RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER
MATA KULIAH INTI
(RPS MK INTI)

A. Identitas

1. Program Studi : Program Studi Pendidikan Matematika
2. Fakultas : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
3. Nama Matakuliah : Aljabar Linier
4. Kode : 0630820
5. Bobot (Teori/ Praktik) : 2 SKS (Teori)
6. Semester : 3
7. Rumpun Mata Kuliah : Aljabar
8. Alokasi Waktu Total : 14 x 2 x 50 menit

B. Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Sikap dan Tata Nilai (ST)

1. Menghargai berbagai macam cara dalam memahami dan menyelesaikan permasalahan aljabar linier serta saling menghargai hasil yang didapat dari orang lain (ST5).
2. Berpegang pada tata nilai, norma, dan etika akademik dalam memahami dan menyelesaikan permasalahan aljabar linier (ST8).
3. Bertanggung jawab atas pekerjaan dalam menyelesaikan permasalahan aljabar linier secara mandiri (ST9).
4. Menunjukkan karakter islami di dalam perkuliahan aljabar linier (ST12).

Keterampilan Umum (KU)

1. Mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam pembelajaran aljabar linier (KU1).
2. Mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur dalam pembelajaran aljabar linier (KU2).

Keterampilan Khusus (KK)

1. Mampu mengkaji dan menerapkan berbagai metode dalam pembelajaran aljabar linier secara inovatif dan teruji (KK2).
2. Mengaplikasikan nilai-nilai keislaman dalam pembelajaran aljabar linier untuk membangun masyarakat Indonesia yang berdaya saing global (KK5).

Penguasaan Pengetahuan atau Kemampuan di Bidang Pengetahuan (KP)

1. Menguasai konsep teoritis vektor dan ruang-ruang vektor yang mendukung pembelajaran matematika di pendidikan dasar dan menengah serta studi lanjut (KP2).

Kemampuan Manajerial (KM)

1. Mampu mengkaji data dan informasi untuk menentukan pilihan terbaik sebagai dasar pengambilan keputusan dalam penyelesaian masalah (KM4).
2. Mengembangkan sikap kritis terhadap permasalahan dan mampu memberikan solusi terkait dengan bidang aljabar linier didasari nilai-nilai keislaman (KM8).

C. Deskripsi Singkat Mata Kuliah

Mata kuliah ini merupakan lanjutan dari mata kuliah aljabar matriks. Materi perkuliahan meliputi vektor-vektor di dalam ruang 2 dan ruang 3, serta ruang-ruang vektor. Vektor-vektor di dalam ruang 2 dan ruang 3 meliputi materi operasi pada vektor, komponen vektor, panjang vektor, hasil kali titik, hasil kali silang, serta garis dan bidang di dalam ruang 3. Sedangkan materi ruang-ruang vektor meliputi ruang vektor umum, subruang, kebebasan linier, basis dan dimensi, ruang baris dan ruang kolom, serta ruang perkalian dalam.

D. Mata Kuliah Prasyarat : Aljabar Elementer dan Aljabar Matriks

E. Team Teaching :

1) Koordinator : Drs. Uus Kusdinar, M.Pd.
2) Anggota : Rusmining, M.Pd.
   Dr. Puguh Wahyu P. M.Sc.
   Soffi Widyanesti P. M.Sc.

F. Matrik RPS :

Minggu/ Pertemuan Ke	Capaian Pembelajaran Mingguan	Materi Pembelajaran	Metode/ Strategi Pembelajaran	Aktifitas Pembelajaran/ Pengalaman Mahasiswa	Sumber Belajar dan Bahan	PENILAIAN		
						Indikator Penilaian	Bentuk Penilaian	Bobot
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Mahasiswa menyepakati kontrak kuliah, RPS, serta mampu menjelaskan definisi vektor dan operasi pada vektor	Pengantar vektor, definisi vektor, operasi pada vektor	Tanya jawab, Latihan soal, dan penugasan	Melalui tanya jawab, mahasiswa mampu menjelaskan materi pengantar vektor. Melalui latihan soal dan penugasan, mahasiswa mampu menghitung operasi vektor dengan benar.	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan materi pengantar vektor dan menghitung operasi vektor dengan benar.	Keaktifan, penugasan.	2%
2	Mahasiswa mampu menjelaskan dan menentukan komponen vektor	Komponen vektor	tanya jawab, Latihan soal, dan penugasan	Melalui tanya jawab, Latihan soal dan penugasan, mahasiswa mampu menjelaskan dan menentukan komponen vektor	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan komponen vektor	Keaktifan, penugasan	2%

3	Mahasiswa mampu menghitung panjang vektor	Panjang vektor/norm	tanya jawab, diskusi, penugasan	Melalui metode diskusi, tanya jawab, dan penugasan, mahasiswa mampu menghitung panjang vektor	G.1.a, G.2.a, G.2.b	menghitung panjang vektor	Tugas mandiri	5%
4	Mahasiswa mampu menjelaskan dan menghitung hasil kali titik	Hasil kali titik	tanya jawab, diskusi, *problem based learning*	Melalui metode diskusi, tanya jawab, dan *problem based learning*, mahasiswa mampu menjelaskan dan menghitung hasil kali titik	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan dan menghitung hasil kali titik	Tugas mandiri	5%

5	Mahasiswa mampu menjelaskan dan menghitung hasil kali silang	Hasil kali silang	tanya jawab, diskusi, *problem based learning*	Melalui metode diskusi, tanya jawab, dan *problem based learning*, mahasiswa mampu menjelaskan dan menghitung hasil kali silang	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan dan menghitung hasil kali silang	Kuis	5%
6	Mahasiswa mampu menjelaskan garis dan bidang di dalam R3	Garis dan bidang di dalam R3	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan garis dan bidang di dalam R3	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan garis dan bidang di dalam R3	Keaktifan	2%

