergen ke sebuah bilangan real. Jadi, terdapat fungsi f sehingga berlaku konvergen titik demi titik berikut:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), x \in A.$$

Selanjutnya ditunjukkan kekonvergenan ini adalah seragam.

$$|f(x) - f_m(x)| \quad = \quad \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \text{ untuk semua } m \geq K.$$

Karena keadaan ini berlaku untuk setiap $x \in A$ maka

$$\|f - f_m\|_A = \sup_{x \in A} |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Ini berarti f adalah limit seragam barisan fungsi kontinu sehingga disimpulkan $f \in \mathcal{C}(A)$. Terbukti $\mathcal{C}(A)$ lengkap. □

Teorema ini memberikan kriteria Cauchy agar barisan fungsi kontinu dan terbatas konvergen seragam ke sebuah fungsi adalah cukup ia merupakan barisan Cauchy, yaitu

$$\|f_m - f_n\|_A \to 0. \tag{18.2.2}$$

Contoh 18.10. Misalkan barisan (f_n) didefinisikan sebagai $f_n(x) := \frac{nx}{1+nx^2}, x \in A := [0, \infty)$. Buktikan untuk setiap n, fungsi f_n kontinu dan terbatas pada A. Kemudian, tentukan $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Apakah f juga kontinu dan terbatas pada A? Apakah fakta ini bertentangan dengan teorema sebelumnya?

Penyelesaian. Perhatikan $f_{n1}(x) := nx$ dan $f_{n2}(x) := 1 + nx^2$ kontinu pada A dengan $f_{n2}(x) \neq 0$ pada A. Jadi fungsi $f_n(x) := \frac{f_{n1}(x)}{f_{n2}(x)}$ kontinu pada A. Untuk melihat keterbatasannya, kita lakukan analisis berikut:

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{n(1 + nx^2) - nx(2nx)}{(1 + nx^2)^2} \\
&= \frac{n + n^2x^2 - 2n^2x^2}{(1 + nx^2)^2} \\
&= \frac{n - n^2x^2}{(1 + nx^2)^2} \\
&= \frac{n^2(\frac{1}{n} - x^2)}{(1 + nx^2)^2} \\
&= \frac{n^2 \left(\sqrt{\frac{1}{n}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + x\right)}{(1 + nx^2)^2}.
\end{aligned}$$

Teorema 18.4. *Misalkan (f_n) barisan fungsi terdiferensial pada interval $A := [a, b]$. Andaikan barisan derivatif (f_n') konvergen seragam ke suatu fungsi $g : A \to \mathbb{R}$ dan terdapat sebuah $x_0 \in A$ sehingga $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ ada. Maka (f_n) konvergen seragam ke suatu fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial pada A dengan*

$$f' = g.$$

Bukti. Pertama ditunjukkan bahwa barisan fungsi (f_n) konvergen seragam dengan menggunakan kriteria Cauchy. Misalkan $x \in A$ sebarang dan diasumsikan $x_0 < x$. Perhatikan interval $[x_0, x]$. Untuk $m, n \in \mathbb{N}$, terapkan TNR pada fungsi $h_{mn}(x) := f_m(x) - f_n(x)$ pada interval $[x_0, x]$, yaitu terdapat $c \in (x_0, x)$ sehingga

$$\begin{aligned} h_{mn}(x) - h_{mn}(x_0) &= h_{mn}'(c)(x - x_0) \\ f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0)) &= (f_m'(c) - f_n'(c))(x - x_0) \\ f_m(x) - f_n(x) &= f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)(f_m'(c) - f_n'(c)). \end{aligned}$$

Dengan ketaksamaan segitiga diperoleh:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (x - x_0)|f_m'(c) - f_n'(c)| \\ &\le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a)|f_m'(c) - f_n'(c)|. \end{aligned}$$

Selanjutnya diambil supremum kedua ruas untuk x berjalan pada A. Dalam hal ini c bergatung pada x sedangkan x_0 tidak. Oleh karena itu diperoleh:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in A} |f_m(x) - f_n(x)| &\le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a) \sup_{x\in A} |f_m'(c) - f_n'(c)| \\ \|f_m - f_n\|_A &\le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a)\|f_m' - f_n'\|_A. \end{aligned}$$

Mengingat (f_n') konvergen seragam maka $\|f_m' - f_n'\| \to 0$. Diketahui barisan $(f_n(x_0))$ konvergen, jadi ia Cauchy sehingga $|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \to 0$. Berdasarkan fakta-fakta ini maka diperoleh $\|f_m - f_n\| \to 0$, yakni barisan (f_n) konvergen seragam katakan ke suatu fungsi f. Karena f adalah limit seragam fungsi-fungsi kontinu maka disimpulkan f juga kontinu. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $f'(y)$ ada untuk setiap $y \in A$. Untuk $x \in A$ dengan asumsi $x < y$, terapkan TNR fungsi $h_{mn}(x) := f_m(x) - f_n(x)$ pada interval $[x, y]$, yaitu terdapat $z \in (x, y)$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{f_m(y) - f_n(y) - (f_m(x) - f_n(x))}{y - x} &= (f_m'(z) - f_n'(z)) \\ \left| \frac{f_m(y) - f_m(x)}{y - x} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{y - x} \right| &= |f_m'(z) - f_n'(z)| \\ &\le \|f_m' - f_n'\|_A. \end{aligned}$$

Karena barisan (f_n') konvergen seragam maka norma $\|f_m' - f_n'\|_A \to 0$. Artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K_1 sehingga $\|f_m' - f_n'\| < \frac{\varepsilon}{3}$ untuk setiap $m, n \ge K_1$. Akibatnya,

$$\left| \frac{f_m(y) - f_m(x)}{y - x} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{y - x} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ untuk setiap } m, n \ge K_1.$$

Dengan mengambil limit untuk $m \to \infty$ maka diperoleh

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{y - x} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ untuk setiap } n \ge K_1. \qquad (*)$$

2. Ingat, jika $y = \tan^{-1} x$ maka $y' = \frac{1}{x^2+1}$. Jadi barisan derivatif (f_n') adalah

$$f_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{(nx)^2+1} = \frac{\sqrt{n}}{n^2x^2+1}.$$

Selanjutnya kita selidiki $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. Untuk $x = 0$ diperoleh $f_n'(0) = \frac{\sqrt{n}}{0+1} \to \infty$ divergen. Untuk $x \neq 0$ diperoleh

$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{n^2x^2+1} = \frac{1}{n\sqrt{n}x + 1/\sqrt{n}} \to 0.$$

Diperoleh limit barisan derivatif adalah $g(x) := 0$ untuk $x \neq 0$. Mudah ditunjukkan bahwa pada domain $A := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ barisan derivatif $\{f_n'\}$ konvergen seragam ke g. Faktanya, pada domain ini berlaku $f'(x) = 0 = g(x)$. Jadi berlaku pertukaran limit dan derivatif pada domain A, yaitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}(f_n) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \text{ atau } \lim_{n\to\infty} f_n' = f' \text{ pada } A.$$

$\square$

18.4 Konvergen Seragam dan Integral

Pada awal pembahasan telah diberikan contoh barisan fungsi (g_n) pada $[0,1]$ yang didefinisikan sebagai:

$$g_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{jika } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right) & \text{jika } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{jika } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Barisan fungsi ini konvergen titik demi titik ke fungsi $f(x) = 0$. Setelah diintegralkan diperoleh

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \text{ dan } \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Jadi, sifat pertukaran limit integral berikut tidak berlaku, yaitu:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Kasus kedua yaitu $f_n(x) = \frac{x^2}{n} + x$ dengan limitnya $f(x) = x$, ternyata memenuhi sifat pertukaran limit dan integral ini.

Pada pokok bahasan ini kita menyelidiki sifat apa saja yang perlu dipenuhi oleh barisan fungsi (f_n) dan fungsi limitnya f pada $[a,b]$ agar sifat pertukaran integral berikut berlaku.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{18.4.1}$$

Teorema 18.5. *Misalkan (f_n) barisan fungsi yang terintegral pada $[a,b]$, ia konvergen seragam ke fungsi f pada $[a,b]$. Maka fungsi f terintegral pada $[a,b]$ dan (18.4.1) dipenuhi.*

untuk semua $x \in [a,b]$. Misalkan $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{k-1},x_k];t_k)\}_{k=1}^n$ sebarang partisi terlabel pada $[a,b]$. Perhatikan selisih jumlahan Riemann $S(f_n;\dot{\mathcal{P}})-S(f;\dot{P})$ untuk $n \geq K$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\left|S(f_n;\dot{\mathcal{P}})-S(f;\dot{\mathcal{P}})\right| &= \left|\sum_{k=1}^n (f_n(t_k)-f(t_k))(x_k-x_{k-1})\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f_n(t_k)-f(t_k)|\,(x_k-x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\sum_{k=1}^n (x_k-x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\cdot(b-a) = \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Karena $\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \alpha$ maka dapat dipilih sebuah bilangan asli r cukup besar dan $r \geq K$ sehingga

$$\left|\int_a^b f_r - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{\#\#}$$

Pilih juga $\delta > 0$ sehingga untuk sebarang partisi terlabel $\dot{\mathcal{P}}$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$ berlaku

$$\left|\int_a^b f_r - S(f_r;\dot{\mathcal{P}})\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{\#\#\#}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dan ketaksamaan (#), (##), (###) diperoleh

$$\begin{aligned}\left|S(f:\dot{\mathcal{P}})-\alpha\right| &\leq \left|S(f:\dot{\mathcal{P}})-S(f_r;\dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f_r;\dot{\mathcal{P}})-\int_a^b f_r\right| + \left|\int_a^b f_r-\alpha\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga setiap partisi terlabel $\dot{\mathcal{P}}$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$ berlaku $\left|S(f:\dot{\mathcal{P}})-\alpha\right| \leq \varepsilon$. Berdasarkan definisi keterintegralan disimpulkan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dengan $\int_a^b f = \alpha$ dan berlaku

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \alpha = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

□

Teorema ini dikenal dengan teorema kekonvergenan integral (TKI) (Davidson and Donsig, 2002). Jika sudah diketahui fungsi limit f terintegral, syarat konvergen seragam barisan (f_n) dapat diperlemah menjadi cukup terbatas saja, yaitu ada $B > 0$ sehingga $|f_n(x)| \leq B$ untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Dalam kasus ini, teorema disebut dengan teorema kekonvergenan terbatas (TKT) (Bartle and Sherbet, 2000).

Jika konvergen seragam maka pasti konvergen titik demi titik. Tetapi, konvergenan titik demi titik belum tentu konvergen seragam. Dalam kasus (f_n) dan f kontinu, dan $f_n \leq f_{n+1}$ (monoton naik), maka konvergen titik demi titik mengakibatkan konvergen seragam. Fakta ini dikenal dengan teorema Dini. Berikut formulasi teorema Dini.

