Kuliah Kalkulus 1 Semester Ganjil[1] 2023/2024

BAB 1. FUNGSI

Nama Dosen Pengampu.

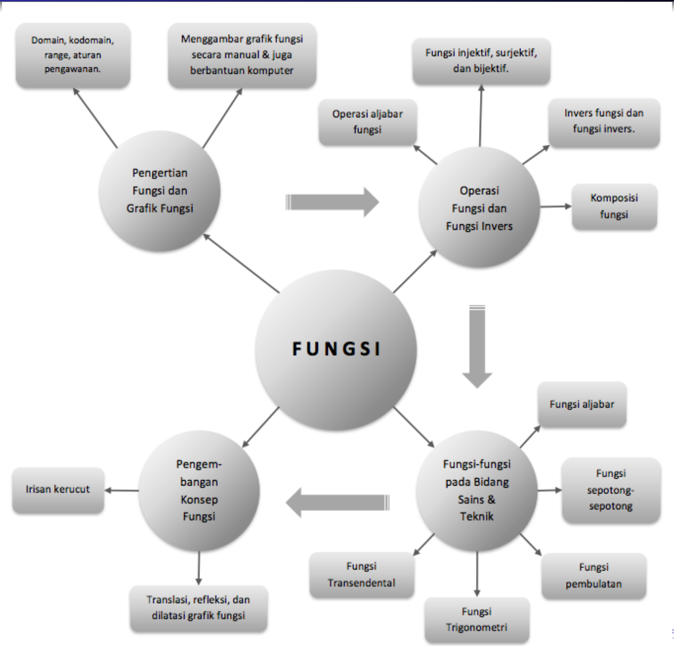
Kuliah disampaikan pada Prodi XYZ
Universitas/Institut/Sekolah Tinggi ABC

LOGO PERGURUAN TINGGI

Ref: Seri Kuliah Ringkas (SKR) KALKULUS 1, Julan Hernadi, Penerbit: Erlangga, 2021

[1] Minat kolaborasi, silakan kontak penulis: julan.hernadi@gmail.com atau julan.hernadi@math.uad.ac.id

Peta Konsep



Domain, kodomain, range, aturan pengawanan.
Menggambar grafik fungsi secara manual & juga berbantuan komputer
Fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.
Operasi aljabar fungsi
Invers fungsi dan fungsi invers.
Pengertian Fungsi dan Grafik Fungsi
Operasi Fungsi dan Fungsi Invers
Komposisi fungsi
FUNGSI
Fungsi aljabar
Irisan kerucut
Pengem-bangan Konsep Fungsi
Fungsi-fungsi pada Bidang Sains & Teknik
Fungsi sepotong-sepotong
Fungsi Transendental
Fungsi pembulatan
Translasi, refleksi, dan dilatasi grafik fungsi
Fungsi Trigonometri

Capaian Pembelajaran:

1. Memahami definisi fungsi
2. Membedakan relasi berupa fungsi dan bukan fungsi
3. Menentukan daerah asal (domain), daerah kawan (ko-domain), dan daerah hasil (range)
4. Menyajikan fungsi dalam berbagai bentuk.

Bagaimana fungsi bisa tercipta?

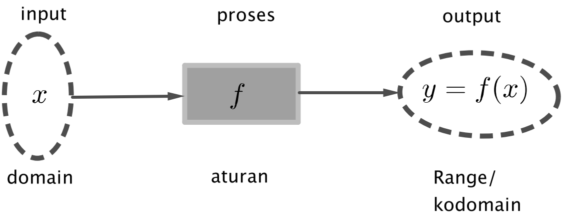
> "⋯ *Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat" (QS. Al-Furqon (25):2)*

Ukuran dalam bentuk bilangan tetap disebut konstanta, ukuran dalam bentuk bilangan yang berubah-ubah disebut variabel.

Contoh Variabel: kecepatan angin, temperatur, nilai tukar mata uang, pertambahan populasi, pertumbuhan ekonomi, dan lain-lain.

Contoh Konstanta: kecepatan cahaya (sekitar 300rb km/det), percepatan gravitasi (sekitar 9.8 m/det2), perbandingan keliling dan diameter lingkaran ($\pi \approx 3.14$), dll.

Relasi khusus yang membangun hubungan antara variabel terikat dan variabel bebas disebut fungsi.



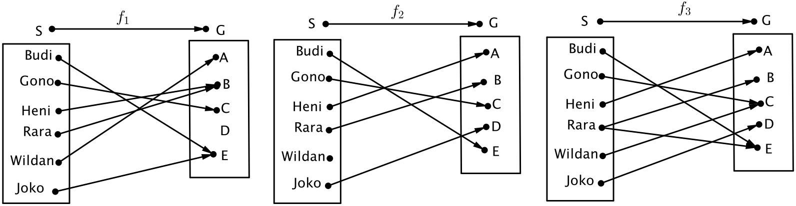
Fungsi adalah aturan atau proses yang membawa anggota suatu himpunan menjadi anggota himpunan lain. Notasi

$$x \in A \xrightarrow{f} y = f(x) \in B,$$

dibaca f fungsi yang membawa $x \in A$ menjadi $y \in B$. Di sini A: domain, B: kodomain, dan $R(f) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$: adalah daerah hasil (range).

