



GRAHA ILMU

Julan Hernadi

**Teori dan
Komputasi Numerik
Diferensial dan Integral**

<https://opac.perpusnas.go.id/DetailOpac.aspx?id=1159963>

Sampai saat ini ada 6 buku teks kuliah saya yang sudah terbit, 1 siap terbit, dan 3 dalam proses penulisan. Dalam EPAKDOS ini hanya 5 buku yang diajukan.

1. Buku Ajar

No	Judul Buku	Jumlah hal	Penerbit	Tahun Terbit	ISBN
1	Seri Kuliah Ringkas Kalkulus 1	184	Erlangga, Jakarta	2021	978-623-266-456-2
2	Matematika Numerik dengan Implementasi Numerik	236	Andi Offset, Yogyakarta	2011	978-979-294-029-9
3	Fondasi Matematika dan Dasar Berpikir Logis*)	177	UMPO Press	2016	978-602-0815-17-6

*) Tidak dimasukkan Epakdos karena sudah dikembangkan dan diterbitkan oleh Erlangga, Jakarta 2021

2. Buku Referensi

No	Judul Buku	Jumlah hal	Penerbit	Tahun Terbit	ISBN
1	Analisis Real Elementer dengan Ilustrasi Numeris dan Grafis	450	Erlangga, Jakarta	2015	978-602-298-591-4
2	Teori dan Komputasi Numerik Diferensial dan Integral	234	Graha Ilmu, Yogyakarta	2014	978-602-262-419-6
3	Fondasi Matematika dan Metode Pembuktian	256	Erlangga, Jakarta	2021	978-623-266-493-7

Sinopsis buku Analisis Real dengan Ilustrasi Numeris dan Grafis (Erlangga, 2015):

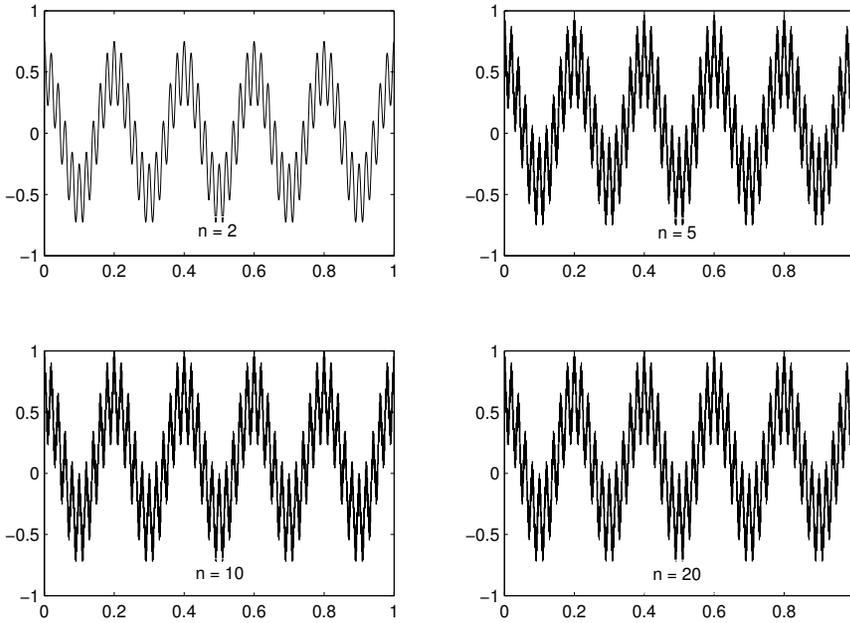
link: <https://opac.perpusnas.go.id/DetailOpac.aspx?id=983239>

Analisis real merupakan salah satu matakuliah wajib pada program studi matematika murni (MIPA) dan pendidikan matematika (FKIP). Analisis real memiliki tingkat abstrak yang sangat tinggi dan membutuhkan penalaran tingkat tinggi dalam mempelajarinya. Dalam belajar analisis real, berpikir logis (logically thinking) lebih dominan daripada berpikir mekanistik (algorithm thinking). Oleh karena itu, kemampuan berpikir tingkat tinggi (high order thinking) dalam pembelajaran matematika dapat dijangkau melalui mata kuliah ini. Kemampuan ini sangat penting dimiliki oleh mahasiswa sebagai kaum intelektual dan problem solver. Selama ini analisis real dianggap salah satu mata kuliah yang paling sulit dipahami oleh sebagian besar mahasiswa matematika karena objeknya abstrak dan pola penalarannya tingkat tinggi. Angka dan gambar adalah dua objek matematika yang paling mudah dipahami. Berbagai ilustrasi grafis dan numeris yang diberikan pada buku ini berperan sebagai jembatan antara objek abstrak dalam analisis real dan objek kongkrit yang lebih mudah dipahami. Penulisan buku ini dimaksudkan untuk memberikan pendekatan yang lebih mudah dalam mempelajari analisis

real. Materi yang dibahas pada buku ini adalah topik-topik elementer dalam analisis real yang meliputi Sistem Bilangan Real, Pengantar Topologi, Barisan dan Deret Bilangan Real, Limit dan Kekontinuan, Teori Diferensial, Teori Integral, dan Barisan dan Deret Fungsi. Buku ini tidak hanya membahas materi secara hierarki konvensional, tetapi juga memberikan kajian-kajian kritis dari aspek analisis matematika, grafis dan numeris. Penguasaan materi buku ini diyakini dapat mempermudah mahasiswa mempelajari cabang matematika lanjutan dan dapat menjadi modal dalam melanjutkan studi ke jenjang pasca sarjana. Buku ini dirancang sebagai buku teks wajib untuk pembelajaran kuliah analisis real pada prodi matematika atau prodi pendidikan matematika strata satu (S-1). Buku ini dapat digunakan oleh mahasiswa tingkat strata dua (S-2) matematika atau pendidikan matematika sebagai pengantar analisis real. Buku ini juga dapat digunakan mahasiswa non-matematika, utamanya mahasiswa bidang sains dan keteknikan yang ingin memperdalam matematika sampai ke akar-akarnya. Buku ini dapat pula dijadikan sebagai referensi penelitian atau tugas akhir yang melibatkan topik-topik dalam analisis real seperti disebutkan di atas.

Alasan buku ini dimasukkan sebagai buku referensi:

1. Kutipan sinopsis buku: “buku ini dapat digunakan oleh mahasiswa tingkat strata dua (S-2) matematika atau pendidikan matematika sebagai pengantar analisis real. Buku ini juga dapat digunakan mahasiswa non-matematika, utamanya mahasiswa bidang sains dan keteknikan yang ingin memperdalam matematika sampai ke akar-akarnya. Buku ini dapat pula dijadikan sebagai referensi penelitian atau tugas akhir yang melibatkan topik-topik dalam analisis real seperti disebutkan di atas”
2. Kajian materi buku ini melebihi materi kuliah standar, artinya masih banyak materi dalam buku ini tidak diajarkan karena pertimbangan tingkat kesulitannya. Paling tidak berdasarkan pengalaman dosen-dosen yang menggunakan buku ini sebagai buku referensi kuliah analisis real. Salah satu materi cukup lanjut adalah “Pembuktian Kekontinuan dan Ketakdiferensialan Fungsi Weierstrass dengan Ilustrasi Numeris” sebagai berikut:



Gambar 19.10: Beberapa aproksimasi fungsi Weierstrass

Sebagai penutup bagian ini, kita bahas pembuktian bahwa fungsi Weierstrass yang telah diperkenalkan pada bagian awal diferensial yang merupakan fungsi kontinu di mana-mana tetapi tidak terdiferensial di mana-mana. Fungsi ini berbentuk deret fungsi.

Kekontinuan dan Ketakdiferensialan Fungsi Weierstrass

Ketika membahas derivatif dan keterdiferensialan, fungsi Weierstrass diperkenalkan sebagai fungsi yang didefinisikan sebagai deret takhingga

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n x).$$

Ini merupakan fungsi kontinu pada \mathbb{R} tetapi tidak terdiferensial di titik manapun pada \mathbb{R} . Sejauh ini kita baru memahami fungsi ini dari visualisasi grafis tetapi belum membuktikan sifat kekontinuannya dan keterdiferensialannya secara analisis. Pada bagian ini kita akan membuktikan sifat unik fungsi ini, yaitu kontinu di mana-mana tetapi tidak terdiferensial di mana-mana (Davidson dan Donsing, 2002). Untuk lebih sederhananya, kita perhatikan fungsi Weierstrass sebagai berikut:

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cos(10^k \pi x). \quad (19.5.11)$$

Jumlah parsial deret ini $s_n(x) := \sum_{k=1}^n 2^{-k} \cos(10^k \pi x)$ diambil sebagai aproksimasi fungsi Weierstrass. Grafik beberapa s_n diberikan pada Gambar 19.10.

Bukti kontinu. Perhatikan $|f_k(x)| = |2^{-k} \cos(10^k \pi x)| \leq 2^{-k} := M_k$. Oleh karena $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, yakni konvergen maka berdasarkan uji-M disimpulkan deret $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cos(10^k \pi x)$ konvergen seragam pada \mathbb{R} ke sebuah fungsi kontinu. Terbukti f kontinu di mana-mana pada \mathbb{R} .

Bukti takterdiferensial. Perhatikan jumlah parsial deret $s_n(x) := \sum_{k=1}^n 2^{-k} \cos(10^k \pi x)$ tidak hanya fungsi kontinu tetapi ia terdiferensial sampai tingkat berapapun (*infinitely differentiable*) karena ia merupakan kombinasi linear berhingga fungsi-fungsi terdiferensial sampai tingkat berapapun, yaitu $y_k(x) = 2^{-k} \cos(10^k \pi x)$. Keadaan ini ternyata tidak berlaku jika kombinasi linearnya takberhingga. Pandang sebarang bilangan $x \in \mathbb{R}$, tulis $x = x_0.x_1x_2x_3 \dots$. Kita tunjukkan f tidak terdiferensial di x dengan menunjukkan limit berikut

$$f'(x) := \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

tidak ada melalui kriteria barisan. Kita bangun barisan (z_n) , $z_n \neq x$, $\lim(z_n) = x$, tetapi $|f(z_n) - f(x)| / |z_n - x| \rightarrow +\infty$. Tetapkan sebuah bilangan asli $n \geq 1$. Misalkan $y_0 = x_0.x_1x_2x_3 \dots x_n$ dan $y_1 = y_0 + 10^{-n}$. Jadi, y_0 merupakan pemotongan x sampai dengan digit ke- n sedangkan y_1 diperoleh dengan menambahkan 1 pada digit terakhir y_0 . Sebagai contoh $x = \sqrt{2} = 1.4142135623731 \dots$, misal kita tetapkan $n = 4$. Diperoleh $y_0 = 1.4142$ dan $y_1 = 1.4142 + 10^{-4} = 1.4142 + 0.0001 = 1.4143$. Dalam hal ini $x_n = 2$. Berdasarkan konstruksi ini berlaku $y_0 \leq x \leq y_1$. Mudah dipahami bahwa bilangan $10^n \pi y_0$ dan $10^n \pi y_1$ merupakan kelipatan π . Untuk contoh sebelumnya diperoleh $10^n \pi y_0 = 10^4 \pi (1.4142) = 14142\pi$ dan $10^n \pi y_1 = 14143\pi$ sehingga berlaku

$$f_n(y_0) = 2^{-n} \cos(10^n \pi y_0) = 2^{-n} (-1)^{x_n} \text{ dan } f_n(y_1) = 2^{-n} (-1)^{x_n+1}.$$

Ingat bahwa $\cos(n\pi)$ bernilai 1 jika n genap dan bernilai -1 jika n ganjil. Selanjutnya kita peroleh estimasi untuk $|f(y_0) - f(y_1)|$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |f_n(y_0) - f_n(y_1)| &= |2^{-n} (-1)^{x_n} (1 - (-1)^1)| \\ &= 2^{-n} 2 = 2^{1-n}. \end{aligned}$$

Oleh karena $10^n \pi y_0$ dan $10^n \pi y_1$ merupakan kelipatan π maka untuk $k > n$, $10^k \pi y_0$ dan $10^k \pi y_1$ merupakan kelipatan 2π . Jadi, $f_k(y_0) = 2^{-k} \cos(10^k \pi y_0) = 2^{-k} = 2^{-k} \cos(10^k \pi y_1) = f_k(y_1)$. Untuk $1 \leq k < n$, terapkan TNR untuk f_k pada interval $[y_0, y_1]$, yaitu ada $c_k \in (y_0, y_1)$ sehingga

$$\begin{aligned} |f_k(y_0) - f_k(y_1)| &= |f'_k(c_k)| |y_0 - y_1| \\ &= |-2^{-k} 10^k \pi \sin(10^k \pi c_k)| |y_0 - y_1| \\ &\leq (2^{-k} 10^k \pi) 10^{-n} = 2^{-k} \pi (2 \cdot 5)^{k-n} = 2^{-n} \pi 5^{k-n}. \end{aligned}$$

Berikutnya kita berikan estimasi batas bawah untuk $|f(y_0) - f(y_1)|$.

$$\begin{aligned} f(y_0) - f(y_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(y_0) - f_k(y_1)) \\ &= (f_n(y_0) - f_n(y_1)) + \sum_{k \neq n} (f_k(y_0) - f_k(y_1)), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(f(y_0) - f(y_1)) - \sum_{k \neq n} (f_k(y_0) - f_k(y_1)) = f_n(y_0) - f_n(y_1)$. Kemudian,

$$\begin{aligned} |f_n(y_0) - f_n(y_1)| &\leq |f(y_0) - f(y_1)| + \sum_{k \neq n} |f_k(y_0) - f_k(y_1)| \\ |f(y_0) - f(y_1)| &\geq |f_n(y_0) - f_n(y_1)| - \sum_{k \neq n} |f_k(y_0) - f_k(y_1)| \\ &\geq 2^{1-n} - \sum_{k \neq n} 2^{-n} \pi 5^{k-n} \\ &\geq 2^{1-n} - 2^{-n} 5^{-n} \pi \sum_{k=1}^{n-1} 5^k \\ &= 2^{1-n} - 2^{-n} 5^{-n} \pi \left(\frac{5(5^{n-1} - 1)}{5 - 1} \right) \\ &= 2^{-n} \underbrace{\left(2 - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right) \right)}_{\geq 1} \geq 2^{-n}. \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$2^{-n} \leq |f(y_0) - f(y_1)| \leq |f(y_0) - f(x)| + |f(x) - f(y_1)|.$$

Minimal salah satu dari kuantitas $|f(y_0) - f(x)|$ atau $|f(x) - f(y_1)|$ lebih dari $\frac{1}{2}(2^{-n}) = 2^{-n-1}$. Sebab bila keduanya tidak lebih dari $\frac{1}{2}(2^{-n})$ maka jumlah keduanya tidak melebihi 2^{-n} , bertentangan dengan yang diketahui. Ambil $z_n := y_i$, $i = 0$ atau 1 sehingga $|f(y_i) - f(x)| > 2^{-n-1}$. Jelas berlaku $|z_n - x| \leq |y_1 - y_0| = 10^{-n}$ karena $z_n = y_0$ atau y_1 dan $y_0 < x < y_1$. Ini berarti $\lim(z_n) = x$. Kita juga mempunyai $|f(z_n) - f(x)| > 2^{-n-1}$ sehingga diperoleh

$$\left| \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} \right| \geq \left| \frac{2^{-n-1}}{10^{-n}} \right| = \frac{5^n}{2} \rightarrow \infty.$$

Disimpulkan barisan $\left(\frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} \right)$ tidak konvergen sehingga $f'(x) = \lim \left(\frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} \right)$ tidak ada.

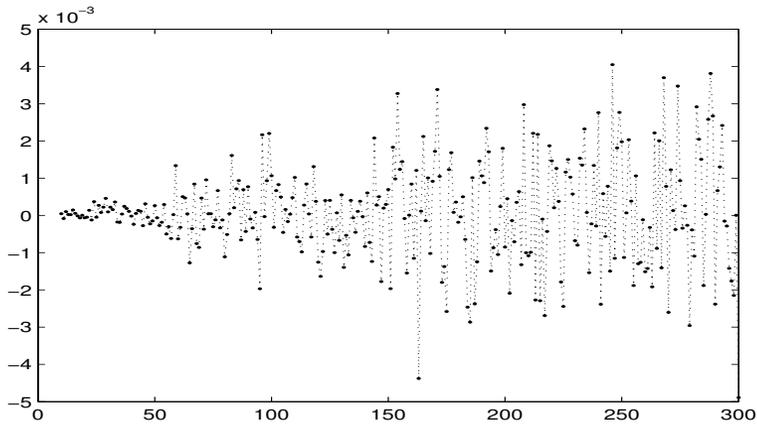
Ilustrasi Numeris Misalkan untuk $x = \frac{1}{2}$ maka $10^k \pi x = \frac{10^k}{2} \pi = \begin{cases} 5\pi & \text{untuk } k = 1 \\ 2n\pi & \text{untuk } k > 1 \end{cases}$ sehingga sehingga nilai cosinusnya sama dengan -1 untuk $k = 1$ dan 1 untuk $k = 2, 3, \dots$. Diperoleh

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = 0.$$

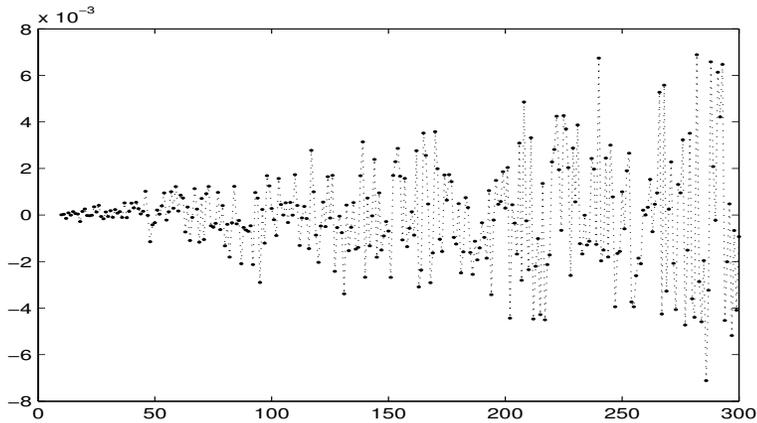
Perhatikan suku dalam kurung merupakan deret geometri takhingga dengan $a = \frac{1}{2^2}$ dan $r = \frac{1}{2}$ sehingga jumlahnya adalah $\frac{1/2^2}{1-1/2} = 1/2$. Secara grafis, terlihat indikasi bahwa $f(1/2)$ memang bernilai nol. Aproksimasi numerik $s_n(1/2)$ untuk $n = 3, 5, 10, 20, 50$ adalah sebagai berikut:

$$-0.1250, -0.0313, -9.7656 \times 10^{-4}, -2.433 \times 10^{-5}, -2.3402 \times 10^{-5}.$$

Hasil numerik ini cocok dengan indikasi grafis yang menunjukkan bahwa $f(1/2) = 0$. Selanjutnya kita selidiki nilai selisih terbagi sebagai aproksimasi derivatif untuk beberapa ukuran



Gambar 19.11: Pola konvergen nilai selisih terpusat fungsi Weierstrass di $x = \frac{1}{2}$.



Gambar 19.12: Pola konvergen nilai selisih terpusat fungsi Weierstrass di $x = 0.6$.

langkah h di $x = \frac{1}{2}$ ini. Kita terapkan formula selisih terpusat, yaitu

$$f'(1/2) \approx \frac{f(1/2+h) - f(1/2-h)}{2h}.$$

Untuk eksperimen numerik ini kita ambil $N = 10, 11, \dots, 300$, $h = 1/N$. Nilai fungsi $f(x)$ diaproksimasi oleh jumlah parsial deret $s_n(x)$ dengan banyak suku $n = 100$. Hasilnya disajikan dalam bentuk palot antara N versus nilai selisih terpusat.

Dalam kasus fungsi f terdiferensial di $x = 1/2$ maka seharusnya bilangan $\frac{f(1/2+h)-f(1/2-h)}{2h}$ akan menuju sebuah bilangan tertentu untuk $h \rightarrow 0$. Berdasarkan hasil eksperimen numerik ini (lihat Gambar 19.11), semakin besar N (berarti semakin kecil nilai selisih terpusat h), bilangan ini tidak menuju sebuah bilangan tetap. Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1/2+h) - f(1/2-h)}{2h}$$

tidak ada, yaitu $f'(1/2)$ tidak ada. Pola seperti ini akan dijumpai pada setiap $x \in \mathbb{R}$. Sebagai contoh, untuk $x = 0.6$ diberikan pada Gambar 19.12. Melalui serangkaian analisis di atas,

kita telah berhasil mengungkap sebagian keunikan sifat fungsi Weierstrass terutama sifat kontinu dan keterdiferensialannya. Masih banyak sifat unik lainnya yang belum terungkap, misalnya terkait dengan integral fungsi Weierstrass. Isu ini cukup menarik karena deret yang menyajikan fungsi Weierstrass ini bersifat konvergen seragam.

Istilah Kunci Bagian VII Berikut diberikan beberapa istilah kunci, dan pengertian praktisnya yang sering digunakan pada bagian ini. Untuk pengertian lebih formal dapat dibaca kembali pada pembahasan lengkapnya.

Barisan fungsi: barisan yang suku-sukunya berupa fungsi.

Konvergen titik demi titik: kekonvergenan barisan bilangan real biasa yang diperoleh dengan mensubstitusi nilai x pada barisan fungsi, ditulis $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Kedekatan nilai $f_n(x)$ terhadap $f(x)$ bergantung pada nilai x yang dipilih.

Konvergen seragam: kedekatan $f_n(x)$ terhadap $f(x)$ bersifat seragam yaitu tidak bergantung pada nilai x yang dipilih.

Fungsi limit: fungsi yang menjadi limit sebuah barisan fungsi.

Support fungsi: himpunan bagian domain di mana fungsi bernilai tidak nol. Lebih umum, support diambil sebagai penutup himpunan yang telah disebutkan.

Kriteria konvergen takseragam: syarat cukup bagi sebuah barisan fungsi yang tidak konvergen seragam.

Norma seragam: nilai terbesar atau supremum fungsi pada sebuah domain.

Barisan terbatas: barisan fungsi (f_n) yang mana setiap f_n adalah fungsi terbatas, atau $\{f_n(x)\}$ merupakan himpunan terbatas untuk setiap n dan setiap x pada domain.

Barisan Cauchy: sifat barisan fungsi yang mana selisih norma seragamnya (supremumnya) semakin lama semakin kecil.

Himpunan lengkap: himpunan yang mana setiap barisan Cauchy-nya konvergen di dalam himpunan tersebut.

Pertukaran limit dan diferensial: pertukaran urutan operasi antara limit derivatif barisan fungsi dan derivatif limit barisan fungsi.

Pertukaran limit dan integral: pertukaran urutan operasi antara limit integral barisan fungsi dan integral limit barisan fungsi.

Teorema kekonvergenan integral: teorema yang menjamin bahwa pertukaran limit dan integral berlaku. Syarat yang lebih lemah dikenal dengan teorema kekonvergenan terbatas.

Deret fungsi: bentuk jumlahan takberhingga fungsi-fungsi.

Barisan jumlah parsial deret fungsi: barisan yang terbentuk oleh penjumlahan n suku pertama deret fungsi.

Kekonvergenan deret fungsi: kekonvergenan barisan jumlah parsialnya.

Sinopsis buku Teori dan Komputasi Numerik Integral dan Diferensial (Graha Ilmu, 2014):

link: <https://opac.perpusnas.go.id/DetailOpac.aspx?id=1159963>

Diferensial dan Integral adalah dua topik matematika yang sangat populer. Keduanya tidak hanya dipelajari oleh orang-orang matematika tetapi banyak dipelajari dan digunakan oleh orang-orang yang bekerja dalam ilmu terapan. Buku ini membahas kedua topik tersebut dari dua aspek yaitu aspek teoritis dan komputasi numerik. Dari aspek teoritis, semua konsep dijelaskan secara detail mulai dari filosofi, interpretasi dan formalisasi deduktif dalam bentuk definisi dan selanjutnya diuraikan teori-teori dalam bentuk teorema, bukti dan contoh penerapannya. Semua metoda yang selama ini digunakan pada topik diferensial dan integral ini diberikan justifikasinya secara teoritis. Dari aspek komputasi numerik, pembahasan dalam buku ini dimulai dari analisis metoda yang akan digunakan. Syarat perlu agar sebuah metoda aproksimasi dapat diterapkan berikut estimasi errornya diberikan dalam bentuk teorema lengkap dengan pembuktiannya. Implementasi numerik dilakukan dengan menggunakan MATLAB di mana m-file (kode MATLAB) yang berseusuaian dengan metoda tertentu telah dirancang sedemikian rupa sehingga dapat dimodifikasi sesuai kebutuhan. Buku ini tidak hanya membahas masalah komputasi numerik standar pada diferensial dan integral, tetapi juga menyajikan masalah-masalah kritis dan topik-topik yang relatif baru. Masalah sensitivitas aproksimasi derivatif diilustrasikan dengan jelas dalam suatu eksperimen numerik. Topik baru dalam perhitungan derivatif yaitu algoritma diferensial atau otomatisasi diferensial (AD) diperkenalkan ide dasar dan implementasi numeriknya. Metoda ekstrapolasi Richardson diterapkan dalam aproksimasi derivatif. Pada implementasi numerik integral tidak hanya dibahas metoda standar seperti midpoint, trapesium dan Simpson, tetapi diperkenalkan juga berbagai metoda powerful seperti integral Gauss dan Romberg. Metoda adaptasi yaitu sebuah metoda formula kuadratur yang mana pengambilan gridnya didasarkan pada kelakuan fungsi juga dibahas dalam buku ini. Metoda ini sangat relevan digunakan dalam bidang aplikasi. Buku ini sangat cocok digunakan sebagai buku teks wajib untuk matakuliah analisis real, analisis/metoda numerik, dan kalkulus pengayaan. Buku ini dapat pula dijadikan sebagai referensi penelitian atau tugas akhir yang melibatkan diferensial dan integral baik dari aspek teoritis maupun aspek komputasi numerik dengan komputer. Mahasiswa program studi matematika MIPA dan pendidikan matematika FKIP sangat dianjurkan memiliki buku ini guna membuka cakrawala keilmuan matematika dan komputasi lebih luas. Karena luasnya spektrum integral dan diferensial maka buku ini dapat digunakan oleh semua mahasiswa bidang sains dan keteknikan, baik jenjang sarjana (S-1) maupun jenjang magister (S-2).

Alasan buku ini dimasukkan sebagai buku referensi:

1. Kutipan sinopsis buku: “buku ini tidak hanya membahas masalah komputasi numerik standar pada diferensial dan integral, tetapi juga menyajikan masalah-masalah kritis dan topik-topik yang relatif baru. Masalah sensitivitas aproksimasi derivatif diilustrasikan dengan jelas dalam suatu eksperimen numerik. Topik baru dalam perhitungan derivatif yaitu algoritma diferensial atau otomatisasi diferensial (AD) diperkenalkan ide dasar dan implementasi numeriknya”.
2. Faktanya topik-topik di atas tidak pernah diajarkan kepada mahasiswa pada mata kuliah metode numerik karena sudah melebihi standar silabus yang ada.

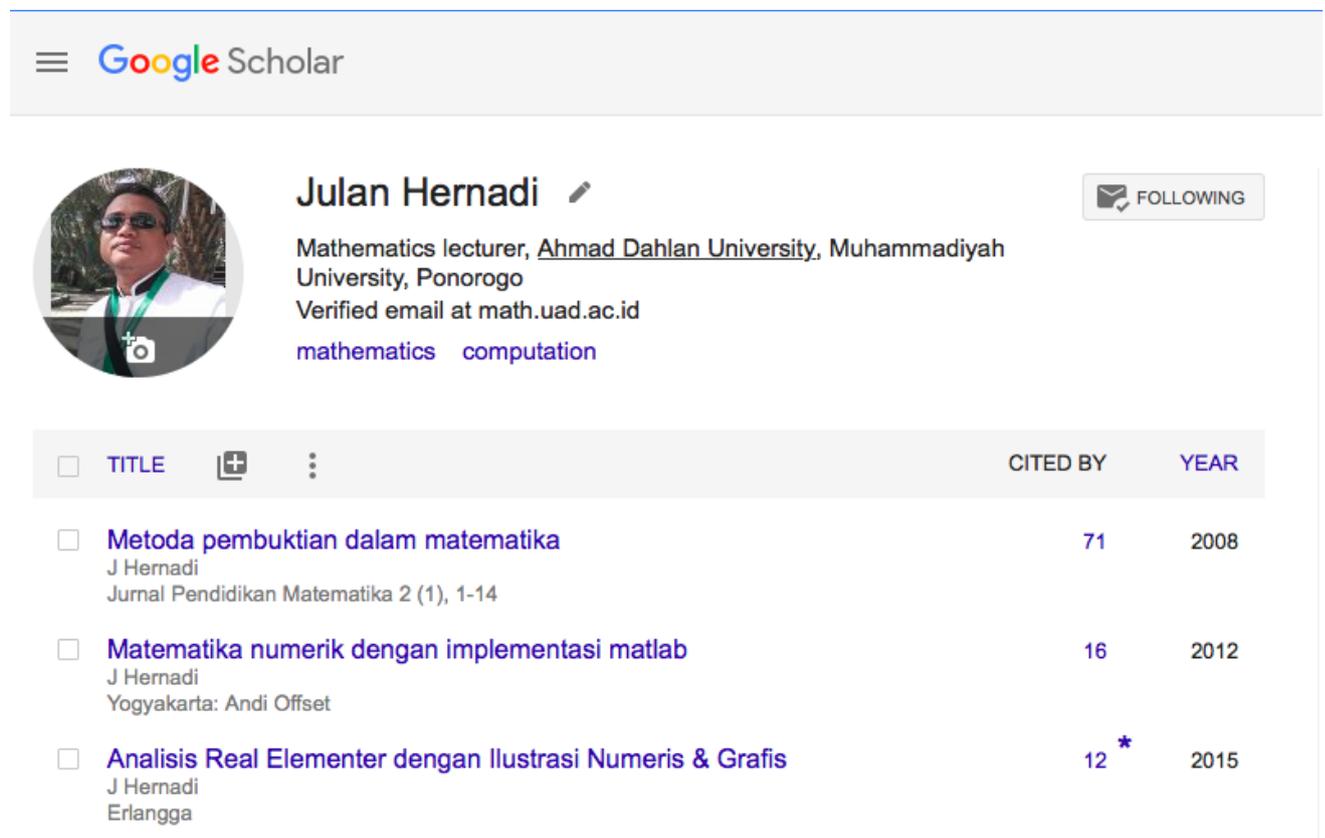
Sinopsis buku Fondasi Matematika dan Metode Pembuktian (E-book Erlangga, 2022)

link: <https://erlanggaonline.com/katalog/detail/0075100100>

Buku ini dirancang untuk menanamkan kemampuan penalaran mahasiswa yang dibutuhkan untuk mempelajari matematika secara benar melalui logika matematika. Logika matematika sebagai dasar penalaran dibahas mulai dari proposisi dan konektivitas, fungsi proposisi dan kuantifikasi, sampai dengan aturan inferensi. Mengingat aktivitas dalam pembelajaran matematika tidak hanya hitung-hitungan, tapi juga membuktikan kebenaran berbagai pernyataan berupa teorema maka buku ini juga secara khusus membahas berbagai metode pembuktian formal dalam matematika. Dua topik paling mendasar dalam matematika yaitu konsep dasar teori himpunan dan teori fungsi dibahas secara deduktif dalam buku ini sehingga dapat dijadikan landasan yang kuat untuk mempelajari topik-topik matematika lainnya. Buku ini sangat cocok untuk mahasiswa Prodi S-1 Matematika MIPA atau Pendidikan Matematika, juga prodi-prodi serumpun seperti Ilmu Statistika dan Ilmu Komputer. Buku ini juga cocok bagi mahasiswa yang ingin meningkatkan kemampuan berpikir kritisnya mengingat penalaran melalui logika matematika di sini berlaku secara universal pada bidang ilmu lainnya.