Teorema 18.6. *Misalkan (f_n) barisan fungsi monoton dan kontinu pada $I := [a,b]$. Jika (f_n) konvergen titik demi titik ke fungsi kontinu f pada I maka (f_n) konvergen seragam ke f pada I.*

BAB 19

Deret Fungsi

It is He made the sun a shinning light and the moon a deriving light and determined for it phases - that you may know the number of years and account [of time]

QS 10:5

Penjumlahan fungsi-fungsi menghasilkan sebuah fungsi baru. Dalam hal banyaknya fungsi tersebut berhingga maka sifat-sifat yang dimiliki fungsi baru tersebut umumnya mewarisi sifat-sifat fungsi pembangunannya. Misalkan terdapat berhingga banyak fungsi $f_1, f_2, \cdots, f_n$ pada $[a, b]$ maka banyak sifat-sifat fungsi ini diwariskan pada fungsi jumlahan $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, antara lain:

- Jika $f_1, f_2, \cdots, f_n$ kontinu pada $[a, b]$ maka begitu juga dengan fungsi f.
- Jika $f_1, f_2, \cdots, f_n$ terdiferensial pada $[a, b]$ maka begitu juga dengan fungsi f, dan $f' = f_1' + f_2'' + \cdots + f_n^{(n)}$.
- Jika $f_1, f_2, \cdots, f_n$ terintegral pada $[a, b]$ maka begitu juga dengan fungsi f, dan $\int_a^b f = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \cdots + \int_a^b f_n$.

Analogi dari deret bilangan real, deret fungsi terbentuk dari jumlahan fungsi-fungsi yang banyaknya takberhingga. Dengan kata lain, deret fungsi adalah jumlahan takberhingga suku-suku barisan fungsi (f_n), yaitu

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Permasalahannya adalah apakah sifat-sifat aljabar kekontinuan, keterdiferensian dan keintegralan di atas masih tetap berlaku untuk deret ini. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 19.1. Misalkan $f_n(x) := x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Terbentuklah deret sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Ternyata ini merupakan deret geometri dengan $a = 1$ dan $r = x$ sehingga jumlahnya dapat diperoleh dengan mudah, yaitu $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Jadi kita dapat menulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots. \tag{*}$$

Selanjutnya kita bandingkan $s_n(x)$ dengan $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $ds_n(x)$ dengan $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $is_n(x)$ dengan $F(x) = -\ln(1-x)$. Berdasarkan Gambar (19.1) dan (19.2), semakin besar n grafik fungsi jumlah parsial ini semakin mendekati grafik fungsi limitnya, khususnya dalam interval $(-1, 1)$. Ini mengindikasikan bahwa metode pendiferensial dan pengintegralan suku demi suku berlaku untuk deret fungsi geometri ini. Pada bab ini kita akan menyelidiki sifat apa saja yang harus dipenuhi oleh deret fungsi agar berlaku aturan seperti ini. Pada akhir bab kita buktikan sifat unik fungsi Weierstrass yang terdefinisi sebagai deret fungsi.

19.1 Pengertian Deret Fungsi dan Kekonvergenannya

Definisi 19.1. (Jumlah parsial) Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan (f_n) barisan fungsi pada A. Bentuk jumlahan berikut:

$$s_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

disebut barisan jumlah parsial ke-n deret fungsi. Jika $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ ada, yaitu berupa bilangan real maka deret fungsi $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ dikatakan konvergen di x, ditulis:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x). \tag{19.1.1}$$

Deret fungsi $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ dikatakan konvergen titik demi titik (seragam) pada A jika barisan jumlah parsialnya $(s_n(x))$ konvergen titik demi titik (seragam) pada A. Limitnya dinyatakan dengan sebuah fungsi f pada A, yaitu

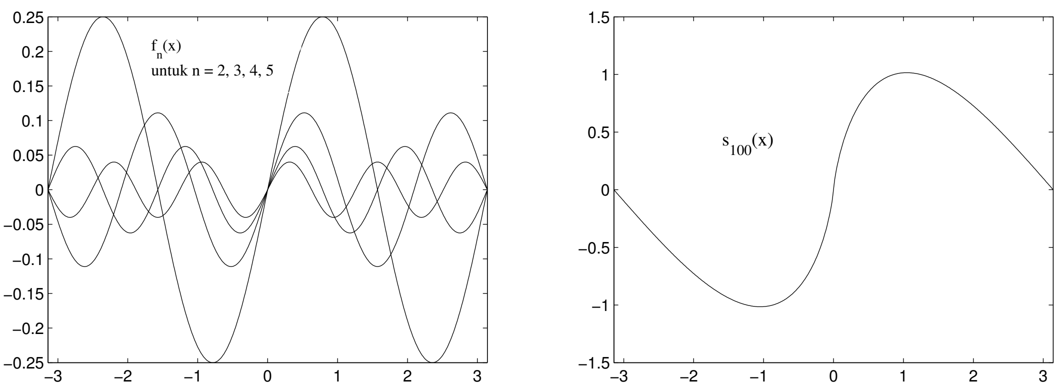
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Berdasarkan definisi ini, sifat yang dimiliki oleh deret dan barisan jumlah parsialnya adalah sama. Dengan demikian sifat kekontinuan deret fungsi, pendiferensialan dan pengintegralan suku demi suku pada deret tetap berlaku dalam domain di mana deret konvergen seragam. Menentukan nilai sebuah deret fungsi bukanlah pekerjaan yang sederhana seperti menentukan limit sebuah barisan fungsi. Walapun kita tidak mengetahui bentuk fungsi $f(x)$ sebagai representasi sebuah deret fungsi, kita dapat mendeteksi eksistensi fungsi ini melalui uji konvergensi deret fungsi. Seperti pada deret bilangan real, uji konvergensi adalah prosedur yang digunakan untuk memutuskan apakah sebuah deret fungsi konvergen atau divergen. Salah satu uji konvergensi deret adalah menggunakan kriteria Cauchy seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 19.1. *Misalkan (f_n) barisan fungsi yang terdefinisi pada A. Deret $\sum_{n=}^{\infty} f_n$ konvergen seragam ke sebuah fungsi f pada A jika dan hanya jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \tag{19.1.2}$$

berlaku untuk semua $m \geq n \geq K$ dan semua $x \in A$. Dengan kata lain, deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam jika dan hanya jika barisan jumlah parsialnya (s_n) merupakan barisan Cauchy.



Gambar 19.3: Beberapa suku barisan fungsi (kiri) dan aproksimasi limit deret fungsi (kanan)

Contoh 19.3. Diberikan barisan fungsi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{jika } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{jika } x = 0 \text{ atau } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen titik demi titik untuk setiap $x \in [0,1]$, tetapi tidak konvergen seragam.

Penyelesaian. Perhatikan $x \in (0,1)$ pasti terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Diperoleh nilai fungsi $f_n(x) = 1$. Oleh karena $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}) \subseteq [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-2}) \subseteq, \cdots, \subseteq [0, \frac{1}{2}] \subseteq [0, \frac{1}{1}]$ maka diperoleh $f_{n-1}(x) = f_{n-2}(x) = \cdots = f_2(x) = f_1(x) = 1$. Sedangkan $f_{n+1}(x) = f_{n+2}(x) = \cdots = 0$ karena $x \notin (0, \frac{1}{n+1})$. Sesungguhnya fungsi f_n merupakan fungsi karakteristik $\chi_{(0,1/n)}$dan grafiknya f_n diberikan pada Gambar 19.4. Oleh karena itu diperoleh hasil berikut ini.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ suku}} + 0 + \cdots = n. \end{aligned}$$

Untuk $x = 0$ atau $x = 1$ maka $f_n(x) = 0$ untuk setiap n. Jadi diperoleh limit titik demi titik sebagai berikut:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \begin{cases} n & \text{jika } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{jika } x = 0 \text{ atau } x = 1. \end{cases}$$

Selanjutnya kita buktikan kekonvergenan ini tidak seragam. Untuk $m > n$ berlaku

$$\begin{aligned} |s_m(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \\ &\geq f_{n+1}(x) = 1 \text{ untuk } 0 < x < \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $\|s_m - s_n\|_{[0,1]} = \sup |s_m(x) - s_n(x)| \geq 1$ tidak konvergen ke nol, yakni (s_n) bukan Cauchy. Akibatnya, deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tidak konvergen seragam. □

Contoh 19.5. Selidikilah kekonvergenan seragam deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ untuk semua $p > 0$.

PENYELESAIAN. Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} =: M_n \text{ untuk semua } x \in \mathbb{R}.$$

Untuk $p > 1$, jelas $\sum M_n = \sum \frac{1}{n^p}$ konvergen sehingga berdasarkan uji-M, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ konvergen untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Untuk $0 < p \leq 1$, uji-M tidak dapat digunakan sama sekali karena $\sum \frac{1}{n^p}$ divergen. Divergennya deret ini tidak dapat menyimpulkan apapun tentang deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$. □

Contoh 19.6. Selidikilah kekonvergenan deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$. Kemudian buktikan bahwa formula berikut berlaku.

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Apakah kekonvergenan deret pada formula ini seragam?

PENYELESAIAN. Ini merupakan deret fungsi geometri dengan $-x^2$ sebagai rasionya. Jadi ia dipastikan konvergen pada $-1 < -x^2 < 1$, yaitu $|x| < 1$ dan divergen pada $|x| > 1$. Khusus $x = \pm 1$, deret divergen karena diperoleh deret $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Pada interval $[-r, r]$, dengan $0 < r < 1$, deret ini konvergen seragam berdasarkan uji-M, yaitu

$$\sup_{x \in [-r,r]} \left| (-x^2)^n \right| = r^{2n} =: M_n$$

dan $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} = \frac{1}{1-r^2} < \infty$. Jadi diperoleh $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$ untuk $x \in [-r, r]$. Pada interval $(-1, 1)$, deret ini hanya konvergen titik, tetapi tidak seragam. Jelasnya untuk sebarang $N \in \mathbb{N}$ diambil $a = 2^{-\frac{1}{2N}} \in (-1, 1)$ maka suku ke-N, $f_N(a) = (-x^2)^N = (-(2^{-\frac{1}{2N}})^2)^N = (-1)^N \frac{1}{2}$. Jadi, untuk $m = N, n = N - 1$ diperoleh

$$|S_m(a) - S_n(a)| = |S_N(a) - S_{N-1}(a)| = |f_N(a)| = \frac{1}{2}.$$

Ini menunjukkan bahwa barisan jumlah parsial (S_n) dengan $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ bukan barisan Cauchy. Jadi, deret $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ tidak konvergen seragam pada $(-1, 1)$. Selanjutnya, perhatikan bahwa pada interval $[-r, r]$ kita mempunyai

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Karena deret konvergen seragam pada $[-r, r]$ maka kedua ruas dapat diintegralkan pada $[0, x]$ dengan $x < r$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt \\
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt &= \tan^{-1} x \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} &= \tan^{-1} x.
\end{aligned}$$

BUKTI. Sebelumya kita perhatikan uji Dirichlet untuk deret bilangan real berikut: jika (b_n) barisan monoton menuju nol, barisan jumlah parsial deret $\sum_{k=1}^{n} a_k$ terbatas maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergen. Kita asumsikan (b_n) tak negatif dan monoton turun. Karena $\lim_{n\to\infty} b_n(x) = 0$ seragam maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$0 \leq b_n(x) < \frac{\varepsilon}{M} \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Selanjutnya, kita buktikan kriteria Cauchy $|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)|$ dipenuhi. Perhatikan bahwa $a_k = s_k - s_{k-1}$, selanjutnya bentuk identitas berikut ini.