Pertanyaan 1: Apa saja yang menjadi aturan untuk sebuah fungsi (lihat buku hal 3)?

Contoh 1.1: Misalkan $S = \{\text{Budi, Gono, Heni, Rara, Wildan, Joko}\}$ himpunan mahasiswa dan $G = \{\text{A,B,C,D,E}\}$ himpunan nilai mata kuliah kalkulus. Misalkan S ditetapkan sebagai domain dan G sebagai kodomain, beberapa aturan pengawanan diberikan sebagai berikut:



(a) Sebuah fungsi (b) Bukan sebuah fungsi (c) Bukan sebuah fungsi

Pertanyaan 2: Mengapa f_2 dan f_3 bukan fungsi? (Rujuk jawaban Pertanyaan 1)

Misalkan $A, B \subset \mathbb{R}$ maka $f : A \to B$ disebut fungsi real.

Pertanyaan 3: Diberikan fungsi $y = f(x)$ dengan $f(x) = -x^2 + 3x - 4$.

1. Tentukan nilai y jika diberikan $x = 2$ dan $x = 5$.
2. Tentukan nilai y jika diberikan $x = t - 2$.
3. Tentukan rumus untuk $f(2x + 1)$

Jawaban lihat Contoh 1.3, buku hal 5.

Istilah fungsi variabel tunggal (*single variable)* dan fungsi variabel banyak (*multivariabl*e) merujuk pada banyaknya variabel bebas.

- $f(x) = x^2 - 1$ adalah fungsi variabel tunggal, variabelnya adalah x.
- Pada hukum gas ideal, tekanan (p) bergantung pada volume (V) dan temperatur (T) melalui formula $p = f(V, T) = nRT/V$. Ini adalah fungsi 2 variabel, variabelnya V dan T.

Identifikasi Domain dan Range Fungsi

Domain fungsi f ditulis $D_f := \{x : f(x) \text{ terdefinisi}\}$, range fungsi f ditulis $R_f := \{y : y = f(x), x \in D_f\}$

Contoh1.3(1): Fungsi $y = ax^2$, a sebuah konstanta positif. Domain: $D_f = \mathbb{R}$ karena semua bil real x, $y = ax^2$ terdefinisi. Range: $R_f = \{y : y > 0\}$ karena $y = ax^2$ selalu positif menjangkau semua nilai dalam interval $0 < y < \infty$.

Contoh1.3(2): Fungsi $y = \frac{1}{x}$ tidak terdefinisi hanya di $x = 0$. $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ semua bil real kecuali nol.

Pertanyaan 4: Jika $a < 0$, dan $f(x) = ax^2$, tentukan D_f dan R_f.

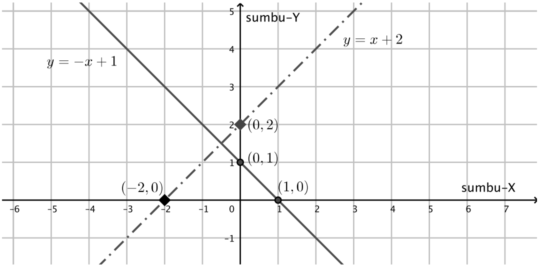
Pertanyaan 5: Jika $D_f := \mathbb{R}_+$ semua bil real positif dan $f(x) = \frac{1}{x}$, tentukan R_f.

Pertanyaan 6: Kerjakan juga Latihan Selingan 1.1.

Definisi 1.2: Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi bernilai real dengan domain $A \subseteq \mathbb{R}$. Grafik fungsi f adalah himpunan $G(f)$ di mana

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \text{ atau } G(f) = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in A\}.$$

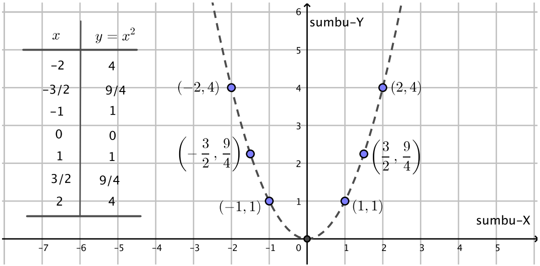
Contoh1.4: Grafik fungsi $y = ax + b$ untuk (i) $a = 1$ dan $b = 2$, (ii) $a = -1$ dan $b = 1$. Ini disebut fungsi linear.



Pertanyaan 7: Bagaimana cara menggambar grafik fungsi ini? Mengapa ia berbentuk garis lurus? Apa peran a dan b di sini. Kerjakan Latihan Selingan 1.2.

Grafik Fungsi Kuadrat (Parabola)

Contoh 1.5: Gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2$ untuk $x \in [-2, 2]$.



Pertanyaan 8: Bagaimana cara menggambar grafik fungsi ini? Apa sama dengan cara menggambar fungsi linear?

[**Istilah berbanding lurus**] Dua variabel x dan y dikatakan sebanding atau berbanding lurus (**proporsional**) jika mereka dihubungkan oleh **garis lurus** $y = kx$ di mana k disebut konstanta proporsional. Mengapa grafik fungsi $y = x^2$ berbentuk parabola bukan garis lurus?