7	Mahasiswa mampu menjelaskan dan menyelesaikan soal-soal vektor dengan benar	Latihan soal vektor	tanya jawab, problem based learning, *discovery learning*	Melalui metode tanya jawab, problem based learning, *discovery learning*, mahasiswa mampu menjelaskan dan menyelesaikan soal-soal vektor dengan benar	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan dan menyelesaikan soal-soal vektor dengan benar	Tugas mandiri	5%
UJIAN TENGAH SEMESTER								25%
8	Mahasiswa mampu menjelaskan konsep ruang vektor umum	Ruang vektor umum	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan konsep ruang vektor umum	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan konsep ruang vektor umum	Keaktifan	2%

9	Mahasiswa mampu menjelaskan konsep subruang	Subruang	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan konsep subruang	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan konsep subruang	Tugas mandiri	5%
10	Mahasiswa mampu menjelaskan kebebasan linier	Kebebasan linier	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan kebebasan linier	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan kebebasan linier	Tugas mandiri	5%
11	Mahasiswa mampu menjelaskan konsep basis dan dimensi	Basis dan dimensi	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan konsep basis dan dimensi	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan konsep basis dan dimensi	Kuis	5%

12	Mahasiswa mampu menjelaskan ruang baris dan ruang kolom matriks	Ruang baris dan ruang kolom matriks	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan ruang baris dan ruang kolom matriks	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan ruang baris dan ruang kolom matriks	Keaktifan	2%
13	Mahasiswa mampu menjelaskan rank dan pemakaian kepada pencarian baris	Rank, Pemakaian kepada pencarian baris	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan rank dan pemakaian kepada pencarian baris	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan rank dan pemakaian kepada pencarian baris	Tugas mandiri	5%

14	Mahasiswa mampu menjelaskan ruang perkalian dalam	Ruang perkalian dalam	Ceramah, tanya jawab, diskusi, *discovery learning*	Melalui metode ceramah, diskusi, tanya jawab, dan *discovery learning* mahasiswa mampu menjelaskan ruang perkalian dalam	G.1.a, G.2.a, G.2.b	Menjelaskan ruang perkalian dalam	Tugas mandiri	5%
UJIAN AKHIR SEMESTER								25%

G. Referensi

1. *Utama*

a. Anton, H. (1984). *Aljabar Linier Elementer Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.

2. *Anjuran*

a. Rusmining. (2018). Aljabar Linier. Diktat Kuliah (tidak diterbitkan).
b. Rorres, Anton. (2010). *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan.* Jakarta: Erlangga.
c. Imrona, M. (2012). *Aljabar Linear Dasar Edisi Kedua.* Jakarta: Erlangga.
d. Leon, S. J. (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi 5*. Jakarta: Erlangga.

H. Komponen Evaluasi

Aspek Penilaian	**Persentase**
Ujian Akhir Semester	25%
Ujian Tengah Semester	20%
Tugas	35%
Kehadiran	5%

Keaktifan	15%
Total	100%

I. Kriteria Evaluasi

KONVERSI NILAI		Predikat Nilai Huruf	Bobot Nilai
Penilaian Acuan Patokan (PAP)			
Skala 100	Skala 4		
80,00 ≤ skor ≤ 100,00	3,66 < skor ≤ 4,00	A	4,00
76,25 ≤ skor < 80,00	3,33 < skor ≤ 3,66	A-	3,67
68,75 ≤ skor < 76,25	3,00 < skor ≤ 3,33	B+	3,33
65,00 ≤ skor < 68,75	2,66 < skor ≤ 3,00	B	3,00
62,50 ≤ skor < 65,00	2,33 < skor ≤ 2,66	B-	2,67
57,50 ≤ skor < 62,50	2,00 < skor ≤ 2,33	C+	2,33
55,00 ≤ skor < 57,50	1,66 < skor ≤ 2,00	C	2,00
51,25 ≤ skor < 55,00	1,33 < skor ≤ 1,66	C-	1,67
43,75 ≤ skor < 51,25	1,00 < skor ≤ 1,33	D+	1,33
40,00 ≤ skor < 43,75	0,66 < skor ≤ 1,00	D	1,00
0,00 ≤ skor < 40,00	0,00 < skor ≤ 0,66	E	0,00

Diverifikasi oleh :	**Diperiksa Oleh:**		**Disiapkan oleh :**
Dekan FKIP Muhammad Sayuti, M.Pd., M.Ed., Ph.D.	Kaprodi P. Mat Uswatun Khasanah, M.Sc.	Koordinator Bid. Ilmu Prof. Dr. Hardi Suyitno, M.Pd.	Dosen Pengampu Rusmining, M.Pd.

MATERI ALJABAR LINEAR

VEKTOR DAN RUANG VEKTOR

Rusmining
email: rusmining@pmat.uad.ac.id

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN

2022

MATERI ALJABAR LINEAR

1. Vektor
2. Ruang vektor
3. Subruang vektor
4. Kombinasi linear dan bebas linear
5. Basis dan Dimensi
6. Ruang baris dan Ruang kolom
7. Ruang hasil kali dalam

IV Referensi/Sumber Bahan

A. Wajib
Anton, H. 1995. *Elementary Linear Algebra*. New York: John Wiley and Sons.

B. Anjuran
Setiadji, 1990. *Pengantar Aljabar Linear*. Diktat Kuliah.

V Evaluasi

No	Komponen	Bobot (%)
1	Keaktifan	10
2	Tugas	25
3	Ujian Tengah Semester	30
4	Ujian Semester	35
Jumlah		100 %

BAB 1

VEKTOR-VEKTOR di DALAM RUANG-2 dan RUANG-3

PENGANTAR VEKTOR

Pada bagian ini vektor-vektor di dalam ruang-2 (sumbu x,y) dan ruang-3 (sumbu x, y, z) dikenalkan secara geometris. Operasi hitung pada vektor akan didefinisikan dan beberapa sifat dasar operasi ini akan dirumuskan.

Definisi Vektor

Secara geometris, vektor adalah segmen garis berarah di dalam ruang-2 atau ruang-3.

Arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menentukan besarnya vektor.

Ekor panah dinamakan titik permulaan (initial point), dan ujung panah dinamakan titik terminal (terminal point).