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k \\ &= (s_m - s_{m-1})b_m + (s_{m+1} - s_m)b_{m+1} + \cdots + (s_{n-1} - s_{n-2})b_{n-1} + (s_n - s_{n-1})b_n \\ &= s_m(b_m - b_{m+1}) + s_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2}) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n.\end{aligned}$$

Karena masing-masing $s_n \leq M$ untuk setiap n maka estimasi berikut berlaku.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| &\leq M\left(b_m - b_{m+1} + b_{m+1} - b_{m+2} + \cdots + b_{n-1} - b_n + b_n\right) \\ &= M b_m(x) \\ &\leq M \sup_{x\in E} b_m(x) < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Cauchy, disimpulkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ konvergen. □

Contoh 19.7. Selidikilah kekonvergenan seragam deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$. Apakah ia konvergen seragam dalam interval $[0, \pi]$.

PENYELESAIAN. Sebelumnya deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$ sudah dibuktikan konvergen seragam untuk setiap $p > 1$. Deret pada soal ini bersesuaian dengan $p = 1$. Ambil (b_k) dengan $b_k(x) := \frac{1}{k}$ dan $a_k(x) = \sin kx$. Jelas barisan $(b_k(x))$ monoton turun menuju nol. Untuk memastikan keterbatasan jumlah parsial $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$, digunakan formula berikut ini.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Formula ini tidak berlaku untuk $x = 0$. Untuk itu kita batasi pada interval $[\eta, 2\pi - \eta]$ dengan $0 < \eta < \pi/2$. Diperoleh estimasi

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| &= \left|\frac{\cos(x/2) - \cos(2n+1)x/2}{2\sin(x/2)}\right| \\ &\leq \frac{|\cos(\frac{x}{2})| + \left|\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\right|}{2\sin(\frac{x}{2})} \\ &\leq \frac{2}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{1}{\sin(\eta/2)}.\end{aligned}$$

Ini adalah deret pangkat dalam x. Untuk sebuah bilangan real x_0, deret pangkat dalam bentuk $(x - x_0)$ dinyatakan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots . \qquad (19.3.2)$$

Pada bab diferensial kita telah mempelajari deret Taylor sebagai bentuk khusus deret pangkat. Kedua bentuk deret pangkat ini sesungguhnya ekuivalen karena bentuk pertama dapat diperoleh dari bentuk kedua dengan mengambil variabel baru $y := x - x_0$. Oleh karena itu, untuk lebih sederhananya kita hanya fokus pada bentuk pertama.

Khusus untuk $x = 0$, deret pangkat dipastikan konvergen dengan jumlah deret sama dengan a_0. Tetapi secara umum, deret pangkat dapat konvergen pada sebuah interval terbatas atau malah konvergen pada keseluruhan bilangan real $\mathbb{R}$. Berikut ini adalah teorema Hadamard tentang interval kekonvergenan deret pangkat.

Teorema 19.4. *Diberikan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, maka terdapat $R \in [0, \infty]$ sehingga deret konvergen untuk semua x dengan $|x| < R$ dan divergen untuk $|x| > R$. Lebih lanjut, deret konvergen seragam pada setiap interval tertutup $[a, b]$ yang termuat di dalam $(-R, R)$. Misalkan $\alpha := \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n}$, maka*

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{jika } \alpha = 0 \\ 0 & \text{jika } \alpha = +\infty \\ \frac{1}{\alpha} & \text{jika } \alpha \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Bilangan R ini biasanya disebut radius konvergensi. Khusus untuk $x = \pm R$, diperiksa tersendiri. Kekonvergenan ini seragam pada interval tertutup $[a, b]$ yang termuat di dalam $(-R, R)$.

Bukti. Pandang deret pangkat $\sum_{=0}^{\infty} a_n x^n$ sebagai deret bilangan real biasa, terapkan uji akar sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} |x| \\ &= \alpha |x|. \end{aligned}$$

Berdasarkan uji akar, deret konvergen jika $\alpha|x| < 1$ dan divergen jika $\alpha|x| > 1$. Untuk limit bernilai 1, uji gagal. Perhatikan beberapa kasus untuk α.

- $\alpha = 0$ maka haruslah $\alpha|x| < 1$ berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Ini berarti deret konvergen pada $\mathbb{R}$ atau interval $(-\infty, +\infty)$. Dalam kasus ini $R = +\infty$.
- $\alpha = \infty$ maka haruslah $\alpha|x| > 1$, kecuali untuk $x = 0$. Jadi deret divergen kecuali di $x = 0$. Dalam kasus ini $R = 0$.
- $0 < \alpha < \infty$, deret konvergen di mana $\alpha|x| < 1$ atau $|x| < \frac{1}{\alpha}$, yaitu konvergen pada $(-\frac{1}{\alpha}, +\frac{1}{\alpha})$. Dalam kasus ini $R = \frac{1}{\alpha}$.

Selanjutnya ditunjukkan kekonvergenan ini adalah seragam pada $[a, b]$. Kita dapat memilih $c < R$ sehingga $[a, b] \subset [-c, c]$. Perhatikan untuk $x \in [-c, c]$ berlaku $|a_n x^n| \le |a_n| c^n$. Karena $c \in (-R, R)$ maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| c^n := M_n$ konvergen. Dengan uji-M, disimpulkan deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen seragam pada $[-c, c]$, yaitu juga pada $[a, b]$.

□

Untuk melatih keterampilan teknis dalam menentukan daerah konvergensi deret pangkat, ada baiknya soal latihan ringan berikut dikerjakan terlebih dahulu sebelum melanjutkan pada pokok bahasan berikutnya.

Latihan 19.4. Tentukan daerah di mana deret pangkat berikut ini konvergen. Untuk lebih memperjelas hasil analisa Anda, coba berikan ilustrasi numeris atau grafis aproksimasi deret di daerah konvergen dan di daerah divergen.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

19.4 Diferensial dan Integral Deret Pangkat

Pada deret fungsi secara umum, sebuah deret dapat didiferensialkan atau diintegralkan suku demi suku pada sebuah domain di mana deret tersebut konvergen seragam. Permasalahannya, radius konvergensi deret dan integralnya atau deret dan diferensialnya, secara umum belum tentu sama. Tetapi untuk kasus deret pangkat, radius konvergensi ini sama baik untuk deret maupun untuk integral dan diferensialnya sehingga pengintegralan atau pendiferensialan suku demi suku dapat dilakukan secara leluasa.

Teorema 19.5. *Jika deret $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mempunyai radius konvergensi R maka*

1. *deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ juga mempunyai radius konvergensi R. Jika f terdiferensial pada $(-R, R)$ maka berlaku*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}. \tag{19.4.1}$$
2. *deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ juga mempunyai radius konvergensi R, dan untuk $x \in (-R, R)$ berlaku*
$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{19.4.2}$$

Bukti. Kita bandingkan radius konvergensi pasangan deret berikut:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$. Mengingat $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 1$ maka uji akar memberikan
$$\lim_{n\to\infty} (a_n n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \frac{1}{R}.$$
Ini menunjukkan bahwa kedua deret memiliki radius konvergensi yang sama. Oleh karena barisan jumlah parsial $g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}$ konvergen seragam pada sebuah interval $[-a, a] \subset (-R, R)$ maka berdasarkan aturan pertukaran limit dan derivatif (Teorema 18.4), dengan mengambil $x_0 = 0$ disimpulkan f terdiferensial dengan $f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.

Kita telah menggunakan fakta $\ln f(0) = 0$ karena $f(0) = 1$. Selanjutnya, dengan mengintegralkan deret suku per suku pada domain $[0, t]$ diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{x^n}{n!} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{n!}\Big|_0^t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} t^{n+1} \\ &= t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right) - 1 \\ &= f(t) - 1.\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan integral $\int_0^t f(x)\,dx = f(x) - 1$. Karena selalu berlaku $\int_0^t e^x dx = e^t - 1$ maka persamaan integral ini mempunyai penyelesaian $f(x) = e^x$. $\square$

Contoh 19.12. Temukan formula eksplisit dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

PENYELESAIAN. Di sini kita mempunyai $a_n = n^2$. Dengan uji rasio diperoleh

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1.$$

Jadi diperoleh radius konvergensi $R = 1$. Untuk $x = \pm 1$, jelas deret ini divergen (silakan dicek). Jadi, deret hanya konvergen pada $(-1, 1)$. Perhatikan deret geometri $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ yang juga konvergen pada $(-1, 1)$. Dengan mendiferensialkan deret geometri suku per suku diperoleh

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Mudah dicek deret ini juga mempunyai radius konvergensi 1. Kedua ruas digandakan dengan x, kemudian didiferensialkan lagi.

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\ \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \\ \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \\ \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.\end{aligned}$$

Setelah ruas kiri disederhanakan diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

but deret Fourier dan a_n, b_n disebut koefisien Fourier dari f. Permasalahannya adalah bagaimana koefisien Fourier ini diperoleh. Perhatikan teorema berikut ini.