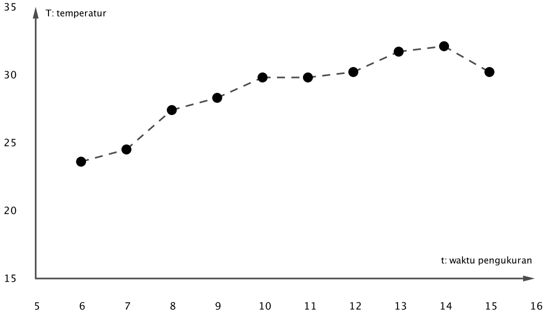
Computer Algebraic System (CAS)

Aplikasi Computer Algebraic System (CAS) untuk menggambar grafik fungsi, ada ratusan pilihan, cukup pilih salah satu:

- GeoGebra (strong reccomendation)
- GNU Octave
- Maple
- Mathcad
- Mathematica
- MuPAD
- Scilab
- SageMath
- Symbolic Math Toolbox (MATLAB)
- SymPy (Python)
- Wolfram Alpha
- Algeo (Android-Calculator)

Sajian Fungsi Tabular dalam Grafik

Pkl	07.00	08.00	09.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00
Temp	24.5	27.4	28.3	29.8	29.8	30.2	31.7	32.1	30.2



Pertanyaan 8: Bagaimana cara menentukan suhu pada pukul 07.15 dan pukul 15.30 padahal datanya tidak tersedia?

Fungsi dalam bentuk deskriptif

Bit adalah digit 0 atau 1. String-bit adalah array yang terdiri dari 0 dan 1. Misalkan D adalah himpunan string bit maka array $110, 01011, 1110011, \cdots$ adalah beberapa contoh anggota D. Misalkan $x \in D$.

1. Misalkan $f(x) :=$ banyak bit dalam x, misalnya $f(110) = 3$, $f(01011) = 5$ dan $f(1110011) = 7$. Dalam hal ini f adalah fungsi.
2. Misalkan $g(x) :=$ banyak bit 1 dalam x, misalnya $f(110) = 2$, $f(01011) = 3$ dan $f(1110011) = 5$. Dalam hal ini g adalah fungsi.
3. Misalkan $h(x) :=$ posisi bit 0 pada x, misalnya $f(110) = 3$, $f(01011) = 1, 3$ dan $f(1110011) = 4, 5$. Dalam kasus ini h bukan fungsi karena ada anggota domain yang memiliki lebih dari satu pasangan pada kodomain (tidak tunggal).

Pertanyaan 8: Dapatkah fungsi string-bit digambarkan grafiknya? Mengapa?

Soal-soal evaluasi capaian pembelajaran part 1:

1. Latihan selingan 1.3 (hal 7): Di sini ada 7 fungsi kuadrat. Amati perbedaan antara $y = x^2$ dan $y = 2x^2$, antara $y = x^2$ dan $y = x^2 + 1$, antara $y = x^2$ dan $y = -x^2$, antara $y = x^2$ dan $y = (x-1)^2$, antara $y = x^2$ dan $y = (x+1)^2$, kemudian $y = 2(x+1)^2 - 1$.
2. Latihan Bab 1 No 1 (hal 57): mahasiswa diminta memahami hubungan 2 fungsi melalui grafiknya.
3. Latihan Bab 1 No 2 (hal 57): mahasiswa diminta membuat narasi perjalanan seorang sales melalui grafik jarak Sang sales dari rumah selama seharian penuh.
4. Latihan Bab 1 No 3 (hal 57): mahasiswa diminta membuat sketsa grafik perubahan suhu air setelah dimasukkan es batu.
5. Untuk pengembangan capaian pembelajaran part 1, silakan kerjakan soal-soal No. 4 s.d. No. 10 pada Latihan Bab 1 (hal 58).

Capaian Pembelajaran:

1. Melakukan operasi aljabar fungsi.
2. Menentukan domain dan range fungsi hasil operasi aljabar.
3. Mengidentifikasi fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.
4. Memahami definisi invers fungsi dan fungsi invers.
5. Menentukan dan menggambar grafik fungsi invers.
6. Memahami operasi komposisi dua fungsi atau lebih.

Operasi aljabar fungsi

Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ dan $g : A \to \mathbb{R}$ adalah fungsi-fungsi bernilai real.

1. $f \pm g : A \to \mathbb{R}$ dengan $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ untuk setiap $x \in A$.
2. $fg : A \to \mathbb{R}$ dengan $(fg)(x) := f(x)g(x)$ untuk setiap $x \in A$.
3. Jika $g(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$ maka $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ dengan $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ untuk setiap $x \in A$.

Contoh 1.8: Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) := x - 1$ dan $g(x) := x^2 + 1$. Diperoleh

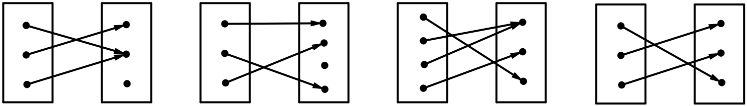
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x-1) + (x^2+1) = x^2 + x$,
- $(fg)(x) = (x-1)(x^2+1)$, dan
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

Perlu diwaspadai kemungkinan $\frac{f(x)}{g(x)}$ tidak terdefinsi di x tertentu, misalnya ketika $g(x) = 0$. Apakah $\frac{g}{f}$ terdefinisi? Domain dan range hasil operasi dua fungsi ada kemungkinan berubah, lihat pembahasan lengkap Contoh 1.8 pada buku hal 11-13.