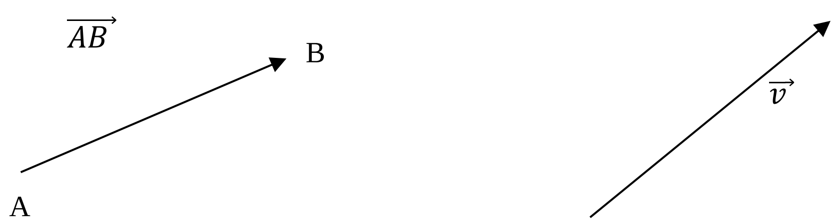
Vektor dinyatakan dengan huruf kecil, cetak tebal. Misal **a, k, v, w**, dan **x.**

Bila bicara vektor, maka kita menyatakan bilangan sebagai skalar yang merupakan bilangan riel dan akan dinyatakan oleh huruf kecil biasa seperti *a*, *k*, *v*, *w*, dan *x*.

Jika titik permulaan sebuah vektor **v** adalah *A* dan titik terminalnya adalah *B*, Maka dituliskan

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB} \text{ atau } \vec{v}$$

Vektor yang mempunyai arah dan panjang yang sama disebut vektor ekivalen.



OPERASI PADA VEKTOR

1. OPERASI PENJUMLAHAN

Definisi:

Jika **v** dan **w** adalah sebarang dua vektor, maka jumlah **v** + **w** adalah ditentukan sebagai berikut. Letakkan vektor w sehingga titik permulaannya berimpit dengan titik terminal dari **v**.

Vektor **v** + **w** dinyatakan oleh panah dari permulaan titik permulaan dari **v** kepada titik terminal dari **w**. Sehingga dapat dituliskan:

v + **w** = **w** + **v**

0 + **v** = **v** + **0** = **v**

Contoh 1:

v = (2, 1)

w = (3, 0), dengan **v**, **w** di R2.

maka **v** + **w** = (2, 1) + (3, 0) = (2+3, 1+0) = (5, 1).

Contoh 2:

v = (0, 1, 3)

w = (-1, 2, 0) , dengan **v**, **w** di R3.

maka **v** + **w** = (0, 1, 3) + (-1, 2, 0) = (0+(-1)), 1+2, 3+0) = (-1, 3, 3).

2. OPERASI PENGURANGAN

Definisi

Jika **v** dan **w** adalah sebarang dua vektor, maka pengurangan didefinikan sebagai

v – **w** = **v** + (-**w**).

Contoh 3:

v = (2, 1)

w = (3, 0) , dengan **v**, **w** di R2.

maka **v** - **w** = (2, 1) - (3, 0) = (2-3, 1-0) = (-1, 1).

Contoh 4:

v = (0, 1, 3)

w = (-1, 2, 0) , dengan **v**, **w** di R3.

maka **v** - **w** = (0, 1, 3) - (-1, 2, 0) = (0-(-1)), 1-2, 3-0) = (1, -1, 3).

3. OPERASI PERKALIAN VEKTOR DENGAN SKALAR

Definisi

Jika **v** adalah vektor sebarang dan *k* adalah sebuah bilangan riel (skalar), maka hasil perkalian *k***v** didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya *k* kali panjang dari **v** dan arah yang sama seperti arah **v** jika *k* >0 dan berlawanan dengan arah **v** jika *k* < 0.

Kita mendefinisikan *k***v** = 0 jika *k = 0* atau v = 0.

Contoh 5:

k = 3, **v** = (2, -1). Maka *k***v** = 3 (2, -1) = (6, -3).

k = $\frac{1}{2}$, **v** = (-3, 4). Maka *k***v** = $\frac{1}{2}$ (-3, 4) = ($\frac{-3}{2}$, 2).

k = -1, **v** = (0, 3, -2). Maka *k***v** = -1 (0, 3, -2) = (0, -3, 2).

TUGAS 1

1. Gambarkan vektor **v** sebarang, dengan titik permulaan P dan titik terminal Q!
2. Gambarkan pada bidang cartesius vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan titik permulaan A(1,0) dan titik terminal B(3,5)!
3. Diketahui vektor **v** dengan titik permulaan A(0,0) dan titik terminal B(2,4).

Dan vektor **w** dengan titik permulaan C(2,4) dan titik terminal D(5,7).

Gambarkan pada bidang cartesius vektor **v** + **w**.

KOMPONEN-KOMPONEN PADA VEKTOR

Koordinat (v_1, v_2) dari vektor **v** dinamakan komponen-komponen dari vektor **v.**

Maka dikatakan bahwa (v_1, v_2) adalah komponen-komponen dari **v.**

Dituliskan **v =** (v_1, v_2).

MAKA

Jika **v =** (v_1, v_2) dan **w =** (w_1, w_2) maka **v + w =** (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1+w_1, v_2+w_2).

Jika **v =** (v_1, v_2) dan **w =** (w_1, w_2) maka **v - w =** (v_1, v_2) - (w_1, w_2) = (v_1-w_1, v_2-w_2).

Jika **v =** (v_1, v_2) dan k skalar, maka k**v =** k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2).

CONTOH 1:

Jika **v =** (3,2) dan **w** = (1,0). Maka **v** + **w =** (3,2) + (1,0) = (3+1, 2+0) = (3, 2).

Jika **v =** (7, -3) dan **w** = (4, 5) maka **v** – **w =** (7, -3) – (4, 5) = (7-4, -3-5) = (3, -8).

Jika **v =** (3, 2, 1) dan *k* = -2, maka *k***v =** -2(3, 2, 1) = (-6, -4, -2).

Jika vektor P_1P_2 mempunyai titik permulaan P_1 (x_1, y_1, z_1) dan titik terminal P_2(x_2, y_2, z_2) maka

$\overrightarrow{P1P2} = \overrightarrow{OP2} - \overrightarrow{OP1}$= ($x_2$, y_2, z_2) – (x_1, y_1, z_1) = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).