Teorema 19.6. *Andaikan representasi deret berikut*

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{19.5.3}$$

konvergen seragam pada interval $[-\pi, \pi]$. *Maka fungsi* f *kontinu pada* $[-\pi, \pi]$ *dengan koefisien* a_n *dan* b_n *diberikan oleh*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \;\; dan \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt. \tag{19.5.4}$$

Bukti. Perhatikan barisan jumlah parsial $(f_n(x))$ sebagai berikut:

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

Masing-masing suku ini merupakan fungsi kontinu. Berdasarkan asumsi barisan jumlah parsial ini konvergen seragam ke fungsi f. Jadi f adalah limit seragam fungsi-fungsi kontinu sehingga f juga kontinu. Selanjutnya dibuktikan formula untuk koefisien a_n dan b_n. Untuk memperoleh a_0, ambil integralkan kedua ruas barisan (f_n) pada $[-\pi, \pi]$ dan terapkan teknik integral suku per suku pada deret ruas kanan.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx\right) \\
\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, dx &= a_0\pi \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Hasil ini diperoleh karena $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = 0$. Fakta berikut ini mudah ditunjukkan kebenarannya berdasarkan kalkulus elementer, silakan mencoba sendiri.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx\, dx = 0$$

untuk setiap bilangan bulat p, q dan m asalkan $p \neq q$. Kedua ruas kita gandakan dengan $\cos \ell x$ kemudian diintegralkan dari $-\pi$ sampai π.

$$f_n(x)\cos \ell x = \frac{a_0}{2}\cos \ell x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx \cos \ell x + b_k \sin kx \cos \ell x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\cos \ell x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos \ell x\, dx + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos \ell x\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos \ell x\, dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\cos \ell x dx = a_\ell \int_{-\pi}^{\pi} \cos \ell x \cos \ell x\, dx + b_\ell \int_{-\pi}^{\pi} \sin \ell x \cos \ell x\, dx.$$

Mengingat $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \ell x\, dx = \pi$, diperoleh

$$a_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, \cos \ell x\, dx.$$

Dengan cara yang sama koefisien b_n diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)(\sin nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}(1)(\sin nx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{\cos n\pi}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}-\frac{\cos n\pi}{n}\right)\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right). \end{aligned}$$

Oleh karena $\cos n\pi = 1$ untuk n genap dan $\cos n\pi = -1$ untuk n ganjil maka koefisien b_n dapat ditulis sebagai

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{jika } n \text{ genap} \\ -1 & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Akhirnya diperoleh deret Fourier untuk fungsi f sebagai berikut:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin nx.$$

Penggunaan tanda aproksimasi "$\approx$", sebagai pengganti tanda sama dengan "$=$" karena representasi ini tidak sama untuk setiap $x \in [-\pi, \pi]$. Perhatikan di $x = 0$ di mana fungsi f tidak kontinu, tidak mungkin dapat diaproksimasi dengan baik oleh fungsi-fungsi kontinu seperti pada deret Fourier tersebut. Untuk melihat bagaimana pola aproksimasi ini, kita gambarkan grafik beberapa barisan fungsi jumlah parsial berikut:

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi)\sin kx.$$

Pada Gambar 19.7, terlihat bahwa semakin banyak suku semakin baik aproksimasi terhadap fungsi f.

$\square$

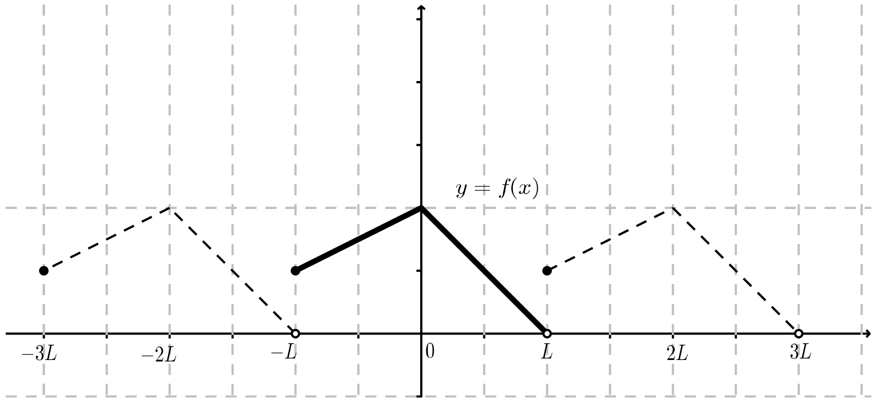
Melanjutkan contoh soal ini, khusus untuk $x = \frac{\pi}{2}$ diperoleh $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ dan

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left(1-\cos n\pi\right)\sin\frac{n\pi}{2} &= \frac{2}{\pi}\left(2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh formula untuk $\pi/4$ sebagai berikut:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Sebuah fakta bahwa berapapun banyak suku yang digunakan, aproksimasi deret Fourier tidak dapat mengaproksimasi nilai fungsi di $x = 0$ dengan baik. Faktanya, nilai $f_n(0) = 0$ untuk n berapapun, padahal $f(0) = -1$. $f_n(0) = \frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^{-1})\right) = 0$. Berdasarkan definisi f, kita mempunyai $f(0^+) = 1$ dan $f(0^-) = -1$. Fenomena buruknya aproksimasi jumlah parsial deret Fourier di titik diskontinu disebut dengan fenomena Gibb.



Gambar 19.8: Grafik fungsi periodik dengan periode $2L$

dengan

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, n = 0, 1, 2\cdots,\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, n = 1, 2, 3, \cdots$$

konvergen ke $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$*, dengan* $f(x^-)$ *dan* $f(x^+)$ *menyatakan limit kiri dan limit kanan. Jadi, jika* f *kontinu di* x *maka deret Fourier konvergen ke* $f(x)$*.*

Bukti. Bukti teorema ini cukup sulit sehingga tidak dibuktikan di sini. Salah satu caranya adalah menggunakan bentuk rerata Cesaro, lihat (Davidson and Donsig, 2002). □

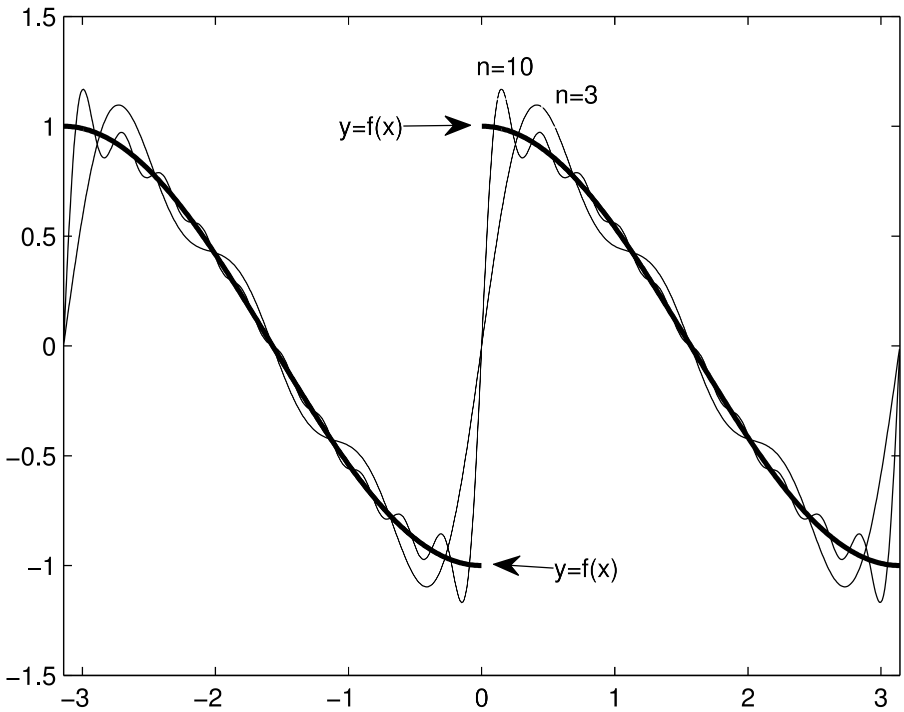
Untuk melatih keterampilan dalam menentukan deret Fourier dan memantapkan pemahaman dalam menginterpretasikan deret Fourier, ada baiknya kerjakan dulu soal latihan berikut ini.

Latihan 19.6. Temukan deret Fourier untuk fungsi-fungsi di bawah ini, kemudian gambarkan grafik fungsi dan beberapa grafik jumlah parsial deret Fourier. Berikan ulasan pada hasil yang diperoleh.

1. $f(x) := \begin{cases} x & \text{jika } 0 \le x \le \pi \\ x - 2\pi & \text{jika } \pi < x \le 2\pi \end{cases}.$
2. $f(x) := e^x, -\pi \le x \le \pi.$
3. $f(x) := \begin{cases} \cos x & \text{jika } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{jika } \pi < x \le 2\pi \end{cases}.$

Umumnya, kedua suku cos dan sin selalu muncul pada deret Fourier, namun untuk fungsi ganjil atau fungsi genap hanya salah satu saja suku yang muncul. Sebuah fungsi f yang memenuhi sifat $f(-x) = -f(x)$ disebut fungsi ganjil, sedangkan fungsi yang bersifat $f(-x) = f(x)$ disebut fungsi genap. Fungsi $f(x) = x^2, x \in [-1, 1]$ adalah genap dan $g(x) := x^3, x \in [-1, 1]$ adalah ganjil. Sebagai latihan, coba identifikasi apakah ganjil atau genap fungsi $f(x)$ sebagai berikut: $\cos x, \sin x, e^x, e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}, x^3 + x^2$, dan $f(x) := 1$.

Mudah ditunjukkan bahwa untuk fungsi ganjil f di dalam $[-L, L]$ berlaku $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$, sedangkan untuk fungsi genap f di dalam $[-L, L]$ berlaku $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$. Penurunan koefisien Fourier fungsi genap atau fungsi ganjil pada interval $[-L, L]$ diberikan sebagai berikut:



Gambar 19.9: Grafik fungsi dan jumlah parsial deret Fourier

Dengan mengambil $n \to 2n$ suku-suku genapnya saja maka diperoleh $b_{2n} = \frac{8n}{(4n^2-1)\pi}$. Untuk koefisien dengan indeks ganjil $b_1 = b_3 = \cdots = 0$. Jadi, deret Fourier yang bersesuaian adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{(4n^2-1)\pi} \sin 2nx.$$

Perhatikan fungsi f diskontinu di $x = 0$ dengan $f(0^-) = -1$ dan $f(0^+) = 1$, di titik ini deret konvergen ke 0 seperti dilustrasikan pada Gambar 19.9. Pada ekstensi periodiknya, fungsi diskontinu di $x = n\pi, n \in \mathbb{N}$ dan di titik ini deret juga konvergen ke 0. □

Latihan 19.7. Tentukan deret Fourier untuk fungsi $f(x) := |\sin x|, x \in [-\pi, \pi]$. Kemudian buktikan kebenaran formula berikut:

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Deret Fourier banyak digunakan dalam membangun penyelesaian masalah syarat batas yang berupa persamaan diferensial parsial dengan kondisi nilai batas tertentu (Hanna dan Rowland, 1990). Lebih umum, analisis Fourier banyak digunakan dalam pengolahan sinyal digital mencakup transformasi Fourier diskret, transformasi Fourier cepat, konvolusi dan tranformasi (integral) Fourier (Gasquet dan Witomski, 1999). Transformasi Fourier membawa sinyal dalam domain waktu menjadi signal dalam domain frekuensi. Dalam banyak kasus, sinyal dalam domain frekuensi lebih mudah dianalisis. Secara umum, analisis Fourier dibahas pada domain bilangan bilangan kompleks. Dalam dua dekade terakhir, analisis Fourier telah banyak berperan dalam mengembangkan alat (*tools*) baru untuk pengolahan atau pemrosesan sinyal digital berupa analisis wavelet (Daubechies, 1992; Hernadi 2004).