Alasan buku ini dimasukkan sebagai buku referensi:

1. Cakupan materinya secara umum melebihi kuliah standar logika matematika yang diberikan pada mahasiswa prodi pendidikan matematika dan matematika.
2. Salah satu artikel penulis "Metode Pembuktian dalam Matematika" yang terbit pada Jurnal Pendidikan Matematika, Unsri (terakreditasi level 1) adalah bagian yang tidak terpisahkan dari buku ini, seperti screen shoot berikut.



Google Scholar

 **Julan Hernadi**  FOLLOWING

Mathematics lecturer, [Ahmad Dahlan University](#), Muhammadiyah University, Ponorogo
Verified email at math.uad.ac.id
[mathematics](#) [computation](#)

<input type="checkbox"/>	TITLE	CITED BY	YEAR
<input type="checkbox"/>	Metoda pembuktian dalam matematika J Hernadi Jurnal Pendidikan Matematika 2 (1), 1-14	71	2008
<input type="checkbox"/>	Matematika numerik dengan implementasi matlab J Hernadi Yogyakarta: Andi Offset	16	2012
<input type="checkbox"/>	Analisis Real Elementer dengan Ilustrasi Numeris & Grafis J Hernadi Erlangga	12*	2015

Teori dan Komputasi Numerik
DIFERENSIAL DAN INTEGRAL

Julan HERNADI

APRIL 2014

Didedikasikan untuk:

Alm. Ahmad Ismail (ayah) dan Hj Konaria (ibu)

Sri Purnama Surya (isteri), Ahmad Zhafir HERNADI (anak)

Herri Gusmedi, Aprillina, dan Yuniarni (adik-adik)

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	vii
I DIFERENSIAL	xi
1 PENGANTAR TEORI DIFERENSIAL	1
1.1 Pengertian Derivatif	2
1.2 Sifat Aljabar Derivatif	7
1.3 Aturan Rantai (<i>chain rule</i>)	10
1.4 Derivatif Fungsi Invers	13
1.5 Teorema Nilai Rerata (TNR)	16
1.6 Penggunaan TNR	22
1.6.1 Identifikasi similaritas fungsi	22
1.6.2 Uji kemonotonan fungsi	22
1.6.3 Uji derivatif pertama untuk ekstrim	24
1.6.4 Pembuktian bentuk-bentuk ketidaksamaan	25
1.7 Aturan L'Hospital	28
1.7.1 Aturan L'Hospital bentuk $\frac{0}{0}$	29
1.7.2 Aturan L'Hospital bentuk $\frac{\infty}{\infty}$	34
1.8 Teorema Taylor dan Aproksimasi Fungsi	35
1.9 Fungsi Konveks	39

2	KOMPUTASI NUMERIK DERIVATIF	43
2.1	Aproksimasi Derivatif Pertama	45
2.1.1	Formula selisih maju, selisih mundur dan selisih terpusat	45
2.1.2	Estimasi error aproksimasi derivatif	47
2.1.2.1	Menggunakan polinomial interpolasi	47
2.1.2.2	Menggunakan Teorema Taylor	49
2.1.3	Aproksimasi order tinggi	50
2.2	Aproksimasi Derivatif Kedua	54
2.3	Metoda Ekstrapolasi Richardson	55
2.3.1	Step tunggal	55
2.3.2	Multistep	57
2.4	Komputasi dengan MATLAB	59
2.4.1	Rumus fungsi diketahui	59
2.4.2	Derivatif data tabular	63
2.4.3	Masalah <i>rounding error</i> pada aproksimasi derivatif	65
2.4.4	Implementasi numerik ekstrapolasi Richardson	67
2.4.5	Masalah sensitivitas aproksimasi derivatif dan <i>smoothing</i>	69
2.4.6	Automatisasi Diferensial (AD)	73
II	INTEGRAL	83
3	TEORI INTEGRAL	85
3.1	Pendefinisian Integral	87
3.1.1	Metoda Cauchy	88
3.1.2	Metoda Darboux	95
3.1.3	Metoda Riemann	101

3.2	Sifat-sifat Integral Riemann	104
3.2.1	Ketunggalan nilai integral	104
3.2.2	Kriteria terintegral Riemann	105
3.2.3	Sifat aljabar fungsi terintegral	106
3.2.4	Sifat aditif integral Riemann	111
3.3	Keluarga Fungsi Terintegral Riemann	113
3.3.1	Keterintegralan fungsi karakteristik	113
3.3.2	Keterintegralan fungsi tangga	114
3.3.3	Keterintegralan fungsi kontinu	115
3.3.4	Keterintegralan fungsi kontinu sepotong-sepotong	115
3.3.5	Keterintegralan fungsi takkontinu pada himpunan berukuran nol	118
3.4	Teorema Fundamental Kalkulus	121
3.5	Metoda Integral Parsial dan Substitusi	130
3.6	Teorema Nilai Rerataan Bentuk Integral	134
3.7	Integral Riemann-Stieltjes	136
3.8	Integral Takwajar	141
3.8.1	Integral takwajar tipe 1	142
3.8.2	Integral takwajar tipe 2	145
4	KOMPUTASI NUMERIK INTEGRAL	149
4.1	Pendahuluan	149
4.2	Formula Kuadratur Melalui Interpolasi	151
4.2.1	Metode midpoint	152
4.2.2	Metode trapesium	153
4.2.3	Metode Simpson	154
4.3	Metoda Koefisien Taktentu	155

4.4	Estimasi Kesalahan Metode Kuadratur Dasar	157
4.5	Formula Kuadratur Bersusun	163
4.5.1	Metode midpoint bersusun	165
4.5.2	Metode trapesium bersusun	167
4.5.3	Metode Simpson bersusun	169
4.6	Metode Integrasi Gauss	175
4.6.1	Integrasi Gauss order 2	175
4.6.2	Integrasi Gauss order n	178
4.6.3	Integrasi Gauss bersusun	179
4.7	Integrasi Romberg	180
4.8	Komputasi Numerik Integral Takwajar	185
4.9	Komputasi dengan MATLAB	189
4.9.1	Kuadratur sederhana	189
4.9.2	Kuadratur bersusun	191
4.9.3	Integral data tabular	194
4.9.4	Implementasi integrasi Gauss	196
4.9.5	Implementasi integrasi Romberg	198
4.9.6	Metoda adaptif	200
4.9.7	Seputar Fungsi quad pada MATLAB	204
	GLOSARIUM	208
	INDEKS	214

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, penulis bersyukur kepada Allah SWT karena hanya atas petunjuk dan kekuatan dari Nya buku ini dapat diselesaikan. Diferensial dan Integral adalah dua topik dalam matematika yang sangat akrab, bukan hanya bagi komunitas internal matematika tapi juga bagi pengguna matematika dari berbagai disiplin ilmu. Hal ini dikarenakan banyak sekali permasalahan dunia nyata yang dapat dikuantifikasi menggunakan diferensial dan integral. Banyak sekali laporan penelitian yang mengambil topik diferensial dan integral sebagai landasan teori.

Sitasi teoritis kedua topik ini biasanya diambil dari buku kalkulus praktis tanpa mempertimbangkan syarat-syarat perlu yang harus dipenuhi oleh sebuah permasalahan penelitian yang terkait dengan integral atau diferensial. Asumsi dasar yang harusnya dipenuhi sebelum menerapkan teori pada diferensial dan integral terkadang diabaikan begitu saja seperti asumsi kekontinuan, keterdiferensialan, keterbatasan, keterintegralan, kemonotonan, dan asumsi khusus lainnya. Metoda apapun yang digunakan membutuhkan kepastian bahwa asumsi dasar sudah terpenuhi dulu sebelum metoda diterapkan. Inilah substansi pendekatan ilmiah dalam kajian ilmu.

Aspek lain yang tidak kalah menariknya adalah implementasi numerik kalkulus diferensial dan integral. Banyak pengguna melakukan implementasi numerik terkait kedua topik ini langsung dari toolbox yang telah disediakan oleh program aplikasi tanpa mempertimbangkan landasan teoritis yang relevan. Bahkan lebih tragis lagi banyak pengguna yang tidak dapat membedakan nilai aproksimasi dan nilai eksak sebuah integral atau diferensial. Kalaupun tahu, pengguna umumnya lebih fokus pada nilai aproksimasi tanpa menghiraukan kemungkinan error yang terjadi. Karena umumnya nilai eksak tidak diketahui maka nilai aproksimasi yang digunakan tanpa diketahui estimasi error dapat berakibat fatal. Sebagai contoh menghitung aproksimasi derivatif terhadap data hasil pengukuran lapangan dengan menggunakan formula selisih hingga dapat menyesatkan. Hal ini dikarenakan formula ini sangat sensitif terhadap

perubahan kecil atau gangguan data input. Keadaan ini terjadi pada data hasil pengukuran lapangan dikarenakan adanya kontribusi noise yang sulit dihindari baik dikarenakan faktor gangguan alam maupun kemampuan alat ukur yang digunakan.

Buku ini memberikan pembahasan dari dua aspek terhadap topik diferensial dan integral, yaitu aspek teoritis dan komputasi numerik. Dari aspek teoritis, setiap konsep dimulai dari filosofi dan formalisasi deduktif dalam bentuk definisi dan selanjutnya diuraikan teori-teori dalam bentuk teorema dan bukti serta contoh penerapannya. Banyak metoda yang selama ini sering digunakan sehari-hari dalam kalkulus diferensial dan integral dijustifikasi dalam bentuk teorema berikut buktinya.

Dengan merujuk langsung kepada teori yang sesungguhnya maka diharapkan penggunaan kedua topik ini lebih tepat sasaran dan kesimpulan yang dihasilkan dapat dipertanggungjawabkan secara ilmiah. Dari aspek komputasi numerik, pembahasan dalam buku dimulai dari analisis metoda yang akan digunakan. Syarat perlu agar sebuah metoda aproksimasi dapat diterapkan dan estimasi errornya diberikan dalam bentuk teorema berikut pembuktiannya. Implementasi numerik dilakukan dengan menggunakan MATLAB di mana m-file (kode MATLAB) yang digunakan dirancang sendiri sehingga dapat dimodifikasi sesuai kebutuhan. Untuk optimalnya penggunaan buku ini, pembaca diharapkan memiliki keterampilan MATLAB sehingga dapat memahami semua m-file yang ada dan dapat memodifikasinya sesuai kebutuhan masing-masing.

Buku ini tidak hanya membahas masalah komputasi numerik standar pada diferensial dan integral, tetapi juga menyajikan masalah-masalah kritis dan topik-topik yang relatif baru. Masalah sensitivitas aproksimasi derivatif diilustrasikan dengan jelas dalam suatu eksperimen numerik. Topik baru dalam perhitungan derivatif yaitu algoritma diferensial atau otomatisasi diferensial (AD) diperkenalkan ide dasar dan implementasi numeriknya. Metoda ekstrapolasi Richardson diterapkan dalam aproksimasi derivatif. Pada implementasi numerik integral tidak hanya dibahas metoda standar seperti midpoint, trapesium dan Simpson, tetapi diperkenalkan juga berbagai metoda *powerful* seperti integral Gauss dan Romberg. Metoda adaptasi yaitu sebuah metoda formula kuadratur yang mana pengambilan gridnya didasarkan pada kelakuan fungsi juga dibahas dalam buku ini. Metoda ini sangat relevan digunakan dalam bidang aplikasi.

Buku ini sangat cocok digunakan sebagai buku teks wajib untuk matakuliah analisis real, analisis/metoda numerik, dan kalkulus pengayaan. Buku ini dapat pula dijadikan sebagai referensi penelitian atau tugas akhir yang melibatkan diferensial dan integral baik dari as-

pek teoritis maupun aspek komputasi numerik dengan komputer. Mahasiswa program studi matematika MIPA dan pendidikan matematika FKIP sangat dianjurkan memiliki buku ini guna membuka cakrawala keilmuan matematika dan komputasi lebih luas. Karena luasnya spektrum integral dan diferensial maka buku ini dapat digunakan oleh semua mahasiswa bidang sains dan keteknikan, baik jenjang sarjana (S-1) maupun jenjang magister (S-2).

Pada kesempatan ini penulis tidak lupa menyampaikan terima kasih dan penghargaan kepada istri tercinta Sri Purnama Surya dan ananda tersayang Ahmad Zhafir Hernadi atas dorongan semangat yang diberikan selama ini. Kepada ibunda Hj Konaria dan adik-adik: Herri Gusmedi, Aprillina dan Yuniarni, penulis menyampaikan penghargaan dan terima kasih atas doa dan harapan kalian selama ini. Kepada ayahnda tercinta Ahmad Ismail yang telah kembali menghadap Sang Khalik, penulis selalu berdoa semoga senantiasa berada pada tempat yang layak di sisiNya.

Akhirnya, penulis menyadari bahwa naskah ini masih banyak kekurangannya. Oleh karena itu, segala kritik dan saran untuk perbaikan pada penerbitan edisi berikutnya sangat diharapkan dari para pembaca sekalian. Saran dan kritik dapat disampaikan melalui email penulis julan_hernadi@yahoo.com. Penulis sangat berterima kasih sekali kepada asisten dan para mahasiswa penulis yang telah memberikan koreksi terhadap kesalahan yang ada selama menggunakan draft buku ini dalam perkuliahan.

Yogyakarta, April 2014

Penulis

BAGIAN I

DIFERENSIAL

BAB 1

PENGANTAR TEORI DIFERENSIAL

Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them.

Joseph FOURIER

Diferensial merupakan topik yang cukup 'baru' dalam matematika. Dimulai sekitar tahun 1630 an oleh Fermat ketika menghadapi masalah menentukan garis singgung kurva, dan juga masalah menentukan maksimum atau minimum fungsi. Kemudian, kaitan antara garis singgung kurva dan velositas atau kecepatan suatu benda bergerak diungkap pada masa berikutnya sekitar tahun 1660 an oleh Sir Isaac Newton (1642-1727). Selanjutnya, Newton mengembangkan temuan ini menjadi teori fluksi yang didasarkan ide intuitif limit; di dalamnya muncul konsep diferensial di mana beberapa istilah dan notasi diciptakan. Di pihak lain, secara terpisah Gottfried Leibniz (1646-1716) sekitar tahun 1680 menyelidiki bahwa luas daerah di bawah kurva dapat dihitung dengan membalik proses diferensial. Teknik menarik Leibniz ini dapat memecahkan masalah yang sebelumnya sangat sulit menjadi sangat mudah; merupakan pemicu ketertarikan bagi banyak matematikawan melakukan riset pengembangan dan dihasilkan teori koheren yang dewasa ini menjadi **kalkulus diferensial dan kalkulus integral**.

Pada bab ini kita akan dibahas teori diferensial. Diingatkan bahwa teori diferensial dan teori integral adalah dua topik yang konsepnya berbeda, namun keduanya dihubungkan oleh teorema fundamental kalkulus. Teori integral akan dipelajari pada bab berikutnya.

(1.1.1). Dengan demikian dapat dikatakan, derivatif f di c diberikan oleh

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (1.1.2)$$

asalkan limit ini ada. Perhatikan bahwa nilai derivatif L harus bilangan real. Bila nilai L ini $\pm\infty$ maka kita katakan derivatifnya tidak ada.

Fungsi f dikatakan terdiferensial di c jika derivatifnya $f'(c)$ ada. Fungsi f dikatakan terdiferensial pada I jika ia terdiferensial di setiap $c \in I$. Jadi, derivatif merujuk nilai $f'(c)$, sedangkan diferensial merupakan operasi untuk mendapatkan derivatif. Istilah 'turunan' adalah bentuk nasionalisasi kata 'derivative'. Keterdiferensialan merupakan sifat fungsi seperti halnya kekontinuan. Himpunan fungsi-fungsi yang terdiferensial pada I biasanya dinyatakan oleh $\mathcal{C}'(I)$, sedangkan himpunan fungsi kontinu pada I dinyatakan oleh $\mathcal{C}(I)$. Fungsi terdiferensial ada kemungkinan derivatifnya juga terdiferensial. Pengertian derivatif kedua merujuk derivatif (pertama) sebagai fungsi asalnya. Begitu juga derivatif tingkat tinggi lainnya. Notasi $f^{(n)}$ digunakan untuk menyatakan derivatif tingkat n dari f . Notasi $\mathcal{C}^{(n)}(I)$ biasanya digunakan untuk menyatakan himpunan fungsi-fungsi yang terdiferensial sampai dengan tingkat n pada I , yakni $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ada pada I . Notasi lain yang digunakan untuk f' adalah Df dan $\frac{df}{dx}$ bila x variabel bebas pada fungsi f , yaitu $f = f(x)$. Notasi $\frac{df}{dx}$ dikenal dengan notasi Leibniz.

Contoh 1.1. Perhatikan fungsi $f(x) := x^2$, untuk $x \in \mathbb{R}$. Misalkan c titik sebarang dalam \mathbb{R} . Diperoleh

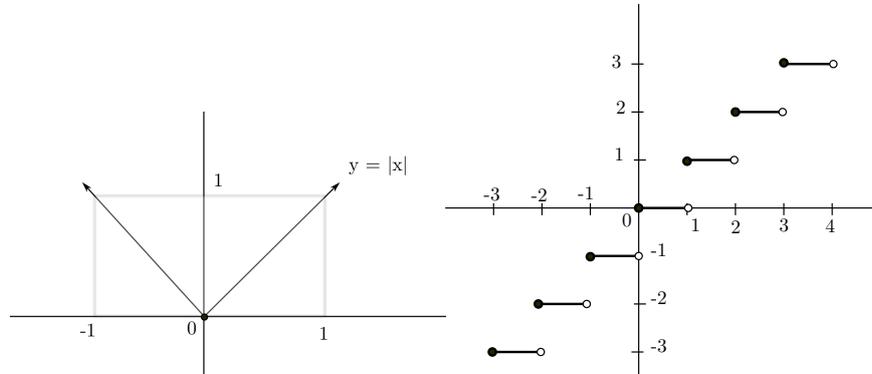
$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} (x + c) = 2c.$$

Karena $f'(c) = 2c$ terdefinisi untuk setiap $c \in \mathbb{R}$ maka diperoleh $f'(x) = 2x$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

Keterdiferensialan dan kekontinuan merupakan sifat fungsi. Dingatkan bahwa fungsi kontinu di c dapat dicirikan oleh kesamaan nilai limit dan nilai fungsi di titik tersebut, yaitu jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ maka f kontinu di c . Secara geometris, grafik fungsi kontinu tidak terputus. Dua sifat kekontinuan dan keterdiferensialan ternyata memiliki hubungan implikasi seperti diungkapkan pada Teorema berikut.

Teorema 1.1. Misalkan $I \subset \mathbb{R}$ suatu interval, dan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Jika f terdiferensial di c maka f kontinu di c .

BUKTI. Lihat kembali definisi f kontinu di c pada bab sebelumnya. Untuk $x \in I$ dan $x \neq c$,



Gambar 1.2: Grafik fungsi $f(x) = |x|$ (kiri) dan $f(x) = [x]$ (kanan)

fungsi mulus (*smooth function*).

Dengan mengambil kontraposisi pernyataan teorema di atas maka disimpulkan bahwa fungsi yang tidak kontinu pasti tidak terdiferensial. Fungsi tangga flooring $f(x) := [x]$ merupakan contoh fungsi tidak kontinu dan tidak terdiferensial pada himpunan bilangan bulat. Grafik fungsi flooring ditunjukkan pada Gambar 1.2 (panel kanan).

Pada tahun 1872, Karl Weierstrass mendefinisikan fungsi f dalam bentuk deret takhingga berikut

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x).$$

Ternyata fungsi Weierstrass ini kontinu di mana-mana tetapi tidak terdiferensial di mana-mana. Buktinya cukup sulit, oleh karena itu tidak diberikan di sini. Untuk jumlah parsial 5 suku pertama ($n = 4$) fungsi ini berbentuk

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 9x + \frac{1}{8} \cos 27x + \frac{1}{16} \cos 81x$$

dan grafiknya diberikan pada Gambar 1.3. Pada gambar ini terlihat kejutan (impulse) terjadi hampir di semua titik. Semakin besar n maka pola kejutan ini semakin merata.

Ilustrasi grafis hanya merupakan alat bantu untuk mendeteksi kemulusan sebuah fungsi. Kurva mulus merupakan syarat perlu tapi bukan syarat cukup fungsi terdiferensial. Pada kasus khusus, ada fungsi yang kurvanya terlihat kasar tetapi ia terdiferensial seperti fungsi wavelet Daubechies (Hernadi, 2004). Berbeda dengan fungsi Weierstrass yang didefinisikan sebagai deret takhingga fungsi trigonometri, fungsi wavelet didefinisikan secara implisit dalam

Sejalan dengan itu, derivatif kiri fungsi f di c , dinyatakan $f'_-(c)$ adalah limit berikut

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \quad (1.1.4)$$

Jelaslah bahwa jika c titik interior maka $f'(c)$ ada jika hanya jika $f'_+(c) = f'_-(c)$. Berdasarkan penjelasan sebelumnya maka fungsi $f(x) := |x|$ mempunyai derivatif kiri dan derivatif kanan tetapi nilainya tidak sama.

1.2 Sifat Aljabar Derivatif

Teorema 1.2. Misalkan $I \subset \mathbb{R}$ suatu interval, dan $c \in I$. Bila fungsi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial di c maka

1. untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, fungsi (αf) terdiferensial di c dengan

$$(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c) \quad (1.2.1)$$

2. fungsi jumlahan $f + g$ terdiferensial di c dengan

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c) \quad (1.2.2)$$

3. fungsi perkalian fg terdiferensial di c dengan

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c) \quad (1.2.3)$$

4. fungsi hasil bagi f/g terdiferensial di c asalkan $g(c) \neq 0$ dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}. \quad (1.2.4)$$

BUKTI. Pada teorema diasumsikan bahwa $f'(c)$ dan $g'(c)$ ada. Untuk perkalian dibuktikan sebagai berikut. Misalkan $p := fg$, maka untuk $x \neq c$ kita dapat mendefinisikan bentuk

Dengan mengambil limit kedua ruas dan menerapkan sifat limit diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(c)-g(x)}{x-c} + \lim_{x \rightarrow c} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(c)-f(x)}{x-c}}{g(c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)} \\ &= \frac{f(c)(-g'(c)) + g(c)f'(c)}{g(c)g(c)} \\ &= \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}. \end{aligned}$$

Sedangkan penjumlahan dan perkalian skalar dapat dibuktikan sendiri oleh pembaca karena lebih mudah. \square

Pada teorema ini hanya dilibatkan dua fungsi f dan g . Sesungguhnya formula ini dapat dikembangkan untuk berhingga banyak fungsi f_1, f_2, \dots, f_n dengan menggunakan prinsip induksi matematika. Untuk sifat jumlahan diperoleh sifat berikut

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(c) = f_1'(c) + f_2'(c) + \dots + f_n'(c).$$

Untuk sifat perkalian berlaku sifat berikut

$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(c) = f_1'(c) f_2(c) \dots f_n(c) + f_1(c) f_2'(c) \dots f_n(c) + \dots + f_1(c) f_2(c) \dots f_n'(c).$$

Kejadian khusus pada sifat perkalian derivatif adalah bilamana $f_1 = f_2 = \dots = f_n := f$ maka berlaku

$$(f^n)'(c) = n(f(c))^{n-1} f'(c). \quad (1.2.5)$$

Lebih khusus lagi bila $f(x) = x$, maka $f^n(x) = x^n$. Tulis saja $g(x) := x^n$, maka diperoleh

$$g'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x) = nx^{n-1} \cdot 1 = nx^{n-1}. \quad (1.2.6)$$

Fakta ini sudah dikenal dengan baik pada kalkulus, yaitu bila $y = x^n$ maka $y' = nx^{n-1}$.

Berikutnya kita bahas metoda yang sangat sering digunakan dalam kalkulus diferensial, yaitu atauran rantai. Aturan ini digunakan untuk menentukan derivatif fungsi dalam bentuk komposisi.

sehingga dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow c} (G \circ f)(x) = g'(f(c))$. Menurut definisi fungsi G maka diperoleh

$$g(y) - g(d) = G(y)(y - d)$$

untuk setiap $y \in I$. Jadi, untuk $x \in J$ dan misalkan $y = f(x)$ maka berlaku

$$\begin{aligned} g \circ f(x) - g \circ f(c) &= g(f(x)) - g(f(c)) \\ &= g(y) - g(d) \\ &= G(y)(y - d) \\ &= G(f(x))(y - d) \\ &= G \circ f(x)(f(x) - f(c)). \end{aligned}$$

Untuk $x \neq c$, bagilah kedua ruas persamaan yang baru diperoleh dengan $x - c$, diperoleh

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(c)}{x - c} = G \circ f(x) \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Diambil limit mendekati c pada kedua ruas maka diperoleh,

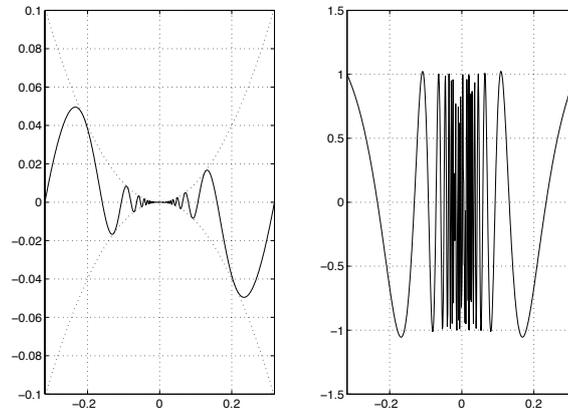
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} G \circ f(x) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ (g \circ f)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} G \circ f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= g'(f(c)) \cdot f'(c). \end{aligned}$$

□

Contoh 1.2. Fungsi $h(x) = \sin(\sqrt{1+x^2})$ dapat dipandang sebagai komposisi fungsi $h = g \circ f$ dimana $g(x) = \sin x$ dan $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Kemudian, fungsi $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ suatu komposisi fungsi $f = g_1 \circ f_1$ dimana $g_1(x) = \sqrt{x}$ dan $f_1(x) = 1+x^2$. Untuk fungsi komposisi yang terdiri dari tiga fungsi seperti ini, aturan rantai dapat diperumum sebagai

$$(g \circ g_1 \circ f_1)'(c) = g'(g_1 \circ f_1(c)) \cdot g_1'(f_1(c)) \cdot f_1'(c).$$

Contoh berikut adalah cara lain untuk membuktikan derivatif perpangkatan fungsi f^n yang didefinisikan sebagai $f^n(x) := \underbrace{f(x) \cdots f(x)}_{n \text{ faktor}}$.



Gambar 1.5: Fungsi kontinu (kiri) tetapi derivatifnya tidak kontinu (kanan)

di $x = 0$ karena limitnya tidak ada di $x = 0$. Fakta ini dapat dijelaskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin(1/x) - \cos(1/x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x) - \lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x) \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kriteria divergen pada pokok bahasan limit maka dapat ditunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ tidak ada. Akhirnya disimpulkan $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ tidak ada. Oleh karena itu f' tidak kontinu di 0. \square

Contoh ini merupakan kasus di mana fungsi f kontinu tetapi derivatifnya tidak kontinu. Grafik fungsi dan derivatifnya diberikan pada Gambar 1.5. Perhatikan suku x^2 pada $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ membuat fungsi ini terjepit dalam kerangkeng kurva $y = \pm x^2$ (panel kiri), sehingga dengan TKJ pada limit fungsi disimpulkan f konvergen di 0. Sedangkan suku $\cos(1/x)$ pada $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ membuat grafiknya berosilasi terus tetapi tidak konvergen (panel kanan).

1.4 Derivatif Fungsi Invers

Dingatkan kembali bahwa sebuah fungsi $f : I \rightarrow J$ dikatakan mempunyai invers jika terdapat fungsi $g : J \rightarrow I$ dengan sifat

$$f(a) = b \leftrightarrow g(b) = a$$

untuk semua $x \in I$. Jadi berdasarkan hal ini, jika $y > 0$ maka $g'(y)$ ada, yaitu

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(g(y))^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{ny^{(n-1)/n}}.$$

Akhirnya disimpulkan $g'(y) = \frac{1}{n}y^{(1/n)-1}$, $y > 0$. ■

Contoh ini mengatakan bahwa jika $g(x) := x^{1/n}$, $x \geq 0$ maka derivatifnya adalah $g'(x) = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$.

Contoh 1.6. Gunakan formula derivatif invers fungsi untuk menunjukkan bahwa jika $g(x) := e^x$ maka $g'(x) = e^x$.

PENYELESAIAN. Pada kalkulus, logaritma natural $\ln x$ didefinisikan sebagai integral tertentu

$$f(x) := \ln x := \int_1^x \frac{1}{x} dx, \quad x > 0.$$

Dengan teorema fundamental kalkulus (TFK) yang akan dipelajari pada bab berikutnya diperoleh $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Juga, telah diketahui dari kalkulus bahwa invers dari $f(x) = \ln x$ adalah $f^{-1}(x) = e^x$, $x \in (-\infty, \infty)$. Dengan menggunakan formula derivatif invers di atas diperoleh

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{1/e^x} = e^x.$$

Karena $g(x) = e^x = f^{-1}(x)$ maka $g'(x) = (f^{-1})'(x) = e^x$. □

Contoh 1.7. Misalkan kita mempunyai $f(x) = e^x$ dan telah diketahui bahwa $f'(x) = e^x$. Sekarang misalkan $L(x)$ adalah invers dari $f(x) = e^x$. Maka berdasarkan hasil sebelumnya diperoleh

$$L'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{f(x)}.$$

Dengan mengambil $z := f(x)$ maka hasil ini dapat ditulis sebagai $L'(z) = \frac{1}{z}$ untuk setiap z dalam domain L atau range f . Hasil ini dapat dikonfirmasi dengan mengingat bahwa invers dari $f(x) = e^x$ adalah $L(x) = \ln(x)$ dan $L'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$. ■

BUKTI. Hanya dibuktikan kasus f mempunyai minimum relatif di c . Untuk maksimum relatif dapat dibuktikan sendiri. Dibuktikan dengan kontradiksi, yaitu diandaikan $f'(c) > 0$ dan $f'(c) < 0$, kemudian ditunjukkan kontradiksi sehingga disimpulkan $f'(c) = 0$. Karena diketahui f mempunyai minimum relatif di c maka terdapat V_1 persekitaran c sehingga berlaku

$$f(c) \leq f(x), \text{ untuk setiap } x \in V_1.$$

Pengandaian $f'(c) > 0$ mengakibatkan terdapat persekitaran V_2 dari c sehingga

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \text{ untuk setiap } x \in V_2.$$

Dengan mengambil $V := V_1 \cap V_2$ maka kedua ketidaksamaan ini berlaku untuk setiap $x \in V$. Ambil $x \in V$ dan $x < c$ maka berlaku $x - c < 0$. Di lain pihak diperoleh

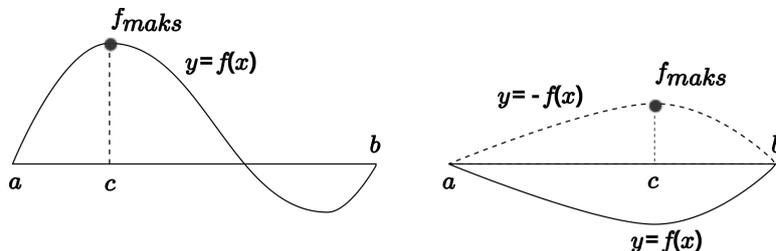
$$f(x) - f(c) = \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{>0} \underbrace{(x - c)}_{<0} < 0 \rightarrow f(x) < f(c),$$

kontradiksi dengan $f(c) \leq f(x)$. □

Dua masalah kritis:

1. Fungsi $f(x) := x^3$ mempunyai sifat $f'(0) = 0$ tetapi $x = 0$ bukan titik ekstrim. Ini berarti $f'(0) = 0$ bukan syarat cukup agar c menjadi titik ekstrim. Ilustrasinya lihat pada Gambar 1.6 (kiri). Terkait dengan masalah kritis ini, kebiasaan mengambil derivatif pertama kemudian diambil harga nolnya bukanlah cara yang sempurna dalam menentukan nilai ekstrim baik minimum maupun maksimum. Ada tahapan lagi untuk memastikan bahwa nilai nol turunan pertama merupakan ekstrim, yaitu menggunakan uji derivatif pertama yang akan dibahas berikutnya.
2. Fungsi $f(x) := |x|$ jelas mempunyai minimum relatif di $x = 0$, tetapi $f'(0)$ tidak ada. Ini menunjukkan bahwa adanya $f'(c)$ pada TEI sangat penting. Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar 1.6 (kanan).