CONTOH 2:

Komponen-komponen vektor dari $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P1P2}$ dengan titik permulaan P_1(2, -1, 4) dan titik terminal P_2(7, 5, -8) adalah **v =** (7-2, 5-(-8), (-8)-4) = (5, 6, -12).

TUGAS

1. Carilah komponen-komponen dari vektor yang mempunyai titik permulaan P_1 dan titik terminal P_2.
   a) P_1 (3, 5) dan P_2 (2, 8)
   b) P_1 (6, 5, 8) dan P_2 (8, -7, -3)
   c) P_1 (0, 0, 0) dan P_2 (-8, 7, 4)
2. Misal **u = (**1, 2, 3), **v =** (2, -3, 1), dan **w =** (3, 2, -1). Carilah komponen-komponen dari:
   a) **u – w**
   b) 7**v +** 3**w**
   c) **–w+v**
   d) 3**(u-**7**v)**
   e) **-**3**v-**8**w**
   f) 2**v-(u+w)**
3. Carilah sebuah vektor yang memiliki titik permulaan P(2, -1, 4) yang mempunyai arah yang sama seperti **v** = (7, 6, -3).
4. Jika **u = (**1, 2, 3), **v =** (2, -3, 1), dan **w =** (3, 2, -1). Carilah komponen-komponen dari vektor **x** yang memenuhi 2**u** – **v** + **x** = 7**x** + **w.**
5. Jika **u = (**1, 2, 3), **v =** (2, -3, 1), dan **w =** (3, 2, -1). Carilah skalar c_1, c_2, c_3 sehingga

c_1 **u** + c_2 **v** + c_3 **w** = (6, 14, -2).

NORM/NORMA VEKTOR atau PANJANG VEKTOR

Panjang sebuah vektor **v** dinamakan dengan norm/norma dari **v** dan dinyatakan dengan $\|v\|$.
Jelas, dari teorema Phytagoras bahwa norma sebuah vektor **v** = (v_1, v_2) di dalam ruang 2 adalah

$$\|v\| = \sqrt{v1^2 + v2^2}$$

Sedangkan untuk **v** = (v_1, v_2, v_3) di dalam ruang 3 maka norm vektor **v** adalah

$$\|v\| = \sqrt{v1^2 + v2^2 + v3^2}$$

Jika P_1(x_1, y_1, z_1) dan P_2(x_2, y_2, z_2) adalah dua titik di dalam ruang 3, maka jarak diantara dua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P1P2}$, karena
$\overrightarrow{P1P2} =$ (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)
Maka jelas bahwa $d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2}$

CONTOH 1
Carilah norma vektor **v** = (-3,2,1) !

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

CONTOH 2
Tentukan jarak titik P_1(2, -1, -5) dan titik P_2(4, -3, 1) !

$$d = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-3 - (-1))^2 + (1 - (-5))^2}$$
$$d = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2}$$
$$d = \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44} = 4\sqrt{11}\ .$$

TUGAS
1. Hitunglah norma **v** jika:
   a) **v** = (0, -3)
   b) **v** = (-8, 7, 4)
   c) **v** = (9,0, 0)
2. Hitunglah jarak diantara P_1 dan P_2
   a) P_1(-2,7) dan P_2(0,-3)
   b) P_1(8, -4, 2) dan P_2(-6, -1, 0)
   c) P_1(1,1,1) dan P_2(6, -7, 3)
3. Misal **u** = (1, -3, 2), **v** = (1, 1, 0), dan **w** = (2, 2, -4). Carilah
   a) $\|u + v\|$
   b) $\|u\|$ + $\|v\|$
   c) $\|-2u\|$ + 2$\|v\|$
   d) $\|-3u - 5v + w\|$
   e) $\frac{1}{\|w\|}\ w$
   f) $\left\|\frac{1}{\|w\|}\ w\right\|$

4. Carilah skalar *k* sehingga $\|kv\|$=3, dimana **v** = (1, 2, 4).

BAB II

RUANG VEKTOR

Sebelum sampai pada definisi ruang vektor secara abstrak, lebih dulu diperkenalkan pengertian lapangan (*field*). Lapangan adalah suatu sistem aljabar dengan dua operasi yang dinamakan “addisi”(dinotasikan +) dan “multiplikasi”(dinotasikan **.**), yang memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. Terhadap addisi:
    a. Tertutup
    b. Assosiatif
    c. Terdapat elemen netral
    d. Setiap elemen mempunyai invers
    e. Komutatif
2. Terhadap multiplikasi:
    a. Tertutup
    b. Assosiatif
    c. Terdapat elemen satuan
    d. Setiap elemen tak nol mempunyai invers
    e. Komutatif

Sebagai contoh struktur aljabar yang merupakan lapangan yang sering dijumpai yaitu:

a. (, +, .) merupakan himpunan bilangan riil terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan riil.
b. (Œ, +, .) merupakan himpunan bilangan kompleks terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks.
c. (, +, .) merupakan himpunan bilangan rasional terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan rasional.

DEFINISI Diberikan himpunan tak kosong *V* bersama dengan suatu operasi ⊕ pada *V*. Diberikan suatu lapangan (*field*) ($\mathbb{R}$, +, .). Diberikan suatu operasi perkalian skalar Ⓢ : $\mathbb{R} \times V \to V$. Himpunan *V* disebut ruang vektor atas $\mathbb{R}$ terhadap oeprasi perkalian skalar Ⓢ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

1. $(\forall u, v \in V)\, u + v \in V$	6. $\alpha \in \mathbb{R}, u \in V \Rightarrow \alpha u \in V$
2. $(\forall u, v \in V)\, u + v = v + u$	7. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in V \Rightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
3. $(\forall u, v, w \in V)\, u + (v + w) = (u + v) + w$	8. $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V \Rightarrow \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
4. $(\exists \bar{0} \in V)(\forall v \in V)\, \bar{0} + v = v + \bar{0} = v$	9. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in V \Rightarrow \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
5. $(\forall u \in V)(\exists (-u) \in V)\, u + (-u) = \bar{0}$	10. $1.u = u$

Contoh:

Buktikan bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

<u>Bukti:</u>

1. Ambil sebarang $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ berlaku

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y_1 + y_2}_{\in\mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^2$$

SIFAT KOMUTATIF

2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$

$$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

SIFAT ASOSIATIF

3. $\left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right] + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$

$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

$$= (x_1, y_1) + \left[(x_2, y_2) + (x_3, y_3)\right]$$

ADA ELEMEN IDENTITAS

4. $\exists \bar{0}, \forall \left(x_1, y_1 \right)$ berlaku $(x_1, y_1) + \bar{0} = (x_1, y_1)$

$$(x_1, y_1) + \bar{0} = (x_1, y_1)$$

$$\bar{0} = (x_1, y_1) - (x_1, y_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0, 0)$$

Jadi, terdapat $\bar{0} = (0, 0)$ sehingga $(x_1, y_1) + \bar{0} = (x_1, y_1)$.