Latihan Selingan 1.4

Diberikan fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dan $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := 2x$ dan $g(x) = -3x + 1$. Tentukan R_f, R_g dan R_{f+g}. Tunjukkan masing-masing range fungsi pada bidang kartesian.

Fungsi injektif dan fungsi surjektif



(a) Tidak injektif dan tidak surjektif

(b) Injektif tetapi tidak surjektif

(c) Tidak injektif tetapi surjektif

(d) Bijektif

Injektif atau satu-satu (one-to-one) $\longrightarrow$ tidak terjadi percabangan. Surjektif atau "kepada (onto)" $\longrightarrow$ semua anggota kodomain habis terpasang. Untuk definisi formal, lihat Definisi 1.5 (hal 12).

- Gambar a: ada percabangan dan anggota kodomain tidak habis $\rightarrow$ tidak injektif dan tidak surjektif
- Gambar b: tidak ada percabangan tapi anggota kodomain tidak habus $\rightarrow$ injektif tapi tidak surjektif.
- Gambar c: ada percabangan, anggota kodomain habis $\rightarrow$ tidak injektif namun surjektif.
- Gambar d: tidak ada percabangan, anggota kodomain habis $\rightarrow$ injektif dan surjektif $\rightarrow$ bijektif.

Contoh soal tentang fungsi injektif dan surjektif

Contoh 1.9: Misalkan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat dan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) := x^2$.

1. Apakah fungsi ini injektif?
2. Apakah fungsi ini surjektif?

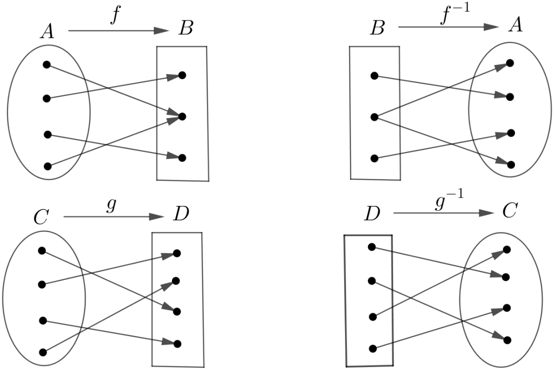
Penjelasannya: lihat hal 13-14.

Contoh 1.10: Misalkan S himpunan string-bit, $\mathbb{Z}_+$ himp bulat positif dan $f : S \to \mathbb{Z}_+$. Selidikilah sifat injektif dan surjektif fungsi f sebagai berikut.

1. $f_1(s) :=$ posisi bit 0 pada pada string s.
2. $f_2(s) :=$ banyaknya bit 1 pada string s.
3. $f_3(s) :=$ bilangan bulat terkecil k sehingga bit ke-k adalah 1 dan $f_3(s) = 1$ jika string s tidak memuat bit 1.

Penjelasannya: lihat hal 14

Fungsi invers dan invers fungsi

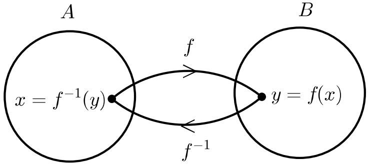


- f dan g surjektif (semua anggota kodomain habis terpasang).
- g injektif, f tidak injektif $\rightarrow$ g bijektif, f tidak bijektif.
- g^{-1} berupa fungsi, f^{-1} bukan fungsi (mengapa?).

Fungsi invers

Misalkan fungsi $f : X \to Y$ bijektif maka fungsi invers dari f adalah $f^{-1} : Y \to X$ yang didefinisikan sbb:

$$y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y) \tag{1}$$



Contoh 1.11: Misalkan $\mathscr{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ dan $h : \mathscr{P}(\{a, b\}) \to \{00, 10, 01, 11\}$ dengan

$$h(\emptyset) = 00, h(\{a\}) = 10, h(\{b\}) = 01, h(\{a, b\}) = 11$$

Fungsi h jelas bijektif sehingga dapat diperoleh invers $h^{-1} : \{00, 10, 01, 11\} \to \mathscr{P}(\{a, b\})$ sebagai berikut:

$$h^{-1}(00) = \emptyset, h^{-1}(10) = \{a\}, h^{-1}(01) = \{b\}, h^{-1}(11) = \{a, b\}.$$

Teknik menentukan formula fungsi invers

Contoh 1.12: Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh formula

$$f(x) = 3x + 1$$

Tentukan formula f^{-1}.