Teorema 1.5. (TEOREMA ROLLE) *Bila fungsi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada interval $I := [a, b]$, terdiferensial pada interval (a, b) dan $f(a) = f(b) = 0$ maka ada $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = 0$.*

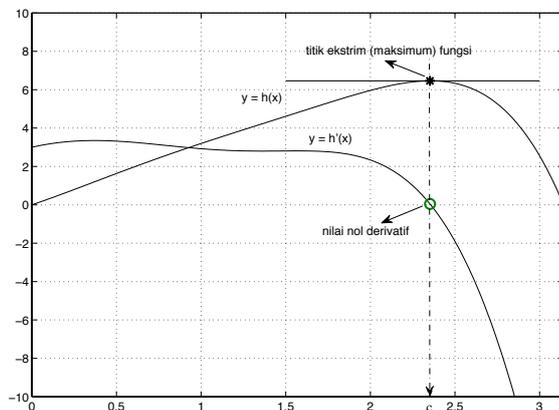


Gambar 1.8: Kemungkinan fungsi f tidak identik dengan nol

Contoh 1.8. Misalkan $h(x) := e^x \sin x + \sin 2x$ didefinisikan pada $[0, \pi]$ maka dapat diperiksa bahwa fungsi ini kontinu dan terdiferensial pada $[0, \pi]$. Juga, $h(0) = 0$ dan $h(\pi) = e^\pi \sin(\pi) + \sin 2\pi = 0$. Jadi hipotesis teorema Rolle dipenuhi oleh h pada $[0, \pi]$. Jadi terdapat $c \in (0, \pi)$ sehingga $h'(c) = 0$. Tegasnya, dikarena $h'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + 2 \cos 2x$ maka dipastikan persamaan taklinear

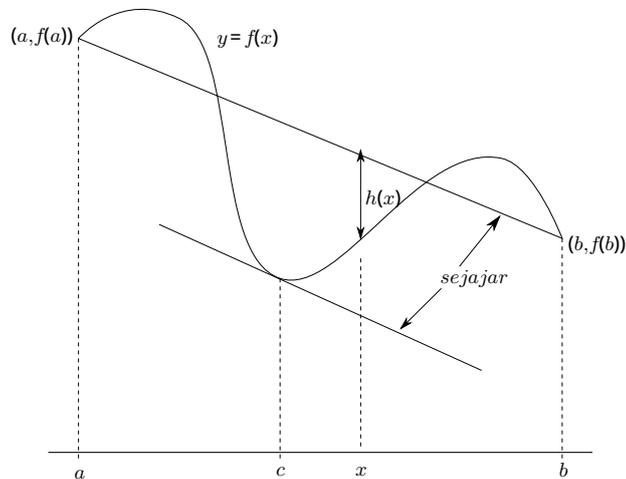
$$e^x(\sin x + \cos x) + 2 \cos 2x = 0$$

terjamin mempunyai akar di dalam $[0, \pi]$. Ada dua cara mengilustrasikan keadaan ini secara grafis. Dari sudut pandang fungsi asalnya, titik c yang dimaksud adalah titik di mana fungsi h mencapai ektrim. Dari sudut pandang derivatif, titik c yang dimaksud adalah titik di mana grafik $yy := h'(x)$ memotong sumbu X . Ilustrasi ini diberikan pada Gambar 1.9. ■



Gambar 1.9: Ilustrasi teorema Rolle fungsi $h(x) := e^x \sin x + \sin 2x$

Eksistensi c pada teorema Rolle tidak harus tunggal. Artinya ada kemungkinan terdapat lebih dari satu c yang bersifat $f'(c) = 0$.



Gambar 1.11: Ilustrasi dan interpretasi TNR

BUKTI. Didefinisikan fungsi $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Selanjutnya ditunjukkan h memenuhi syarat pada Teorema Rolle:

- h kontinu pada $[a, b]$ karena ia tersusun atas fungsi-fungsi kontinu pada $[a, b]$,
- Dengan argumen yang mirip, kita simpulkan h fungsi terdiferensial pada (a, b) ,
- $h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$ dan $h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$.

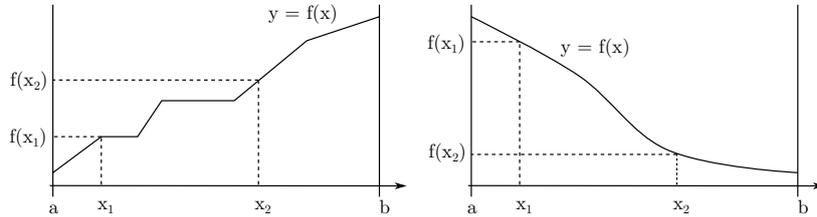
Berdasarkan Teorema Rolle, terdapatlah $c \in (a, b)$ sehingga $h'(c) = 0$. Derivatif $h'(x)$ diperoleh sebagai berikut

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

sehingga diperoleh

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

□



Gambar 1.12: Fungsi naik tidak tegas (kiri) dan turun tegas (kanan)

Pada Gambar 1.12 (panel kiri) mengilustrasikan fungsi naik tetapi tidak tegas karena ada beberapa bagian nilai fungsi yang sama. Sedangkan panel kanan menunjukkan fungsi turun tegas. Istilah tidak turun (*nondecreasing*) sering juga digunakan untuk fungsi naik, sedangkan istilah tidak naik (*nonincreasing*) untuk fungsi turun.

Teorema 1.9. Misalkan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial pada interval I . Maka

1. f naik pada I bila hanya bila $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.
2. f turun pada I bila hanya bila $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.

BUKTI. Kita akan buktikan bagian 1, sedangkan bagian 2 dapat dibuktikan sejalan.

(\rightarrow) Diketahui f terdiferensial dan naik pada I . Untuk $x \neq c$, kita bentuk suku:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Untuk $x > c$ diperoleh $x - c > 0$ dan $f(x) \geq f(c)$ atau $f(x) - f(c) \geq 0$. Oleh karena itu berlaku $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. Sedangkan untuk $x < c$ diperoleh $x - c < 0$ dan $f(x) \leq f(c)$ atau $f(x) - f(c) \leq 0$. Oleh karena itu berlaku $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. Menurut teorema pada limit fungsi diperoleh

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

(\leftarrow) Diketahui $f'(x) \geq 0$. Misalkan $x_1, x_2 \in I$ sebarang dengan $x_1 < x_2$. Perhatikan bahwa TNR dapat diterapkan pada interval $[x_1, x_2]$, yaitu terdapat $c \in (x_1, x_2)$ sehingga

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0,$$

yaitu $f(x_2) \geq f(x_1)$. Karena x_1, x_2 dipilih sebarang maka disimpulkan f naik pada I . \square

pada $[x, c]$. Terdapatlah $c_x \in (x, c)$ sehingga $f(c) - f(x) = f'(c_x)(c - x) \geq 0$ sebab $f'(c_x) \geq 0$. Jadi $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (c - \delta, c)$. Dengan argumen yang sama, untuk $x \in (c, c + \delta)$, terapkan TNR pada $[c, x]$, yaitu ada $c_x \in (c, x)$ sehingga $f(x) - f(c) = f'(c_x)(x - c) \leq 0$. Jadi $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (c, c + \delta)$. Dari kedua hasil ini disimpulkan $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (c - \delta, c + \delta)$, yaitu f mencapai maksimum relatif di c . \square

1.6.4 Pembuktian bentuk-bentuk ketidaksamaan

Banyak bentuk ketidaksamaan terutama bentuk yang cukup rumit tidak dapat dibuktikan dengan cara aljabar biasa. Teorema nilai rerata (TNR) adalah salah satu teori yang dalam banyak kasus dapat digunakan untuk membuktikan kebenaran sebuah ketidaksamaan. Berikut diberikan beberapa contoh penggunaan TNR untuk membuktikan kebenaran ketidaksamaan.

Contoh 1.10. Buktikan bahwa $e^x \geq 1 + x$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Jelas tidak ada cara aljabar yang dapat membuktikan ketidaksamaan ini. Ilustrasi grafik penyelesaian pertidaksamaan ini adalah semua x di mana grafik fungsi $f(x) = e^x$ berada di atas atau sejajar dengan grafik $g(x) = 1 + x$, seperti terlihat pada Gambar 1.14 (kiri).

BUKTI. Ambil $f(x) := e^x$. Mudah diperiksa fungsi ini memenuhi hipotesis pada TNR. Diperoleh $f'(x) = e^x$. Kita pecah menjadi 3 kasus berikut:

- Untuk $x = 0$ maka kedua ruas bernilai sama yaitu 1, sehingga berlaku “=”.
- Untuk $x > 0$ kita mempunyai $f'(x) = e^x > 1$. Ingat $e \approx 2.7182$ dipangkatkan bilangan positif. Terapkan TNR pada $[0, x]$, yaitu terdapat $c_x \in (0, x)$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f'(c_x)(x - 0) \\ e^x - e^0 &= e^{c_x}x \\ e^x - 1 &= e^{c_x}x > 1 \cdot x = x \\ e^x &> 1 + x. \end{aligned}$$

Pada penjabaran ini kita telah menggunakan fakta bahwa $f'(c_x) = e^{c_x} > 1$.

- Untuk $x < 0$, misalkan $y = -x > 0$ kita mempunyai $f'(x) = e^x = \frac{1}{e^y} < 1$. Ingat 1 dibagi oleh bilangan yang lebih dari 1. Selanjutnya diterapkan TNR pada $[x, 0]$, yaitu

- Untuk $x > 0$ terapkan TNR pada interval $[0, x]$ diperoleh adanya c dengan $0 < c < x$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f'(c)(x - 0) \\ (1 + x)^\alpha - 1 &= \alpha(1 + c)(x) \\ &> \alpha x \text{ sebab } (1 + c) > 1. \end{aligned}$$

Jadi disimpulkan $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$ untuk $x > 0$.

- Untuk $-1 < x < 0$ terapkan TNR pada interval $[x, 0]$, yaitu ada $c \in (x, 0)$ (ingat di sini c negatif) sehingga

$$\begin{aligned} f(0) - f(x) &= f'(c)(0 - x) \\ 1 - (1 + x)^\alpha &= \alpha(1 + c)^{\alpha-1}(-x). \\ &\leq -\alpha x \text{ sebab } 0 < (1 + c)^{\alpha-1} < 1. \end{aligned}$$

Jadi disimpulkan $1 + \alpha x \leq (1 + x)^\alpha$ untuk $-1 < x < 0$.

Berdasarkan pembahasan kasus demi kasus ini maka disimpulkan bahwa $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ untuk setiap $x > -1$.

□

Contoh 1.12. Buktikan $-x \leq \sin x \leq x$, $x \geq 0$.

BUKTI. Secara grafis, ketidaksamaan ini mengatakan bahwa grafik fungsi $y = \sin x$ terkurung di antara grafik fungsi $y = -x$ dan $y = x$. Ilustrasinya diberikan pada Gambar 1.14 (kanan). Ambil $f(x) := \sin x$. Mudah ditunjukkan bahwa fungsi ini memenuhi hipotesis TNR pada interval $[0, x]$. Jadi terdapat $c \in (0, x)$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f'(c)(x - 0) \\ \sin x - \sin 0 &= \cos c \cdot x \\ \sin x &= x \cos c. \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa selalu berlaku $-1 \leq \cos c \leq 1$. Karena $x \geq 0$ maka diperoleh $-x \leq x \cos c \leq x$. Karena $x \cos c = \sin x$ maka disimpulkan $-x \leq \sin x \leq x$ untuk setiap $x \geq 0$. □

Contoh 1.13. Misalkan $f(x) := \alpha x$ dan $g(x) := x$. Dalam kasus ini untuk $c = 0$, muncul bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Tetapi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha.$$

Dalam kasus ini bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ memberikan hasil bilangan real. Selanjutnya jika $f(x) := x^2$ dan $g(x) := x$ untuk $c = 0$ juga muncul bentuk tak tentu. Faktanya kita peroleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \infty.$$

Dalam kasus ini bentuk tak tentu tidak menghasilkan limit bilangan real atau limitnya tidak ada. ■

Bentuk tak tentu lainnya diberikan sebagai berikut :

$$\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0, \infty - \infty.$$

1.7.1 Aturan L'Hospital bentuk $\frac{0}{0}$

Sebelum perumusan teorema, kita perhatikan penjabaran berikut di mana diasumsikan $f(c) = g(c) = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}.$$

Dengan mengambil limit pada kedua ruas maka diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (1.7.1)$$

asalkan semua syarat yang dibutuhkan untuk melakukan operasi hitung ini dipenuhi. Persyaratan tersebut diformalkan dalam teorema berikut.

Teorema 1.12. Misalkan $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan $c \in (a, b)$, $f(c) = g(c) = 0$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $a < x < b$. Bila f dan g terdiferensial di c dan $g'(c) \neq 0$ maka

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

BUKTI. Cukup dijustifikasi perhitungan pada persamaan (1.7.1) di atas. □

Maka dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa h memenuhi hipotesis pada teorema Rolle. Jadi terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $h'(c) = 0$. Karena

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) - f'(x)$$

maka diperoleh

$$h'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) - f'(c).$$

Karena $h'(c) = 0$ maka kesimpulan pada teorema terbukti hanya dengan manipulasi ringan bentuk terakhir ini. \square

Teorema 1.14. (ATURAN L'HOSPITAL BENTUK $\frac{0}{0}$) *Andaikan fungsi f dan g terdiferensial pada persekitaran $V(c) \setminus \{c\}$. Jika*

1. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$, dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$,
2. $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in V(c) \setminus \{c\}$,
3. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada,

maka berlaku

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BUKTI. Walaupun teorema ini tidak menuntut adanya nilai $f(c)$ maupun $g(c)$, namun kita dapat mendefinisikan ulang sehingga $f(c) = g(c) = 0$, yakni menggunakan metoda perluasan menjadi fungsi kontinu. Karena hipotesis 1 maka fungsi f dan g hasil perluasan ini kontinu di c . Sebagai ilustrasi $f(x) := x \sin \frac{1}{x}$ tidak terdefinisi di 0, tetapi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Bila kita definisikan cabang khusus $f(0) = 0$ maka fungsi f hasil perluasan ini menjadi kontinu di 0. Untuk $x > c$, terapkan TNR-C pada interval $[c, x]$, terdapat $c_x \in (c, x)$ sehingga

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Karena dengan rancangan $f(c) = g(c) = 0$ maka diperoleh

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad (*)$$

taktentu. Untuk kasus ini, aturan L'Hospital dapat dilanjutkan dengan memandang bentuk terkahir sebagai bentuk awal.

Contoh 1.17. Kita akan menghitung limit berikut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right).$$

Jelas ini adalah bentuk $\frac{0}{0}$. Kita terapkan aturan L'Hospital diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2x} \right).$$

Ternyata masih bentuk $\frac{0}{0}$. Karena itu aturan L'Hospital diterapkan lagi sebagai berikut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{2} \right) = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Dalam beberapa kasus bentuk taktentu lain dapat dibawa ke bentuk $\frac{0}{0}$.

Contoh 1.18. Kita akan menghitung limit berikut

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Ini adalah bentuk 1^∞ . Misalkan $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ maka dengan mengambil logaritma natural diperoleh

$$\ln y = \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ merupakan bentuk $\frac{0}{0}$. Dengan aturan L'Hospital diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Karena $1 = \lim \ln y = \ln \lim y$ maka diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \blacksquare$$

Untuk $x \rightarrow 0^+$ maka $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ dan $\frac{1}{\sin x} \rightarrow \infty$. Jadi limit ini adalah bentuk $\infty - \infty$. Disederhanakan terlebih dahulu sebagai berikut

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x},$$

sehingga diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$. Silakan dicek. Selanjutnya dengan aturan L'Hospital diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= \frac{0}{2} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.8 Teorema Taylor dan Aproksimasi Fungsi

Fungsi f biasanya tersaji dalam bentuk rumit sehingga sulit untuk dikerjakan, misalnya dihitung integralnya. Fungsi konstan $g(x) := f(c)$ merupakan aproksimasi yang bagus untuk f hanya jika x sangat dekat dengan c , tetapi biasanya menjadi jelek jika c cukup jauh terhadap x . Bila f terdiferensial pada $[x, c]$ maka dengan TNR terdapat $z \in (x, c)$ sehingga

$$f(x) - f(c) = f'(z)(x - c).$$

Suku $R_0(x) := f'(z)(x - c) = f(x) - f(c)$ memberikan ukuran kesalahan aproksimasi fungsi f dengan fungsi konstan $P_0(x)$. Fungsi konstan dipandang sebagai polinomial derajat nol. Tentunya polinomial derajat nol ini tidak dapat diharapkan menjadi aproksimasi yang baik. Oleh karena itu diperlukan polinomial berderajat lebih tinggi untuk aproksimasi yang lebih baik. Dipilihnya polinomial untuk aproksimasi dikarenakan polinomial merupakan bentuk fungsi yang paling 'mudah diurus', antara lain mudah diintegalkan dan didiferensialkan, lebih mudah ditentukan akar-akarnya atau dicari ekstrimnya.

Salah satu metoda aproksimasi fungsi dengan polinomial adalah dengan menggunakan deret Taylor yang telah ditemukan oleh Brook Taylor (1685-1731). Namun, bentuk sisa aproksimasi dengan deret ini baru ditemukan pada generasi berikutnya yaitu oleh Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Teorema nilai rerata (TNR) memberikan relasi antara nilai fungsi dan derivatif

Perhatikan F fungsi yang mempunyai variabel t . Dengan pendefinisian ini kita memperoleh $F(x_0) = f(x) - P_n(x) =: R_n(x)$ dan $F(x) = f(x) - f(x) - 0 - \dots - 0 = 0$. Jadi akan ditunjukkan $F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$. Untuk itu kita definisikan fungsi $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$G(t) := F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0} \right)^{n+1} F(x_0).$$

Maka diperoleh $G(x_0) = F(x_0) - \left(\frac{x-x_0}{x-x_0} \right)^{n+1} F(x_0) = 0$ dan $G(x) = F(x) - \left(\frac{x-x}{x-x_0} \right)^{n+1} F(x_0) = F(x) = 0$. Dengan demikian hipotesis teorema Rolle dipenuhi oleh G pada interval J . Jadi terdapat c di antara x dan x_0 sehingga $G'(c) = 0$. Selanjutnya derivatif $G'(t)$ ditentukan sebagai berikut

$$G'(t) = F'(t) + (n+1) \frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0). \quad (*)$$

Dengan menggunakan formula derivatif hasil kali dan aturan rantai diperoleh derivatif $\frac{dF}{dt} := F'(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - (-f'(t) + (x-t)f''(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right) \\ &= -(x-t)f''(t) - \left(-(x-t)f''(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) \right) + \frac{d}{dt} (\text{suku selanjutnya}) \\ &= -(x-t)f''(t) + (x-t)f''(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \frac{d}{dt} (\text{suku selanjutnya}) \\ &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t). \end{aligned}$$

Diperhatikan derivatif suku demi suku menghasilkan suku yang saling menghabiskan, kecuali derivatif suku terakhir. Diperhatikan kembali (*), diperoleh

$$F'(c) + (n+1) \frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0) = G'(c) = 0.$$

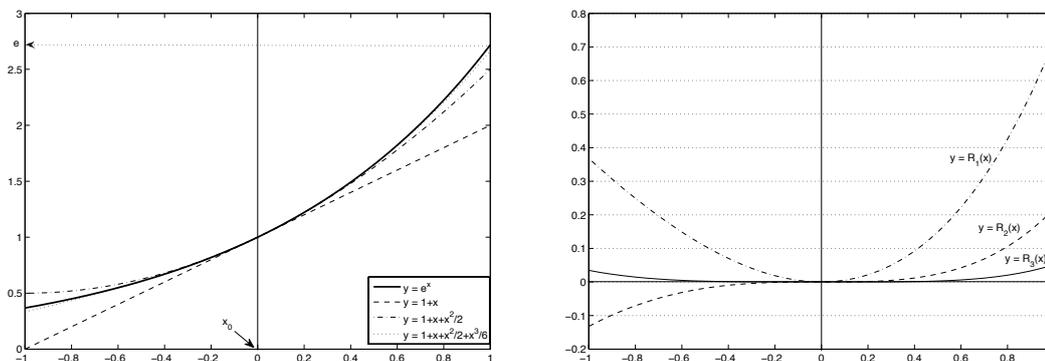
Substitusi nilai $F'(c)$ diperoleh

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0) &= \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) \\ F(x_0) &= \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Terbukti $R_n(x) = F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$. □

TABEL 1.1: Aproksimasi e dengan deret Taylor

n	P_n	Kesalahan mutlak
1	2.000000000000000	0.71828182845905
2	2.500000000000000	0.21828182845905
3	2.666666666666667	0.05161516179238
4	2.708333333333333	0.00994849512571
5	2.716666666666667	0.00161516179238
6	2.718055555555556	0.00022627290349
7	2.71825396825397	0.00002786020508
8	2.71827876984127	0.00000305861778
9	2.71828152557319	0.00000030288585

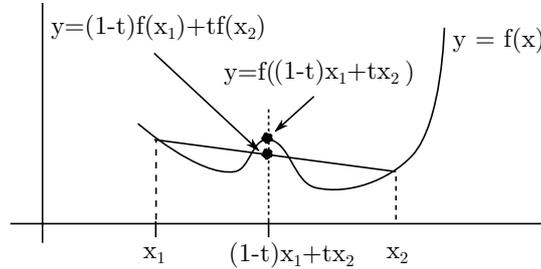


Gambar 1.15: Aproksimasi fungsi $f(x) = e^x$ dengan polinomial Taylor

Ilustrasi grafis aproksimasi fungsi $f(x) = e^x$ diberikan pada Gambar 1.15. Pada panel kiri disajikan grafik fungsi $y = e^x$ dan beberapa polinomial Taylornya, sedangkan fungsi kesalahan atau suku sisa diberikan pada panel kanan. Jelas bahwa semakin tinggi derajat polinomial semakin bagus aproksimasi fungsinya. Juga, aproksimasi lebih baik untuk x yang lebih dekat dengan $x_0 = 0$.

1.9 Fungsi Konveks

Istilah konkaf merujuk pada bentuk mebukanya grafik fungsi. Dalam kalkulus elementer ketika mempelajari metoda menggambar grafik fungsi kita membutuhkan informasi di mana



Gambar 1.17: Ilustrasi fungsi tidak konveks

berikut

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

Untuk sebarang $t \in [0, 1]$ maka kita mempunyai $(1 - t)x_1 + tx_2 \in [x_1, x_2]$. Bila titik ini disubstitusi pada persamaan garis di atas maka diperoleh

$$\begin{aligned} y &= f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_1 - tx_1 + tx_2 - x_2) \\ &= f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}((x_1 - x_2) + t(x_2 - x_2)) \\ &= f(x_2) + (f(x_2) - f(x_1))(-1 + t) \\ &= f(x_2) - f(x_2) + f(x_1) + tf(x_2) - tf(x_1) \\ &= (1 - t)f(x_1) + tf(x_2). \end{aligned}$$

Definisi konveks (1.9.1) mengharuskan nilai y di titik ini lebih dari atau sama dengan nilai fungsi f di titik yang sama, yaitu $y_\ell := (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1 - t)x_1 + tx_2) =: y_k$ sebagaimana diilustrasikan secara grafis pada Gambar 1.16 (kanan). Bila ditemukan garis secant di mana ada bagian garisnya yang berada di luar kurva maka fungsi tersebut tidak konveks. Ilustrasi grafis fungsi tidak konveks diberikan pada Gambar 1.17. Syarat cukup dan perlu fungsi konveks adalah derivatif keduanya $f''(x) \geq 0$ pada I (Bartle dan Sherbet, 2000), asalkan fungsi tersebut terdiferensial sampai tingkat kedua. Tetapi fungsi yang tidak terdiferensial pun dapat saja konveks seperti fungsi $f(x) := |x|$ konveks tetapi ia tidak terdiferensial.

BAB 2

KOMPUTASI NUMERIK DERIVATIF

Mathematics is music for the mind; music is mathematics for the soul.

–ANONYMOUS

Penting untuk diketahui bahwa komputasi numerik dalam diferensial merupakan masalah yang sangat sensitif dalam arti gangguan atau perturbasi kecil pada data dapat menyebabkan perubahan besar pada hasilnya. Hal ini tentunya sangat tidak diharapkan pada bidang terapan. Oleh karena itu penggunaan formula untuk aproksimasi derivatif fungsi sebaiknya lebih berhati-hati.

Berdasarkan tampilannya, fungsi dapat dikelompokkan menjadi dua macam yaitu fungsi dengan formula eksplisit, seperti $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 2x + 4$, $h(x) = x \ln x + e^x$ dan lain sebagainya, dan fungsi tabular. Fungsi tabular hanya berupa pasangan data diskrit dalam bentuk tabel. Biasanya diperoleh dari hasil pengukuran. Fungsi jarak $s(t)$ terhadap variabel waktu t berikut tidak menampilkan formula eksplisit, namun hanya berupa tabel hasil pengukuran untuk beberapa nilai t tertentu.

TABEL 2.1: Jarak tempuh yang diukur pada saat-saat tertentu

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(t)$	30	40	65	75	100	120	155	180	200	215

terpolasi dan sebagian lainnya menggunakan ekspansi Taylor. Pada buku ini akan digunakan pendekatan kedua, yaitu menggunakan ekspansi Taylor.

2.1 Aproksimasi Derivatif Pertama

Pada Bab sebelumnya telah dibahas teorema Taylor (1.16) yang memberikan estimasi kesalahan aproksimasi fungsi dengan polinomial Taylor. Dengan asumsi f terdiferensial pada semua tingkat maka kita dapat menyajikan fungsi f dalam bentuk deret Taylor yaitu membolehkan $n \rightarrow \infty$ pada relasi (1.8.1):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

2.1.1 Formula selisih maju, selisih mundur dan selisih terpusat

Dengan mengambil $x - x_0 := h$ pada relasi di atas diperoleh

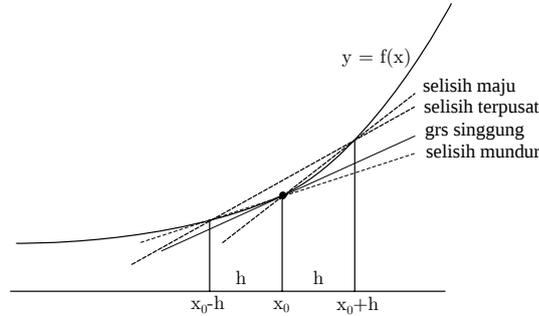
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini untuk $f'(x_0)$ diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}h - \frac{f'''(x_0)}{6}h^2 + \dots}_{o(h)} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - o(h) \end{aligned}$$

di mana “little-O” $o(h)$ menyatakan kuantitas menuju nol bilamana h menuju nol. Di lain pihak jika diambil $h := x_0 - x$ maka diperoleh ekspansi

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots$$



Gambar 2.1: Aproksimasi slope oleh ketiga formula

Secara grafis, aproksimasi ketiga formula ini diberikan pada Gambar 2.1. Pada Gambar ini, $f'(x_0)$ diinterpretasikan sebagai slope garis singgung di x_0 . Ketiga formula aproksimasi memberikan aproksimasi untuk slope ini. Terlihat jelas bagaimana garis-garis yang dihasilkan dalam kaitannya dengan garis singgung.

2.1.2 Estimasi error aproksimasi derivatif

Kesalahan aproksimasi yang diberikan oleh formula aproksimasi tersebut baru diketahui sebagai $o(h)$ atau $o(h^2)$ tetapi belum dapat diestimasi bagaimana pola penurunannya (*decay*) seiring penurunan nilai h . Derivasi formula kesalahan aproksimasi derivatif ini cukup sulit. Dua cara yang diperkenalkan di sini adalah dengan polinomial interpolasi dan dengan teorema Taylor.

2.1.2.1 Menggunakan polinomial interpolasi

Salah satu caranya adalah menggunakan formula kesalahan aproksimasi dengan polinomial interpolasi. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial sampai dengan tingkat $n+1$ dan $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Bila $P_n(x)$ polinomial interpolasi derajat n dengan node x_0, x_1, \dots, x_n maka untuk setiap $x \in [a, b]$ terdapat $\xi \in (a, b)$ sehingga

$$(R_n f)(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad (2.1.4)$$

di mana keberadaan ξ bergantung pada x (Kress, 1998). Lebih jelas ditulis $\xi = \xi(x)$. Untuk $n = 1$, polinomial interpolasi $P_1(x)$ dengan nodes x_0 dan $x_1 := x_0 + h$ atau $h = x_1 - x_0$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2 \quad (2.1.7)$$

di mana $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Dengan demikian selisih terpusat memberikan order konvergensi kedua $\mathcal{O}(h^2)$ (*second order*). Berdasarkan order konvergensi maka dapat disimpulkan formula selisih terpusat lebih cepat konvergen daripada formula dua titik (selisih maju dan mundur).