Bukti kontinu. Perhatikan $|f_k(x)| = \left|2^{-k}\cos(10^k\pi x)\right| \le 2^{-k} := M_k$. Oleh karena $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, yakni konvergen maka berdasarkan uji-M disimpulkan deret $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\cos(10^k\pi x)$ konvergen seragam pada $\mathbb{R}$ ke sebuah fungsi kontinu. Terbukti f kontinu di mana-mana pada $\mathbb{R}$.

Bukti takterdiferensial. Perhatikan jumlah parsial deret $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\cos(10^k\pi x)$ tidak hanya fungsi kontinu tetapi ia terdiferensial sampai tingkat berapapun (*infinitely differentiable*) karena ia merupakan kombinasi linear berhingga fungsi-fungsi terdiferensial sampai tingkat berapapun, yaitu $y_k(x) = 2^{-k}\cos(10^k\pi x)$. Keadaan ini ternyata tidak berlaku jika kombinasi linearnya takberhingga. Pandang sebarang bilangan $x \in \mathbb{R}$, tulis $x = x_0.x_1x_2x_3\cdots$. Kita tunjukkan f tidak terdiferensial di x dengan menunjukkan limit berikut

$$f'(x) := \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

tidak ada melalui kriteria barisan. Kita bangun barisan (z_n), $z_n \ne x$, $\lim(z_n) = x$, tetapi $|f(z_n) - f(x)| / |z_n - x| \to +\infty$. Tetapkan sebuah bilangan asli $n \ge 1$. Misalkan $y_0 = x_0.x_1x_2x_3\cdots x_n$ dan $y_1 = y_0 + 10^{-n}$. Jadi, y_0 merupakan pemotongan x sampai dengan digit ke-n sedangkan y_1 diperoleh dengan menambahkan 1 pada digit terakhir y_0. Sebagai contoh $x = \sqrt{2} = 1.4142135623731\cdots$, misal kita tetapkan $n = 4$. Diperoleh $y_0 = 1.4142$ dan $y_1 = 1.4142 + 10^{-4} = 1.4142 + 0.0001 = 1.4143$. Dalam hal ini $x_n = 2$. Berdasarkan konstruksi ini berlaku $y_0 \le x \le y_1$. Mudah dipahami bahwa bilangan $10^n\pi y_0$ dan $10^n\pi y_1$ merupakan kelipatan π. Untuk contoh sebelumnya diperoleh $10^n\pi y_0 = 10^4\pi(1.4142) = 14142\pi$ dan $10^n\pi y_1 = 14143\pi$ sehingga berlaku

$$f_n(y_0) = 2^{-n}\cos(10^n\pi y_0) = 2^{-n}(-1)^{x_n} \text{ dan } f_n(y_1) = 2^{-n}(-1)^{x_n+1}.$$

Ingat bahwa $\cos(n\pi)$ bernilai 1 jika n genap dan bernilai -1 jika n ganjil. Selanjutnya kita peroleh estimasi untuk $|f(y_0) - f(y_1)|$ sebagai berikut:

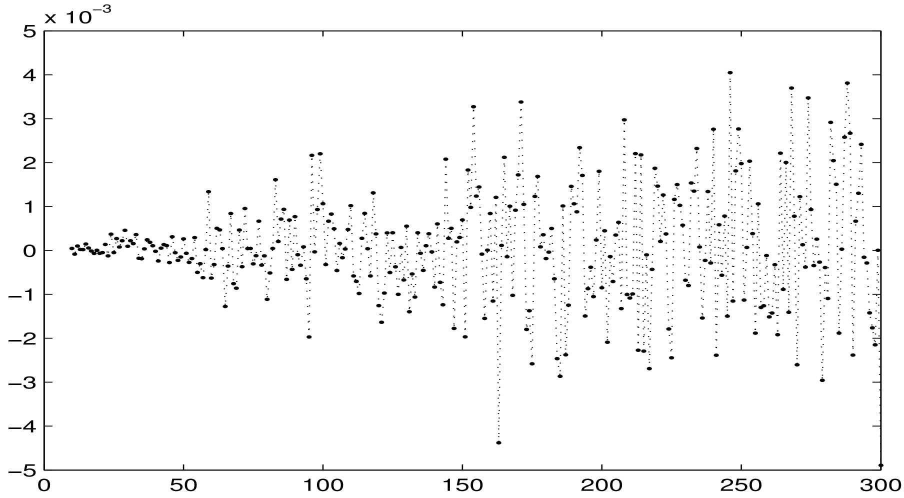
$$\begin{aligned} |f_n(y_0) - f_n(y_1)| &= \left|2^{-n}(-1)^{x_n}(1 - (-1)^1)\right| \\ &= 2^{-n}2 = 2^{1-n}. \end{aligned}$$

Oleh karena $10^n\pi y_0$ dan $10^n\pi y_1$ merupakan kelipatan π maka untuk $k > n$, $10^k\pi y_0$ dan $10^k\pi y_1$ merupakan kelipatan 2π. Jadi, $f_k(y_0) = 2^{-k}\cos(10^k\pi y_0) = 2^{-k} = 2^{-k}\cos(10^k\pi y_1) = f_k(y_1)$. Untuk $1 \le k < n$, terapkan TNR untuk f_k pada interval $[y_0, y_1]$, yaitu ada $c_k \in (y_0, y_1)$ sehingga

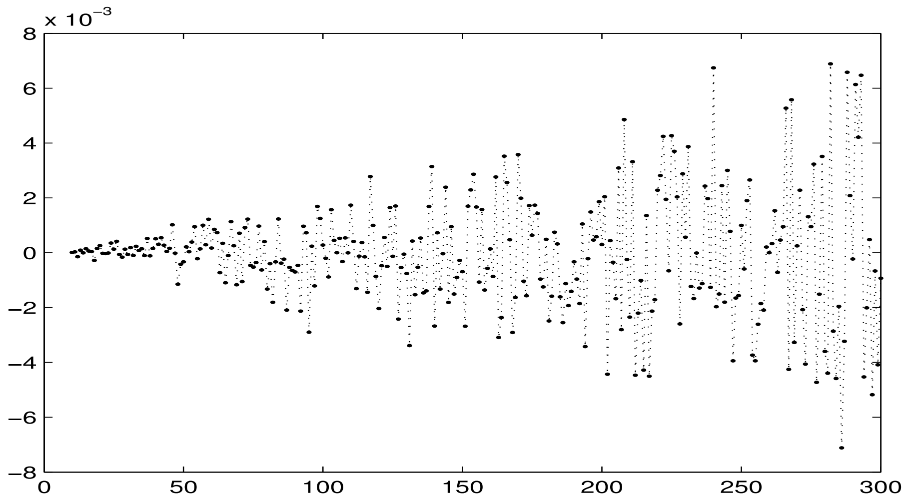
$$\begin{aligned} |f_k(y_0) - f_k(y_1)| &= |f_k'(c_k)|\,|y_0 - y_1| \\ &= \left|-2^{-k}10^k\pi\sin(10^k\pi c_k)\right|\,|y_0 - y_1| \\ &\le (2^{-k}10^k\pi)10^{-n} = 2^{-k}\pi(2\cdot 5)^{k-n} = 2^{-n}\pi 5^{k-n}. \end{aligned}$$

Berikutnya kita berikan estimasi batas bawah untuk $|f(y_0) - f(y_1)|$.

$$\begin{aligned} f(y_0) - f(y_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(y_0) - f_k(y_1)) \\ &= (f_n(y_0) - f_n(y_1)) + \sum_{k\ne n} (f_k(y_0) - f_k(y_1)), \end{aligned}$$



Gambar 19.11: Pola konvergen nilai selisih terpusat fungsi Weierstrass di $x = \frac{1}{2}$.



Gambar 19.12: Pola konvergen nilai selisih terpusat fungsi Weierstrass di $x = 0.6$.

langkah h di $x = \frac{1}{2}$ ini. Kita terapkan formula selisih terpusat, yaitu

$$f'(1/2) \approx \frac{f(1/2+h) - f(1/2-h)}{2h}.$$

Untuk eksperimen numerik ini kita ambil $N = 10, 11, \cdots, 300$, $h = 1/N$. Nilai fungsi $f(x)$ diaproksimasi oleh jumlah parsial deret $s_n(x)$ dengan banyak suku $n = 100$. Hasilnya disajikan dalam bentuk palot antara N versus nilai selisih terpusat.

Dalam kasus fungsi f terdiferensial di $x = 1/2$ maka seharusnya bilangan $\frac{f(1/2+h)-f(1/2-h)}{2h}$ akan menuju sebuah bilangan tertentu untuk $h \to 0$. Berdasarkan hasil eksperimen numerik ini (lihat Gambar 19.11), semakin besar N (berarti semakin kecil nilai selisih terpusat h), bilangan ini tidak menuju sebuah bilangan tetap. Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1/2+h) - f(1/2-h)}{2h}$$

tidak ada, yaitu $f'(1/2)$ tidak ada. Pola seperti ini akan dijumpai pada setiap $x \in \mathbb{R}$. Sebagai contoh, untuk $x = 0.6$ diberikan pada Gambar 19.12. Melalui serangkaian analisis di atas,

Kriteria Cauchy deret fungsi: kriteria Cauchy yang dimiliki oleh barisan jumlah parsialnya.

Uji-M: istilah lain uji Weierstrass, yaitu uji konvergensi deret fungsi dengan membandingkannya dengan deret bilangan real yang konvergen.

Uji Abel: uji konvergensi deret yang dilakukan dengan cara membentuk suku pada deret sebagai perkalian dua barisan fungsi.

Deret pangkat: deret fungsi khusus yang berupa kombinasi linear takberhingga para monomial $1, x, x^2, x^3, \cdots$.

Radius konvergensi: bilangan real positif R di mana deret pangkat konvergen pada interval $(-R, R)$.

Daerah konvergensi: himpunan bagian bilangan real di mana deret pangkat konvergen.

Deret Taylor: salah satu bentuk khusus deret pangkat.

Integral dan diferensial deret pangkat: pengintegralan dan pengintegralan deret pangkat suku demi suku, berlaku pada domain di mana deret pangkat konvergen.

Deret Fourier: bentuk khusus deret fungsi yang berupa kombinasi linear takberhingga para fungsi trigonometri $1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, 3, \cdots$.