ADA ELEMEN INVERS

5. $\forall (x_1, y_1), \exists p \in \mathbb{R}^2$ berlaku $(x_1, y_1) + p = \bar{0}$

$$(x_1, y_1) + p = \bar{0}$$

$$(x_1, y_1) + (p, q) = (0, 0)$$

$$p = (0, 0) - (x_1, y_1)$$

$$p = (0 - x_1, 0 - y_1) = (-x_1, -y_1)$$

Jadi, $\forall (x_1, y_1), \exists (-x_1, -y_1)$ berlaku $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = \bar{0}$

SIFAT 1 – 5 merupakan sifat **GRUP KOMUTATIF** terhadap penjumlahan.

SIFAT TERTUTUP
Terhadap perkalian
skalar

6. Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ berlaku

$$\alpha (x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \in \mathbb{R}^2$$

7. $(\alpha+\beta)(x_1, y_1) = (\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)y_1$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)$$
$$= \alpha (x_1, y_1) + \beta (x_1, y_1)$$

Sifat 7 dan 8
SIFAT DISTRIBUTIF

8. $\alpha \left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right] = \alpha\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right)$

$$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$$
$$= \alpha (x_1, y_1) + \alpha (x_2, y_2)$$

SIFAT ASOSIATIF

9. $\alpha\left[\beta (x_1, y_1)\right] = \alpha\left(\beta x_1, \beta y_1\right)$

$$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta y_1)$$
$$= \alpha\beta (x_1, y_1)$$

10. $1 \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1)$

SIFAT 6 – 10 merupakan sifat dengan operasi perkalian skalar.

KES: $\mathbb{R}^2$ merupakan **RUANG VEKTOR**.

TUGAS: Selidikilah apakah himpunan berikut membentuk ruang vektor bentuk operasi jumlah dan perkalian yang didefinisikan.

1. Himpunan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ dengan definisi:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

2. Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan definisi:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y')$$
$$\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

3. Diberikan $M_2(\ ) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in\ \}$. Buktikan bahwa $M_2(\ )$ merupakan ruang vektor !
4. Buktikan $^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in\ \}$ merupakan ruang vektor atas .

5. Buktikan Œ $= \{x + yi \mid x, y \in \quad, i = \sqrt{-1}\}$ merupakan ruang vektor atas .
6. Latihan 4.2 halaman 141

TEOREMA:

Jika V ruang vektor atas $\mathbb{R}$:

a. $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
b. $0 \cdot v = \bar{0}, \forall v \in V$
c. $-1 \cdot v = -v, \forall v \in V$
d. $\alpha \cdot v = \bar{0}$, maka $\alpha = 0$ atau $v = 0$

Bukti:

(i) Bukti yang d sebagai latihan

(ii) Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\omega \in$ V, perhatikan

$$\begin{aligned} 1 \cdot \omega = \omega & \\ &= (0 + 1) \cdot \omega \\ &= (0 \cdot \omega) + (1 \cdot \omega) \\ &= (0 \cdot \omega) + \omega \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \omega + (-\omega) &= ((0 \cdot \omega) + \omega) + (-\omega) \\ \bar{0} \quad &= (0 \cdot \omega) + (\omega + (-\omega)) \\ &= (0 \cdot \omega) + \bar{0} \\ &= 0 \cdot \omega \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $0 \cdot \omega = \bar{0}$.

(iii) Sekarang perhatikan

$$\begin{aligned} \omega + (-1 \cdot \omega) &= (1 \cdot \omega) \oplus (-1 \cdot \omega) \\ &= (1 + (-1)) \cdot \omega \\ &= 0 \cdot \omega \\ &= \bar{0} \\ &= \omega + (-\omega) \end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat kanselasi dari kiri, maka diperoleh bahwa $(-1 \cdot \omega) = -\omega$.

(iv)
$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= \alpha \cdot (\omega + (-\omega)) \\ &= \alpha \cdot ((1 \cdot \omega) + (-1 \cdot \omega)) \\ &= \alpha \cdot ((1 + (-1)) \cdot \omega) \\ &= (\alpha . (1 + (-1)) \cdot \omega \\ &= (\alpha . 0) \cdot \omega \\ &= 0 \cdot \omega \end{aligned}$$

$= 0.$

SUB RUANG VEKTOR

Definisi:

V ruang vektor, $W \subset V$

W dikatakan sub ruang vektor dari V jika W terhadap operasi yang sama pada V, W membentuk ruang vektor.

Contoh : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

A sub ruang vektor dari $\mathbb{R}^2$ atau $A \subset \mathbb{R}^2$.

TEOREMA:

V ruang vektor dan $W \subseteq V$, berlaku W subruang vektor dari V jika dan hanya jika:

i) $\forall u, v \in W$ berlaku $u + v \in W$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W$ berlaku $\alpha u \in W$

KUIS:

1. Diberikan

   $B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \right\}$

   Tentukan apakah B ruang vektor atau bukan?