2.1.2.2 Menggunakan Teorema Taylor

Dengan menetapkan $n = 1$ pada Teorema Taylor (Teorema 1.16) maka diperoleh

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

untuk suatu $\xi \in (x_0, x_0 + h)$. Setelah $f'(x_0)$ disajikan secara eksplisit diperoleh

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Ini menunjukkan error formula selisih maju adalah $E_F = -\frac{f''(\xi)}{2}h$. Dengan argumen yang sama, Teorema Taylor diterapkan pada interval $[x_0 - h, x_0]$ maka diperoleh

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

untuk suatu $\xi \in (x_0 - h, x_0)$. Setelah $f'(x_0)$ disajikan secara eksplisit diperoleh

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Ini menunjukkan error formula selisih mundur adalah $E_B = \frac{f''(\xi)}{2}h$.

Untuk mendapatkan bentuk error aproksimasi dengan formula selisih terpusat kita menggunakan Teorema 1.16 dengan $n = 2$ sebanyak dua kali, yaitu

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3 \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3, \end{aligned}$$

di mana $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$ dan $\xi_2 \in (x_0 - h, x_0)$. Kedua persamaan ini dikurangkan untuk

terpusat dan tepi. Untuk formula lima titik terpusat diberikan dalam sebagai berikut.

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} (f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) \quad (2.1.11)$$

dengan kesalahan $E = \frac{h^4}{30} f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in (x_0 - 2h, x_0 + 2h)$. Sedangkan formula lima titik tepi diberikan sebagai

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} (-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)) \quad (2.1.12)$$

dengan kesalahan $E = \frac{h^4}{5} f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in (x_0, x_0 + 4h)$.

Berdasarkan uraian di atas, formula lima titik memberikan kecepatan konvergensi paling tinggi. Tetapi order konvergensi ini terjamin dapat dicapai jika fungsi f terdiferensial sampai tingkat kelima. Formula tiga titik membutuhkan fungsi f terdiferensial sampai tingkat ketiga, sedangkan formula dua titik hanya dibutuhkan terdiferensial sampai tingkat kedua. Bila asumsi tingkat keterdiferensialan ini tidak dipenuhi maka order konvergensi yang dimaksud belum tentu tercapai.

Contoh 2.1. Tabel berikut memberikan nilai $f(x) = xe^x$ yang disampling untuk beberapa nilai x .

x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x)$	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.8550330

Hitunglah aproksimasi untuk $f'(2.0)$, selidiki estimasi kesalahannya dan bandingkan dengan kesalahan nyatanya.

PENYELESAIAN. Fungsi ini terdiferensial pada semua tingkat sehingga semua formula dapat digunakan asalkan diketahui nilai fungsi pada titik-titik *node* yang digunakan.

Formula dua titik: Dua kemungkinan ukuran langkah yang dapat digunakan adalah $h = 0.1$ dan $h = 0.2$.

Selisih maju untuk $h = 0.1$, titik yang digunakan adalah 2.0 dan 2.1 sehingga diperoleh

$$f'(2.0) \approx \frac{f(2.1) - f(2.0)}{0.1} = \frac{17.148957 - 14.778112}{0.1} = 23.708446.$$

Selisih maju untuk $h = 0.2$, titik yang digunakan adalah 2.0 dan 2.2 sehingga diperoleh

$$f'(2.0) \approx \frac{f(2.2) - f(2.0)}{0.2} = \frac{19.855039 - 14.778112}{0.2} = 25.384635.$$

selisih terpusat dengan $h = 0.1$. Estimasi kesalahannya adalah

$$|E| = \frac{f'''(\xi)}{6}h^2 = \frac{1}{6}(3 + \xi)e^\xi(0.1)^2 \leq \frac{1}{6}(3 + 2.1)e^{2.1}(0.1)^2 = 0.069412.$$

Faktanya, kesalahan nyatanya adalah

$$E_{\text{nyata}} = 22.228790 - 22.167168 = 0.059622.$$

Sempurna, kesalahan nyata kurang dari kesalahan teoretis. \square

Contoh 2.2. Untuk melihat formula error di atas benar-benar memberikan estimasi yang baik, kita ambil $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, yakni sebuah polinomial derajat tiga. Aproksimasilah $f'(1)$ dengan mengambil $h = 0.1$ untuk masing-masing formula berikut.

1. formula selisih maju
2. formula selisih terpusat
3. formula lima titik terpusat.

Hitunglah kesalahan nyata aproksimasi dari masing-masing formula tersebut.

PENYELESAIAN. Karena $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ maka nilai eksak derivatif diperoleh $f'(1) = 10$. Diterapkan formula yang telah diberikan sebelumnya.

1. Selisih maju: $f'(1) = \frac{1}{0.1} (f(1.1) - f(1.0)) = 10.51$
2. Selisih terpusat: $f'(1) = \frac{1}{0.2} (f(1.1) - f(0.9)) = 10.01$
3. Selisih lima titik terpusat:

$$f'(1) = \frac{1}{12(0.1)} (f(0.8) - 8f(0.9) + 8f(1.1) - f(1.2)) = 10.$$

Ternyata formula lima titik memberikan hasil eksak. Hal ini dapat diverifikasi dengan formula error $E = \frac{h^4}{30}f^{(4)}(\xi) = 0$ untuk sebarang ξ dikarenakan $f^{(4)}(x) = 0$.

\square

$(4+x)e^x$. Maka ada $\xi \in (1.9, 2.2)$ sehingga

$$\begin{aligned} E &= \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \\ &= \frac{0.01}{12} (4+\xi)e^\xi \\ &\leq \frac{0.01}{12} (4+2.2)e^{2.2} \\ &= 0.0466. \end{aligned}$$

Error nyata diperoleh dengan membandingkan aproksimasinya dengan derivatif eksak $f''(2.0) = (2+2.0)e^{2.0} = 29.5560$ sehingga diperoleh

$$E^{\text{nyata}} = |29.5930 - 29.5560| = 0.0370.$$

Ternyata error nyata masih di bawah estimasi; sesuai dengan teori. \square

2.3 Metoda Ekstrapolasi Richardson

2.3.1 Step tunggal

Banyak masalah aproksimasi, misalnya aproksimasi integral dan diferensial, aproksimasi yang kita peroleh bergantung pada ukuran langkah (*step-size*) atau mesh. Sebagai contoh, aproksimasi derivatif pertama $f'(x_0)$ dengan formula selisih maju diberikan oleh

$$\phi(h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

sebuah fungsi bergantung ukuran langkah atau mesh h . Jika secara teoretis kita tahu kelakuan $\phi(h)$ untuk $h \rightarrow 0$, maka kita dapat melakukan ekstrapolasi melalui nilai yang diketahui untuk menentukan aproksimasi bagi $\phi(0)$. Ekstrapolasi adalah metoda untuk menentukan sebuah nilai yang didasarkan nilai yang diketahui. Berbeda dengan interpolasi yang menentukan nilai di antara nilai yang diketahui, nilai ekstrapolasi di luar rentang nilai yang diketahui. Nilai ekstrapolasi ini seharusnya mempunyai akurasi yang lebih tinggi daripada nilai yang dasarnya. Walaupun demikian, nilai hasil ekstrapolasi masih merupakan aproksimasi, bukan eksak.

Dengan menggunakan (2.3.2) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(0) &= a_0 \approx \phi(h) + \frac{\phi(h) - \phi(qh)}{q^p - 1} \\ &= 2F(h) - F(2h) \\ &= 2(0.430055) - 0.312048 \\ &= 0.548061.\end{aligned}$$

Sementara itu nilai eksak $f'(1) = \cos(1) = 0.540302$. Jadi, ekstrapolasi memberikan aproksimasi yang lebih akurat. ■

2.3.2 Multistep

Metoda ekstrapolasi Richardson sesungguhnya dapat diterapkan secara berjenjang untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat. Untuk itu kita berikan ilustrasi pada aproksimasi derivatif $f'(x_0)$ dengan formula selisih terpusat, yaitu

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \left(\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^2 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}h^4 + \frac{f^{(7)}(x_0)}{7!}h^6 + \dots \right).$$

Persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$L = \phi(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \dots \quad (2.3.3)$$

di mana $L := f'(x_0)$ dan $\phi(h)$ adalah formula selisih terpusat. Untuk tiap $h > 0$, error aproksimasi diberikan deret $a_2h^2 + a_4h^4 + \dots$. Asumsikan $a_2 \neq 0$, maka suku pertama a_2h^2 lebih besar dari suku-suku lainnya untuk h cukup kecil. Oleh karena itu kita perlu mencari cara untuk mengeliminasi suku ini. Caranya adalah dengan mengganti h menjadi $h/2$ pada persamaan (2.3.3), diperoleh

$$L = \phi\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h^2}{4}\right) + a_4\left(\frac{h^4}{16}\right) + a_6\left(\frac{h^6}{64}\right) + \dots \quad (2.3.4)$$

Kalikan persamaan (2.3.4) dengan 4, kemudian kurangkan dari persamaan (2.3.3) diperoleh

$$L = \frac{4}{3}\phi(h/2) - \frac{1}{3}\phi(h) - \frac{1}{4}a_4h^4 - \frac{5}{16}a_6h^6 - \dots$$

2.4 Komputasi dengan MATLAB

2.4.1 Rumus fungsi diketahui

1. Diketahui rumus fungsi $y = f(x)$. Diberikan x_0 dan ukuran langkah h sebagai variabel masukan. Variabel keluaran: aproksimasi $f'(x_0)$ dengan menggunakan tiga formula (selisih maju, mundur dan terpusat). Kode m-file MATLAB mengambil contoh $f(x) := e^{-x^2}$.

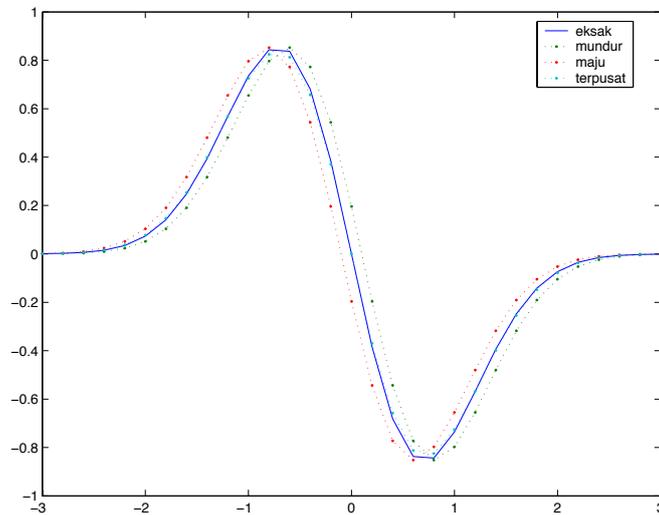
```
function [dyf,dyb,dyc] = derfun0(x0,h)
    dyf=(feval('fun',x0+h)-feval('fun',x0))/h;%maju
    dyb=(feval('fun',x0)-feval('fun',x0-h))/h;%mundur
    dyc=(feval('fun',x0+h)-feval('fun',x0-h))/(2*h);%terpusat
    %fungsi yang didiferensialkan
    function y = fun(x)
    y = exp(-x.^2);
```

Misalkan kita akan mengaproksimasi nilai $f'(-0.5)$ dengan ketiga metoda menggunakan $h = 0.1$ maka kita berikan perintah apda command window sebagai berikut.

```
>>[dyf,dyb,dyc] = derfun0(-0.5,0.1)
dyf =
    0.73343
dyb =
    0.81124
dyc =
    0.77234
```

2. Rumus fungsi $y = f(x)$ diketahui dan diasumsikan terdiferensial di setiap titik pada \mathbb{R} . Diberikan ukuran langkah h dan titik-titik grid $x = a, a + h, a + 2h, \dots, b$. Dihitung aproksimasi $f'(x)$ dengan menggunakan tiga formula (selisih maju, mundur dan terpusat). Variabel masukan: titik ujung interval a dan b , dan ukuran langkah h . Variabel keluaran: titik-titik grid x , aproksimasi selisih maju (dermaj), selisih mundur (dermun) dan selisih terpusat (derpus) pada titik-titik grid. Berikut kode m-file MATLAB yang bersesuaian.

```
function[x,dermun,dermaj,derpus]=derfun1(a,b,h)
```



Gambar 2.2: Grafik aproksimasi derivatif dan derivatif eksaknya

Untuk keperluan tersebut kita dapat memodifikasi m-file MATLAB di atas sebagai berikut.

```
function [x,der]=derfun2(datax)
x = datax;
n = length(x);
der = zeros(1,n);%array untuk derivatif
h1=x(2)-x(1);hn=x(n)-x(n-1);%mesh pertama dan terakhir
der(1) = (feval('fun',x(1)+h(1))-feval('fun',x(1)))/h1;%maju
der(n) = (feval('fun',x(n))-feval('fun',x(n)-hn))/hn;%mundur
for k = 2:n-1 %indeks titik interior
    h1 = x(k)-x(k-1);h2 = x(k+1)-x(k);
    der(k)=(feval('fun',x(k)+h2)-feval('fun',x(k)-h1))/((h1+h2));
end
%fungsi yang didiferensialkan
function y = fun(x)
y = exp(-x.^2);
```

Dilihat dari polanya, penulisan kode aproksimasi derivatif dapat menggunakan operasi array tanpa harus menggunakan kendali loop `for`. Penggunaan operasi array pada kode MATLAB lebih menguntungkan karena waktu eksekusinya jauh lebih cepat daripada jika menggunakan

```

x =
    0.00000    0.20000    0.40000    0.60000    0.80000    1.00000
>>x=0:0.22:1
x =
    0.00000    0.22000    0.44000    0.66000    0.88000

```

Jadi pada m-file `derfun11.m` ini sesungguhnya hanya dihitung aproksimasi derivatif fungsi pada titik-titik $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$. Untuk membuat kode yang pasti memuat b , kita dapat menggunakan n sebagai masukan kemudian mengambil h dengan $h = \frac{b-a}{n}$.

2.4.2 Derivatif data tabular

Formula eksplisit fungsi $y = f(x)$ tidak diketahui namun hanya diberikan pasangan data (x_i, y_i) di mana $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$. Untuk itu dibutuhkan *mesh* $h_i = x_i - x_{i-1}$, yaitu jarak antara dua *node* berdekatan. Untuk *mesh* seragam berlaku $h_i = h$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Untuk komputasi ini hanya dimunculkan satu macam aproksimasi derivatif, yaitu untuk titik ujung kiri $x_0 = a$ digunakan formula selisih maju, untuk titik ujung kanan $x_n = b$ digunakan formula selisih mundur, sedangkan untuk titik-titik interior digunakan selisih terpusat. Diperhatikan mesh tidak seragam sebagai berikut:

$$\underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n}_{h_1} \quad \underbrace{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n}_{h_{k-1}} \quad \underbrace{x_{n-1}, x_n}_{h_{n-1}}$$

Sengaja indeks titik *node* dibuat mulai dari 1 karena MATLAB tidak mengenal indeks 0, jadi harus dimulai dari 1. Diperoleh

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1}, \quad f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_{n-1}},$$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{h_{k-1} + h_k}, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Didasarkan pada pemikiran ini, maka kode berikut disusun.

```

function [x derf] = dertab(datax, datay)
x = datax; y=datay;
n = length(x);
h = x(2:end)-x(1:end-1);

```

Sedangkan kesalahan nyata bila diukur berdasarkan norma vektor kesalahan

$$e_{rr} := \sqrt{\sum_{k=1}^n |derf - dy|^2}$$

adalah

```
>> errnorm=norm(errpoint)
errnorm =
    0.1479
```

Akhirnya hasil keluaran MATLAB di atas dirangkum ke dalam tabel berikut.

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	1.109	1.195	1.303	1.431	1.581	1.753	1.946
y'	0.756	0.968	1.181	1.394	1.607	1.821	2.035
y' aprok	0.860	0.970	1.180	1.390	1.610	1.825	1.93
Error	0.104	0.002	0.001	0.004	0.003	0.004	0.152

Terlihat bahwa kesalahan nyata pada ujung kiri dan ujung kanan interval lebih tinggi dibandingkan kesalahan yang terjadi pada titik interior. Hal ini dikarenakan pada titik interior menggunakan formula tiga titik (selisih terpusat) dan di titik ujung digunakan formula dua titik (selisih maju dan selisih mundur). ■

2.4.3 Masalah *rounding error* pada aproksimasi derivatif

Pada awal Bab Teori Diferensial telah disampaikan bahwa pengambilan h yang terlalu kecil pada formula aproksimasi derivatif dapat berdampak buruk dikarenakan adanya *rounding error*, yakni kesalahan yang disebabkan oleh sistem representasi bilangan pada komputer. Untuk melihat fenomena ini kita ambil sebagai berikut sebagai testernya.

$$f(x) = \arctan(x), x_0 = \sqrt{2}.$$

Karena $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ maka nilai eksak derivatifnya adalah $f'(x_0) = \frac{1}{3}$. Kita mulai dari $h := 1$, kemudian kita perkecil h ini menjadi separuhnya, yaitu $h \rightarrow \frac{h}{2} \rightarrow \frac{h}{4} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{h}{2^M}$. Untuk melihat pola aproksimasi dan error yang dihasilkan setiap tahap, kita susun m-file MATLAB sebagai berikut.

26	0.000000029802322	0.333333328366280	0.000000004967054
27	0.000000014901161	0.333333328366280	0.000000004967054
28	0.000000007450581	0.333333328366280	0.000000004967054
29	0.000000003725290	0.333333343267441	0.000000009934107
30	0.000000001862645	0.333333313465118	0.000000019868215
35	0.000000000058208	0.333333969116211	0.000000635782878
45	0.000000000000057	0.333984375000000	0.000651041666667
51	0.000000000000001	0.375000000000000	0.041666666666667
52	0.000000000000000	0.250000000000000	0.083333333333333
53	0.000000000000000	0.500000000000000	0.166666666666667

Dari hasil ini terlihat bahwa mulai dari $k = 29$ dan seterusnya terjadi peningkatan error padahal secara teoretis seharusnya semakin lama semakin kecil. Hal ini disebabkan adanya rounding error dalam melakukan operasi aritmatika. Hasil ini menggunakan komputer dengan sistem 64-bit. Penyimpangan menjadi lebih cepat lagi jika menggunakan komputer dengan sistem 32-bit (Kincaid dan Cheney, 1991). Akurasi terbaik dicapai pada $k = 26$, yaitu teliti sampai 8 digit desimal. Bila digunakan formula selisih terpusat maka akurasi terbaik dicapai pada $k = 17$, yaitu teliti sampai dengan 10 digit desimal. Silakan pembaca mencobanya.

2.4.4 Implementasi numerik ekstrapolasi Richardson

Pada kesempatan ini kita akan mengimplementasikan metoda ekstrapolasi Richardson multistep pada MATLAB. Berdasarkan pembahasan pada subbagian 2.3.2 maka multistep ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

- Melalui $\phi_0(h)$ dan $\phi_0(h/2)$ diperoleh $\phi_1(h)$.
- Melalui $\phi_0(h/2^1)$ dan $\phi_0(h/2^2)$ diperoleh $\phi_1(h/2^1)$.
- Melalui $\phi_0(h/2^2)$ dan $\phi_0(h/2^3)$ diperoleh $\phi_1(h/2^2)$.
- Dan seterusnya
- Melalui $\phi_1(h)$ dan $\phi_1(h/2)$ diperoleh $\phi_2(h)$.
- Melalui $\phi_1(h/2^1)$ dan $\phi_1(h/2^2)$ diperoleh $\phi_2(h/2)$.
- Dan seterusnya.

```

    end
end
%formula selisih terpusat
function phi = center(x,h)
phi = (feval(@atan,x+h)-feval(@atan,x-h))/(2*h);

```

Dengan prosedur standar, setelah m-file ini disimpan dengan nama `richardson1.m` selanjutnya kita dapat eksekusi melalui command window.

```

>>format long
>> der = richardson1(sqrt(2),4)
der =
0.39269908169872 0 0 0 0
0.34877100358391 0.33412831087899 0 0 0
0.33719387921886 0.33333483776384 0.33328193955617 0 0
0.33429802969835 0.33333274652484 0.33333260710891 0.33333341135578 0
0.33357447226767 0.33333328645745 0.33333332245296 0.3333333380762 0.3333333350351

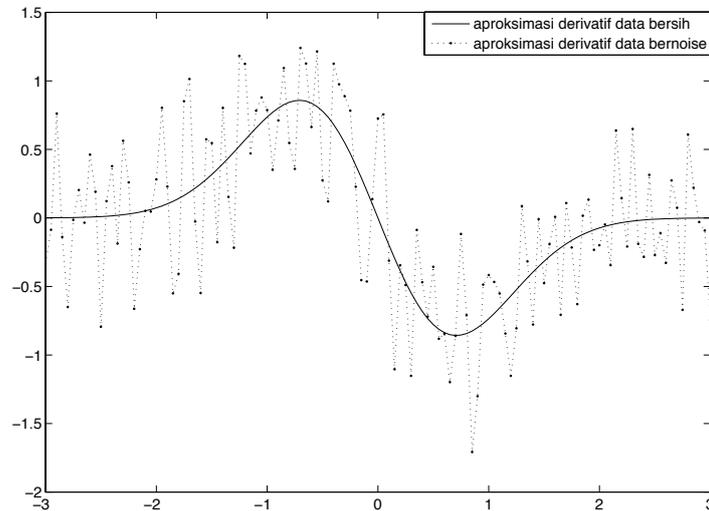
```

Akhirnya diperoleh $f'(\sqrt{2}) \approx 0.3333333350351$, sedangkan nilai derivatif eksaknya adalah $1/3 = 0.333333333333$. Aproksimasi dengan metoda ini memberikan akurasi 9 digit desimal pada tahap keempat.

2.4.5 Masalah sensitivitas aproksimasi derivatif dan smoothing

Pada bidang terapan, derivatif data tabular sangat sering digunakan. Data tabular biasanya diperoleh melalui hasil pengukuran dengan menggunakan alat ukur (instrumen) tertentu. Data yang diperoleh sudah terkontaminasi oleh noise baik oleh faktor alat, alam maupun faktor manusia. Padahal sebagaimana sudah disampaikan pada awal bab teori diferensial bahwa aproksimasi derivatif merupakan masalah yang sangat sensitif. Artinya perturbasi atau gangguan kecil pada data awal dapat menyebabkan perubahan besar dan tidak rasional pada aproksimasi derivatif. Fenomena ini kita tunjukkan melalui data yang terkontaminasi oleh noise yang dibangkitkan secara random.

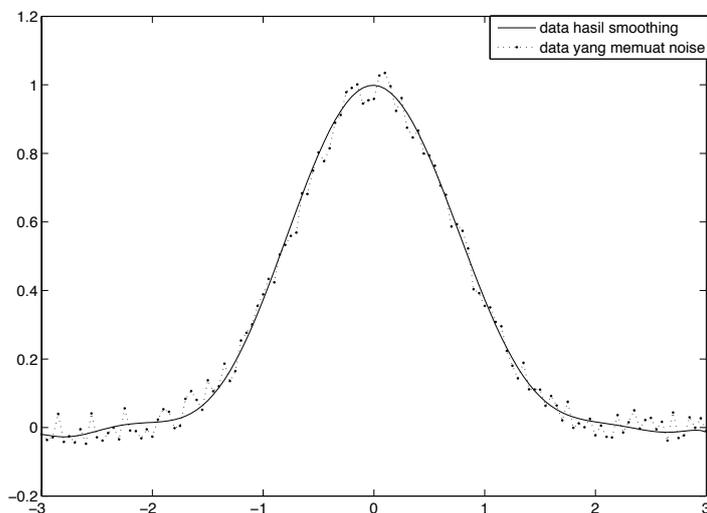
Data asli diambil dengan melakukan sampling seragam sebanyak 121 data dalam interval $[-3, 3]$ sebagai *datax* dan *datay* diambil nilai fungsi $f(x) := e^{-x^2}$ di mana x adalah *datax*



Gambar 2.5: Aproksimasi derivatif melalui data terkontaminasi noise

Hasilnya seperti diberikan pada Gambar 2.5. Ternyata terjadi disparitas yang sangat besar antara aproksimasi dan derivatif eksaknya. Inilah keadaan yang dapat terjadi dikarenakan aproksimasi derivatif menggunakan metoda selisih hingga terhadap data yang terkontaminasi noise. Masalah kritis seperti ini jarang diperhatikan pada bidang ilmu terapan. Bahkan ada sebuah disertasi di bidang ilmu terapan yang mengaproksimasi derivatif kedua dengan metoda selisih hingga langsung pada data hasil aproksimasi derivatif pertama. Padahal data aslinya berupa hasil pengukuran lapangan yang kemungkinan besar sudah terkontaminasi oleh noise. Oleh karena itu, kesimpulan hasil penelitian yang didasarkan pada hasil perhitungan ini dapat diragukan validitasnya.

Menghindari data hasil pengukuran dari gangguan atau noise sangat sulit dilakukan, bahkan dalam banyak kasus tidak mungkin dilakukan. Tetapi ada cara yang direkomendasikan oleh matematika yaitu melalui proses penghalusan (*smoothing*). Metoda smoothing yang sering digunakan adalah dengan polinomial interpolasi, polinomial spline, atau polinomial kuadrat terkecil. Pada kasus ini kita mencoba metoda kuadrat terkecil. Untuk ini kita ambil sampling yang terdiri dari m pasang data $(x_i, \tilde{y}_i), i = 1, 2, \dots, m$ dari sampel sebelumnya yang sudah terkontaminasi noise. Dalam kasus ini kita ambil $m = 25$ seragam dari $n = 121$ data sampel yang ada. Selanjutnya didefinisikan polinomial derajat p dengan $p < 25$. Dalam hal ini



Gambar 2.6: Data dengan noise dan polinomial smoothing

```
>>[x derfs] = dertab(datax,ysmooth);
>>dy = -2*x.*exp(-x.^2);
>>plot(x,dy,datax,derfs,':.'');
```

Hasil ini diberikan pada Gambar 2.7. Terlihat jelas aproksimasi derivatif melalui smoothing jauh lebih baik daripada dihitung langsung dari data yang terkontaminasi. Bandingkan dengan Gambar 2.5.

2.4.6 Automatisasi Diferensial (AD)

Kendala utama dalam mengaproksimasi derivatif dengan menggunakan metoda selisih hingga adalah adanya kesalahan pemotongan (*truncated error*), yaitu mengambil sebuah h cukup kecil pada formula aproksimasi. Kendala berikutnya adalah ketelitian komputer, yaitu adanya *rounding error* dalam melakukan komputasi bilangan sangat kecil atau sangat besar. Selain itu kita harus ekstra hati-hati dalam melakukan aproksimasi derivatif dikarenakan faktor sensitivitas terhadap perubahan kecil pada data masukan. Fakta ini sudah kita ilustrasi pada bagian sebelumnya. Pada bagian ini kita perkenalkan metoda lain untuk menghitung derivatif fungsi yang dikenal dengan istilah automatisasi diferensial (*automatic differential*),

TABEL 2.3: Tabel Evaluasi Trace fungsi 2.4.1

$v_{-1} = x_1 = 1.5$		
$v_0 = x_2 = 0.5$		
$v_1 = \frac{v_{-1}}{v_0}$	$= \frac{1.5}{0.5}$	$= 3.0000$
$v_2 = \sin(v_1)$	$= \sin(3.0)$	$= 0.1411$
$v_3 = \exp(v_0)$	$= \exp(0.5)$	$= 1.6487$
$v_4 = v_1 - v_3$	$= 3.0 - 1.68487$	$= 1.3513$
$v_5 = v_2 + v_4$	$= 0.1411 + 1.3513$	$= 1.4924$
$v_6 = v_5 * v_4$	$= 1.4924 * 1.3513$	$= 2.0167$
$y = v_6$	$= 2.0167$	

bidang riset teoretis dan pengembangan *software* berkenaan dengan akurasi dan efisiensi menghitung derivatif sebuah fungsi yang diberikan dalam bentuk program komputer. Metoda ini berbeda jauh dari metoda selisih hingga karena perhitungannya tidak melibatkan kesalahan pemotongan. Juga berbeda dari simbolik diferensial seperti terdapat pada *software* MAPLE atau Mathematica karena formula fungsi dan derivatifnya tidak tertulis secara eksplisit tunggal. Metoda ini kelihatannya cukup berpeluang dapat dikembangkan untuk penyelesaian masalah komputasi yang menyangkut diferensial dan integral. Beberapa penerapan AD sudah lama muncul pada persamaan diferensial dan integral (Campbell dan Hollenbeck, 1996; Eberhard dan Bischof, 1999).

Dua dasar teori yang diperlukan adalah komposisi fungsi dan penerapan aturan rantai (*chain rule*) yang sudah dibahas pada bab sebelumnya. Untuk memudahkan pemahaman terhadap metoda ini, berikut ini diberikan penjelasan dengan contoh yang diambil dari Griewank dan Walter (2008). Misalkan kita mempunyai fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ berikut

$$f(x_1, x_2) := \left(\sin\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \frac{x_1}{x_2} - \exp(x_2) \right) \left(\frac{x_1}{x_2} - \exp(x_2) \right). \quad (2.4.1)$$

Misalkan kita ingin mengetahui nilai fungsi ini di $x_1 = 1.5$ dan $x_2 = 0.5$. Cara biasa adalah dengan substitusi langsung ke formula fungsi tersebut. Tetapi di sini kita akan membangun sebuah prosedur komputasi yang terdiri dari serangkaian operasi terstruktur yang disebut evaluasi trace (*evaluation trace*) seperti diberikan pada Tabel 2.3.

Pada evaluasi trace ini kita mendefinisikan sejumlah variabel dalam tiga kelompok, yaitu variabel masukan (v_{-1} dan v_0), variabel perantara (v_1 s.d. v_5) dan variabel keluaran ($y := v_6$). Fungsi f didefinisikan melalui serangkaian operasi binair (tambah/kurang, kali/bagi) atau unair

TABEL 2.4: Tabel Evaluasi Trace derivatif $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ fungsi 2.4.1

$v_{-1} = x_1 = 1.5$	$\dot{v}_{-1} = \dot{x}_1 = 1$	
$v_0 = x_2 = 0.5$	$\dot{v}_0 = 0 = \dot{x}_2 = 0$	
$v_1 = \frac{v_{-1}}{v_0}$	$= \frac{1.5}{0.5}$	$= 3.0000$
$\dot{v}_1 = (\dot{v}_{-1} * v_0 + v_{-1} * \dot{v}_0) / v_0^2$	$= \frac{1.0}{0.2}$	$= 2.0$
$v_2 = \sin(v_1)$	$= \sin(3.0)$	$= 0.1411$
$\dot{v}_2 = \cos(v_1) * \dot{v}_1$	$= \cos(3.0) * 1$	$= -1.98$
$v_3 = \exp(v_0)$	$= \exp(0.5)$	$= 1.6487$
$\dot{v}_3 = \exp(v_0) * \dot{v}_0$	$= \exp(0.5) * 0$	$= 0$
$v_4 = v_1 - v_3$	$= 3.0 - 1.68487$	$= 1.3513$
$\dot{v}_4 = \dot{v}_1 - \dot{v}_3$	$= 2.0 - 0$	$= 2.0$
$v_5 = v_2 + v_4$	$= 0.1411 + 1.3513$	$= 1.4924$
$\dot{v}_5 = \dot{v}_2 + \dot{v}_4$	$= -1.98 + 2.0$	$= 0.02$
$v_6 = v_5 * v_4$	$= 1.4924 * 1.3513$	$= 2.0167$
$\dot{v}_6 = \dot{v}_5 * v_4 + v_5 * \dot{v}_4$	$= (0.02)(1.3513) + (1.4924)(2.0)$	$= 3.0110$
$y = v_6$	$= 2.0167$	
$\dot{y} = \dot{v}_6$	$= 3.0110$	

- Karena $v_2 = \sin(v_1)$ maka dengan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{v}_2 &= \cos(v_1) * \dot{v}_1 \\ &= \cos(3.0) * 1 \\ &= -0.99.\end{aligned}$$

- Karena $v_3 = \exp(v_0)$ maka dengan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{v}_3 &= \exp(v_0) * \dot{v}_0 \\ &= \exp(0.5) * 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Proses ini diteruskan sampai diperoleh variabel \dot{v}_6 dan akhirnya diambil $\dot{y}_6 := \dot{v}_6$ sebagai nilai $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ di $x_1 = 1.5$ dan $x_2 = 0.5$. Untuk mudahnya kita rangkum hasil ini dalam tabel evaluasi trace untuk derivatif sebagai berikut.