Koefisien deret Fourier: koefisien kombinasi linear takberhingga pada deret Fourier.

Fenomena Gibb: pola kekonvergenan deret Fourier di titik diskontinu.

Fungsi periodik: fungsi yang bersifat $f(x+2L) = f(x)$, yaitu menunjukkan pola berulang setiap durasi $2L$. Dalam hal ini fungsi disebut berperiode $2L$.

Rerata Cesaro: bentuk barisan jumlah parsial deret yang konvergen ke deret Fourier.

Fungsi genap: fungsi yang grafiknya simetris terhadap sumbu Y, yaitu $f(-x) = f(x)$.

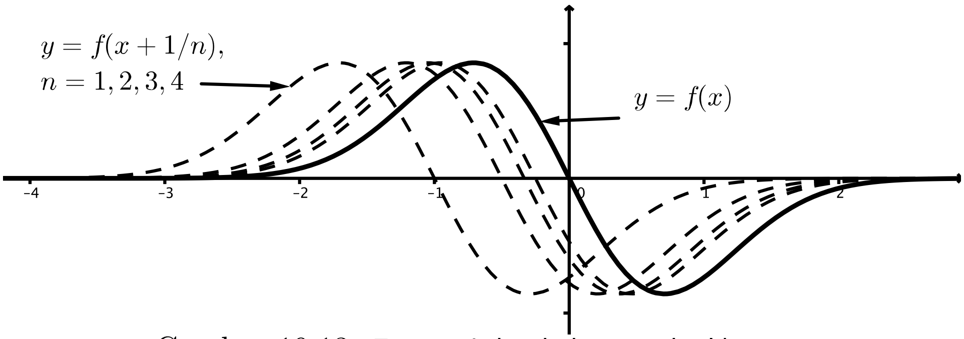
Fungsi ganjil: fungsi yang grafiknya antisimetris terhadap garis $y = x$, yaitu $f(-x) = -f(x)$.

Deret Fourier sinus: deret Fourier yang yang mana koefisien $a_n = 0$ sehingga hanya muncul suku sinus.

Deret Fourier cosinus: deret Fourier yang mana koefisien $b_n = 0$ sehingga hanya muncul suku cosinus.

Deret Fourier jangkauan setengah: istilah untuk deret sinus atau deret cosinus.

Fungsi Weierstrass: fungsi berupa deret $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n x)$ atau $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(10^n \pi x)$, bersifat kontinu di mana-mana tetapi tidak terdiferensial di mana-mana.



Gambar 19.13: Fungsi f dan beberapa duplikasinya

12. Selidikilah apakah jumlah dua barisan konvergen seragam juga konvergen seragam? Jika tidak, berikan contoh pengingkarnya. (Petunjuk: misalkan (f_n) konvergen seragam ke f dan (g_n) konvergen seragam ke g. Misalkan barisan (h_n) dengan $h_n(x) := f_n(x) + g_n(x)$. Tunjukkan apakah (h_n) konvergen seragam ke $f + g$).

13. Selidikilah apakah perkalian dua barisan konvergen seragam juga konvergen seragam? Jika tidak, berikan contoh pengingkarnya.

14. Jelaskan hubungan antara $\lim_{n\to\infty} h_n(x)$ dan $\lim_{n\to\infty} h_n'(x)$ jika

    (a) $h_n(x) := \frac{e^{-nx}}{n}, x \geq 0$.

    (b) $h_n(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$.

15. Buktikan bahwa fungsi logaritma natural dapat disajikan sebagai limit dari barisan fungsi yang lebih sederhana, yaitu
$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right).$$

16. Buktikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := \frac{\tan^{-1}(nx)}{n}, n \geq 1$ konvergen seragam pada $\mathbb{R}$.

17. Buktikan bahwa barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := \frac{n+x}{4n+x}$ konvergen seragam pada $[0, \alpha]$ untuk $\alpha < \infty$, tetapi tidak konvergen seragam pada $[0, \infty)$.

18. Buktikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := n \sin \frac{x}{n}$ konvergen seragam pada interval tertutup dan terbatas $[-R, R]$, tetapi tidak konvergen seragam pada $\mathbb{R}$.

19. Tentukan domain D untuk x agar barisan fungsi (f_n) berikut ini konvergen seragam pada D.

    (a) $f_n(x) := \frac{x^n}{1+x^n}$.

    (b) $f_n(x) := x^2 e^{-nx}$.

20. Barisan fungsi (f_n) dikatakan terbatas seragam pada E jika ada bilangan $M < \infty$ sehingga $|f_n(x)| < M$ untuk setiap $x \in E$ dan setiap $n = 1, 2, 3, \cdots$. Buktikan bahwa setiap barisan yang konvergen seragam pasti terbatas seragam.

21. Keluarga fungsi $\mathcal{F}$ yang terdefinisi pada E dikatakan ekuikontinu pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - f(y)| < \delta$ berlaku untuk setiap $f \in \mathcal{F}$ dan setiap $x, y \in E$ dengan $|x - y| < \delta$. Misalkan (f_n) barisan fungsi kontinu yang konvergen seragam pada $[a, b]$, buktikan (f_n) ekuikontinu.

26. Lengkapi Bukti bahwa $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$. *Outline* pembuktian: Integral ini merupakan integral takwajar tipe 1. Ini tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa karena antiderivatifnya tidak dalam bentuk eksplisit. Misalkan $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ dan $g(u) := \int_0^u e^{-x^2}dx$ sehingga $I = \lim_{u\to\infty} g(u)$. Untuk $(x,t) \in [0,\infty)\times[0,1]$ definisikan $f(x,t) := \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ dan $F(x) := \int_0^1 f(x,t)\,dt$. Tunjukkan bahwa $F(0) = \frac{\pi}{4}$ dan untuk $x \to \infty$ dan fungsi $f(x,t) \to h(t) = 0$ seragam pada $[0,1]$. Gunakan teorema kekonvergenan integral untuk menyimpulkan $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Gunakan aturan Leibniz untuk menunjukkan $F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}g(\sqrt{x})$. Dengan torema fundamental kalkulus diperoleh $\int_0^n F'(x)dx = F(n) - F(0) = F(n) - \frac{\pi}{4}$ sehingga $\lim_{n\to\infty}\int_0^n F'(x)dx = \lim_{n\to\infty} F(n) - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$. Dari fakta ini diperoleh
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}g(\sqrt{x})dx = \frac{\pi}{4}.$$
Akhirnya dengan teorema fundamental kalkulus bahwa $g'(s) = e^{-s^2}$, tunjukkan bahwa $I^2 = \frac{\pi}{4}$.

27. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $f(x) := \int_0^\pi \frac{\sin xt}{t}dt$ merupakan integral takwajar tipe 2 karena integrannya $f(\cdot,t) := \frac{\sin xt}{t}$ tidak terbatas di $t = 0$.
   (a) Buktikan integral ini konvergen sehingga ia terdefinisi dengan baik.
   (b) Hitunglah $f'(x)$ secara eksplisit.

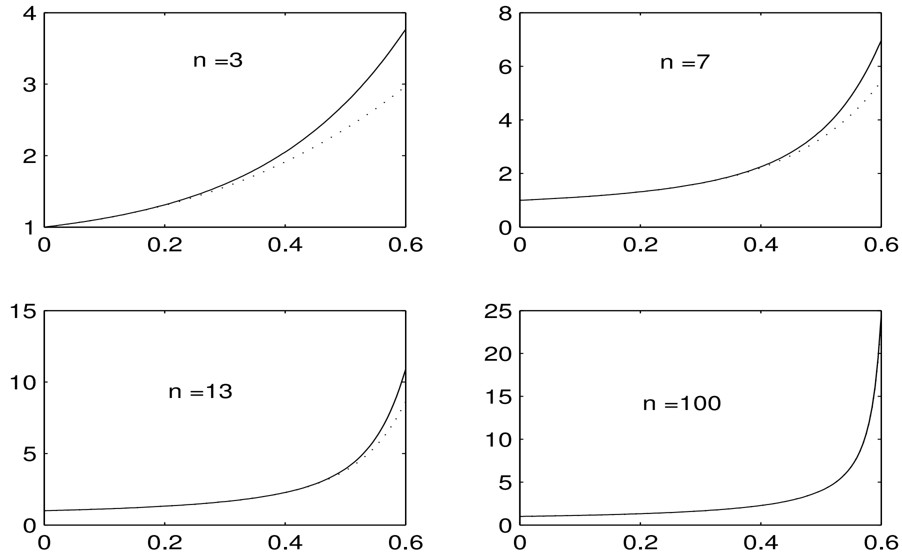
28. Fungsi Bessel $J_0(x)$ didefinisikan $J_0(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Buktikan fungsi Bessel J_0 merupakan penyelesaian persamaan diferensial
$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$

29. Misalkan f kontinu pada $[0,1]$ dan $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ untuk setiap $n = 0,1,2,\cdots$. Buktikan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$. (Petunjuk: gunakan teorema Weierstrass bahwa setiap fungsi kontinu f terdapat barisan polinomial P_n yang konvergen seragam ke f pada $[0,1]$.)

30. Selidikilah kekonvergenan dan kekonvergenan seragam deret fungsi $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ untuk (f_n) sebagai berikut:
   (a) $f_n(x) := \frac{1}{x^2+n^2}, x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f_n(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, x \in \mathbb{R}$.
   (c) $f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n^2}\right), x \in \mathbb{R}$.
   (d) $f_n(x) := \frac{(-1)^n}{n+x}, x \geq 0$.

31. Buktikan jika deret $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergen mutlak, yaitu $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty$ maka $\sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx$ konvergen seragam pada $\mathbb{R}$.

32. Andaikan (f_n) barisan kontinu pada $[0,1]$ dan didefinisikan barisan jumlah parsial (s_n) dengan $s_n(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Buktikan jika (s_n) konvergen seragam maka (f_n) konvergen seragam ke-0.



Gambar 19.14: Jumlah parsial deret Fibonacci: $s_{1n}(x)$ (putus-putus), $s_{2n}(x)$ (garis padat).

$1, a_1 = \alpha, a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, a_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}, \cdots, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)}{n!}$. Tulis $a_n = \frac{1}{n!}\left[\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)\right] := \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}$, maka diperoleh

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n.$$

Apa yang terjadi jika α merupakan bilangan bulat taknegatif?

40. Barisan Fibonacci didefinisikan secara rekursif sebagai berikut: $F(0) = F(1) = 1$ dan $F(n+2) = F(n+1)+F(n)$ untuk $n = 0, 1, 2, \cdots$. Ambil $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n$. Deret ini dapat disebut deret pangkat Fibonacci. Tentukan radius konvergensi deret ini. (Petunjuk: gunakan uji rasio dengan mengambil $r_n := \frac{F(n+1)}{F(n)}$, kemudian tunjukkan berlaku hubungan rekursif $r_{n+1} - r_n = -\frac{r_n - r_{n-1}}{r_n r_{n-1}}$ dengan $r_n r_{n+1} \geq 2$.)