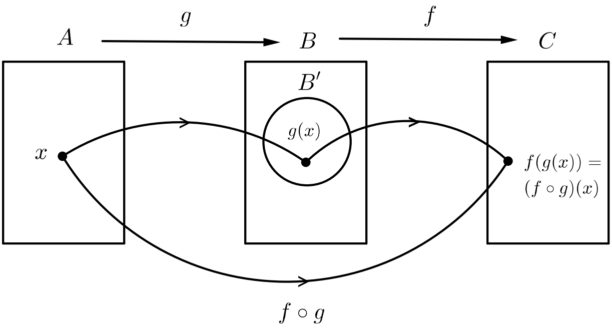
Penyelesaian: Misalkan $y = f(x)$, kemudian gunakan hubungan (1):

$$y = 3x + 1 \leftrightarrow 3x = y - 1 \leftrightarrow$$
$$x = \frac{y-1}{3} \leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3} \leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}.$$

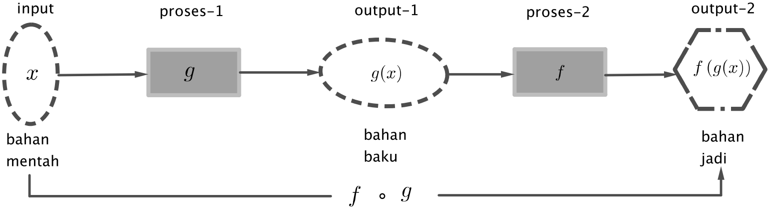
- Pada penjabaran ini, mengapa x bisa diganti $f^{-1}(y)$?
- Bagaimana hubungan grafik fungsi $y = f(x)$ dan grafik fungsi inversnya $y = f^{-1}(x)$. Lihat Gambar 1.13 (hal 16).
- Pahami Contoh 1.13, kerjakan Latihan Selingan 1.6, 1.7, dan 1.8.

Diberikan fungsi $g : A \to B$ dan $f : B \to C$, komposisi fungsi f dan g adalah fungsi $f \circ g : A \to C$ yang didefinisikan sebagai

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \text{ for all } x \in A. \tag{2}$$



Apa syarat agar $f \circ g$ terdefinisi dengan baik? $\to$ lihat buku hal 17.



- Semakin banyak proses/tahapan maka semakin banyak fungsi yang terlibat komposisi.
- Sebagai contoh, pakaian berasal dari bahan mentah berupa kapas, kapas dioleh menjadi benang, benang diolah menjadi kain, kain dijahit menjadi pakaian. Biaya-biaya pada setiap tahap dapat dimodelkan sebagai komposisi fungsi-fungsi.

Contoh soal komposisi fungsi

Contoh 1.14: Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dan $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Definisikan fungsi $g : A \rightarrow B$, $f : B \rightarrow C$ dengan

$$g(a) = 3, g(b) = 2, g(c) = 4, g(d) = 1, g(e) = 3$$
$$f(1) = 5, f(2) = 8, f(3) = 7, f(4) = 7.$$

Tentukan $f \circ g$. Apakah $f \circ g$ merupakan sebuah fungsi? Lihat buku hal 18-19.

Penguatan konsep:

1. Apakah berlaku sifat komutatif: $g \circ f = f \circ g$? Pahami Contoh 1.15 dan Contoh 1.16.
2. Apa hasil dari $f \circ f^{-1}$ dan $f^{-1} \circ f$? Kesimpulan apa yang dapat diperoleh dari Contoh 1.17?

Soal-soal evaluasi pembelajaran part 2

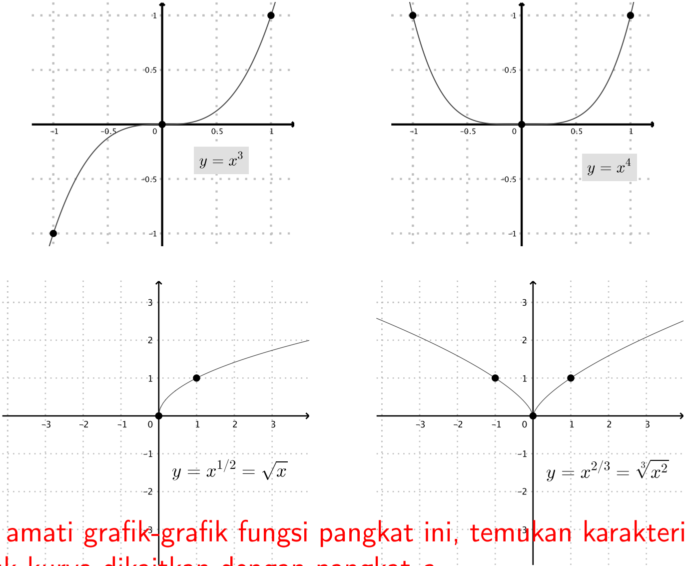
1. Diketahui $f(x) = x + \frac{1}{x}$ dan $g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$. Tentukan formula untuk $f+g, f-g$, fg, $\frac{f}{g}$. Tentukan syarat domain agar fungsi-fungsi ini terdefinisi dengan baik.
2. Identifikasi sifat injektif, surjektif, dan bijektif fungsi-fungsi pada Latihan Selingan 1.5.
3. Kerjakan Latihan Selingan 1.7.
4. Kerjakan Latihan Selingan 1.8.
5. Kerjakan Latihan Selingan 1.9.
6. Kerjakan Latihan Selingan 1.10.

Capaian Pembelajaran part 3a:

1. Memahami bentuk fungsi aljabar dan grafiknya.
2. Memahami definisi fungsi sepotong-sepotong, menggambar grafiknya, dan penerapannya.
3. Memahami definisi fungsi pembulatan, menggambar grafiknya, dan penerapannya.
4. Memahami satuan radian dan derajat, serta konversinya.
5. Memahami berbagai macam fungsi trigonometri dasar dan menggambar grafiknya, serta penerapannya.
6. Memahami berbagai macam identitas trigonometri.