Untuk menghitung $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ di $x_1 = 1.5$ dan $x_2 = 0.5$ kita dapat menggunakan evaluasi trace yang sama dengan cara mengganti $\dot{v}_{-1} = 0$ dan $\dot{v}_0 = 1$. Dengan nilai masukan ini diperoleh

variabel masukan `initial`. Bila `initial = [1 0]` berarti $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ yang dihitung, sedangkan `initial = [0 1]` berarti $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ yang dihitung. Melalui command window kita dapat menjalankan m-file ini sebagai berikut.

```
>> [y,Dy]=Df_trace_baby([1.5 0.5],[1 0])
y =
    2.0166
Dy =
    3.0118
>> [y,Dy]=Df_trace_baby([1.5 0.5],[0 1])
y =
    2.0166
Dy =
   -13.7240
```

Berdasarkan keluaran ini diperoleh $f(1.5, 0.5) = 2.0166$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1.5, 0.5) = 3.0118$ dan $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1.5, 0.5) = -13.7240$.

Menghitung Jacobian dengan otomatisasi differensial

Automatisasi diferensial (AD) akan sangat efektif bila digunakan untuk menghitung Jacobian sebuah fungsi. Misalkan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ disajikan dalam fungsi vektor berikut

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto y = f(x) := \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

di mana $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Jacobian fungsi f adalah matriks fungsi $Jf : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ yang didefinisikan sebagai.

$$Jf(x) := \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right]_{j=1, \dots, m; i=1, \dots, n}$$

Misalkan akan dihitung nilai fungsi dan Jacobiannya di $x = (1, 2, 3)$ dengan parameter $a = 0.5$ dan $b = 2$ maka berikan perintah berikut pada command window.

```
>> x=[1 2 3];
>> a=0.5;b=2;
>> [y,Dy]=Df_trace(x,a,b)
y =
    15.9805   -16.0672
Dy =
    1.3863    8.6931   12.0000
    0.6979   -8.5347  -12.0775
```

Ini berarti untuk x dan parameter a, b tersebut diperoleh

$$f(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 15.9805 \\ -16.0672 \end{bmatrix}$$

dan Jacobian

$$Jf(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1.3863 & 8.6931 & 12.0000 \\ 0.6979 & -8.5347 & -12.0775 \end{bmatrix}.$$

Formulasi abstrak otomatisasi diferensial (AD) dan teori-teori terkait dengan kompleksitas komputasi dan lain sebagainya dapat dibaca lebih lanjut pada (Griewank & Walther, 2008). Dilihat dari pendefinisian evaluasi trace baik untuk fungsi maupun untuk derivatifnya dibutuhkan langkah yang cukup banyak. Untungnya, pengembang program ini sudah cukup banyak dan berjalan pada berbagai software komputasi mulai dari C+, C++, Fortran sampai dengan MATLAB. AdiMat yang dikembangkan oleh kelompok RWTW Aachen University dan MAD/TOMLAB oleh kelompok Cranfield University adalah contoh program AD yang berjalan pada MATLAB (www.Autodiff.org). Juga ada paket myAD, myA2D dan myMatrixAD yang merupakan program AD pada MATLAB dikembangkan oleh Martin Fink (2006) (martinfink@gmx.at).

Salah satu penggunaan nilai derivatif atau Jacobian adalah pada iterasi metoda Newton dalam mengaproksimasi akar persamaan taklinear $F(x) = 0$ di mana F fungsi bernilai vektor dengan argumen $x \in \mathbb{R}^n$. Iterasi yang dimaksud adalah

$$x_n = x_{n-1} - JF(x_{n-1})^{-1}F(x_{n-1})$$

BAGIAN II
INTEGRAL

BAB 3

TEORI INTEGRAL

One can not understand . . . the universality of law of nature, the relationship of things, without an understanding of mathematics. There is no way to do it.

Richard P FEYNMAN

Dalam kalkulus siswa mempelajari dua macam integral. Diperhatikan dua ilustrasi berikut.

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

di mana C adalah konstanta sebarang, dan

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \frac{1}{4} (2^4 - 1^4) = \frac{15}{4}.$$

Ekspresi pertama adalah **integral taktentu** (*indefinite integral*) atau **antiderivatif** dan ekspresi kedua adalah **integral tertentu** (*definite integral*). Sepintas lalu kedua bentuk ini identik dan teori yang mendasarinya adalah sama yaitu menggunakan konsep derivatif. Selama puluhan tahun para matematikawan mendefinisikan integral tertentu langsung dari antiderivatif. Padahal sesungguhnya cara ini kurang pas karena dapat menghambat perkembangan teori integral itu sendiri seperti pernah dikemukakan oleh Cauchy. Cauchy melihat bahwa pengertian integral tertentu dapat dipisahkan dari integral taktentu. Untuk ini dia kembali ke geometri orang-orang Yunani kuno yang menyajikan metoda menghitung luas daerah di dalam kurva tertutup dengan pendekatan bangun-bangun sederhana (persegi panjang, segitiga, bujursangkar).

n	5	20	50	100	150	200	400
S_n^L	3.0800	3.5769	3.6803	3.7151	3.7267	3.7325	3.7413
S_n^U	4.4800	3.9269	3.8203	3.7851	3.7773	3.7675	3.7588

Dapat diamati bahwa dari bawah meningkat dan dari atas menurun menuju nilai $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4} = 3.75$. Jelas, berlaku $3.7413 \leq \int_1^2 x^3 dx \leq 3.7588$.

Ilustrasi ini mendasari pendefinisian integral tak tentu

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (3.0.1)$$

3.1 Pendefinisian Integral

Pertama-tama, interval $[a, b]$ dipecah berdasarkan titik-titik partisi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

sehingga terbentuk subinterval $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Himpunan titik-titik $\pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ini disebut **partisi** pada $[a, b]$. Norma (*mesh*) partisi π didefinisikan sebagai

$$\|\pi\| := \max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1}).$$

Lebar masing-masing subinterval tidak harus sama. Berdasarkan definisi ini maka partisi minimal memuat dua titik ujung interval a dan b .

Contoh 3.1. Misalkan $I := [0, 1]$ maka

1. $\pi_1 = \{0, 1\}$ adalah partisi pada I dengan norma $|\pi_1| = 1$.
 - (a) $\pi_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ adalah partisi dengan norma $|\pi_2| = \max\{(\frac{1}{3}-0), (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}), (1-\frac{1}{2})\} = \frac{1}{2}$.
 - (b) $\pi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\}$ partisi pada I yaitu partisi seragam karena lebar setiap subintervalnya sama. Mesh partisi ini adalah $|\pi_n| = \frac{1}{n}$. Banyak titik pada partisi ini bergantung pada $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) $Q = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ bukan partisi dikarenakan titik ujung interval $x = 1$ tidak masuk himpunan ini.

di mana label $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ dipilih sebarang. Selanjutnya bilangan I pada teorema ini didefinisikan sebagai nilai integral takentu, ditulis

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

BUKTI. Lihat Thomson dkk (2001). □

Definisi 3.1. Berdasarkan teorema di atas, integral fungsi kontinu didefinisikan sebagai limit jumlahan Riemann berikut

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{|\pi_n| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (3.1.2)$$

Limit ini diambil untuk norma partisi menuju nol. Inilah pendefinisian integral metoda Cauchy. Bila $|\pi_n| \rightarrow 0$ maka $n \rightarrow \infty$. Sebaliknya, bila $n \rightarrow \infty$ belum tentu $|\pi_n| \rightarrow 0$. Hal ini dikarenakan dapat saja penambahan titik-titik partisi hanya dilakukan pada beberapa subinterval saja. Tetapi dalam kasus partisi seragam, yaitu semua subintervalnya mempunyai panjang sama maka kedua syarat ini ekuivalen, yaitu $n \rightarrow \infty$ bila hanya bila $|\pi_n| \rightarrow 0$. Misalkan $\pi_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi seragam pada $[a, b]$, yaitu $|I_k| = (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} := h$ maka diperoleh titik partisi $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Dengan mengambil ξ_k sebagai tepi kanan subinterval $[x_{k-1}, x_k]$, yaitu

$$\xi_k := x_k = a + kh = a + k \frac{b-a}{n}$$

maka berdasarkan (3.1.2) diperoleh

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{|\pi_n| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right). \quad (3.1.3)$$

Formula (3.1.3) akan berbeda jika diambil label ξ_k berbeda, misalnya sebagai tepi kiri subinterval namun hasil limitnya akan memberikan nilai yang sama.

Contoh 3.2. Buktikan bila f fungsi konstan, yaitu $f(x) = \alpha$ maka $\int_a^b f(x) dx = \alpha(b-a)$.

BUKTI. Untuk sebarang partisi $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ maka diperoleh jumlahan Riemann

di mana $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ suku yang didominasi dari atas oleh $\frac{1}{n}$, yaitu $\mathcal{O}(\frac{1}{n}) = K \cdot \frac{1}{n}$ untuk suatu konstanta K . Mudah ditunjukkan dengan menjabarkan semua suku dalam operasi di atas (lihat definisi big-O pada bab sebelumnya). Diperhatikan berlaku $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\frac{1}{n}) = 0$. Akhirnya diperoleh

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

□

Contoh 3.4. Nyatakan limit berikut dalam bentuk integral pada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

PENYELESAIAN. Bandingkan dengan (3.1.3), diperoleh

$$\begin{aligned} b-a &= 1 \\ a + \frac{k}{n}(b-a) &= \frac{k}{n} \end{aligned}$$

Substitusi persamaan pertama ke persamaan kedua diperoleh

$$a + \frac{k}{n} \cdot 1 = \frac{k}{n} \rightarrow a = 0 \rightarrow b = 1.$$

Jadi diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

□

Contoh 3.5. Nyatakan limit berikut dalam bentuk integral, kemudian hitunglah nilainya dengan kalkulus biasa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} + e^{2/n} + \dots + e^{(n-1)/n} + e^{n/n}}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right\} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Biasanya proses pembuktian integral menggunakan partisi seragam seperti beberapa contoh sebelumnya. Namun demikian kita dapat juga mengambil partisi takseragam seperti diberikan contoh berikut.

Contoh 3.6. Hitunglah integral $\int_a^b x^p dx$, $p \neq -1$ dengan memecah interval $[a, b]$ dalam subinterval $[a, aq]$, $[aq, aq^2], \dots, [aq^{n-1}, aq^n]$ di mana $aq^n := b$.

PENYELESAIAN. Perhatikan bahwa partisi $\pi_n = \{a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n = b\}$ bukan partisi seragam seperti dalam banyak contoh sebelumnya. Diamati bahwa panjang subintervalnya membentuk barisan geometri, yaitu $a(q-1)$, $aq(q-1)$, $aq^2(q-1), \dots$. Ini merupakan partisi takseragam. Dengan demikian subinterval $I_k = [aq^{k-1}, aq^k]$ mempunyai lebar $|I_k| = \Delta x_k = aq^k - aq^{k-1} = aq^{k-1}(q-1)$. Karena $aq^n = b$ maka $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$. Amati bahwa bila $n \rightarrow \infty$ maka $q \rightarrow 1$. Bila $q \rightarrow 1$ maka lebar subinterval $|I_k| \rightarrow 0$ sehingga norma partisi $|\pi_n| \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$. Jadi kita dapat menghitung integral ini sebagai berikut

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) aq^{k-1} (q-1)$$

maka $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sebarang titik label. Untuk kali ini diambil labelnya sebagai ujung kanan subinterval, yaitu $\xi_k = x_{k-1} = aq^k$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) aq^{k-1} (q-1) &= \sum_{k=1}^n (aq^k)^p aq^{k-1} (q-1) \\ &= \sum_{k=1}^n a^{p+1} q^{kp+k-1} (q-1) \\ &= a^{p+1} \frac{q-1}{q} \underbrace{\sum_{k=1}^n (q^{p+1})^k}_{S_n}. \end{aligned}$$

Karena $p \neq -1$ maka S_n adalah deret geometri dengan suku pertama q^{p+1} dan rasio $r = q^{p+1}$.

nakan aturan L'Hospital, yaitu

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^{p+1} - q^p}{q^{p+1} - 1} \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(p+1)q^p - pq^{p-1}}{(p+1)q^p} \\
 &= 1 - \lim_{q \rightarrow 1} \frac{p}{(p+1)q} \\
 &= 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}.
 \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh

$$\int_a^b x^p dx = (b^{p+1} - a^{p+1}) \underbrace{\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^{p+1} - q^p}{q^{p+1} - 1}}_L = \frac{1}{p+1} (b^{p+1} - a^{p+1}).$$

□

Perhatikan dengan saksama bahwa metoda perhitungan di atas tidak berlaku jika $a = 0$ sebab partisi yang dimaksud tidak terdefinisi.

3.1.2 Metoda Darboux

Misalkan f fungsi yang didefinisikan pada $[a, b]$, dan $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi pada $[a, b]$. Dibentuk dua jumlahan berikut

$$L(P; f) := \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{dan} \quad U(P; f) := \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$$

di mana $m_k := \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ dan $M_k := \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Biasanya $L(P; f)$ disebut **jumlah bawah** (*lower sum*) fungsi f pada partisi P , sedangkan $U(P; f)$ disebut **jumlah atas** (*upper sum*). Jadi jumlah atas dan jumlah bawah sebagai fungsi yang bergantung pada partisi dan fungsi f . Untuk f tertentu, bila partisinya diganti maka nilai jumlah atas dan jumlah bawahnya juga berubah. Misalkan

$$\mathcal{P}[a, b] := \text{himpunan semua partisi pada } [a, b].$$

BUKTI. Misalkan $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Karena Q penghalus P maka paling tidak terdapat satu subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ memuat $z \in Q$ sehingga dapat dinyatakan sebagai

$$[x_{k-1}, x_k] = [x_{k-1}, z] \cup [z, x_k].$$

Ingat, jika $A \subseteq B$ maka $\inf_{x \in A} f(x) \geq \inf_{x \in B} f(x)$ dan $\sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in B} f(x)$. Diperhatikan bahwa $[x_{k-1}, z]$ dan $[z, x_k]$ keduanya subset $[x_{k-1}, x_k]$. Misalkan

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m'_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, z]} f(x), \quad m''_k = \inf_{x \in [z, x_k]} f(x)$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M'_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, z]} f(x), \quad M''_k = \sup_{x \in [z, x_k]} f(x)$$

maka berlaku $m_k \leq m'_k$ dan $m_k \leq m''_k$, $M_k \geq M'_k$ dan $M_k \geq M''_k$. Ilustrasi grafis keadaan ini ditunjukkan pada Gambar 3.3. Dengan demikian diperoleh

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(z - x_{k-1}) + m_k(x_k - z) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$$

$$M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k(z - x_{k-1}) + M_k(x_k - z) \geq M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z).$$

Karena $m_k(x_k - x_{k-1}) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$ maka dengan menjumlahkan suku lainnya diperoleh

$$L(P; f) \leq L(Q; f).$$

Dengan argumen yang sama untuk $M_k(x_k - x_{k-1}) \geq M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z)$ diperoleh

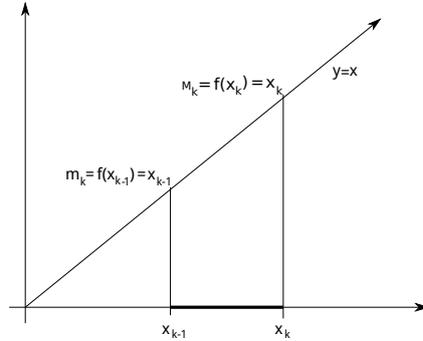
$$U(P; f) \geq U(Q; f).$$

□

Lemma 2. *Bila P_1 dan P_2 partisi sebarang pada I maka $L(P_1; f) \leq U(P_2; f)$.*

Lemma ini mengatakan bahwa jumlah bawah tidak pernah melebihi jumlah atas, apapun partisinya.

BUKTI. Ambil $Q := P_1 \cup P_2$ maka Q penghalus dari P_1 dan P_2 . Dengan menggunakan lemma



Gambar 3.4: Supremum dan infimum fungsi naik

BUKTI. Diambil partisi seragam $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Karena f fungsi monoton naik maka infimumnya terjadi di ujung kiri subinterval dan supremumnya terjadi di kanan subinterval, seperti diilustrasikan pada Gambar 3.4 berikut. Karena $x_k = \frac{k}{n}$ maka $m_k = x_{k-1} = \frac{k-1}{n}$, $M_k = x_k = \frac{k}{n}$ dan $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} L(P_n; f) &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) \right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k - n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Kita telah menggunakan rumus jumlahan $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$. Dengan argumen yang sama diperoleh juga

$$U(P_n; f) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Diperhatikan bahwa $\sup_n L(P_n; f) = \sup_n \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$ dan $\inf_n U(P_n; f) = \inf_n \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$. Karena kumpulan partisi $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}([0, 1])$ maka berlaku

$$\frac{1}{2} = \sup \{L(P_n; f) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup \{L(P; f) : P \in \mathcal{P}([0, 1])\} = L(f),$$

Karena $L(f) \neq U(f)$ maka disimpulkan f tidak terintegral pada $[0, 1]$. \square

Contoh ini memperjelas bahwa fungsi terbatas belum tentu terintegral.

3.1.3 Metoda Riemann

Pada definisi ini tidak digunakan istilah jumlah bawah (atas), integral bawah (atas), namun tetap mengacu pada jumlahan Riemann secara umum. Misalkan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sebuah partisi pada interval I . Bila telah dipilih label (*tag*) $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk setiap k maka terbentuk himpunan subinterval beserta labelnya sebagai berikut

$$\dot{P} := \{([x_{k-1}, x_k], \xi_k) : k = 1, 2, \dots, n\}$$

yang disebut partisi terlabel pada I . Selanjutnya jumlahan Riemann terhadap partisi terlabel \dot{P} didefinisikan seperti biasa, yaitu

$$S(\dot{P}; f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

Definisi 3.4. Fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika ada bilangan real L sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga setiap partisi terlabel \dot{P} dengan $\|\dot{P}\| < \delta$ berlaku

$$\left| S(\dot{P}; f) - L \right| < \epsilon. \quad (3.1.5)$$

Himpunan semua fungsi terintegral Riemann dinyatakan dengan $\mathcal{R}[a, b]$.

Definisi ini mengisyaratkan bahwa bilangan L adalah limit dari jumlahan Riemann untuk $\|\dot{P}\| \rightarrow 0$. Bilangan L dalam definisi ini adalah nilai dari integral, yaitu

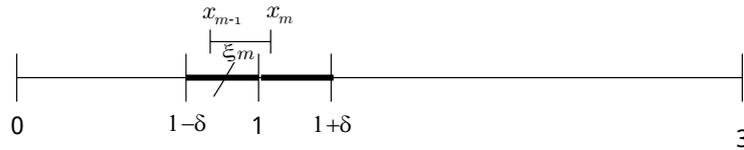
$$L = \int_a^b f(x) dx.$$

Penggunaan definisi ini dalam membuktikan suatu fungsi terintegral Riemann tidaklah mudah, jauh lebih sulit dari metoda sebelumnya. Eksistensi bilangan L yang dimaksud terkadang harus ditebak dulu, baru dibuktikan ia memenuhi definisi yang ada. Tetapi untuk pengembangan teori integral, definisi ini layak dipahami.

Kedua ketidaksamaan ini dijumlahkan, diperoleh

$$8 - 5\delta \leq S(\dot{P}; f) = S(\dot{P}_1; f) + S(\dot{P}_2; f) \leq 8 + 5\delta \rightarrow |S(\dot{P}; f) - 8| \leq 5\delta.$$

Agar ekspresi terakhir ini kurang dari ϵ maka cukup diambil $\delta < \frac{\epsilon}{5}$, misalnya $\delta := \frac{\epsilon}{10}$.



Gambar 3.5: Situasi label ξ_m pada subinterval terakhir

Pembuktian ini cukup rumit. Sebagai perbandingan kita buktikan keterintegralan ini dengan menggunakan metoda Darboux seperti yang dibahas sebelumnya.

[Cara 2] Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ambil partisi $\pi_n := \{0, 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 3\}$. Terhadap partisi ini diperoleh jumlah atas dan jumlah bawah sebagai berikut

$$L(\pi_n; f) = 2(1 - \frac{1}{n}) + 2(\frac{2}{n}) + 3(2 - \frac{1}{n}) = 8 - \frac{1}{n}$$

$$U(\pi_n; f) = 2(1 - \frac{1}{n}) + 3(\frac{2}{n}) + 3(2 - \frac{1}{n}) = 8 + \frac{1}{n}.$$

Dengan argumen seperti pada metoda Darbox diperoleh

$$8 = \sup_n (8 - \frac{1}{n}) = \sup_n L(\pi_n; f) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P; f) = L(f)$$

$$8 = \inf_n (8 + \frac{1}{n}) = \inf_n U(\pi_n; f) \geq \inf_{P \in \mathcal{P}} U(P; f) = U(f)$$

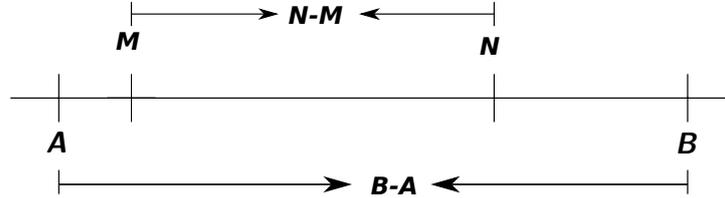
Setelah digabungkan kedua ketidaksamaan ini diperoleh

$$8 \leq L(f) \leq U(f) = 8$$

sehingga diperoleh $L(f) = U(f) = 8$. Kesimpulannya f terintegral pada $[0, 3]$ dengan $\int_0^3 f(x) dx = 8$.

□

Kedua macam bukti ini memberikan hasil yang sama tetapi pendekatannya berbeda. Menun-



Gambar 3.6: Pendekatan dengan lebar interval

3.2.2 Kriteria terintegral Riemann

Teorema 3.3. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi terbatas pada $[a, b]$. Maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$ bila hanya bila setiap $\epsilon > 0$ terdapat partisi P_ϵ pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$U(P_\epsilon; f) - L(P_\epsilon; f) < \epsilon. \quad (3.2.1)$$

BUKTI. (\rightarrow) Diketahui $f \in \mathcal{R}[a, b]$, maka berlaku $L(f) = U(f)$. Diberikan $\epsilon > 0$ sebarang. Karena $L(f)$ adalah supremum para $L(P; f)$ maka ada partisi P_1 pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$L(f) - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1; f).$$

Juga, karena $U(f)$ adalah infimum para $U(P; f)$ maka terdapat partisi P_2 pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$U(f) + \frac{\epsilon}{2} > U(P_2; f).$$

Diambil partisi $P_\epsilon := P_1 \cup P_2$, maka P_ϵ merupakan penghalus dari kedua partisi P_1 dan P_2 . Oleh karena itu, berlaku

$$\underbrace{L(f) - \frac{\epsilon}{2}}_A < L(P_1; f) \leq \underbrace{L(P_\epsilon; f)}_M \leq \underbrace{U(P_\epsilon; f)}_N \leq U(P_2; f) < \underbrace{U(f) + \frac{\epsilon}{2}}_B.$$

Ketidaksamaan ini dapat diselesaikan dengan pendekatan lebar interval seperti ditunjukkan pada Gambar 3.6. Karena $L(f) = U(f)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} U(P_\epsilon; f) - L(P_\epsilon; f) &< \left(U(f) + \frac{\epsilon}{2} \right) - \left(L(f) - \frac{\epsilon}{2} \right). \\ &= U(f) - L(f) + \epsilon \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

BUKTI. Untuk $\alpha = 0$ fungsi $\alpha f = 0$ sehingga otomatis berlaku. Untuk $\alpha < 0$, gunakan sifat supremum dan infimum berikut

$$\inf_x \alpha f(x) = \alpha \sup_x f(x) \text{ dan } \sup_x \alpha f(x) = \alpha \inf_x f(x).$$

Jadi berlaku $m_k(\alpha f) = \alpha M_k(f)$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_k m_k(\alpha f) \Delta x_k &= \alpha \sum_k M_k(f) \Delta x_k \\ L(P; \alpha f) &= \alpha U(P; f) \\ \sup_P L(P; \alpha f) &= \sup_P \alpha U(P; f) = \alpha \inf_P U(P; f) \\ L(\alpha f) &= \alpha U(f). \end{aligned}$$

Argumen yang sama kita dapat penjabaran berikut:

$$\begin{aligned} \sum_k M_k(\alpha f) \Delta x_k &= \alpha \sum_k m_k(f) \Delta x_k \\ U(P; \alpha f) &= \alpha L(P; f) \\ \inf_P U(P; \alpha f) &= \inf_P \alpha L(P; f) = \alpha \sup_P L(P; f) \\ U(\alpha f) &= \alpha L(f). \end{aligned}$$

Berdasarkan kedua hasil ini dikarenakan $U(f) = L(f)$ maka diperoleh

$$L(\alpha f) = \alpha U(f) = \alpha L(f) = U(\alpha f).$$

Jadi disimpulkan αf terintegral pada $[a, b]$ dengan $\int_a^b \alpha f = \alpha U(f) = \alpha \int_a^b f$. Untuk $\alpha > 0$ lebih mudah, tidak ada perubahan dari supremum menjadi infimum, atau sebaliknya. Pembaca dapat mencobanya sendiri. \square

Teorema 3.5. (JUMLAHAN FUNGSI TERINTEGRAL) *Misalkan $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi terintegral pada $[a, b]$. Maka $f + g$ terintegral dan berlaku*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \quad (3.2.3)$$

Dari kedua ketidaksamaan ini diperoleh

$$\left| \int_a^b (f + g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| < \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang maka $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ terbukti. \square

Teorema 3.6. (POSITIVITAS INTEGRAL). *Bila $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$ maka $\int_a^b f \geq 0$. Lebih lanjut, jika ada fungsi terintegral $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di mana $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$ maka $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

BUKTI. Karena $f(x) \geq 0$ maka $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x) \geq 0$ sehingga $L(P; f) \geq 0$. Jadi

$$\int_a^b f \geq L(f) = \sup_P L(P; f) \geq 0.$$

Untuk hasil kedua didefinisikan fungsi h sebagai $h := g - f$ maka $h(x) \geq 0$. Terapkan hasil sebelumnya, dan gunakan sifat jumlahan dan perkalian skalar sebelumnya, maka bukti selesai. \square

Teorema 3.7. *Bila $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$ maka*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (3.2.4)$$

BUKTI. Ambil $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0, x \in [a, b]$. Gunakan teorema sebelumnya pada h sehingga diperoleh

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$

Selanjutnya teorema terbukti dengan hanya memindah ruas hasil ini. \square

Selanjutnya dibahas keterintegralan fungsi harga mutlak $|f|$ yang didefinisikan sebagai $|f|(x) := |f(x)|$. Pada teorema berikut kita akan menggunakan fakta bahwa fungsi terbatas dan kontinu kecuali pada berhingga banyak titik selalu terintegral. Fakta ini akan dibahas secara formal pada bagian berikutnya.

Teorema 3.8. *Bila $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral maka $|f|$ terintegral dan berlaku*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b - a) \quad (3.2.5)$$

3.2.4 Sifat aditif integral Riemann

Sudah menjadi kebiasaan dalam perhitungan integral, bila domain integral $[a, b]$ terpecah oleh sebuah titik c , yaitu $a < c < b$ dan terbentuk dua subinterval $[a, c]$ dan $[c, b]$ maka formula berikut sering sekali digunakan.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Ini adalah sifat aditif integral dan ternyata sifat ini tidak mudah dibuktikan.

Teorema 3.10. *Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ fungsi terbatas. Maka f terintegral pada $[a, b]$ bila hanya bila ia terintegral pada $[a, c]$ dan $[c, b]$, dan berlaku*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (3.2.6)$$

BUKTI. (\leftarrow) Diberikan $\epsilon > 0$ sebarang. Misalkan $f_1 := f|_{[a, c]}$ yaitu restriksi fungsi f pada $[a, c]$ dan juga $f_2 := f|_{[c, b]}$. Karena f_1 dan f_2 terintegral maka terdapat partisi P_1 pada $[a, c]$ dan P_2 pada $[c, b]$ sehingga berlaku

$$U(P_1; f_1) - L(P_1; f_1) < \frac{\epsilon}{2} \text{ dan } U(P_2; f_2) - L(P_2; f_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Diambil $P_\epsilon := P_1 \cup P_2$ maka P_ϵ adalah partisi pada $[a, b]$. Berdasarkan ini berlaku

$$\begin{aligned} U(P_\epsilon; f) - L(P_\epsilon; f) &= (U(P_1; f) + U(P_2; f)) - (L(P_1; f) + L(P_2; f)) \\ &= (U(P_1; f) - L(P_1; f)) + (U(P_2; f) - L(P_2; f)) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Jadi f terintegral pada $[a, b]$ berdasarkan kriteria Riemann.

(\rightarrow) Diketahui f terintegral pada $[a, b]$ maka untuk $\epsilon > 0$ sebarang, terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga

$$U(P; f) - L(P; f) < \epsilon.$$

Jadikan c sebagai titik partisi dengan mengambil partisi $P' := P \cup \{c\}$. Karena P' penghalus P maka berlaku

$$U(P'; f) - L(P'; f) \leq U(P; f) - L(P; f) < \epsilon.$$

Didefinisikan $P'_1 := P' \cap [a, c]$ dan $P'_2 := P' \cap [c, b]$. Maka P'_1 partisi pada $[a, c]$ dan P'_2 partisi

maka berlaku

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^m \int_{c_{k-1}}^{c_k} f \quad (3.2.7)$$

asalkan f terintegral pada $[a, b]$ dan pada setiap subinterval $[c_{k-1}, c_k]$.

3.3 Keluarga Fungsi Terintegral Riemann

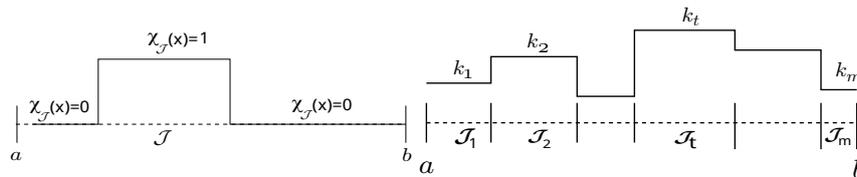
Berikut ini adalah beberapa fungsi terintegral Riemann. Dimulai dari fungsi karakteristik dan fungsi tangga.