2. V: himpunan semua fungsi kontinu bernilai real dengan operasi berikut

   f(x) + g(x) = (f+g) (x)

   dan

   $\alpha \cdot f(x) = (\alpha f)(x)$

Definition (Hasilkali Titik)

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor pada R^2 atau R^3 dan θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka **hasilkali titik** (*hasilkali dalam euclidean*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ didefinisikan oleh

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \ \cos\ \theta$$

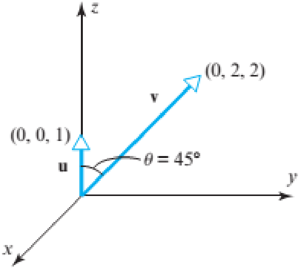
Jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ maka didefinisikan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Berdasarkan definisi ini, jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor taknol maka

$$\cos\ \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

Example

Temukan hasilkali titik dari vektor-vektor yang terdapat pada Gambar 3.3.1



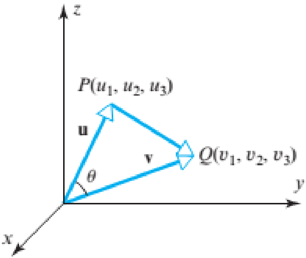
Gambar 3.3.1

Solution

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\ \cos\ \theta \\
&= \left(\sqrt{0^2+0^2+1^2}\right)\left(\sqrt{0^2+2^2+2^2}\right)\cos 45^0 \\
&= (1)\left(2\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

3.3.2 Bentuk Komponen Hasilkali Titik

Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah dua vektor taknol. Jika θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ (Gambar 3.3.2), maka hukum cosinus menghasilkan



Gambar 3.3.2

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Karena $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, maka

$$\begin{aligned} 2\left\|\mathbf{u}\right\|\left\|\mathbf{v}\right\|\cos\theta &= \left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\mathbf{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 \\ \left\|\mathbf{u}\right\|\left\|\mathbf{v}\right\|\cos\theta &= \frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\mathbf{v}\right\|^2 - \left\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\right\|^2\right) \end{aligned}$$

atau

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\mathbf{v}\right\|^2 - \left\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\right\|^2\right)$$

Dengan subtitusi

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{u}\right\|^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,\ \left\|\mathbf{v}\right\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ \left\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\right\|^2 &= (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 \end{aligned}$$

diperoleh

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Definition (Hasilkali Titik di R^n)

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ adalah vektor di R^n,maka **hasilkali titik u** dan **v** dinotasikan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan didefinisikan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Example

1. Gunakan definisi ini untuk menyelesaikan masalah pada contoh sebelumnya
2. Hitung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk vektor-vektor di R^4:

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7), \mathbf{v} = (-3, -4, 1, 0)$$

Solution

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 0 + 0 + 2 = 2$
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0)$
   $= 3 - 12 + 5 + 0$
   $= -4$

Example

Misal vektor $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ dan $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$. Tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan sudut θ antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

Penyelesaian

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, maka $\theta = 60^0$

Theorem (Sifat sudut antara dua vektor)

Misal $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *adalah vektor di* R^2 *atau* R^3, *maka*

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ *atau* $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$
2. *Jika* $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *tak nol dan* θ *adalah sudut diantaranya, maka*
   - θ **lancip** *jika dan hanya jika* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > \mathbf{0}$
   - θ **tumpul** *jika dan hanya jika* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < \mathbf{0}$
   - θ **siku-siku** *jika dan hanya jika* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Example

Jika $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$, dan $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5 && \text{(Sudut } \textbf{Tumpul}\text{)} \\
\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21 && \text{(Sudut } \textbf{Lancip}\text{)} \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0 && \text{(Sudut } \textbf{Siku}\text{)}
\end{aligned}$$

3.3 Hasilkali Titik

3.3.3 Sifat-Sifat Hasilkali Titik

Theorem (Sifat Hasilkali Titik)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada* R^2 *atau* R^3 *dan* k *sebarang skalar, maka*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ *jika* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *dan* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *jika* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Proof.

Akan dibuktikan poin 3, kemudian selebihnya disisakan sebagai **latihan**. Misal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka

$$
\begin{aligned}
k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= k(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\
&= (ku_1) v_1 + (ku_2) v_2 + (ku_3) v_3 = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Problem (Latihan 3.3)

1. *Tentukan* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
   1. $\mathbf{u} = (-6, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 0)$
   2. $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$
   3. $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$
2. *Tentukan cosinus dan sudut* θ *antara* $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *pada soal nomor 1.*
3. *Tentukan apakah sudut* $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *membentuk sudut lancip, tumpul, atau tegak lurus.*
   1. $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$
   2. $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$
   3. $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
4. *Jika* $\mathbf{p} = (2, k)$ *dan* $\mathbf{q} = (3, 5)$, *tentukan* k *sedemikian sehingga:*
   1. $\mathbf{p}$ *dan* $\mathbf{q}$ *ortogonal*
   2. *Sudut antara* $\mathbf{p}$ *dan* $\mathbf{q}$ *adalah* $\pi/3$
   3. *Sudut antara* $\mathbf{p}$ *dan* $\mathbf{q}$ *adalah* $\pi/4$

3.4 Keortogonalan

3.4.1 Vektor-Vektor Ortogonal

Definition (Vektor Ortogonal)

Dua vektor taknol **u** dan **v** di R^n dikatakan **ortogonal** (*saling tegak lurus*) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dan dinotasikan $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
Dengan kata lain, vektor nol di R^n bersifat ortogonal dengan semua vektor di R^n.

Example

Tunjukkan bahwa vektor taknol $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ saling tegak lurus di R^4.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (-2, 3, 1, 4)(1, 2, 0, -1) = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) \\ &= -2 + 6 + 0 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Dengan demikian, **u** dan **v** ortognal di R^4

3.4 Keortogonalan

3.4.2 Proyeksi Ortogonal

- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.