Fungsi aljabar (fungsi pangkat)

Bentuk umum fungsi pangkat adalah $f(x) = x^a, a \neq 0$,



Coba amati grafik-grafik fungsi pangkat ini, temukan karakteristik bentuk kurva dikaitkan dengan pangkat a.

1. Fungsi suku banyak (polinomial):
   $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ di mana $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ adalah konstanta dengan $a_n \neq 0$.

   Contoh: fungsi kuadrat $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
2. Fungsi rasional: $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$.

   Contoh: $r(x) = \frac{4x^3-1}{x^2+1}$.
3. Fungsi aljabar campuran.

   Contoh: $f(x) = (x^2-1)^{2/3}, g(x) = x(1-x)^{3/5}$.

Dalam hal domain tidak dinyatakan secara eksplisit maka yang dimaksud adalah domain natural (lihat hal 5).

Latihan: Gambarkan grafik fungsi berikut, kemudian tentukan domain dan rangenya: $q(x) = \frac{1+x}{x(x-1)(x+2)}$.

Fungsi Sepotong-sepotong (fungsi cabang)

Fungsi sepotong-sepotong atau fungsi cabang didefinisikan berdasarkan sub-sub domain, yaitu:

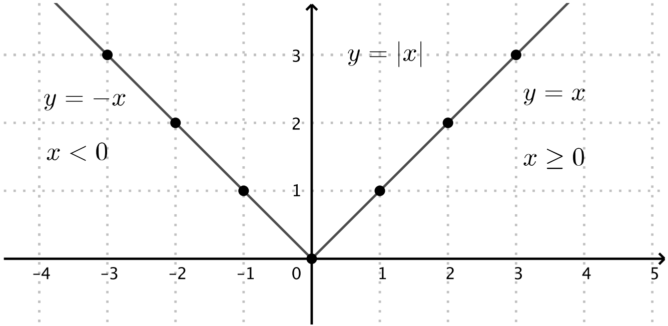
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{untuk } x \in D_1, \\ f_2(x), & \text{untuk } x \in D_2, \\ f_3(x), & \text{untuk } x \in D_3. \end{cases} \tag{3}$$

di mana domain $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

Contoh 1.18: Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := |x|$, ini disebut fungsi nilai mutlak. Nilai mutlak tidak pernah negatif, contoh $f(3) = |3| = 3, f(0) = |0| = 0, f(-2) = |-2| = 2$. Fungsi nilai mutlak secara formal didefinisikan sebagai:

$$f(x) := |x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Di sini domain fungsi $\mathbb{R}$ dipecah menjadi $D_1 = (-\infty, 0)$ dan $D_2 = [0, \infty)$.



Perhatikan ada dua fungsi yang terlibat, yaitu $y = f_1(x) = -x$ untuk $-\infty < x < 0$ dan $y = f_2(x) = x$ untuk $0 \leq x < \infty$.

Penggunaan fungsi cabang (1)

Contoh 1.19: Sistem tarif pemakaian air PDAM dan listrik PLN pernah menggunakan sistem berjenjang (progresif) bergantung pada kuantitas pemakaian. Sebagai contoh tarif dasar biaya pemakaian listrik per kWh ditetapkan sebagai berikut:

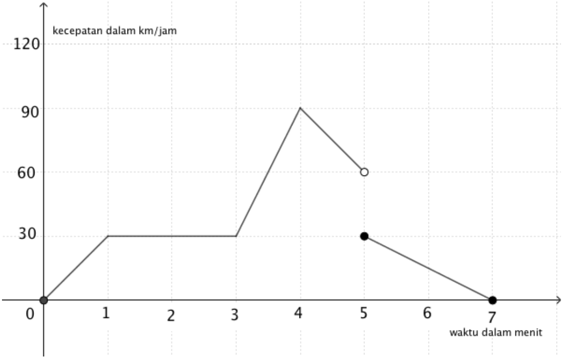
$$h(w) = \begin{cases} 1000 & \text{jika } 0 < w \leq 30, \\ 1500 & \text{jika } 30 < w \leq 100, \\ 2000 & \text{jika } w > 100. \end{cases}$$

Berapa biaya pemakaian untuk 165 kWh? Misalnya pelanggan juga harus membayar biaya beban sebesar Rp52.000,00 dan biaya penerangan 5% dari pemakaian, berapa konsumen harus membayar jika menghabiskan 425 kWh per bulan.

Penyelesaian: Diskusikan bersama teman, lihat buku hal 23-24. Penggunaan fungsi cabang seperti ini biasanya digunakan untuk menerapkan kebijakan subsidi berdasarkan klaster daya beli masyarakat.

Penggunaan fungsi cabang (2)

Contoh 1.20: Berikut ini grafik kecepatan sebuah kendaraan yang diukur dari $t = 0$ sampai dengan $t = 7$ menit. Rumuskan fungsi yang bersesuaian dengan grafik ini. Deskripsikan informasi yang dapat diperoleh melalui grafik ini.



Penyelesaian: Lihat pembahasan hal 25-26, diskusikan bersama teman.