3.3.1 Keterintegralan fungsi karakteristik

Definisi 3.5. Misalkan $J \subset [a, b]$ dan $\chi_J : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$\chi_J(x) := \begin{cases} 1 & \text{bila } x \in J \\ 0 & \text{bila } x \notin J \end{cases}$$

maka χ_J disebut **fungsi karakteristik** pada J . Profil fungsi karakteristik ditunjukkan pada Gambar 3.7 (kiri).



Gambar 3.7: Fungsi karakteristik (kiri) dan fungsi tangga (kanan)

Teorema 3.11. Bila J suatu interval pada $[a, b]$, katakan $J = [c, d]$ maka fungsi $\chi_{[c,d]}$ terintegral Riemann pada $[a, b]$ dengan

$$\int_a^b \chi_{[c,d]}(x) dx = d - c. \quad (3.3.1)$$

BUKTI. Gunakan sifat aljabar jumlah fungsi terintegral dan teorema sebelumnya. \square

3.3.3 Keterintegralan fungsi kontinu

Teorema 3.13. *Jika $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi kontinu maka f terintegral pada $[a, b]$.*

BUKTI. Karena f kontiu pada interval tertutup $[a, b]$ maka f kontinu seragam, yaitu diberikan $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $u, v \in [a, b]$ dengan $|u - v| < \delta$ maka $|f(u) - f(v)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Misalkan $P_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi seragam pada $[a, b]$, yaitu $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Terhadap $\delta > 0$ sebelumnya kita selalu dapat memilih bilangan asli n sehingga $\frac{b-a}{n} < \delta$. Karena f kontinu maka untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$ selalu dapat ditemukan titik maksimum dan minimum $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sehingga

$$M_k = f(u_k) \text{ dan } m_k = f(v_k).$$

Jadi

$$M_k - m_k = |f(u_k) - f(v_k)| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

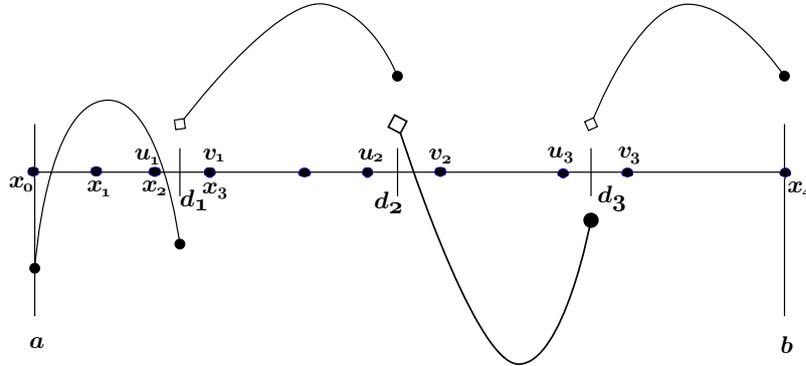
sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} U(P_n; f) - L(P_n; f) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon. \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria keterintegralan Riemann maka terbukti f terintegral pada $[a, b]$. \square

3.3.4 Keterintegralan fungsi kontinu sepotong-sepotong

Definisi 3.7. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada $[a, b]$ kecuali pada berhingga titik-titik $E = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ maka f disebut fungsi **kontinu sepotong-sepotong** (*piece-wise continuous*) pada $[a, b]$.



Gambar 3.10: Partisi untuk fungsi kontinu sepotong-sepotong

Ambil himpunan P_1 dan P_2 sebagai berikut:

$P_2 = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n\}$ dan $P_1 = P \setminus P_2$, maka $P = P_1 \cup P_2$ dan $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Diperoleh fakta berikut:

$$M_k - m_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \leq 2M, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$M_k - m_k < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \text{ bila } x_{k-1} \in P_1.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} U(P; f) - L(P; f) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &= \sum_{x_k \in P_1} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{x_k \in P_2} (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{x_k \in P_1} \Delta x_k + 2M \sum_{x_k \in P_2} \Delta x_k \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) + 2M \frac{\epsilon}{4M} = \epsilon. \end{aligned}$$

Menurut kriteria fungsi terintegral Riemann (3.2.1) maka disimpulkan f terintegral pada $[a, b]$. \square

Pada teorema ini disyaratkan banyaknya titik diskontinu adalah berhingga. Sesungguhnya kondisi ini dapat diperlemah menjadi himpunan titik diskontiu berukuran nol (*measure zero*).

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa syarat cukup sebuah fungsi terintegral adalah terbatas dan kontinu pada interval $[a, b]$ kecuali pada berhingga titik. Bahkan syarat berhingga banyak titik di mana f diskontinu dapat diperlemah menjadi himpunan titik berukuran nol. Diingatkan kembali bahwa syarat terbatas untuk menjamin adanya jumlahan Riemann dalam pendefinisian integral Riemann.

Keterintegralan fungsi monoton diungkapkan pada teorema berikut.

Teorema 3.16. *Bila fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton pada $[a, b]$ maka f terintegral pada $[a, b]$.*

BUKTI. Hanya dibuktikan untuk kasus monoton naik, sedangkan untuk kasus turun dapat dibuktikan sendiri dengan cara yang mirip. Misalkan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi seragam pada $[a, b]$, yaitu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Karena f naik maka jelas

$$m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1})$$

$$M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k).$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} U(P; f) - L(P; f) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(b) - f(x_{n-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Dengan mengambil n cukup besar sehingga $\frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \epsilon$, maka diperoleh partisi P sehingga

$$U(P; f) - L(P; f) < \epsilon.$$

Jadi terbukti f terintegral pada $[a, b]$. □

Contoh 3.12. Diberikan fungsi $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{jika } x < 1 \\ 0 & \text{jika } x \geq 1. \end{cases}$$

Jadi perubahan nilai fungsi pada berhingga banyak titik tidak mempengaruhi nilai integral. \square

Kita dapat juga menyelesaikan soal ini dengan menggunakan sifat dan teorema integral sebelumnya. Kasus pertama dapat diubah menjadi fungsi karakteristik berikut

$$\int_0^2 f = \int_0^2 \chi_{[0,1)}(x) dx = 1 - 0 = 1.$$

Sedangkan kasus kedua kita dapat memecah domain integralnya, kemudian menerapkan integral fungsi karakteristik, yaitu

$$\begin{aligned} \int_0^2 f &= \int_0^2 \left(\chi_{[0, \frac{1}{2})}(x) + \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}(x) \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Contoh 3.13. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi terbatas dan bernilai nol kecuali $x \in \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subset [a, b]$. Buktikan f terintegral pada $[a, b]$ dan nilai integralnya nol.

BUKTI. Keterintegralan fungsi f dapat langsung menggunakan teorema keterintegralan fungsi kontinu sepotong-sepotong karena fungsi f ini termasuk kontinu sepotong-sepotong. Karena f terintegral pada $[a, b]$ maka ia terintegral pada setiap subinterval pada $[a, b]$. Dengan asumsi berlaku urutan $a := d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n < b := d_{n+1}$ maka dapat dibentuk

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{d_{k-1}}^{d_k} f = 0,$$

sebab $\int_{d_{k-1}}^{d_k} f = 0$ untuk setiap $k = 0, 1, \dots, n + 1$. \square

3.4 Teorema Fundamental Kalkulus

Sebelumnya kita telah membahas konsep integral tanpa melibatkan konsep diferensial. Pada bagian ini kedua konsep ini dipadukan dalam suatu hubungan yang sangat menarik. Dua permasalahan pokok di sini adalah bagaimana urutan kedua operasi ini jika dikerjakan pada sebuah fungsi, yaitu bagaimana jika bentuk integral didiferensialkan (diferensial dari integral)

Pada pihak lain selalu berlaku

$$L(P; F') \leq \int_a^b F' \leq U(P; F').$$

Kedua relasi ini menyatakan bahwa kedua kuantitas $F(b) - F(a)$ dan $\int_a^b F'$ sama-sama terletak di dalam interval $[L(P; F'), U(P; F')]$ sehingga selisih keduanya tidak akan melebihi lebar interval ini, yaitu

$$\left| \int_a^b F' - (F(b) - F(a)) \right| < U(P; F') - L(P; F') < \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang maka disimpulkan $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$, atau $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. \square

Inilah yang terkadang menyebabkan sulitnya membedakan antara antiderivatif dan integral tertentu. Bahkan seolah-olah konsep integral tidak dapat dibahas tanpa menggunakan konsep diferensial. Padahal kedua konsep ini pada dasarnya berbeda tetapi dalam perkembangan keduanya menyatu dalam bentuk TFK. Adanya TFK ini melahirkan kekuatan besar dalam kalkulus diferensial dan integral. Khusus pada bidang terapan, adanya TFK memudahkan dalam menentukan nilai sebuah integral. Bayangkan jika tidak ada TFK maka menentukan nilai integral yang sangat sederhana pun sangat sulit. Namun dalam banyak hal, antiderivatif sebuah fungsi tidak mudah ditemukan dalam bentuk eksplisit. Dalam kasus seperti ini, TFK tidak dapat digunakan untuk menghitung nilai integral sehingga harus digunakan pendekatan numerik. Pendekatan numerik integral kembali menggunakan jumlahan Riemann.

Satu lagi TFK adalah berbentuk diferensial dari integral.

Teorema 3.18. (DIFERENSIAL DARI INTEGRAL) Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral pada $[a, b]$ dan didefinisikan $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$F(x) := \int_a^x f. \tag{3.4.2}$$

Maka F kontinu pada $[a, b]$ dan jika f kontinu di $c \in [a, b]$ maka F terdiferensial di c dengan

$$F'(c) = f(c).$$

Teorema ini disebut **TFK tipe 2**. Fungsi F yang didefinisikan seperti pada (3.4.2) disebut **primitif** dari f . Bila f terintegral maka primitif F terjamin ada. Dalam kasus f kontinu maka primitif F juga antiderivatif. Ingat, fungsi kontinu pasti terintegral tetapi belum tentu sebaliknya. Jadi ada kasus di mana primitifnya ada tetapi antiderivatifnya tidak ada seperti diberikan pada contoh berikut.

Contoh 3.14. Diberikan fungsi signum berikut didefinisikan pada $I := [-1, 1]$

$$s(x) := \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Tunjukkan fungsi signum ini mempunyai primitif tetapi tidak mempunyai antiderivatif. Kemudian, gambarkan grafik fungsi dan primitifnya.

BUKTI. Fungsi ini diskontinu hanya di $x = 0$, jadi ia terintegral pada I . Primitifnya didefinisikan sebagai

$$S(x) = \int_{-1}^x s(t) dt.$$

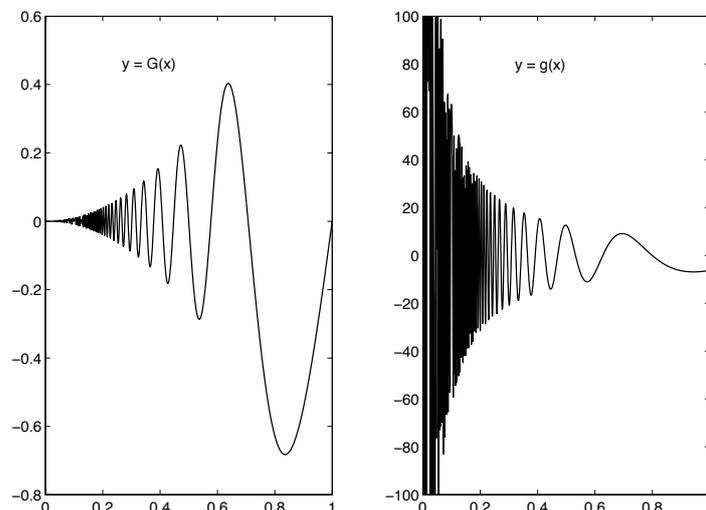
Untuk $-1 \leq x \leq 0$ diperoleh $S(x) = \int_{-1}^x s(t) dt = \int_{-1}^x -1 dt = [-t]_{-1}^x = -x - 1$. Sedangkan untuk $0 < x \leq 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_{-1}^x s(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 s(t) dt + \int_0^x s(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 -1 dt + \int_0^x 1 dt \\ &= -1 + x. \end{aligned}$$

Jadi primitif fungsi signum adalah

$$S(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

atau lebih singkat dalam notasi harga mutlak $S(x) = |x| - 1$. Diperhatikan fungsi $F(x) = |x|$ mempunyai derivatif $F'(x) = s(x), x \neq 0$. Sedangkan untuk $x = 0$, $F'(0)$ tidak ada. Tidak



Gambar 3.13: Grafik fungsi fungsi (kanan) dan antiderivatifnya (kiri)

Jadi derivatif $G'(x)$ ada, yaitu

$$G'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\pi/x^2) + \frac{2\pi}{x} \cos(\pi/x^2), & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Jelas antiderivatif g ada berdasarkan konstruksi. Tetapi g tidak terintegral pada $[0, 1]$ karena g tidak terbatas di 0 sehingga primitif $G(x) := \int_0^x g(t) dt$ tidak ada. Grafik fungsi G dan g diberikan pada Gambar 3.13. \square

Selanjutnya diperhatikan dulu pengembangan bentuk umum TFK 2 sebagai berikut. Misalkan

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt.$$

Dengan transformasi variabel $t \rightarrow g(t)$ maka diperoleh $dt = g'(t)dt$ dan batas-batas integral menjadi berturut-turut $g(0)$ dan x , sehingga bentuk integral ini menjadi

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt = \int_{g(0)}^x f(g(t))g'(t) dt.$$

Contoh 3.17. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dan misalkan $\alpha > 0$. Didefinisikan fungsi $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$g(x) := \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Buktikan g terdiferensial dan tentukan g' .

BUKTI. Misalkan $F(x) := \int_{\alpha}^x f$. Fungsi F terdiferensial berdasarkan TFK tipe 2 dengan $F'(x) = f(x)$. Karena $\alpha > 0$ maka $[x - \alpha, x + \alpha]$ membentuk suatu interval. Untuk $x - \alpha < \alpha < x + \alpha$ atau $0 < x < 2\alpha$ maka dapat dibentuk

$$g(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f = \int_{x-\alpha}^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{x+\alpha} f = -F(x - \alpha) + F(x + \alpha).$$

Untuk $\alpha \leq x - \alpha$ atau $x \geq 2\alpha$ maka dapat dibentuk

$$g(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f = \int_{\alpha}^{x+\alpha} f + \int_{x-\alpha}^{\alpha} f = F(x + \alpha) + F(x - \alpha).$$

Untuk $\alpha \geq x + \alpha$ atau $x \leq 0$ maka dapat dibentuk

$$g(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f = \int_{x-\alpha}^{\alpha} f + \int_{x+\alpha}^{\alpha} f = -F(x - \alpha) - F(x + \alpha).$$

Karena fungsi F terdiferensial maka fungsi $x \rightarrow F(x + \alpha)$ dan $x \rightarrow F(x - \alpha)$ juga terdiferensial dengan $F'(x - \alpha) = f(x - \alpha)$ dan $F'(x + \alpha) = f(x + \alpha)$. Jadi fungsi g terdiferensial dengan derivatif sebagai berikut

$$g'(x) = \begin{cases} -f(x - \alpha) - f(x + \alpha), & x \leq 0 \\ -f(x - \alpha) + f(x + \alpha), & 0 < x < 2\alpha \\ f(x - \alpha) + f(x + \alpha), & x \geq 2\alpha. \end{cases}$$

□

Contoh 3.18. Misalkan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu, dan andaikan berlaku

$$\int_0^x f = \int_x^1 f \text{ untuk semua } x \in [0, 1],$$

buktikan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0, 1]$.

Pada kalkulus biasanya formula ini ditulis dalam bentuk praktis berikut

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

BUKTI. Tulis $H(x) := F(x)G(x)$, $x \in [a, b]$. Maka fungsi H terdiferensial karena ia sebagai hasil kali 2 fungsi yang terdiferensial. Dengan menggunakan formula derivatif hasil kali diperoleh

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g'(x).$$

Jadi H adalah antiderivatif fungsi $fG + Fg$. Karena f, g terintegral dan F, G kontinu maka fungsi $fG + Fg$ terintegral. Dengan menggunakan TFK tipe 1, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x)G(x) + F(x)g(x)) dx &= H(b) - H(a) \\ \int_a^b F(x)g(x) dx &= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) dx. \end{aligned}$$

□

Contoh 3.20. Evaluasilah nilai integral

$$\int_0^1 xe^{2x} dx.$$

PENYELESAIAN. Ambil $F(x) = x$, $g(x) = e^{2x}$. Dengan menggunakan kalkulus biasa diperoleh

$$f(x) = F'(x) = 1, G(x) = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Jadi $F(x)G(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}$. Dengan integral parsial didapat

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{2x} dx &= \int_0^1 F(x)g(x) dx \\ &= F(1)G(1) - F(0)G(0) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) \\ &= \frac{1}{4}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

PENYELESAIAN. Di sini kita mempunyai $a = 0$, $b = 2$. Ambil $\varphi(t) = t^2$, dan $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ maka $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Batas integral baru adalah $\varphi([0, 2]) = [0, 4]$. Diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt &= \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx. \\ &= \frac{1}{4} [\sqrt{1+x}]_0^4 \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

□

Satu lagi tipe metoda substitusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan integral.

Teorema 3.21. *Diasumsikan $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial pada J dan $\varphi'(t) \neq 0$ pada J . Misalkan $\psi : \varphi(J) \rightarrow \mathbb{R}$ invers dari φ dengan derivatif $\psi'(\varphi(t)) = 1/\varphi'(t)$. Jika $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dan $\varphi(J) \subset [a, b]$ maka berlaku*

$$\int_a^b f(\varphi(t)) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\psi'(x) dx. \quad (3.5.3)$$

BUKTI. Misalkan $G(t) := \int_a^t f(\varphi(s)) ds$ sehingga $G'(t) = f(\varphi(t))$. Selanjutnya ambil $K(x) := G(\psi(x))$, maka K terdiferensial pada interval $\varphi(J)$ dengan $K'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) = f(\varphi(\psi(x)))\psi'(x) = f(x)\psi'(x)$. Diperoleh

$$G(b) = \int_a^b f(\varphi(s)) ds,$$

dan $K(\varphi(b)) = G(\psi(\varphi(b))) = G(b)$. Karena $K(\varphi(b)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} K'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\psi'(x)dx$ maka formula dalam teorema terbukti. □

Kesulitan muncul dalam perhitungan integral adalah ketika antiderivatif integrannya tidak dapat ditemukan secara eksplisit. Sebagai contoh $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, atau $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$ tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa karena antiderivatifnya tidak dapat ditemukan. Untuk kasus rumit seperti ini, perhitungan integral tertentu dilakukan dengan metoda numerik di mana hasilnya berupa aproksimasi.

Jadi $m \leq f(x) \leq M$. Dengan memberikan integral pada ketidaksamaan ini diperoleh

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \\ m &\leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M. \end{aligned}$$

Karena itu berdasarkan teorema nilai antara Bolzano terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$. Dengan demikian TNR integral terbukti. \square

Bentuk lebih umum teorema nilai rerata integral diungkapkan pada teorema berikut.

Teorema 3.23. (PERUMUMAN TNR INTEGRAL) *Bila $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan $g(x) \geq 0$ pada $[a, b]$ maka ada $c \in [a, b]$ sehingga*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx. \quad (3.6.2)$$

BUKTI. Lihat Bartle and Sherbet (2000). \square

Syarat $g(x) \geq 0$ pada teorema ini dapat juga diganti dengan syarat $g(x)$ tidak berubah tanda di dalam $[a, b]$. Dalam kasus $g(x) \leq 0$ maka dapat diambil $-g$ sebagai penggantinya g sehingga syarat pada teorema tetap terpenuhi.

Contoh 3.22. Misalkan $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan berlaku $\int_a^b f = \int_a^b g$. Buktikan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = g(c)$.

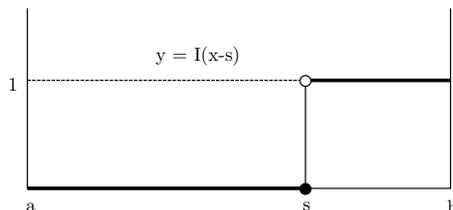
PENYELESAIAN. Cukup gunakan TNR integral dan sifat aljabar integral, yaitu

$$\int_a^b f = \int_a^b g \rightarrow \int_a^b (f - g) = 0.$$

Dengan mengambil $h(x) := f(x) - g(x)$ maka terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $\int_a^b h(x) dx = h(c)$. Dengan menggabungkan kedua hasil ini diperoleh

$$f(c) - g(c) = h(c) = 0, \text{ yaitu } f(c) = g(c).$$

\square



Gambar 3.15: Grafik fungsi tangga satuan

Sifat-sifat khusus integral Riemann-Stieltjes

Teorema 3.24. Misalkan $s \in (a, b)$ dan $\alpha(x) := I(x - s)$ di mana I adalah fungsi tangga satuan yang didefinisikan sebagai

$$I(x) := \begin{cases} 1 & \text{bila } x > 0 \\ 0 & \text{bila } x \leq 0. \end{cases}$$

dengan grafik seperti pada Gambar 3.15. Bila f kontinu pada $[a, b]$ maka

$$\int_a^b f(x) d\alpha = f(s). \quad (3.7.1)$$

BUKTI. Perhatikan partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ di mana $a =: x_0 < x_1 := s < x_2 < x_3 := b$. Dengan konstruksi ini maka s masuk anggota partisi. Untuk lebih jelasnya lihat Gambar 3.16. Maka terhadap partisi ini, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) &= M_1(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + M_2(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + M_3(\alpha(x_3) - \alpha(x_2)) \\ &= M_1(\alpha(s) - \alpha(a)) + M_2(\alpha(x_2) - \alpha(s)) + M_3(\alpha(b) - \alpha(s)) \\ &= M_1(0 - 0) + M_2(1 - 0) + M_3(1 - 1) = M_2. \end{aligned}$$

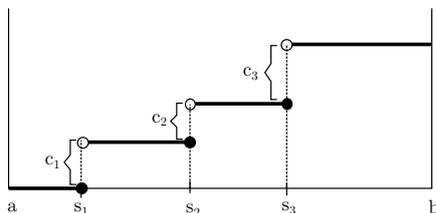
Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan untuk jumlah atas sebagai berikut

$$L(P, f, \alpha) = m_2.$$

Karena f kontinu, maka untuk $x_2 \rightarrow s$ diperoleh

$$M_2 = \sup_{x \in [s, x_2]} f(x) = \inf_{x \in [s, x_2]} f(x) = m_2 = f(s).$$

Dengan menggunakan sifat partisi penghalus seperti sering digunakan pada metoda Darboux



Gambar 3.17: Fungsi tangga berlapis

telah diperoleh sebelumnya maka berlaku

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) d\alpha &= \int_a^b f(x) d\left(\sum_{k=1}^p c_k \underbrace{I(x - s_k)}_{\alpha_k}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^p c_k \int_a^b f(x) d\alpha_k \\
 &= \sum_{k=1}^p c_k f(s_k).
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.26. Misalkan α monoton naik, terdiferensial pada $[a, b]$ dan α' terintegral Riemann pada $[a, b]$. Bila f fungsi terbatas pada $[a, b]$ maka berlaku implikasi berikut

$$f \in \mathcal{RS}[a, b] \leftrightarrow f\alpha' \in \mathcal{R}[a, b]$$

dan

$$\int_a^b f(x) d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx. \quad (3.7.3)$$

Di sini $\mathcal{RS}[a, b]$ menyatakan himpunan fungsi terintegral Riemann-Stieltjes pada $[a, b]$ dan $\mathcal{R}[a, b]$ himpunan fungsi terintegral Riemann pada $[a, b]$.

BUKTI. Buktinya cukup rumit sehingga tidak diberikan di sini. Pembaca yang tertarik silakan lihat pada Rudin (1976). □

Relasi (3.7.3) memberikan hubungan antara integral Riemann-Stieltjes dan integral Riemann biasa. Pada dasarnya jika variabel integrasi α terdiferensial maka integral Riemann-Stieltjes dapat dikembalikan ke integral Riemann. Namun untuk syarat yang lebih lemah seperti

3.8 Integral Takwajar

Topik ini sebenarnya sudah sering diberikan pada matakuliah kalkulus. Pembahasan berikut banyak merujuk buku teks standar kalkulus (Bradley dan Smith, 1995; Thomas dkk, 2005). Integral tertentu yang telah dibahas sebelumnya berbentuk

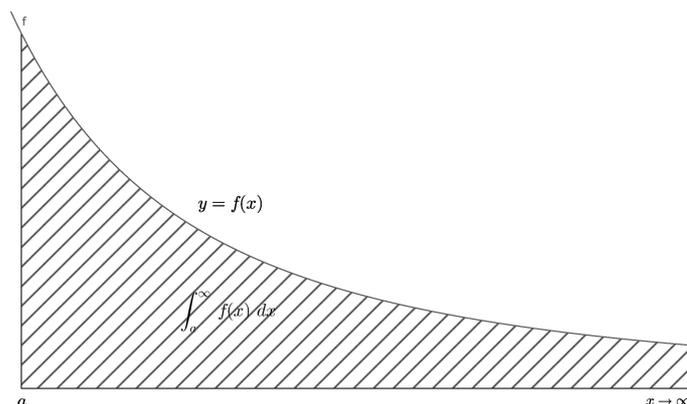
$$\int_a^b f(x) dx \quad (3.8.1)$$

di mana batas integral a dan b terbatas, yaitu $-\infty < a, b < \infty$ dan fungsi f terbatas pada domain $[a, b]$. Tanpa kedua syarat ini maka definisi integral yang telah dibahas tidak dapat digunakan. Jika ada syarat ini tidak dipenuhi maka disebut integral takwajar (*improper integral*). Oleh karena integral takwajar dikelompokan sebagai berikut:

1. Integral takwajar tipe 1, yaitu jika batas integrasinya memuat ∞ atau $-\infty$. Tiga variasi bentuk integral takwajar tipe 1 adalah

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx, \int_a^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Walaupun batas integral memuat ketakberhinggaan namun nilai intergralnya dapat saja ada atau berhingga. Sebagai ilustrasi, bila $f(x) \geq 0$, maka integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ dapat dibayangkan sebagai luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dari $x = a$ sampai dengan $x = \infty$, seperti terlihat pada Gambar 3.18. .



Gambar 3.18: Ilustrasi integral takwajar tipe 1

Bentuk lain integral takwajar tipe I

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx \quad (3.8.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &:= \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Contoh 3.23. Hitunglah integral takwajar

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

PENYELESAIAN. Gunakan definisi di atas untuk memperoleh

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{N} - (-1) \right] \\ &= 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Jadi, integral takwajar ini konvergen.

Contoh 3.24. Hitunglah integral takwajar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx$$

PENYELESAIAN. Selesaikan dahulu integral taktentu $\int \frac{3x}{(3x^2+2)^3} dx$, baru kemudian diambil limitnya. Misalkan $u = 3x^2 + 2$ maka $du = 6x dx$. Jadi $3x dx = 1/2 du$. Substitusi pemisalan ini ke dalam integral diperoleh :

$$\int \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx = \int \frac{1/2}{u^3} du = -\frac{1/4}{u^2} = -\frac{1/4}{(3x^2 + 2)^2}.$$

Sebaliknya jika $1 - p < 0$, yaitu $p > 1$ maka $N^{1-p} \rightarrow 0$ untuk $N \rightarrow \infty$. Jadi,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{1-p} [0 - 1] = \frac{1}{1-p}(-1) = \frac{1}{p-1} \text{ konvergen.}$$

Untuk $1-p = 0$, yaitu $p = 1$ integral ini divergen (lihat contoh sebelumnya)!. Jadi disimpulkan

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{bila } p > 1 \\ \text{divergen} & \text{bila } p \leq 1. \end{cases}$$

Jadi untuk setiap $p > 1$, integral takwajar $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ konvergen dengan nilai $\frac{1}{p-1}$. \square

3.8.2 Integral takwajar tipe 2

Definisi 3.11. Bila f takterbatas di a dan $\int_t^b f(x) dx$ ada untuk setiap $t > a$ maka integral takwajar didefinisikan sebagai :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx. \quad (3.8.5)$$

Bila f takterbatas di b dan $\int_a^t f(x) dx$ ada untuk setiap $t < b$ maka

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx. \quad (3.8.6)$$

Selanjutnya, bila f takterbatas di c , dengan $a < c < b$ maka integral dipecah menjadi dua yaitu

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (3.8.7)$$

dan selanjutnya digunakan definisi integral takwajar sebelumnya.

Contoh 3.27. Hitunglah nilai integral takwajar berikut dengan menggunakan definisi!

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$$

PENYELESAIAN. Diperhatikan fungsi $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ takterbatas di $x = 1$ dari kiri. Berdasarkan

titik 0 dari kanan. Jadi berdasarkan Definisi integral takwajar, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^p} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-p} [1 - t^{1-p}] \\ &= \frac{1}{1-p} \left[1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-p} \right] \end{aligned}$$

Diperhatikan suku terakhir ini mempunyai nilai berhingga jika $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-p}$ juga berhingga. Karena t mendekati nol maka nilai t^{1-p} akan bernilai nol bilamana $1-p > 0$, atau $p < 1$. Sedangkan bila $1-p < 0$, atau $p > 1$ maka t^{1-p} menjadi takterhingga. Untuk $p = 1$, soalnya menjadi integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan integral ini divergen. Pembaca dipersilakan mencobanya sendiri. Berdasarkan uraian di atas maka disimpulkan integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergen hanya untuk $p < 1$ dengan nilai integralnya $\frac{1}{1-p}$, tetapi divergen untuk $p \geq 1$. \square

BAB 4

KOMPUTASI NUMERIK INTEGRAL

Numbers are intellectual witness that belong only to mankind.

–Honore de BALZAC

4.1 Pendahuluan

Aproksimasi numerik suatu integral tertentu dikenal dengan istilah **kuadratur numerik** (*numerical quadrature*). Istilah ini berasal dari metode orang Yunani kuno untuk menghitung luas daerah di dalam kurva. Contoh yang sangat terkenal adalah masalah penguadratan lingkaran atau menentukan sebuah persegi yang mempunyai luas sama dengan lingkaran yang diberikan. Kuadratur juga dipahami sebagai metode aproksimasi integral dengan menggunakan jumlahan terhingga.

Pada bagian ini kita akan menghitung nilai numerik integral tertentu

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

di mana f diasumsikan kontinu dan cukup mulus. Asumsi ini sesungguhnya tidak perlu terlalu ketat sebab keterintegralan suatu fungsi tidak harus kontinu dan mulus. Artinya, fungsi kontinu sepotong-sepotong pun sudah dapat terintegral Riemann. Namun asumsi ini dibutuhkan dalam rangka menurunkan formula kesalahan aproksimasi integral. Berdasarkan

4.2 Formula Kuadratur Melalui Interpolasi

Prosedur dasar untuk aproksimasi integral tertentu suatu fungsi f pada interval $[a, b]$ adalah dengan cara memilih polinomial interpolasi yang mengaproksimasi f , kemudian mengintegrasikan polinomial ini. Hasilnya digunakan sebagai aproksimasi untuk integral fungsi f semula.