41. Buktikan bahwa deret pangkat Fibonacci dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+x^2)^n.$$

Kedua formula deret pangkat Fibonacci berbeda, namun ia konvergen ke fungsi yang sama. Tetapi kecepatan kekonvergenannya tidak sama. Misalkan $s_{1n}(x) := \sum_{k=0}^{n} F(n)x^n$ dan $s_{2n}(x) := \sum_{k=0}^{n}(x+x^2)^n$. Grafik fungsi kedua jumlah parsial ini untuk beberapa nilai n diberikan pada Gambar 19.14. Secara grafis, kekonvergenan bentuk pertama lebih lambat daripada bentuk pertama.

42. Misalkan radius konvergenasi deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ adalah R, tentukan radius konvergensi deret sebagai berikut:

    (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$.

Daftar Pustaka

[1] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw. *Principles of Real Analysis.* Academic Press, 1998.

[2] T.M. Apostol. *Mathematical Analysis (second edition).* Addison-Wesley Publisher, 1981.

[3] H.T. Banks, S. Dediu, S.L. Ernstberger, and F. Kappel. Generalized sensitivities and optimal experimental design. *Journal of Invers and Ill-Posed Problems*, 18:25–83, 2010.

[4] R.G. Bartle. *An Elements of Real Analysis.* John Wiley & Sons, Inc, 1968.

[5] R.G. Bartle and D.R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis (third edition).* John Wiley & Sons, Inc, 2000.

[6] G.L. Bradley and K.J. Smith. *Calculus.* Prentice-Hall, Inc, 1995.

[7] F.H. Croom. *Principles of Topology.* Saunders College Publisher, 1989.

[8] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[9] K.R. Davidson and A.P. Donsig. *Real Analysis with Real Applications.* Prentice-Hall, Inc, 2002.

[10] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann, Berlin, 1989.

[11] C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications.* Springer, 1999.

[12] M.J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* W.H. Freeman and Company, 1994.

[13] J.R. Hanna and J.H. Rowland. *Fourier Series, Transforms, and Boundary Value Problems.* John Wiley & Sons, Inc, 1990.

[14] T. Hawkin. *Lebesgue's Theory of Integral, Its Origin and Development.* AMS Chelsea Publishing, 2012.

[15] J. Hernadi. *The Wavelet Projection Methods for Solving the Operator Equations.* PhD thesis, Gadjah Mada University, Yogyakarta, 2004.

[16] J. Hernadi. Metoda pembuktian dalam matematika. *Jurnal Pendididan Matematika PPS Unsri*, 2, 2008.

[17] J. Hernadi. Fondasi matematika, logika dan dasar-dasar penalaran dalam matematika. Diktat Kuliah, Prodi Pend Matematika FKIP Unmuh Ponorogo, 2011.

APENDIKS

Apendiks A

Preliminer Logika Matematika

A.1 Proposisi dan Operator Logika

Dalam matematika banyak memuat bahasa logika. Kebenaran sebuah pernyataan di dalam matematika didasarkan pada pola penalaran yang telah disepakati secara turun menurun. Jika sebuah pernyataan sudah dapat dipastikan nilai kebenarannya, yaitu benar saja atau salah saja (tidak keduanya sekaligus) maka ia disebut **proposisi**. Beberapa proposisi atau pernyataan digabungkan dengan operator logika menghasilkan **kalimat majemuk**. Beberapa **operator logika** penting adalah negasi ($\neg$), disjungsi ($\vee$), konjugsi ($\wedge$), implikasi ($\rightarrow$), dan biimplikasi ($\leftrightarrow$). Berikut diberikan tabel kebenaran proposisi elementer dengan operator logika tersebut. Pada penyajian ini digunakan simbol T (True) untuk proposisi bernilai benar dan simbol F (False) untuk proposisi bernilai salah.

Notasi $\neg p$ dibaca "bukan p" disebut negasi dari p. Nilai kebenaran proposisi dan negasinya selalu bertolak belakang seperti ditunjukkan pada Tabel A.1.

p	$\neg p$
T	F
F	T

Tabel A.1: Nilai kebenaran proposisi dan negasinya

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang berbentuk $p \vee q$ dibaca "p atau q" dan **konjungsi** berbentuk $p \wedge q$ dibaca "p dan q". Nilai kebenaran kedua kalimat ini diberikan pada Tabel A.2. Disjungsi hanya bernilai salah ketika kedua proposisi salah, kasus lainnya bernilai benar. Konjungsi bernilai benar hanya ketika kedua proposisi bernilai benar, kasus lainnya bernilai salah.

Implikasi adalah kalimat majemuk yang berbentuk $p \rightarrow q$ dibaca "jika p maka q", ia

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

Tabel A.2: Nilai kebenaran disjungsi dan konjungsi

A.2 Kuantifikasi

Kalimat-kalimat yang memuat kata "semua", "setiap", "beberapa", "tak satupun", "paling sedikit...", "paling banyak...", dan lain-lain merupakan bentuk kuantifikasi. Kuantifikasi digunakan bersamaan dengan fungsi proposisi, yaitu pernyataan yang masih mengandung variabel. Sebagai contoh $P(x)$ adalah pernyataan yang berbunyi "$x > 2$"; maka $P(1)$ bernilai salah (F) dan $P(3)$ bernilai benar (T). Secara umum, fungsi proposisi yang memuat n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ berbentuk $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Permasalahan yang berkenaan dengan fungsi proposisi adalah mengidentifikasi himpunan bagian dari semesta pembicaraan Ω di mana $P(x)$ bernilai TRUE atau FALSE. Ada beberapa kemungkinan

- $P(x)$ bernilai TRUE untuk setiap $x \in \Omega$.
- $P(x)$ bernilai TRUE hanya untuk sebagian $x \in \Omega$.
- $P(x)$ bernilai FALSE untuk setiap $x \in \Omega$.

Cara mengkuantifikasi suatu proposisi pada semesta pembicaraan adalah dengan menggunakan kuantor. Ada dua macam kuantor yaitu **kuantor universal** dan **kuantor eksistensial**.

1. Kuantifikasi universal, yaitu proposisi yang berbunyi "$P(x)$ untuk semua x dalam semesta pembicaraan Ω" atau "untuk semua x dalam semesta pembicaraan Ω berlaku $P(x)$", ditulis $\forall x \in \Omega,\ P(x)$. Bila domain Ω sudah terpahami dengan baik maka cukup ditulis $\forall x,\ P(x)$. Notasi $\forall$ disebut **kuantor universal**.

2. Kuantifikasi eksistensial, yaitu proposisi yang berbunyi "$P(x)$ untuk suatu x dalam semesta pembicaraan Ω" atau "ada x dalam semesta pembicaraan Ω yang berlaku $P(x)$", ditulis $\exists x \in \Omega,\ P(x)$. Bila domain Ω sudah terpahami dengan baik maka cukup ditulis $\exists x,\ P(x)$. Notasi $\exists$ disebut **kuantor eksistensial**.

Pernyataan $\forall x,\ P(x)$ bernilai benar jika $P(x)$ benar untuk setiap $x \in \Omega$, dan bernilai salah jika ada $x \in \Omega$ yang membuat $P(x)$ salah. Pernyataan $\exists x,\ P(x)$ bernilai benar jika ada $x \in \Omega$ yang membuat $P(x)$ benar, dan bernilai salah jika $P(x)$ salah untuk setiap $x \in \Omega$. Negasi dari pernyataan berkuantor adalah

$$\neg\,(\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x),$$

$$\neg\,(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x).$$

Pernyataan yang paling sering muncul pada analisis real berupa kuantor bersusun, yaitu pernyataaan yang memuat lebih dari satu kuantor. Sebagai contoh kuantifikasi $\forall x \exists y,\ (x + y = 0)$ bernilai benar, sedangkan $\exists x \forall y,\ (x + y = 0)$ bernilai salah. Jadi urutan dalam kuantor bersusun sangat mungkin berbeda nilai kebenaran. Berikut diberikan rangkuman nilai kebenaran kuantifikasi dua variabel.

1. $\forall x \forall y,\ P(x, y)$ bernilai **benar** jika ia benar untuk setiap pasangan x dan y, dan bernilai **salah** jika ada pasangan (x_0, y_0) yang membuat $P(x_0, y_0)$ salah.

2. $\forall x \exists y,\ P(x, y)$ bernilai **benar** jika setiap x terdapat y_0 sehingga $P(x, y_0)$ benar, dan bernilai **salah** jika terdapat x_0 sehingga $P(x_0, y)$ benar untuk setiap y.

3. $\exists x \forall y,\ P(x, y)$ bernilai **benar** jika ada x_0 sehingga $P(x_0, y)$ bernilai benar untuk setiap y, dan bernilai **salah** jika untuk setiap x, terdapat y_0 sehingga $P(x, y_0)$ salah.

4. $\exists x \exists y,\ P(x, y)$ bernilai benar jika ada pasangan (x_0, y_0) sehingga $P(x_0, y_0)$ benar.

Modus tollens Modus tollens didasarkan pada tautologi $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} \neg q \\ \underline{p \to q} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Argumen ini dapat pula dipahami sebagai berikut: bila implikasi $p \to q$ benar dan diketahui $\neg q$ benar (atau q salah) maka haruslah p salah (atau $\neg p$ benar). Bila tidak, maka akan muncul kontradiksi.

Silogisme hipotetik Silogisme hipotetik didasarkan pada tautologi $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Silogisme ini dapat diilustrasikan pula sebagai sifat transitif, bila kedua implikasi $p \to q$ dan $q \to r$ benar maka dapat dibentuk implikasi langsung $p \to r$.

Beberapa bentuk inferensi dasar lainnya adalah silogisme disjungtif, resolusi, adisi, simplikasi, dan konjungsi tidak diberikan karena tidak digunakan dalam buku ini.

A.4 Inferensi pada kuantifikasi

Didasarkan pada dua macam bentuk kuantifikasi maka terdapat 4 aturan inferensi untuk kuantifikasi. Keempat aturan ini banyak digunakan dalam argumen matematika, yaitu

1. **Instanisasi universal**, yaitu aturan yang digunakan untuk menyimpulkan $P(c)$ benar, dengan c anggota khusus semesta pembicaraan pada premis $\forall x,\ P(x)$. Sebagai contoh, jika diketahui bahwa "semua wanita bijaksana" dan Lisa adalah seorang wanita maka disimpulkan bahwa "Lisa bijaksana".