Fungsi Pembulatan

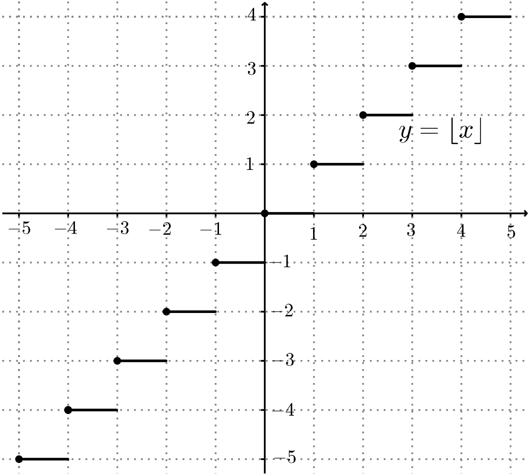
Tiga jenis fungsi pembulatan:

1. Fungsi *flooring*, yaitu fungsi $\lfloor x \rfloor :=$ bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$.
2. Fungsi *ceiling*, yaitu fungsi $\lceil x \rceil :=$ bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $\lceil x \rceil$.
3. Fungsi *rounding*, $[x] :=$ bilangan bulat terdekat dengan x.

Sebagai contoh, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1, \lfloor 0.5 \rfloor = 0, \lceil -0.5 \rceil = 0, \lceil 0.5 \rceil = 1, \lfloor 3.1 \rfloor = 3, \lceil 3.1 \rceil = 4, \lfloor 5 \rfloor = \lceil 5 \rceil = 5$. Untuk fungsi rounding, $[7.2] = 7$, $[7.6] = 8$, dan $[7.5] = 8$. Paling sering digunakan adalah fungsi flooring dan fungsi ceiling. Kedua fungsi ini bernilai sama pada bilangan bulat, yaitu $\lfloor n \rfloor = \lceil n \rceil = n$ untuk $n \in \mathbb{Z}$.

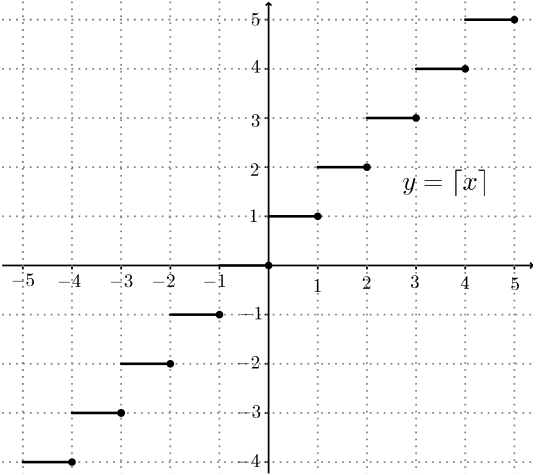
Contoh 1.21: Data yang tersimpan pada disk komputer biasanya disajikan dalam byte di mana setiap byte terdiri atas 8 bit. Banyak byte yang dibutuhkan untuk menyimpan data yang terdiri atas 100 bit adalah $\left\lceil \frac{100}{8} \right\rceil = \lceil 12.5 \rceil = 13$.

Grafik fungsi flooring



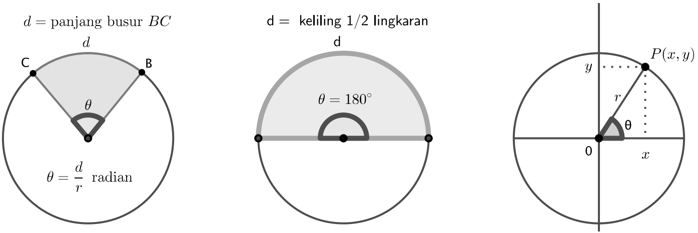
Sepintas, grafik fungsi flooring dan ceiling sama. Cermati apa saja yang membedakan kedua grafik fungsi ini?

Grafik fungsi ceiling



Diskusi: Pahami Contoh 1.22 dan 1.23, kemudian kerjakan Latihan Selingan 1.16 dan 1.17.

Satuan derajat versus radian



$$\theta^\circ = \frac{\text{panjang busur yang dibentuk oleh sudut pusat } \theta}{\text{panjang jari-jari lingkaran}} \text{ radian} \qquad (4)$$

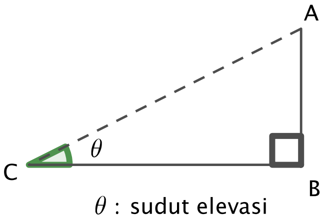
Khusus $r = 1$ maka 180 derajat $=$ keliling $(\frac{1}{2}$lingkaran$) = \pi$ radian. Jadi nilai $\pi \simeq 3.14$ adalah panjang busur lingkaran dengan $r = 1$ yang dibentuk oleh sudut lurus 180°. Jadi, $\pi \simeq 3.14$ aproksimasi untuk keliling setengah lingkaran beradius 1. Diperoleh

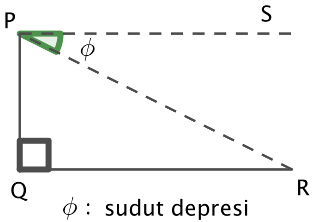
1π radian $= 180^\circ$, 1 radian $= \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57.3^\circ$, dan , $1^\circ = \frac{\pi}{180} \simeq 0.017$ radian.