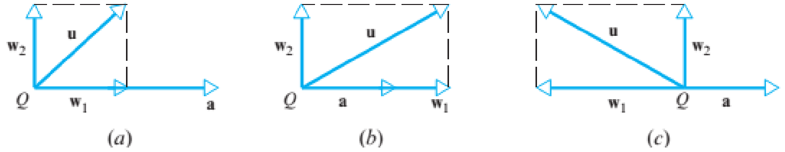
- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):

- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):
  1. Tarik sebuah garis dari ujung **u** yang memotong tegak lurus pada vektor **a**,

- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):
  1. Tarik sebuah garis dari ujung **u** yang memotong tegak lurus pada vektor **a**,
  2. Buat sebuah vektor $\mathbf{w_1}$ dari Q hingga ke garis tegak lurus tersebut,

- Suatu vektor **u** dapat dinyatakan sebagai hasil jumlah dari dua vektor yang berbeda, satu vektor sejajar dengan vektor taknol **a** dan vektor lainnya tegak lurus terhadap vektor **a**.
- Jika **u** dan **a** ditempatkan sedemikian sehingga titik-titik awalnya saling berhimpit di titik Q, maka vektor **u** dapat diuraikan sebagai berikut (Gambar 3.4.2):
  1. Tarik sebuah garis dari ujung **u** yang memotong tegak lurus pada vektor **a**,
  2. Buat sebuah vektor $\mathbf{w_1}$ dari Q hingga ke garis tegak lurus tersebut,
  3. Hitung selisih dari

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{w_1}$$



Dari Gambar 3.4.2 ditunjukkan bahwa

$$\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = \mathbf{w_1} + (\mathbf{u} - \mathbf{w_1}) = \mathbf{u}$$

- Vektor $\mathbf{w_1}$ disebut **Proyeksi Ortogonal u pada a,** atau disebut **Komponen vektor u disepanjang a,** dinotasikan

$$\mathbf{w_1} = proj_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u}$$

- Vektor $\mathbf{w_2}$ disebut **komponen vektor u yang ortogonal terhadap a,** dinotasikan

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - proj_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u}$$

Theorem (Proyeksi Vektor)

Jika $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{a}$ *adalah vektor di* R^n, *dan jika* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *maka*

$$\mathit{proj}_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} \quad (\textit{Komponen vektor } \mathbf{u} \textit{ sepanjang } \mathbf{a})$$

$$\mathbf{u} - \mathit{proj}_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} \quad (\textit{Komponen vektor } \mathbf{u} \textit{ yang ortogonal terhadap } \mathbf{a})$$

Bukti:
Diserahkan sebagai latihan.

Example

Misal $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ dan $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$. Carilah komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ dan komponen vektor $\mathbf{u}$ yang tegak lurus terhadap $\mathbf{a}$.

Penyelesaian:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$ dan

$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$

Dengan demikian, komponen vektor $\mathbf{u}$ sepanjang $\mathbf{a}$ adalah

$$proj_{\mathbf{a}}\ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

dan komponen vektor $\mathbf{u}$ yang tegak lurus terhadap $\mathbf{a}$ adalah

$$\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

3.4 Keortogonalan

3.4.3 Jarak Titik dan Garis

Theorem (Jarak Titik dan Garis)

1. *Jarak* (D) *titik* $P_0(x_0, y_0)$ *dan garis* $ax + by + c = 0$ *dalam ruang* R^2 *adalah*
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
2. *Jarak* (D) *titik* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *dan garis* $ax + by + cz + d = 0$ *dalam ruang* R^3 *adalah*
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Example

Jarak titik $(1, -4, -3)$ dan garis $2x - 3y + 6z = -1$ adalah

$$D = \frac{|2(1) - 3(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

Problem (Latihan 3.4)

1. *Tentukan apakah* **u** *dan* **v** *vektor ortogonal*
   1. $\mathbf{u} = (6, 1, 4); \mathbf{v} = (2, 0, -3)$
   2. $\mathbf{u} = (3, -2, 1, 3); \mathbf{v} = (-4, 1, -3, 7)$
2. *Tentukan proyeksi ortogonal* **u** *pada* **a**
   1. $\mathbf{u} = (1, -2); \mathbf{a} = (-4, -3)$
   2. $\mathbf{u} = (3, -2, 6); \mathbf{a} = (1, 2, -7)$
3. *Tentukan komponen vektor* **u** *yang ortogonal terhadap* **a***:*
   1. $\mathbf{u} = (2, 1, 1, 2); \mathbf{a} = (4, -4, 2, -2)$
   2. $\mathbf{u} = (5, 0, -3, 7); \mathbf{a} = (2, 1, -1, -1)$
4. *Tentukan jarak antara titik dan garis yang diberikan*
   1. $(-3, 1)\,; 4x + 3y + 4 = 0$
   2. $(3, 1, -2)\,; x + 2y - 2z = 4$

3.5 Hasilkali Silang

3.5.1 Hasilkali Silang Vektor

Definition (Hasilkali Silang)

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor dalam ruang berdimensi tiga, maka **Hasilkali u** dan **v** adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

atau dalam notasi determinan ditulis

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Catatan:

Untuk memudahkan memahami definisi ini, lakukan langkah-langkah berikut:

1. Bentuklah matriks 2×3 yang entri-entrinya terdiri dari komponen **u** pada baris pertama dan komponen **v** pada baris kedua

Catatan:

1. $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$
2. Untuk menghitung komponen pertama dari $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, hilangkan kolom pertama dan hitung determinannya;
3. Untuk menghitung komponen kedua, hilangkan kolom kedua dan hitung negatif dari determinannya;
4. Untuk menghitung komponen ketiga, hilangkan kolom ketiga dan hitung determinannya.

Example

Hasilkali silang $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, jika $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, -7, -6) \end{aligned}$$

Theorem (Hubungan Hasilkali Silang dan Hasilkali Titik)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka:*

1. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *ortogonal terhadap* $\mathbf{u}$)
2. $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *ortogonal terhadap* $\mathbf{v}$)
3. $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ (*Identitas Lagrange*) (*Hubungan Hasilkali Silang dan Hasilkali Titik*)
4. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$
5. $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$

Example

Misal $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$. Buktikan bahwa $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ortogonal terhadap $\mathbf{u}$ maupun $\mathbf{v}$.