2. **Generalisasi universal**, yaitu aturan yang digunakan untuk menyimpulkan bahwa $\forall x,\ P(x)$ benar jika $P(c)$ benar untuk sebarang c dalam semesta pembicaraan. Aturan ini sering digunakan secara implisit dalam banyak pembuktian matematika.

3. **Instanisasi eksistensial**, yaitu aturan yang membolehkan kita menyimpulkan terdapat sebuah elemen c di dalam semesta jika diketahui $\exists x,\ P(x)$ benar.

4. **Generalisasi eksistensial**, yaitu aturan untuk menyimpulkan bahwa $\exists x,\ P(x)$ benar jika diketahui ada elemen tertentu c dalam semesta dimana $P(c)$ benar.

Keempat aturan inferensi ini dirangkum pada tabel berikut.

Apendiks B

Metode Pembuktian Dalam Matematika

Di dalam matematika, bukti (*proof*) adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Logis di sini berarti semua langkah pada sebuah argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya. Argumen ini melibatkan premis pernyataan itu sendiri, pernyataan lain yang sudah berlaku seperti teorema, definisi, atau bahkan berasal dari postulat atau aksioma sebagai unsur pangkal teori yang relevan. Sebelum masuk pada metode pembuktian, kita pahami dulu beberapa bentuk pernyataan dalam matematika yang sering muncul.

B.1 Jenis Pernyataan dalam Matematika

Aksioma (*Axiom*) Aksioma atau postulat adalah pernyataan yang menjadi asumsi dasar dalam penyusunan suatu konsep dalam matematika. Aksioma biasa digunakan untuk membangun definisi, atau untuk membuktikan teorema.

Definisi (*Definition*) Definisi adalah kesepakatan bersama mengenai pengertian atau batasan suatu istilah. Sebagai contoh, "bilangan prima adalah bilangan lebih besar dari 1 yang tidak mempunyai faktor selain dari 1 dan dirinya sendiri".

Teorema (*Theorem*) Teorema adalah pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya. Teorema dapat berupa kalimat berkuantor, pernyataan bersyarat dengan satu atau beberapa premis dan satu atau lebih konklusi. Sebagai contoh, Teorema Pythagoras berbunyi "pada suatu segitiga siku-siku berlaku kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-siku". Beberapa istilah lain untuk teorema adalah proposisi (*proposition*), fakta (*fact*), dan lemma. Penggunaan istilah-istilah ini biasanya didasarkan tingkat signifikansi sebuah teorema. Fakta dan proposisi biasanya dianggap sebagai teorema yang spektrumnya lebih sempit, sedangkan lemma biasanya sebagai pecahan teorema atau sebagai tahapan untuk menyusun teorema. Pernyataan "dalam sebarang segitiga, panjang jumlah kedua sisinya lebih dari panjang sisi ketiganya" biasanya dipandang sebagai fakta.

Bukti (*Proof*) Bukti adalah penalaran (argument) valid yang digunakan untuk menunjukkan kebenaran suatu teorema.

BUKTI. Pernyataan ini sangat sulit dibuktikan secara langsung. Mari kita coba saja. Karena x^2 ganjil maka dapat ditulis $x^2 = 2m + 1$ untuk suatu bilangan asli m. Selanjutnya $x = \sqrt{2m+1}$ tidak dapat disimpulkan apakah ia ganjil atau tidak. Sehingga bukti langsung tidak dapat digunakan. Kontraposisi dari pernyataan ini adalah

"Jika x genap maka x^2 genap".

Selanjutnya diterapkan bukti langsung pada kontraposisinya. Diketahui x genap, jadi dapat ditulis $x = 2n$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya,

$$x^2 = (2n)^2 = 2\underbrace{(2n^2)}_{m} = 2m$$

yang merupakan bilangan genap. □

3. Bukti kosong

   Bila hipotesis p pada implikasi $p \to q$ sudah bernilai salah maka implikasi $p \to q$ selalu benar apapun nilai kebenaran q. Fakta ini bersesuai dengan baris ketiga dan keempat Tabel B.1. Jadi, jika kita dapat menunjukkan bahwa p salah maka kita telah berhasil membuktikan kebenaran $p \to q$. Inilah metode bukti kosong.

   Contoh B.3. Di dalam teori himpunan kita mengenal definisi berikut :

   > Diberikan dua himpunan A dan B. Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari B, ditulis $A \subset B$ jika pernyataan berikut dipenuhi: "jika $x \in A$ maka $x \in B$". Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika ia tidak mempunyai anggota.

   Buktikan, himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan apapun.

   BUKTI. Misalkan $A = \emptyset$ suatu himpunan kosong dan B himpunan sebarang. Kita akan tunjukkan bahwa pernyataan "jika $x \in A$ maka $x \in B$" bernilai benar. Karena A himpunan kosong maka pernyataan p yaitu $x \in A$ selalu bernilai salah karena tidak mungkin ada x yang menjadi anggota himpunan kosong. Karena p salah maka terbuktilah kebenaran pernyataan "jika $x \in A$ maka $x \in B$", yaitu $A \subset B$. Karena B himpunan sebarang maka bukti selesai. □

   Pada pembuktian ini kita telah menerapkan aturan inferensi generalisasi universal, yaitu dengan mengambil himpunan sebarang B.

4. Bukti trivial

   Bila pada implikasi $p \to q$, dapat ditunjukkan bahwa q benar maka implikasi ini selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari p. Fakta ini bersesuaian dengan baris pertama dan ketiga Tabel B.1. Jadi, jika kita dapat menunjukkan bahwa q benar maka kita telah berhasil membuktikan kebenaran $p \to q$. metode ini disebut bukti trivial.

   Contoh B.4. Buktikan, jika $0 < x < 1$ maka $0 < \frac{x^2+1}{|x|+1}$.

   BUKTI. Karena pernyataan $q : 0 < \frac{|x|}{|x|+1}$ selalu benar untuk setiap x bilangan real termasuk untuk $x \in (0, 1)$ maka secara otomatis kebenaran pernyataan ini terbukti. □

non-konstruktif. Pada metode konstruktif, objek yang dicari harus jelas bentuk atau penampakannya, sedangkan pada non-konstruktif, objek yang dicari tidak perlu nyata. Keberadaannya cukup diyakini berdasarkan pola penalaran yang valid.

Contoh B.6. (metode non-konstruktif) Buktikan terdapat bilangan irrasional x dan y sehingga x^y rasional.

BUKTI. Sudah diketahui $\sqrt{2}$ irrasional (anggaplah sudah terbukti). Perhatikan $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

- Bila ternyata $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ rasional maka bukti selesai, dalam hal ini diambil $x = y = \sqrt{2}$.
- Bila $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ irrasional, diperhatikan bahwa $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ adalah rasional.

Jadi salah satu pasangan (x, y), dengan $x = y = \sqrt{2}$, atau $x = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ dan $y = \sqrt{2}$ pasti memenuhi pernyataan yang dimaksud.

□

Contoh B.7. (metode konstruktif) Buktikan, bila $a < b$ maka ada bilangan rasional r dengan $a < r < b$.

BUKTI. Diperhatikan bahwa $\frac{1}{b-a} > 0$. Ambil bilangan asli n sehingga $n > \frac{1}{b-a}$. Untuk n ini berlaku

$$nb - na > 1.....(*)$$

Ambil m bilangan bulat pertama yang lebih besar dari na, sehingga berlaku

$$m - 1 < na < m \; .....(**)$$

Dari (*) dan (**) diperoleh

$$na < m \leq na + 1 < nb.$$

Bentuk ini dapat ditulis $na < m < nb$. Bagilah kedua ruas dengan n, didapat

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Dengan mengambil $r := \frac{m}{n}$ maka bukti selesai.

□

Keberadaan objek yang dicari dapat tunggal atau banyak (berhingga atau takberhingga). Dalam beberapa keperluan, kita membutuhkan informasi bahwa keberadaan objek yang dimaksud adalah tunggal. Inilah bukti ketunggalan (*uniqueness proof*). Misalkan sudah dipastikan bahwa objek yang dimaksud ada, katakan x. Untuk membuktikan bahwa x hanya satu-satunya, kita misalkan ada objek lainnya, katakan y. Cara pertama, asumsikan $x \neq y$, ditemukan sebuah kontradiksi. Dalam hal ini kita telah menggunakan metode kontradiksi dengan mengasumsikan bahwa ada lebih dari satu objek yang dimaksud. Cara kedua adalah dengan menunjukkan bahwa $x = y$.

Contoh B.8. Jika ℓ dan m dua garis yang tidak sejajar maka terdapat tunggal titik potong kedua garis.

Kondisi hipotesis pada langkah induktif prinsip induksi kuat (PIK) lebih kuat daripada induksi biasa (PIM). Di sini diketahui serangkaian pernyataan sebelumnya bernilai benar, sedangkan pada induksi biasa hanya membutuhkan kebenaran sebuah pernyataan sebelumnya.

Contoh B.11. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n, berlaku

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

BUKTI. Pernyataan ini dibuktikan dengan PIM dengan domain $\mathbb{N}$ dan $P(n) := 1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$.

- langkah basis: $P(1) := 1(1!) = (1+1)! - 1 \leftrightarrow 1 = 1$ (T).
- langkah induktif: Diketahui $P(k)$ benar yaitu diasumsikan berlaku $1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) = (k+1)! - 1$. Untuk $n = k+1$ diperoleh

$$\begin{aligned}\text{Ruas kiri} &= \underbrace{1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!)}_{(k+1)!-1} + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)!(1+k+1) - 1 \\ &= (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 = \text{Ruas kanan},\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $P(k+1)$ benar. Oleh karena itu, pernyataan ini berlaku untuk setiap bilangan asli n.

□

Contoh B.12. Diberikan barisan yang didefinisikan secara rekursif

$$\begin{aligned} x_1 &:= 1, x_2 := 2, \\ x_{n+1} &:= \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \text{ untuk } n > 1 \end{aligned}$$

Buktikan $1 \leq x_n \leq 2$ untuk setiap bilangan asli n.

BUKTI. Di sini $P(n) : 1 \leq x_n \leq 2$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

- langkah basis $n = 1$, diperoleh $x_1 = 1$ sehingga $P(1)$ benar.
- langkah induktif: Diasumsikan $P(1)$, $P(2), \cdots, P(k)$ semuanya benar, yaitu $1 \leq x_n \leq 2$ untuk $n = 1, 2, \cdots, k$. Untuk $n = k+1$ diperoleh

$$2 \leq x_k + x_{k-1} \leq 4 \rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \leq 2 \leftrightarrow 1 \leq x_{k+1} \leq 2$$

yaitu berlaku $P(k+1)$. Jadi, terbukti.

□

Indeks