Bila diberikan $n + 1$ bilangan berlainan x_0, x_1, \dots, x_n berikut pasangannya $y_k := f(x_k), k = 0, 1, \dots, n$ maka terdapat dengan tunggal polinomial ber-derajat paling tinggi n , katakan $P_n(x)$ sehingga

$$P_n(x_k) = y_k \quad \text{untuk setiap } k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.1)$$

Polinomial yang memenuhi (4.2.1) disebut **polinomial interpolasi** untuk titik-titik $(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots, n$. Melalui $n + 1$ buah absis (nodes) kita dapat membangun polinomial interpolasi berderajat n . Dua metoda konstruksi polinomial interpolasi adalah dengan metoda Lagrange dan dengan formula selisih terbagi Newton (Hernadi, 2012). Bentuk polinomial interpolasi dengan metoda Lagrange adalah sebagai berikut

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) \quad (4.2.2)$$

di mana $\ell_k(x)$ adalah polinomial Lagrange yang didefinisikan sebagai

$$\ell_k(x) := \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Para polinomial Lagrange ini memenuhi sifat interpolasi, yaitu

$$\ell_k(x_j) = \delta_{k,j} := \begin{cases} 1 & \text{jika } k = j \\ 0 & \text{jika } k \neq j. \end{cases}$$

Karena $f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x)$ maka diperoleh formula kuadratur

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b \ell_k(x) dx. \end{aligned}$$

4.2.2 Metode trapesium

Metode ini menggunakan polinomial interpolasi derajat satu $P_1(x)$ dengan dua absis $x_0 = a$ dan $x_1 = b$. Jadi P_1 tidak lain adalah persamaan garis yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$. Dengan mudah formula untuk $P_1(x)$ diperoleh sebagai berikut, yaitu gradien $m := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dan melalui titik $(a, f(a))$.

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Selanjutnya polinomial ini diintegrasikan dari a sampai b , yaitu

$$\begin{aligned} \int_a^b P_1(x) dx &= \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) dx \\ &= \left[f(a)x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{1}{2}(x - a)^2 \right]_a^b \\ &= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{2(b - a)}(b - a)^2 \\ &= \frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b)). \end{aligned}$$

Hasil ini digunakan untuk aproksimasi integral dengan metode trapesium berikut:

$$I(f) \approx T(f) = \frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b)) \quad (4.2.5)$$

Formula (4.2.5) merupakan bentuk (4.1.2) dengan $n = 2, x_0 = a, x_1 = b, w_0 = w_1 = \frac{b-a}{2}$. Kita dapat juga menemukan formula ini dengan menggunakan definisi polinomial Lagrange $\ell_k(x)$. Di sini kita mempunyai dua Lagrange, yaitu

$$\ell_0(x) := \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{(x - b)}{a - b} \quad \text{dan} \quad \ell_1(x) := \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{1}{2(a - b)} [(x - b)^2]_a^b \\ &= \frac{1}{2(a - b)} [(b - b)^2 - (a - b)^2] = \frac{b - a}{2}. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama mudah diperoleh $w_1 = \frac{b-a}{2}$. Ilustrasi metode trapesium diberikan

interpolasi, formula kuadratur dapat pula ditemukan dengan metoda koefisien taktentu (*undetermined coefficient*).

4.3 Metoda Koefisien Taktentu

Metoda ini didasarkan pada kenyataan bahwa formula kuadratur memberikan hasil eksak untuk semua polinomial derajat n , yaitu

$$\sum_{k=0}^n w_k f(x_k) = \int_a^b f(x) dx$$

untuk semua fungsi f yang berupa polinomial derajat paling tinggi n , yaitu cukup dipenuhi oleh monomial $1, x, x^2, \dots, x^n$. Dalam penjabarannya, cukup diambil interval $[-1, 1]$, selanjutnya digunakan transformasi variabel untuk domain lebih umum $[a, b]$. Untuk trapesium bersesuaian dengan $n = 1$ dengan $x_0 = -1$ dan $x_1 = 1$. Jadi dua monomial $P_0(x) = 1$ dan $P_1(x) = x$ harus dipenuhi secara eksak formula kuadratur, yaitu untuk $f(x) = P_0(x) = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} w_0 P_0(-1) + w_1 P_0(1) &= \int_{-1}^1 1 dx \\ w_0 + w_1 &= 2 \end{aligned}$$

dan juga untuk $f(x) = P_1(x) = x$ diperoleh

$$\begin{aligned} w_0 P_1(-1) + w_1 P_1(1) &= \int_{-1}^1 x dx \\ -w_0 + w_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini maka diperoleh $w_0 = w_1 = 1$. Diperoleh aturan trapesium pada interval ini, yaitu

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(-1) + f(1).$$

Dengan transformasi variabel baru $t := \frac{2x-a-b}{b-a}$ maka diperoleh $x = \frac{1}{2}((b-a)t + a + b)$ dan $dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$. Untuk $x = a$ maka $t = -1$ dan untuk $x = b$ maka $t = 1$. Sehingga diperoleh

PENYELESAIAN. Di sini fungsi yang diintegrasikan adalah $f(x) = e^{-x^2}$ dengan batas-batas integral $a = 0, b = 1$. Untuk metode midpoint digunakan formula (4.2.4), diperoleh

$$M(f) = (1 - 0)f\left(\frac{0+1}{2}\right) = e^{-(\frac{1}{2})^2} = e^{-0.25} = 0.778801.$$

Untuk metode trapesium digunakan formula (4.2.5), dan hasilnya adalah

$$T(f) = \frac{1}{2}(1-0)(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(e^{-0^2} - e^{-1^2}) = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-1}) = 0.683940.$$

Terakhir untuk metode Simpson digunakan formula (4.2.6), dan hasilnya adalah

$$S(f) = \frac{1-0}{6}(e^0 + 4e^{-0.25} + e^{-1}) = 0.747180.$$

Untuk kesalahan, cukup diambil saja selisih mutlak antara nilai aproksimasi dan nilai eksaknya. Misalkan E_M, E_T dan E_S masing-masing kesalahan untuk aturan midpoint, trapesium dan Simpson maka diperoleh

$$E_M^{\text{nyata}} = |0.778801 - 0.746824| = 0.031977$$

$$E_T^{\text{nyata}} = |0.683940 - 0.746824| = 0.062884$$

$$E_S^{\text{nyata}} = |0.747180 - 0.746824| = 0.000356.$$

Ternyata metode Simpson memberikan kesalahan paling kecil di antara kedua metode lainnya. Berikutnya dibahas bentuk estimasi kesalahan untuk ketiga metode tersebut. \square

4.4 Estimasi Kesalahan Metode Kuadratur Dasar

Secara intuitif, pada setiap metode berlaku bahwa semakin sempit interval integrasi $[a, b]$ hasilnya diharapkan semakin teliti. Bagaimana pengaruh lebar interval integrasi ini terhadap kesalahan aproksimasi masing-masing metode diberikan pada beberapa teorema berikut. Hasil pada teorema ini merupakan bentuk estimasi kesalahan aproksimasi integral dengan formula kuadratur dasar.

Teorema 4.1. *Bila $f \in C^2[a, b]$ maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sehingga metode midpoint memberikan kesalahan sebagai berikut*

$$I(f) - M(f) := \int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3. \quad (4.4.1)$$

Dengan menggunakan formula error interpolasi (2.1.4) di mana $n = 1$ maka untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku

$$R_2(x) = f(x) - (L_2f)(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)$$

di mana $\xi(x) \in (a, b)$. Selanjutnya formula error ini diintegrasikan

$$\begin{aligned} I(f) - T(f) &= \int_a^b R_2(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b) dx \end{aligned}$$

Diperhatikan bentuk integral terakhir diterapkan TNR integral (3.6.2) yaitu dengan mengambil $g(x) := (x-a)(x-b) \leq 0$ (tidak pernah berubah tanda) dan $f_1(x) := \frac{f''(\xi(x))}{2}$. Jadi ada sebuah bilangan $\xi \in (a, b)$ sehingga

$$\int_a^b \left(\frac{f''(\xi(x))}{2} \right) ((x-a)(x-b)) dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b ((x-a)(x-b)) dx.$$

Berikutnya integral ini dihitung dengan kalkulus elementer sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)(x-b) dx &= \int_a^b (x-a)(x-a+(a-b)) dx \\ &= \int_a^b (x-a)^2 dx + \int_a^b (a-b)(x-a) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 + \frac{a-b}{2}(x-a) \right]_a^b \\ &= -\frac{1}{6}(b-a)^3. \end{aligned}$$

Substitusi hasil ini ke dalam integral sebelumnya, diperoleh

$$E_1(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b ((x-a)(x-b)) dx = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

□

Teorema 4.3. *Bila $f \in C^4[a, b]$ maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sehingga metode Simpson mem-*

sehingga

$$E_2(f) = \frac{f(z) - p(z)}{(z - x_0)(z - x_1)^2(z - x_2)} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)dx. \quad (*)$$

Diperhatikan bahwa p adalah polinomial interpolasi berderajat tiga untuk fungsi f dengan melibatkan 4 nodes, yaitu x_0, x_1 (dua kali) dan x_2 . Berdasarkan formula error interpolasi (2.1.4) maka terdapat $\xi \in [a, b]$ sehingga

$$f(z) - p(z) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (z - x_0)(z - x_1)^2(z - x_2).$$

Di lain pihak, dengan kalkulus elementer diperoleh nilai integral berikut:

$$\int_a^b (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)dx = -\frac{(b - a)^5}{120}.$$

Substitusi kedua hasil ini ke dalam (*), akhirnya diperoleh

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \frac{(b - a)^5}{120} = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b - a)^5.$$

□

Mengamati suku error yang diberikan oleh ketiga aturan tersebut (midpoint, trapesium dan Simpson) maka jelas metoda Simpson lebih hebat karena pembagi suku errornya sangat besar, yaitu 2880 sehingga total errornya menjadi kecil. Sebagian buka menyajikan suku error Simpson ini dalam bentuk

$$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$$

di mana $h := \frac{b-a}{2}$ (Kress, 1998).

Contoh 4.2. Pada kuliah kalkulus, logaritma natural (\ln) didefinisikan juga dalam bentuk integral berikut

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_0^{x-1} \frac{dz}{z+1}.$$

Jadi nilai $\ln 2$ dapat ditentukan dengan menghitung integral berikut

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}.$$

Aproksimasilah nilai $\ln 2$ ini dengan ketiga metode kuadratur dasar, tentukan estimasi kesala-

Estimasi kesalahan suatu metode aproksimasi memberikan batas atas kesalahan aproksimasi. Jadi kesalahan nyatanya tidak akan melebihi estimasi seperti telah ditunjukkan pada contoh di atas.

Bila diambil $h := b - a$ maka estimasi kesalahan ketiga formula merupakan fungsi h . Metode midpoint dan trapesium memberikan kesalahan dengan order $\mathcal{O}(h^3)$, sedangkan metode Simpson memberikan order $\mathcal{O}(h^5)$. Pengaruhnya adalah, jika lebar interval integrasi semula h diperkecil menjadi separuhnya $\frac{h}{2}$ maka kesalahannya berkurang menjadi $\frac{1}{8}$ dari kesalahan semula pada $\mathcal{O}(h^3)$, dan menjadi $\frac{1}{32}$ pada $\mathcal{O}(h^5)$.

4.5 Formula Kuadratur Bersusun

Penyusunan formula kuadratur bersusun untuk mengaproksimasi $\int_a^b f(x) dx$ didasarkan pada dua fakta berikut, yaitu

- Semakin sempit domain integral $[a, b]$ semakin teliti hasil aproksimasi yang diperoleh,
- Bila domain integral $[a, b]$ dipartisi menjadi $x_0 := a < x_1 < x_2 < \dots < x_n := b$ maka berlaku

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0:=a}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n:=b} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx. \end{aligned}$$

Sebagai ilustrasi diperhatikan contoh berikut ini.

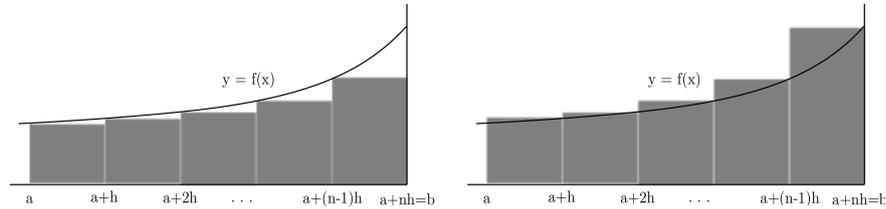
Contoh 4.3. Misal diinginkan mengaproksimasi integral $\int_0^2 e^x dx$ dengan metode Simpson. Untuk membandingkan hasil aproksimasinya, diberikan dulu nilai eksak integral ini, yaitu

$$\int_0^2 e^x dx = e^2 - e^0 = 6.3890561.$$

- Domain integral $[0, 2]$ tidak dipecah diperoleh

$$S(f) = \frac{1}{3} (e^0 + 4e^1 + e^2) = 6.4207278.$$

Hasil ini memberikan kesalahan 0.0316717.

Gambar 4.2: Aproksimasi $L_n(f)$ (kiri) dan $R_n(f)$

Oleh karena itu sangat masuk akal bila diambil nilai tengah keduanya sebagai aproksimasi integral, yaitu

$$\begin{aligned} T_n(f) &= \frac{1}{2}(L_n(f) + R_n(f)) \\ &= h \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2}f(b) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Mudah ditunjukkan bahwa jika fungsi f monoton (naik atau turun) maka diperoleh estimasi error sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - T_n(x) \right| &\leq \frac{1}{2}(R_n(f) - L_n(f)) \\ &= |f(b) - f(a)| \frac{(b-a)}{2n}. \end{aligned}$$

Formula (4.5.1) merupakan salah satu bentuk kuadratur bersusun yang selanjutnya disebut metoda trapesium. Berikutnya kita bahas tiga metoda kuadratur bersusun.

4.5.1 Metode midpoint bersusun

Kita tetapkan n genap. Perhatikan partisi seragam $a := x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n := b$, $h = h_n = \frac{b-a}{n}$. Maka $x_k - x_{k-1} = h$ untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$. Untuk setiap tiga absis berurutan dibentuk satu aproksimasi midpoint, yaitu

- melalui x_0, x_1 , dan x_2 diperoleh $M_1(f) = (x_2 - x_0)f(x_1) = 2hf(x_1)$,
- melalui x_2, x_3 , dan x_4 diperoleh $M_2(f) = (x_4 - x_2)f(x_3) = 2hf(x_3)$,
- melalui x_4, x_5 , dan x_6 diperoleh $M_3(f) = (x_6 - x_4)f(x_5) = 2hf(x_5)$

maka diperoleh $M_k(f) = hf(a + (k - \frac{1}{2})h)$ untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$. Kita jumlahkan semua midpoint ini diperoleh

$$M_n(f) = h \sum_{k=1}^n f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right). \quad (4.5.4)$$

Dari kedua bentuk aproksimasi midpoint di atas, bentuk terakhir tidak mengharuskan n genap. Formula (4.5.4) memberikan hasil lebih akurat dikarenakan aproksimasinya lebih halus, tetapi pekerjaan komputasinya lebih banyak. Estimasi error metoda midpoint diberikan pada teorema berikut.

Teorema 4.4. *Misalkan f, f' dan f'' kontinu pada $[a, b]$ dan $M_n(f)$ aproksimasi midpoint (4.5.4), maka terdapat $\xi \in [a, b]$ sehingga*

$$I(f) - M_n(f) := \int_a^b f(x)dx - M_n(f) = \frac{(b-a)h^2}{24} \cdot f''(\xi).$$

BUKTI. Lihat (Bartle dan Sherbet, 2000). □

Bila digunakan midpoint $M(f)$ seperti pada formula (4.5.3) maka estimasi errornya adalah

$$E = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\mu),$$

untuk suatu $\mu \in [a, b]$. (Hernadi, 2012).

4.5.2 Metode trapesium bersusun

Perhatikan partisi seragam $a := x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n := b$, di mana $h = x_i - x_{i-1} := \frac{b-a}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Di sini tidak disyaratkan n genap karena kita selalu dapat membangun satu aproksimasi trapesium T_k pada subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ untuk setiap $k = 1, \dots, n$, sehingga secara total terdapat n buah aproksimasi trapesium.

Karena $T_k = \frac{h}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$ untuk setiap $k = 1, 2, \dots, n$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} T(f) &= T_1 + T_2 + \dots + T_n \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_2) + f(x_4)) + \dots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right). \end{aligned}$$

4.5.3 Metode Simpson bersusun

Karena dibutuhkan 3 titik untuk membangun 1 aproksimasi Simpson maka dibutuhkan n genap pada pengambilan partisi seragam $a := x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n := b$, di mana $x_i - x_{i-1} = h := \frac{b-a}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan ide yang sama ketika menurunkan formula metode midpoint bersusun sebelumnya maka diperoleh tahapan aproksimasi berikut

$$\begin{aligned} \bullet S_1(f) &= \frac{(x_2-x_0)}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)), \\ \bullet S_2(f) &= \frac{(x_4-x_2)}{6} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) = \frac{h}{3} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)), \\ \bullet S_3(f) &= \frac{(x_6-x_4)}{6} (f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)) = \frac{h}{3} (f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)), \\ \bullet \dots \\ \bullet S_{\frac{n}{2}}(f) &= \frac{(x_n-x_{n-2})}{6} (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \frac{h}{3} (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)). \end{aligned}$$

Selanjutnya semua nilai ini dijumlahlah untuk mendapatkan

$$S(f) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + \dots + f(x_{n-2})) + f(x_n)).$$

Akhirnya, metode Simpson bersusun diberikan oleh formula

$$S(f) = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k}) \right). \quad (4.5.8)$$

Karena $x_k = a + kh$ maka formula ini dapat pula disajikan dalam bentuk berikut

$$S(f) = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f(a + (2k-1)h) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a + 2kh) \right). \quad (4.5.9)$$

Perhatikan dengan saksama bahwa ada pengelompokan unik nilai fungsi f pada *node* dengan indeks genap dan *node* dengan indeks ganjil. Seperti pada metoda trapesium, mesh pada metoda Simpson dapat diambil tidak seragam. Karena penjabarannya cukup panjang dan formula yang dihasilkan tidak sederhana maka umumnya digunakan partisi seragam. Ilustrasi grafis metode Simpson ini diberikan pada Gambar 4.5.

Estimasi tentang akurasi metoda Simpson ini diberikan pada teorema berikut.

1.5, $x_4 = 2.0$. Diperoleh

$$\begin{aligned} M(f) &= 2h \sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) \\ &= 2(0.5) (f(x_1) + f(x_3)) \\ &= \left((0.5)e^{-0.5^2} + (1.5)e^{-1.5^2} \right) = 0.5474992 \end{aligned}$$

untuk metode midpoint. Untuk metode Trapesium diperoleh

$$\begin{aligned} T(f) &= \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=2}^{n-1} f(x_k) \right) \\ &= \frac{0.5}{2} (f(0) + f(2) + 2(f(0.5) + f(1.0) + f(1.5))) \\ &= 0.25 \left(0 + 2e^{-2^2} + 2(0.5e^{-0.5^2} + e^{-1^2} + 1.5e^{-1.5^2}) \right) = 0.4668472. \end{aligned}$$

Untuk metode Simpson diperoleh

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-2} f(x_{2k}) \right) \\ &= \frac{0.5}{3} (f(0) + f(2) + 4(f(0.5) + f(1.5)) + 2(f(1))) \\ &= 0.4937312. \end{aligned}$$

Untuk $h = 0.25$ bersesuaian dengan $n = 8$, yaitu absis $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1, x_5 = 1.25, x_6 = 1.5, x_7 = 1.75, x_8 = 2$. Diperoleh

$$M(f) = 2(0.25) (f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)) = 0.5030266$$

untuk midpoint. Untuk metode trapesium diperoleh

$$T(f) = \frac{0.25}{2} (f(0) + f(2) + 2(f(0.25) + f(0.5) + \dots + f(1.75))) = 0.4849369.$$

Sedangkan metode Simpson memberikan hasil

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{0.25}{3} [f(0) + f(2) + 4(f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)) \\ &\quad + 2(f(0.5) + f(1) + f(1.5))] = 0.4909668. \end{aligned}$$

Untuk mengetahui kesalahan nyata dihitung dulu nilai eksak integral di atas, yaitu

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{(1+x)} \right]_0^2 = 0.6666667.$$

Dengan menggunakan formula kuadratur seperti sebelumnya diperoleh

$$M(f) = 0.6044444, T(f) = 0.705, S(f) = 0.6714815.$$

Jadi kesalahan nyatanya adalah

$$E_M^{\text{nyata}}(f) = 0.0622, E_T^{\text{nyata}}(f) = 0.0383, E_S^{\text{nyata}}(f) = 0.0048.$$

Ternyata kesalahan nyata masih di bawah estimasi. □

Aproksimasi integral untuk polinomial

Pada penurunan formula kuadratur telah digunakan polinomial sebagai fungsi aproksimasinya. Bila diperhatikan dengan saksama, metode midpoint memberikan hasil eksak untuk fungsi konstan, metode trapesium memberikan hasil eksak untuk fungsi linear dan metode Simpson memberikan hasil eksak untuk fungsi kuadrat.

Contoh 4.6. Diberikan beberapa fungsi polinomial berikut $f_0(x) = 2$, $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = 3x^2 + 2x + 1$ dan $f_3(x) = x^3 + 2x + 1$. Hitunglah nilai $\int_0^1 f_k(x) dx$ dengan menggunakan ketiga formula kuadratur dasar. Selidikah ketepatan aproksimasi dengan nilai eksaknya.

PENYELESAIAN. Nilai eksak integral masing-masing fungsi adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_0(x) dx &= \int_0^1 2 dx = 2, \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^1 = 2 \\ \int_0^1 f_2(x) dx &= \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx = [x^3 + x^2 + x]_0^1 = 3, \\ \int_0^1 f_3(x) dx &= \int_0^1 (x^3 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 + x \right]_0^1 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Nilai aproksimasi untuk masing-masing metode diperoleh sebagai berikut.

Midpoint: $M(f_0) = (1 - 0)f_0(0.5) = 2$, sebab $f_0(0.5) = 2$ sebuah fungsi konstan. Jadi $M(f_0)$ memberikan hasil **eksak** untuk integral fungsi konstan. Untuk fungsi f_1 diperoleh

4.6 Metode Integrasi Gauss

Pada pembahasan sebelumnya, metode Simpson memberikan hasil yang lebih akurat daripada metode lainnya. Fakta teoretisnya, metode Simpson dapat memberikan hasil eksak untuk polinomial sampai dengan derajat tiga. Ini mengindikasikan semakin tinggi derajat polinomial yang dapat disajikan secara eksak semakin akurat hasil yang diberikan oleh sebuah metode aproksimasi. Oleh karena itu, keakuratan metoda aproksimasi integral ditentukan setinggi apa derajat polinomial yang nilai integralnya dapat diperoleh secara eksak.

Definisi 4.1. Formula kuadratur $Q_n(f) := \sum_{k=1}^n c_k f(x_k)$ dikatakan mempunyai **derajat akurasi** p jika ia dapat memberikan hasil eksak untuk semua polinomial berderajat paling tinggi p .

Berdasarkan definisi ini, formula kuadratur dasar midpoint yang bersesuaian dengan $n = 1$ mempunyai derajat akurasi $p = 1$. Metode trapesium bersesuaian dengan $n = 2$ mempunyai derajat akurasi $p = 1$. Metode Simpson bersesuaian dengan $n = 3$ mempunyai derajat akurasi $p = 3$. Jadi untuk mendapatkan derajat akurasi lebih tinggi dibutuhkan absis lebih banyak. Namun di pihak lain, semakin banyak absis semakin rumit proses komputasi. Kerumitan proses komputasi secara formal disebut kompleksitas komputasi atau biaya komputasi (*computational cost*). Kompleksitas komputasi pada formula kuadratur berbanding lurus dengan banyaknya node n .

Metode integrasi Gauss merancang suatu formula kuadratur Q_n yang mempunyai derajat akurasi $p = 2n - 1$. Sebagai contoh, untuk $n = 2$ akan diperoleh derajat akurasi $p = 2(2) - 1 = 3$. Ini berarti biaya komputasi setara metode trapesium tetapi derajat akurasi setara metode Simpson. Untuk $n = 3$, biaya komputasi setara metode Simpson, tetapi derajat akurasinya $p = 5$, lebih tinggi dari Simpson. Berbeda dari metoda sebelumnya di mana absis diberikan kemudian ditentukan bobotnya, maka pada metoda Gauss absis dan bobot ditentukan secara simultan.

4.6.1 Integrasi Gauss order 2

Dibangun formula kuadratur $Q_2(f) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ yang mempunyai derajat akurasi $p = 2(2) - 1 = 3$ untuk integral

$$\int_{-1}^1 f(x) dx.$$

$\int_a^b f(x) dx$, yaitu $x = \frac{1}{2}((b-a)t + b + a)$ dan $dx = \frac{1}{2}(b-a) dt$ diperoleh

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt,$$

atau dalam bentuk eksplisit berikut

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{(b-a)t_1 + b + a}{2}\right) + f\left(\frac{(b-a)t_2 + b + a}{2}\right) \right] \quad (4.6.2)$$

di mana $t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ dan $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Contoh 4.7. Hitunglah aproksimasi integral $\int_0^2 e^x dx$ dengan metode integrasi Gauss, kemudian bandingkan hasilnya dengan metode Simpson.

PENYELESAIAN. Sebelumnya, pada Contoh 4.3 telah diperoleh hasil eksak untuk integral ini, yaitu 6.3890561. Metode Simpson memberikan hasil 6.4207278, yaitu dengan kesalahan 0.0316717. Sekarang diselesaikan dengan metode Gauss. Diketahui $a = 0, b = 2$ dan $f(x) = e^x$.

$$\int_0^2 e^x \approx \frac{2-0}{2} \left[f\left(\frac{-2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2}{2}\right) + f\left(\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2}{2}\right) \right] = 6.3681082$$

yang memberikan kesalahan 0.0209479. Dalam kasus ini metode Gauss lebih teliti daripada Simpson. \square

Representasi kesalahan integral Gauss tidak nampak secara eksplisit pada penurunan formula. Tetapi untuk $n = 2$, Kress (1998) memberikan representasi kesalahan berikut

$$E_G(f) := \int_{-1}^1 f(x) dx - \left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right] = \frac{1}{135} f^{(4)}(\mu) \quad (4.6.3)$$

untuk suatu $\mu \in [-1, 1]$.

Contoh 4.8. Bila metode integral Gauss order 2 digunakan untuk mengaproksimasi integral $\int_0^2 e^x dx$, tentukan estimasi kesalahannya.

PENYELESAIAN. Karena $f(x) = e^x$ dan $f^{(4)}(x) = e^x$ untuk setiap $x \in [0, 2]$. Berdasarkan

dengan hasil manual di atas.

TABEL 4.1: Absis dan bobot integrasi Gauss

n	2	3	4	5
Absis	0.5773502692	0.7745966692	0.8611363116	0.9061798459
$t_{n,j}$	-0.5773502692	0.0000000000 -0.7745966692	0.3399810436 -0.3399810436 -0.8611363116	0.5384693101 0.0000000000 -0.5384693101 -0.9061798459
Bobot	1.0000000000	0.5555555556	0.3478548451	0.2369268850
$c_{n,j}$	1.0000000000	0.8888888889 0.5555555556	0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451	0.4786286705 0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850

Secara umum, metode integrasi Gauss order n dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^n c_{n,j} f\left(\frac{(b-a)t_{n,j} + b + a}{2}\right). \quad (4.6.4)$$

Formula ini memberikan hasil eksak jika $f(x)$ polinomial berderajat paling tinggi $2n - 1$.

Untuk lebih memahami mengapa metode integrasi Gauss 2 titik ($n = 2$) lebih baik dari metode trapesium ($n = 2$), perhatikan ilustrasi geometri yang membandingkan kedua metode ini seperti terlihat pada Gambar 4.6. Pada panel kiri atas, aproksimasi metode trapesium di bawah nilai eksaknya, sedangkan pada panel kanan atas aproksimasi metode trapesium melebihi nilai eksaknya. Selisih aproksimasi ini dapat direduksi oleh metode Gauss seperti terlihat pada panel bawah.

4.6.3 Integrasi Gauss bersusun

Misalkan interval integrasi $[a, b]$ dipartisi seragam $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_N := b$, yakni $x_k - x_{k-1} := h$ untuk setiap $k = 1, \dots, N$. Pada setiap subinterval $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $k =$

setengahnya secara rekursif untuk mendapatkan order konvergensi yang lebih tinggi. Untuk jelasnya, kita ambil saja metoda trapesium dengan formula (4.5.6). Karena fungsi f sudah tertentu, kita nyatakan formula ini sebagai fungsi n sebagai berikut:

$$T(n) = h \left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) \right). \quad (4.7.1)$$

Untuk memahami ide di balik integrasi Romberg ini, kita berangkat dari kasus sangat sederhana dulu yaitu dengan mengambil $[0, 1]$ sebagai domain integral.

- Untuk $n = 1$ kita memperoleh $h = 1$ dan node $x_0 = 0, x_1 = b$, sehingga diperoleh

$$T(1) = \left(\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) \right).$$

- Untuk $n = 2$ kita memperoleh $h = \frac{1}{2}$ dan node $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = 1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} T(2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) + \frac{1}{2}f(1/2) = \frac{1}{2}T(1) + \frac{1}{2}f(1/2). \end{aligned}$$

- Untuk $n = 4$ kita mempunyai $h = \frac{1}{4}$ dan node $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}$ dan $x_4 = 1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} T(4) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) + f(1/2) \right) \right] + \frac{1}{4} [f(1/4) + f(3/4)] \\ &= \frac{1}{2}T(2) + \frac{1}{4} [f(1/4) + f(3/4)]. \end{aligned}$$

- Dengan cara sejalan, untuk $n = 8$, diperoleh hubungan berikut

$$T(8) = \frac{1}{2}T(4) + \frac{1}{8} (f(1/8) + f(3/8) + f(5/8) + f(7/8)).$$

Diperhatikan penambahan jumlah node dari n menjadi $2n$ berarti memperkecil mesh dari h menjadi $\frac{h}{2}$. Dengan memperhatikan pola induktif di atas maka kita dapat menyusun formulasi umum yang menghubungkan $T(2n)$ dan $T(n)$ pada sebarang interval $[a, b]$ dengan menetapkan

Dengan menetapkan $N_1(h) := N(h)$ dan $N_2(h) := N_1\left(\frac{h}{2}\right) + (N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h))$ maka dapat ditulis

$$M = N_2(h) - K_2 \frac{h^2}{2} - K_3 \frac{3h^3}{4} - \dots \quad (\text{iii})$$

Lagi, h pada (iii) diganti dengan $\frac{h}{2}$ diperoleh

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - K_2 \frac{h^2}{8} - K_3 \frac{3h^3}{32} - \dots$$

Dikalikan dengan 4 diperoleh

$$4M = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - K_2 \frac{h^2}{2} - K_3 \frac{3h^3}{8} - \dots \quad (\text{iv})$$

Dilakukan pengurangan (iv)-(iii) dan disusun ulang suku-suku yang ada diperoleh

$$M = \left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{3} \right] + K_3 \frac{h^3}{8} + \dots$$

Dengan mengambil $N_3(h) := N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{3}$ maka dapat ditulis

$$M = [N_3(h)] + K_3 \frac{h^3}{8} + \dots$$

Diperhatikan bahwa $N_1(h)$, $N_2(h)$ dan $N_3(h)$ ketiganya merupakan aproksimasi untuk kuantitas M dengan order konvergensi meningkat. Dengan cara yang sejalan kita akan memperoleh

$$\begin{aligned} N_4(h) &= N_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_3\left(\frac{h}{2}\right) - N_3(h)}{7} \\ N_5(h) &= N_4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_4\left(\frac{h}{2}\right) - N_4(h)}{15} \end{aligned}$$

Pola ini dapat diperumum menjadi bentuk rekursif sebagai berikut

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1} \quad (4.7.4)$$

Bentuk ini sama dengan bentuk rekursif (2.3.8) pada metoda ekstrapolasi Richardson untuk derivatif. Jadi untuk memperoleh formula aproksimasi yang lebih tinggi kita membutuhkan dua nilai aproksimasi pada level sebelumnya. Hal ini dapat dijelaskan pada Tabel 4.2.