Solution

Pada contoh sebelumnya telah ditunjukkan bahwa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Karena

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (1, 2, -2)(2, -7, -6) \\ &= (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (3, 0, 1)(2, -7, -6) \\ &= (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0 \end{aligned}$$

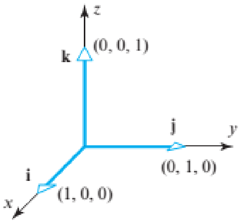
Maka, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonal terhadap* $\mathbf{u}$ *maupun* $\mathbf{v}$.

Theorem (Sifat-Sifat Hasilkali Silang)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3 dan* k *adalah skalar sebarang, maka:*

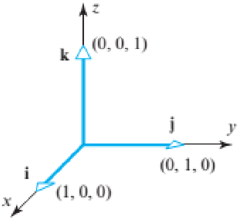
1. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\,\mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

- Perhatikan vektor-vektor pada Gambar 3.5.1 berikut



Gambar 3.5.1

- Perhatikan vektor-vektor pada Gambar 3.5.1 berikut

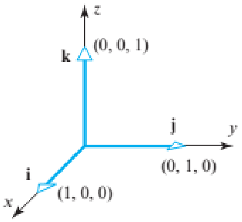


Gambar 3.5.1

- Vektor-vektor ini dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

- Perhatikan vektor-vektor pada Gambar 3.5.1 berikut



Gambar 3.5.1

- Vektor-vektor ini dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)\,, \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0)\,, \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

- Vektor tersebut memiliki panjang 1 sehingga disebut **Vektor Satuan Standar** pada ruang berdimensi 3.

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$,dan $\mathbf{k}$ karena dapat dapat ditulis

  $$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 (1, 0, 0) + v_2 (0, 1, 0) + v_3 (0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$,dan $\mathbf{k}$ karena dapat dapat ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh**

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - \mathbf{3j} + 4\mathbf{k}$$

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk **i**, **j**,dan **k** karena dapat dapat ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh**

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - \mathbf{3j} + 4\mathbf{k}$$

- Berdasarkan **Definisi Hasilkali Silang**, diperoleh

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dapat dinyatakan dalam bentuk **i**, **j**,dan **k** karena dapat dapat ditulis

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 (1, 0, 0) + v_2 (0, 1, 0) + v_3 (0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh**

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - \mathbf{3j} + 4\mathbf{k}$$

- Berdasarkan **Definisi Hasilkali Silang**, diperoleh

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

- Dengan cara ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

3.5 Hasilkali Silang

3.5.3 Bentuk Determinan Hasilkali Silang

- Hasilkali silang dapat dinyatakan dalam bentuk notasi determinan matriks 3×3:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

- Hasilkali silang dapat dinyatakan dalam bentuk notasi determinan matriks 3×3:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

- Sebagai **Contoh,** jika $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ dan $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, maka

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

3.5.4 Interpretasi Geometrik Hasilkali Silang

3.5 Hasilkali Silang

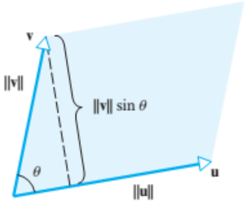
3.5.4 Interpretasi Geometrik Hasilkali Silang

Theorem (Luas Jajar Genjang)

Jika **u** *dan* **v** *adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka* **Luas Jajar Genjang** *yang dibatasi oleh* **u** *dan* **v** *adalah* $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

Proof:

Jajar Genjang yang dibatasi oleh **u** dan **v** dapat diilustrasikan seperti Gambar 3.5.4



Gambar 3.5.4

Proof:
Dari Gambar 3.5.4 diperoleh Luas Jajar Genjang

$$A = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \ \theta$$

Menurut **Identittas Lagrange** dan **Hasilkali Titik,**

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \qquad \text{dan} \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \ \theta$$

sehingga

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \ \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \left(1 - \cos^2 \ \theta\right) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \ \theta \end{aligned}$$

Dengan demikian

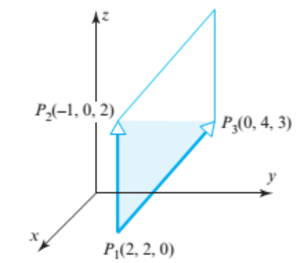
$$\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \ \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

Example

Hitung luas segitiga yang dobatasi oleh titik $P_1\,(2, 2, 0)$, $P_2\,(-1, 0, 2)$, dan $P_3\,(0, 4, 3)$.

Solution

Titik-titik ini dapat diilustrasikan



Solution

Terlihat bahwa Luas Segitiga = 1/2 Luas Jajar Genjang yang dibatasi oleh vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ *dan* $\overrightarrow{P_1P_3}$. *Diketahui bahwa*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2) \quad dan \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$$

sehingga

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-3, -2, 2) \times (-2, 2, 3) = (-10, 5, -10)$$

Dengan demikian,

$$A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$

Definition (Hasilkali Tripel Skalar)

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}$,dan $\mathbf{w}$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

disebut **Hasilkali Tripel Skalar** dari $\mathbf{u}, \mathbf{v}$,dan $\mathbf{w}$.

Hasilkali Tripel Skalar $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$,dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dapat dihitung dengan rumus

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Example

Hitung Hasilkali Tripel Skalar dari vektor-vektor

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Solution

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3(20) + 2(2) - 5(3) \\
&= 49
\end{aligned}$$

Problem (Latihan 3.5)

1. *Misalkan* $\mathbf{u} = (3, 2, -1), \mathbf{v} = (0, 2, -3)$, *dan* $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. *Hitunglah:*
    1. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
    2. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$
    3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{2w})$
    4. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
2. *Tentukan suatu vektor yang ortogonal baik terhadap* $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$ *maupun terhadap* $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$.
3. *Hitung luas jajar jenjang yang dibatasi oleh* $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$ *dan* $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$.
4. *Hitung luas segitiga yang dibatasi oleh titik* $P(1, -1, 2)$, $P_2(0, 3, 4)$ *dan* $P_3(6, 1, 8)$.
5. *Gunakan hasilkali silang untuk mencari sinus dari sudut antara vektor-vektor* $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$ *dan* $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$.