TABEL 4.3: Tahapan komputasi pada integrasi Romberg

awal	1 st	2 nd	3 rd	4 th	...	m th
$R(0,0)$						
$R(1,0)$	$R(1,1)$					
$R(2,0)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$				
$R(3,0)$	$R(3,1)$	$R(3,2)$	$R(3,3)$			
$R(4,0)$	$R(4,1)$	$R(4,2)$	$R(4,3)$	$R(4,4)$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
$R(M,0)$	$R(M,1)$	$R(M,2)$	$R(M,3)$	$R(M,4)$...	$R(M,M)$

tuhkan perhitungan yang cukup rumit dan panjang, selanjutnya implementasi metoda integrasi Romberg akan dilakukan dengan bantuan MATLAB.

4.8 Komputasi Numerik Integral Takwajar

Telah dijelaskan pada Bab Pengantar Teori Integral, integral takwajar tidak dapat diperlakukan seperti integral biasa dikarenakan adanya ketakberhinggaan baik pada batas integral maupun pada nilai integrannya. Dengan demikian jumlahan Riemann yang menjadi dasar perhitungan nilai integral tidak dapat diterapkan langsung pada integral takwajar. Kita perhatikan integral takwajar tipe 2 sebagai berikut

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx.$$

Integral takwajar ini mempunyai singularitas di $x = a$. Dengan menggunakan definisi yang sudah diberikan sebelumnya maka dapat disimpulkan integral ini konvergen hanya jika $0 < p < 1$ yaitu

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}.$$

Jika fungsi g kontinu pada $[a, b]$ dan $0 < p < 1$ dan fungsi f berbentuk

$$f(x) := \frac{g(x)}{(x-a)^p} \tag{4.8.1}$$

maka integral takwajar $\int_a^b f(x) dx$ juga konvergen. Permasalahannya adalah bagaimana menghitung nilainya jika antiderivatif f tidak tersedia secara eksplisit.

Perhatikan kita telah berhasil membawa integral takwajar menjadi integral wajar yang nilainya sama. Bahkan formula Simpson bersusun dapat diterapkan dengan sempurna dikarenakan syarat $G^{(4)}$ terpenuhi.

Contoh 4.10. Hitunglah integral takwajar berikut

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

dengan menggunakan Simpson dengan $h := \pi/4$.

PENYELESAIAN. Dalam hal ini kita mempunyai $g(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \pi$ dan $p = 0.5$. Langkah pertama dibangun polinomial Taylor derajat 4 fungsi g di sekitar 0.

$$\begin{aligned} g(0) &= \cos 0 = 1, g'(0) = -\sin 0 = 0, g''(0) = -\cos 0 = -1, \\ g'''(0) &= \sin 0 = 0, g^{(4)}(0) = \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Jadi polinomial Taylor yang dimaksud adalah

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Dengan menggunakan (4.8.3) maka suku kedua integral di atas dapat dihitung sebagai berikut

$$\int_0^{\pi} \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\pi^{1/2} - \frac{1}{5}\pi^{5/2} + \frac{1}{(12)(9)}\pi^{9/2} = 1.6449.$$

Didefinisikan fungsi $G : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$G(x) := \begin{cases} \frac{\cos x - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})}{\sqrt{x}} & \text{jika } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{jika } x = 0. \end{cases}$$

Selanjutnya dihitung $\int_0^{\pi} G(x) dx$ dengan menggunakan aturan Simpson $h = \frac{\pi}{4}$ sehingga node yang dibutuhkan adalah $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/2, x_3 = 3\pi/4, x_4 = \pi$. Nilai fungsi G pada node-node ini diberikan pada tabel berikut.

node	: 0.00000	0.78540	1.57080	2.35619	3.14159
G(node):	0.00000	-0.00036	-0.01593	-0.14038	-0.63410

Sedangkan batas integralnya $x = a \rightarrow t = 1/x$ dan untuk x mendekati ∞ maka t mendekati nol. Jadi integral takwajar tipe 1 di atas menjadi integral takwajar tipe 2 berikut.

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx = \int_{1/a}^0 \left(-\frac{t^p}{t^2} \right) dt = \int_0^{1/a} \frac{1}{t^{2-p}} dt.$$

Contoh 4.11. Aproksimasilah integral takwajar berikut dengan metoda Simpson dengan mengambil $n = 6$.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4} dx$$

PENYELESAIAN. Pertama kita substitusi variabel $t = \frac{1}{x}$. Berdasarkan penjelasan di atas dengan $a = 1$ maka diperoleh bentuk sebagai berikut

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4} dx = \int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t^{-2}}$$

□

4.9 Komputasi dengan MATLAB

4.9.1 Kuadratur sederhana

Pada metoda kuadratur sederhana kita mempunyai tiga metoda yaitu midpoint, trapesium dan Simpson untuk mengaproksimasi integral $\int_a^b f(x) dx$, yaitu

$$\begin{aligned} M(f) &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)), \\ S(f) &= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \end{aligned}$$

Untuk implementasi, digunakan fungsi $f(x) := xe^{x^2}$. Berikut m-file yang bersesuaian dengan ketiga metoda tersebut.

```
function [M,T,S]=kuad_dasar(a,b)
% input: batas integrasi a dan b
% output: ketiga metoda kuadratur dasar, M untuk midpoint,
%         T untuk trapesium dan S untuk Simpson.
```

```
v=[eksak, Mid, Err_Mid, Trap, Err_Trap, Simp, Err_Simp]
```

sebagai berikut

```
function v=eksp_kdasar(a,b)
% input: batas integrasi a dan b
% output: vektor v seperti di atas
M = (b-a)*feval('fun',(a+b)/2);
T = (b-a)/2*(feval('fun',a)+feval('fun',b));
S = (b-a)/6*(feval('fun',a)+4*feval('fun',(a+b)/2)+feval('fun',b));
eksak = feval('fun1',b)-feval('fun1',a);
v = [eksak M abs(M-eksak) T abs(T-eksak) S abs(S-eksak)];
%fungsi yang diintegrasikan
function y = fun(x)
y = x*exp(x^2);
%fungsi hasil integral
function y = fun1(x)
y = 0.5*exp(x^2);
```

Tentunya m-file ini hanya akan menghasilkan baris per baris berdasarkan batas integral a dan b yang diberikan. Sebagai contoh bila diberikan perintah pada command window

```
>>v=eksp_kdasar(0,1)
```

maka akan muncul keluaran 0.8591 0.6420 0.2171 1.3591 0.5000 0.8811 0.0219.

4.9.2 Kuadratur bersusun

Dalam bagian ini kita mempunyai tiga formula yang telah ditemukan sebelumnya, yaitu metoda midpoint bersusun, trapesium bersusun, dan Simpson bersusun. Untuk implementasi MATLAB ini kita gunakan formula berikut.

- Midpoint: $M(f) = 2h \sum_{k=1}^{n/2} f(a + (2k - 1)h)$.
- Trapesium: $T(f) = \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) \right)$.
- Simpson: $S(f) = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f(a + (2k - 1)h) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a + 2kh) \right)$.

```

if(rem(n,2)~=0)
    error('Anda memasukkan nilai n ganjil, seharusnya genap')
end
node_ganjil = x(2:2:end-1);
node_genap = x(3:2:end-2);
S = (h/3)*(feval('fun',a)+feval('fun',b)+...
    4*sum(feval('fun',node_ganjil))+2*sum(feval('fun',node_genap)));
%fungsi yang diintegalkan
function y = fun(x)
y = x.*exp(x.^2);

```

Pada metoda trapesium kita cukup menghitung semua nilai fungsi pada interior x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , dijumlahkan dan hasilnya dikalikan dengan 2. Selanjutnya terapkan rumus trapesium di atas.

```

function T=trapes(a,b,n)
%masukkan n bulat positif (boleh genap atau ganjil)
h = (b-a)/n;
x = a:h:b;
node_interior = x(2:end-1);
T = (h/2)*(feval('fun',a)+feval('fun',b)+...
    2*sum(feval('fun',node_interior)));
%fungsi integral
function y = fun(x)
y = x.*exp(x.^2);

```

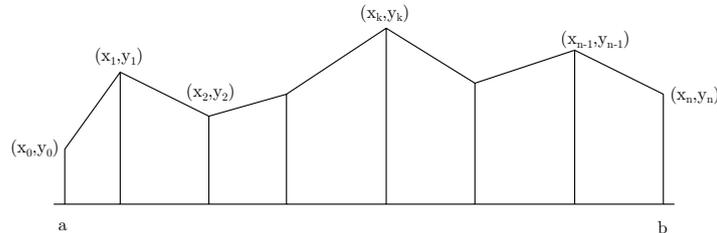
Diperhatikan kita hanya menggunakan operasi array pada ketiga m-file di atas, sehingga lebih efisien daripada menggunakan loop for. Sesungguhnya kita mempunyai formula midpoint yang tidak bersyarat pada banyaknya node, yaitu $M_n(f) = h \sum_{k=1}^n f(a + (k - \frac{1}{2})h)$ dan trapesium takseragam $T_1(f) = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$. Trapesium takseragam biasanya digunakan untuk menghitung integral data tabular yang akan dibahas pada bagian berikutnya.

Contoh 4.12. Terapkan m-file di atas untuk mengaproksimasi integral $\int_0^2 xe^{x^2} dx$ dengan menggunakan banyak subinterval $n = 20$ dan $n = 15$.

```

>> M=midpoint(0,2,20)
M =
    26.0054
>> S=simpson(0,2,20)
S =

```



Gambar 4.7: Interpolasi linear data tabular

Untuk mengaproksimasi fungsi yang tersajikan dalam bentuk tabular seperti ini umumnya dilakukan dengan menggunakan teknik interpolasi. Paling sering digunakan interpolasi linear pada setiap pasangan titik berdekatan. Ilustrasinya diberikan pada gambar 4.7.

Konsekuensi dengan teknik ini maka metoda yang cocok adalah trapesium takseragam

$$T_1(f) = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$$

di mana $h_k := x_k - x_{k-1}$ adalah lebar subinterval $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ dan $f(x_k) = y_k$. Lagi, cara cerdas menyusun m-file MATLAB adalah dengan menggunakan operasi array. Himpunan para lebar subinterval h_k dan nilai $y_{k-1} + y_k$ dapat diperoleh dengan mudah sebagai berikut:

x_1	x_2	\cdots	x_n		y_0	y_1	\cdots	y_{n-1}
x_0	x_1	\cdots	x_{n-1}		y_1	y_2	\cdots	y_n
$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	\cdots	$x_n - x_{n-1}$		$y_0 + y_1$	$y_1 + y_2$	\cdots	$y_{n-1} + y_n$

Bila $h := \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ dan $yy := \{y_0 + y_1, y_1 + y_2, \dots, y_{n-1} + y_n\}$ maka formula di atas dapat ditulis dengan operasi array MATLAB berikut `T1=sum((h/2).*yy)`; sangat sederhana. Notasi “`.*`” digunakan untuk perkalian antar komponen. Berikut m-file yang dimaksud.

```
function T1 = int_tab(datax,datay)
%input: datax adalah array para x_k, datay adalah array para y_k
a1=datax(2:end);a2=datax(1:end-1);h=a1-a2; %mendefinisikan array h
b1=datay(1:end-1);b2=datay(2:end);yy=b1+b2; % mendefinisikan array yy
T1 = sum((h/2).*yy);
```

Untuk memastikan m-file ini benar kita terapkan pada kasus seragam. Sebelumnya sudah dicobakan trapesium seragam dengan mengambil 15 subinterval pada interval $[0, 2]$ dengan

Untuk ini dibutuhkan bobot dan absis seperti terdapat pada Tabel 4.1. Untuk $n = 4$, bobot dan absis yang bersesuaian dengan tabel adalah sebagai berikut.

```
bobot = [0.8611363116, 0.3399810436, -0.3399810436, -0.8611363116]
absis = [0.3478548451, 0.6521451549, 0.6521451549, 0.3478548451].
```

Berikut m-file yang dimaksud dengan mengambil $f(x) = xe^{x^2}$ sebagai fungsi yang diintegrasikan.

```
function q = gauss4(a,b)
%input: a dan b sebagai batas integral
%output: q nilai aproksimasi dengan integrasi Gauss
c = [0.8611363116, 0.3399810436, -0.3399810436, -0.8611363116];%absis
t = [0.3478548451, 0.6521451549, 0.6521451549, 0.3478548451];%bobot
x = ((b-a)*t+b+a)/2; % absis hasil transformasi
q = (b-a)/2*sum(c.*feval('fun',x));
%fungsi yang diintegrasikan
function y = fun(x);
y = x.*exp(x.^2);
```

Hasil atau keluaran m-file ini dengan $a = 0$ dan $b = 2$ adalah

```
>> q = gauss4(0,2)
q =
    26.6552
```

Untuk order lainnya kita cukup mengganti bobot yang dinyatakan oleh array c dan absis t pada m-file `gauss4.m` di atas, sedangkan baris lainnya tetap kecuali mungkin nama file dapat disesuaikan dengan selera masing-masing. Lagi, kita memanfaatkan keunggulan operasi array MATLAB untuk menyusun m-file ini sehingga lebih efisien daripada menggunakan loop `for`.

Untuk metode Gauss bersusun, merujuk kepada rumus yang telah ditemukan sebelumnya yaitu

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n c_{n,j} f\left(\frac{h(t_{n,j} + 1) + 2x_{k-1}}{2}\right).$$

Diperoleh m-file yang lebih rumit dari sebelumnya, yaitu

1. Tetapkan batas integral a dan b , dan level aproksimasi M .
2. Hitung elemen-elemen pada kolom pertama dengan menggunakan formula rekursif

$$R(0,0) := \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$$

$$R(n,0) := \frac{1}{2}R(n-1,0) + \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(a + (2k-1)\frac{b-a}{2^n}\right),$$

di mana $n = 1, 2, \dots, M$.

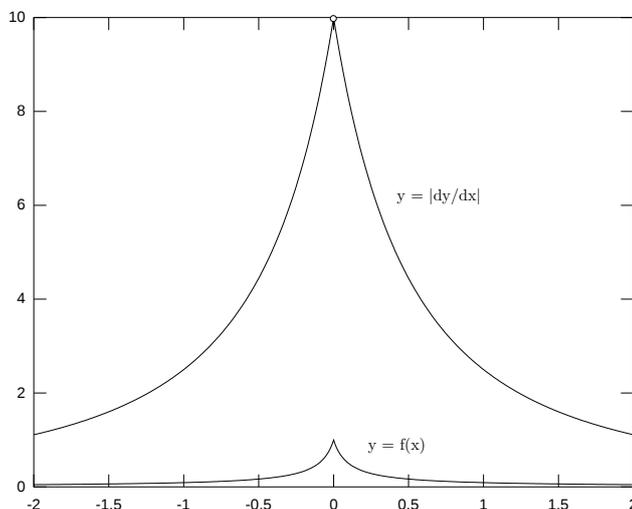
3. Selanjutnya didefinisikan elemen-elemen pada kolom berikutnya dengan formula rekursif berikut, yaitu

$$R(n, m) = R(n, m-1) + \frac{1}{4^m - 1} [R(n, m-1) - R(n-1, m-1)]$$

di mana $m = 1, 2, \dots, M$ dan $n = m, m+1, \dots, M$.

Perlu dilakukan adaptasi indeks karena MATLAB tidak mengenal indeks 0. Berkaitan dengan implementasi ini kita susun m-file berikut.

```
function R = romberg_int(a,b,M)
input: batas integral dan level aproksimasi M
output: matriks segitiga bawah aproksimasi Romberg
R = zeros(M+1,M+1); %matriks untuk menampung nilai aproksimasi
h = b-a; %mesh awal
R(1,1)=0.5*(b-a)*(feval('fun',a)+feval('fun',b));
for n = 1:M
    h = h/2;%penghalusan mesh
    i = 1:2^(n-1);%indeks node
    nodes = a+(2*i-1)*h;%node yang digunakan
    fnode = sum(feval('fun',nodes));
    R(n+1,1)=0.5*R(n,1)+h*fnode;
end
for m = 1:M
    for n=m:M
        R(n+1,m+1)=R(n+1,m)+(R(n+1,m)-R(n,m))/(4^m-1);
    end
end
%integrand
function y = fun(x)
```



Gambar 4.8: Grafik fungsi terjal dan derivatifnya

Grafik fungsi ini dan derivatifnya diberikan pada Gambar 4.8. Dengan demikian fungsi ini terintegral pada $[-2, 2]$.

Selanjutnya akan diaproksimasi integral fungsi ini, yaitu

$$\int_{-2}^2 f(x) dx.$$

Biasanya node diambil secara seragam di dalam domain ini. Kali ini kita akan membandingkan hasil aproksimasi dengan menggunakan node seragam dan node yang disesuaikan dengan kelakuan fungsi. Magnitud derivatif fungsi dapat digunakan sebagai ukuran keterjalan fungsi. Diperhatikan bahwa fungsi berubah sangat cepat di daerah di mana magnitud derivatifnya besar. Misalnya, nilai $|f'(x)| > 6.5$ terjadi pada interval $[-0.25, 0.25]$. Nah, pada interval ini, mesh h diambil lebih kecil daripada mesh h pada subdomain lainnya yaitu $[-2, -0.25]$ dan $[0.25, 2]$. Untuk eksperimen numerik ini kita mengambil dua macam partisi, masing-masing memuat 37 node, yaitu

1. Partisi seragam dengan $h := \frac{2 - (-2)}{37} = 0.108$ sama untuk semua subinterval.
2. Partisi adaptif, yaitu pada subinterval $[-2, -0.25]$ dan $[0.25, 2]$ di ambil $h = 0.25$, sedangkan pada interval $[-0.25, 0.25]$ diambil $h = 0.02$.

Kedua partisi ini menghasilkan diskretisasi fungsi seperti diilustrasikan pada Gambar 4.9. Se-

```

        y(k)=1/(1-10*x(k));
    end
end

```

Selanjutnya m-file ini disimpan dengan nama `fun234.m`. Untuk mempersiapkan `datax` dengan partisi seragam, yaitu diambil sebanyak 37 data berjarak sama dalam interval $[-2, -0.25]$, cukup digunakan perintah MATLAB `linspace(-2, -0.25, 37)`. Untuk mempersiapkan `datay` kita gunakan m-file di atas karena `datay` tidak lain adalah fungsi f pada `datax`. Lengkapnya sebagai berikut.

```

>>datax1=linspace(-2,2,37);%mempersiapkan datax seragam
>>datay1=fun234(datax1);%mempersiapkan datay sbg pasangan datax
>>T1 = int_tab(datax1,datay1)
T1 =
    0.627660018440830

```

Jadi aproksimasi dengan metoda trapesium bersusun dengan node diambil seragam memberikan error mutlak sebesar $0.62766 - 0.6089044 = 0.01875$. Selanjutnya kita lakukan aproksimasi dengan metoda adaptif seperti sudah disampaikan di atas. Seperti biasa kita siapkan `datax2` dan `datay2` seperti langkah-langkah sebelumnya.

```

>>datax2=[-2:0.25:-0.25 -0.2:0.02:0.2 0.25:0.25:2];
>>datay2=fun234(datax2);
>>T2 = int_tab(datax2,datay2)
T2 =
    0.617523651861887

```

Diperoleh error mutlak sebesar $0.617524 - 0.6089044 = 0.0086$. Hasilnya lebih akurat daripada menggunakan partisi seragam. Padahal jumlah node pada kedua pendekatan adalah sama. Akan lebih akurat lagi jika metoda adaptif dikombinasikan dengan metoda integrasi Romberg seperti diberikan oleh Epperson (2002).

Setelah kedua m-file ini disimpan, buka *command window*. Lakukan perintah berikut

```
>> q = quad('fun21',0,2)
q =
    26.7991
>> q = quad('fun22',0,2)
q =
   -0.4605
```

Berdasarkan keluaran ini diperoleh $\int_0^2 xe^x dx \approx 26.7991$. Bandingkan aproksimasi ini dengan hasil eksak sebelumnya, juga eksak dalam 6 digit. Untuk yang kedua diperoleh $\int_0^2 \frac{1}{x^3-2x-5} dx \approx -0.4605$.

Silakan mencoba untuk batas integral lainnya, atau fungsi lainnya. Kelebihan lain m-file ini adalah dapat diterapkan pada fungsi berbentuk vektor. Untuk lebih jelasnya, silakan lihat **help** untuk bantuan dengan cara mengetik pada *command window*

```
>>help quad.m
```

Sekali lagi perlu diingatkan bahwa walaupun berbagai fasilitas instan sudah tersedia, namun disarankan agar tetap memahami langkah-langkah penulisan m-file sendiri dengan merujuk pada teori yang sudah dipahami. Dengan memahami latar belakang teoretis, menyusun algoritma, kemudian dapat mengimplementasikannya pada MATLAB maka banyak pengalaman belajar berharga yang dapat Anda peroleh. Selanjutnya, pengalaman ini dapat digunakan untuk pendalaman dan pengembangan keilmuan, seperti penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H.T. Banks, S. Dediu, S.L. Ernstberger, and F. Kappel. Generalized sensitivities and optimal experimental design. *Journal of Invers and Ill-Posed Problems*, 18:25–83, 2010.
- [2] Robert G. Bartle. *An Elements of Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc, 1968.
- [3] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis (third edition)*. John Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [4] H. Berland. *Automatic Differential*, 2006.
- [5] Gerald L. Bradley and Karl J. Smith. *Calculus*. Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [6] Stephen L. Campbell and R. Hollenbeck. Automatic differentiation and implicit differential equations. Technical report, Departments of Mathematics, NCSU, Raleigh, NC, 1996.
- [7] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [8] P. Eberhard and C. Bischof. Automatic differentiation of numerical integral algorithms. *Mathematics of Computation*, 68:717–731, 1999.
- [9] James F. Epperson. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [10] J. Douglas. Faires and R. Burden. *Numerical Method*. Thomson Brooks-Cole, 2003.
- [11] Shaun A. Forth and Naveen Kr. Sharma. Automatic differentiation and sparse matrices. In *Sparse Matrices for Scientific Computation*, 2009.
- [12] T. Hawkin. *Lebesgue’s Theory of Integral, Its Origin and Development*. AMS Chelsea Publishing, 2012.

GLOSARIUM

Absis titik-titik dalam domain integral yang diambil untuk evaluasi integral pada formula kuadratur.

Algoritma diferensial nama lain dari otomatisasi diferensial, yaitu perhitungan nilai derivatif dengan program komputer.

Analisis kesalahan studi mendalam tentang estimasi kesalahan sebuah skema aproksimasi.

Antiderivatif kebalikan dari derivatif.

Aproksimasi nilai pendekatan terhadap nilai sesungguhnya.

Aturan rantai aturan yang digunakan untuk menentukan derivatif komposisi fungsi.

Otomatisasi diferensial metoda menghitung derivatif fungsi dengan program komputer.

Berosilasi berkelakuan seperti gelombang.

Bentuk taktentu bentuk pada limit yang belum menyimpulkan apapun.

Bobot koefisien pada formula kuadratur.

Ceiling pembulatan ke atas.

Definisi pengertian dasar suatu konsep dalam matematika.

Derajat akurasi derajat polinomial tertinggi yang dapat dicapai secara eksak oleh sebuah formula kuadratur.

Derivatif nilai turunan fungsi.

Fungsi tangga satuan fungsi yang bernilai 1 pada bilangan positif dan bernilai 0 untuk lainnya.

Fungsi terbatas fungsi yang nilai-nilainya dibatasi oleh sebuah konstanta.

Fungsi terintegral fungsi yang memenuhi definisi keterintegralan, atau fungsi yang nilai integralnya dapat diperoleh.

Fungsional error fungsi yang digunakan untuk membandingkan nilai terukur dan nilai ideal.

Fungsional kuadrat terkecil terbobot fungsional error yang didefinisikan dengan mengambil kuadrat error dan diberikan bobot.

Garis secant garis yang ditarik dari dua titik berbeda pada sebuah kurva. Disebut juga tali busur kurva.

Garis singgung garis yang hanya menyentuh satu titik tertentu.

Integral sebuah proses penggabungan elemen-elemen kecil melalui limit.

Integral atas integral yang diperoleh dari jumlahan atas.

Integral bawah integral yang diperoleh dari jumlahan bawah.

Integral Cauchy integral yang diperoleh dengan metoda Cauchy.

Integral divergen jika nilainya tidak ada, lawannya konvergen.

Integral Lebesgue integral yang didefinisikan melalui teori ukuran, berbeda dari pendekatan Riemann.

Integral Riemann integral yang didefinisikan dengan pendekatan jumlah Riemann.

Integral Riemann-Stieltjes salah satu perumuman integral Riemann.

Integral taktentu istilah lain antiderivatif.

Integral takwajar integral yang batasnya takberhingga atau integrannya takterbatas pada domain integralnya.

Jumlahan Riemann total luas persegi panjang yang terbentuk oleh partisi dan fungsi yang didefinisikan padanya.

Order konvergensi pola kekonvergenan barisan aproksimasi.

Partisi dekomposisi domain menjadi subdomain disajikan dalam bentuk himpunan terurut.

Penghalus partisi partisi yang dipecah menjadi subpartisi.

Partisi seragam partisi di mana lebar masing-masing subintervalnya sama.

Partisi terlabel himpunan subinterval partisi yang dilengkapi oleh sebuah label pada masing-masing subinterval.

Persekitaran daerah yang berjarak sama teradap titik tertentu.

Polinomial aproksimasi fungsi suku banyak yang digunakan untuk mengaproksimasi fungsi sebarang.

Primitif fungsi hasil integral fungsi dengan batas atas berupa variabel.

Rancangan optimal prosedur memilih sampel yang memberikan informasi paling banyak terhadap parameter yang akan diestimasi.

Rekursif proses pengulangan.

Sensitivitas aproksimasi tingkat kerentanan formula aproksimasi terhadap perturbasi kecil pada data.

Sifat interpolasi sifat yang dimiliki polinomial Lagrange, bernilai 1 pada node utama dan bernilai 0 pada node lainnya.

Smoothing penghalusan data dengan menggunakan polinomial berderajat cukup tinggi. Istilah lain adalah penghalusan.

Suku sisa fungsi selisih antara fungsi asli dan polinomial Taylor.

Syarat cukup kondisi yang cukup untuk memperoleh sebuah kesimpulan.

Syarat perlu kondisi yang harus dipenuhi bila terjadi sebuah kesimpulan.

Syarat perlu dan cukup merujuk pada biimplikasi.

Teorema pernyataan yang kebenarannya dapat dibuktikan.

Terbatas lokal terbatas hanya di sekitar titik tertentu.

Indeks

- absis, 150
- AD, 74
- algoritma diferensial, 74
- analisis kesalahan, 52
- antiderivatif, 85, 122, 185
- aproksimasi atas, 164
- aproksimasi bawah, 164
- aproksimasi derivatif, 47
- aproksimasi derivatif kedua, 54
- aturan kuadratur, 150
- aturan L'Hospital, 28, 95
- aturan rantai, 10, 75
- otomatisasi diferensial, 73

- bentuk taktentu, 28
- berosilasi, 13
- bobot, 150

- dekomposisi, 186
- derajat akurasi, 175
- deret Taylor, 35
- derivatif, 2
- derivatif data tabular, 63
- derivatif eksak, 52
- derivatif fungsi, 14
- derivatif invers, 14
- derivatif kanan, 6
- derivatif kedua, 3
- derivatif kiri, 7

- derivatif satu sisi, 6
- derivatif tingkat tinggi, 3
- diferensial, 1

- ekspansi Taylor, 45
- eksperimen, 194
- ekstrapolasi Richardson, 180
- ekstrim interior, 16
- ekstrim relatif, 24
- estimasi error, 47, 165
- estimasi kesalahan, 45, 157
- evaluasi trace, 75

- formula dua titik, 46
- formula eksplisit, 43, 63
- formula kuadratur, 150, 151
- formula kuadratur bersusun, 163
- formula lima titik, 50
- formula lima titik terpusat, 51
- formula selisih terbagi Newton, 151
- formula tiga titik, 46
- fungsi invers, 14
- fungsi karakteristik, 113
- fungsi komposisi, 10
- fungsi kontinu sepotong-sepotong, 115
- fungsi konveks, 40
- fungsi mulus, 5
- fungsi naik, 22
- fungsi naik tegas, 22

- kuadratur, 149
- kuadratur Newton-Cotes, 152
- kuadratur numerik, 149

- label, 101
- limit kanan, 30
- limit kiri, 30
- logaritma natural, 161

- m-file, 59, 61, 62
- MAPLE, 75
- Mathematica, 75
- MATLAB, 59, 61
- matriks segitiga, 68
- mesh, 55
- mesh seragam, 63
- metoda adaptif, 196
- metoda aproksimasi fungsi, 35
- metoda Cauchy, 89
- metoda Darboux, 95
- metoda ekstrapolasi Richardson, 56
- metoda ekstrapolasi Richardson multistep, 67
- metoda koefisien taktentu, 155
- metoda Lagrange, 151
- metoda Riemann, 101
- metoda substitusi, 130
- metode Simpson, 152
- metode Simpson adaptif rekursif, 204
- metode titik tengah, 152
- metode trapesium, 152, 153
- metode trapesium bersusun, 168
- model maju, 76
- model statistika, 140
- monoton, 165

- monoton tegas, 14

- nilai ekstrapolasi, 55
- nilai ekstrapolasi berjenjang, 58
- node, 50, 51, 63, 169, 187
- norma partisi, 87

- operasi array, 61, 195
- operasi binair, 75
- operasi unair, 75
- order keempat, 50
- order konvergensi, 50, 182
- order konvergensi kedua, 49
- order konvergensi pertama, 48

- parabola, 154
- partisi, 87
- partisi diperhalus, 96
- partisi seragam, 89, 164, 167, 169, 196
- partisi takseragam, 93
- partisi terlabel, 101
- pemulusan, 44
- penghalus, 96
- penghalusan, 71
- pengukuran, 194
- perhitungan manual, 78
- pertubasi, 43
- perumuman integral Riemann, 136
- perumuman TNR, 36
- pola kesalahan aproksimasi, 36
- pola penurunan error, 47
- pola rekursif, 184
- polinomial interpolasi, 44, 45, 71, 151
- polinomial kuadrat terkecil, 71
- polinomial Lagrange, 151, 153
- polinomial Legendre, 178

INDEKS

219

ukuran langkah, [51](#), [55](#)

ukuran probabilitas, [140](#)

ukuran umum, [140](#)

wavelet Daubechies, [5](#)