Enam fungsi trigonometri dasar, disebut juga perbandingan trigonometri:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} & \csc\theta &= \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} & \sec\theta &= \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} & \cot\theta &= \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta} \end{aligned} \tag{5}$$

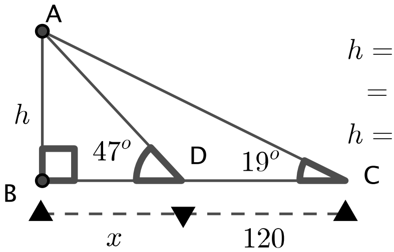
Fungsi ini dapat diperoleh melalui perbandingan panjang sisi segitiga siku-siku sebelumnya.





Pertanyaan: Seandaianya hanya diketahui salah satu perbandingan trigonometri, apakah perbandingan trigonometri lainnya dapat ditentukan? Diskusikan bersama teman.

Contoh 1.25: Seorang surveyor mengukur sudut elevasi puncak sebuah gedung yang berdiri tegak lurus sebesar 19°. Ketika bergerak lebih dekat 120 meter dari posisi semula ternyata sudut elevasinya sebesar 47°. Berapa tinggi gedung tersebut?
Penyelesaian: Sketsa Situasi.

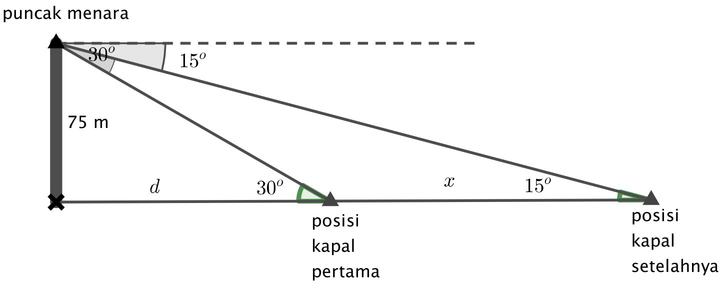


$$\begin{aligned} h &= (x+120)\tan 19 \\ &= 0.3443(x+120) \\ h &= x\tan 47 = 1.072x. \end{aligned}$$

Pembahasan lengkap lihat buku hal 32, diskusi bersama teman2.

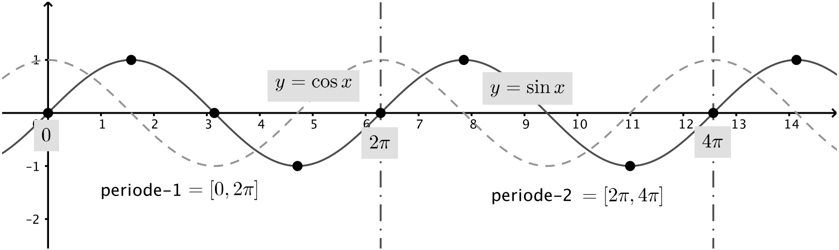
Contoh 1.26: Menara pemantau kapal berada di pantai tingginya 75 meter. Pada suatu ketika sudut depresi terhadap sebuah kapal adalah 30°. Hitunglah jarak kapal terhadap pantai pada saat itu. Seandainya kapal berlayar menjauhi pantai dengan kecepatan konstan, ternyata setelah 2 menit kemudian sudut depresinya menjadi 15°. Tentukan kecepatan kapal tersebut dalam km/jam.

Sketsa situasi:

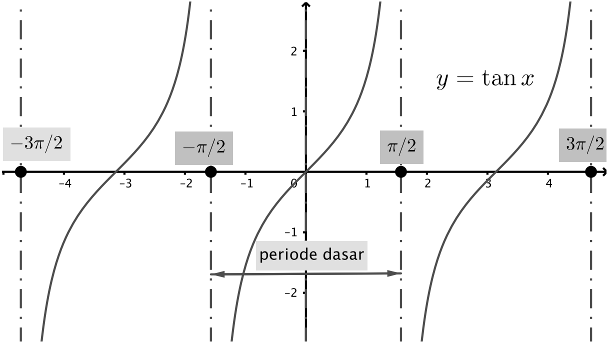


Pembahasan lebih lanjut lihat buku hal 33, diskusikan bersama teman2.

Satuan yang digunakan adalah radian, misalnya $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ditulis $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ sebab $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radian. Sangat disarankan menggunakan CAS untuk menggambar grafik fungsi trigonometri ini.



Untuk fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ memiliki domain $(-\infty, \infty)$ dan range $[-1, 1]$. Fungsi periodik dengan periode 2π pada $[0, 2\pi]$.



Fungsi periodik dengan dengan periode π pada $[-\pi, \pi]$.

Sudut-sudut istimewa

Sudut-sudut istimewa adalah

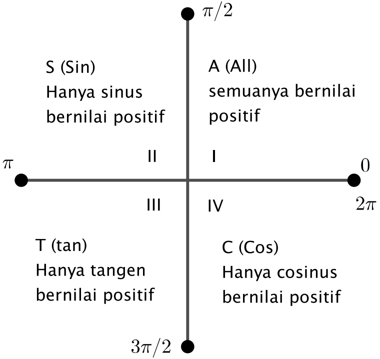
$$0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 150^0, 180^0, 270^0, 360^0$$

bersesuaian dengan

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

Penting: Nilai fungsi trigonometri pada sudut-sudut istimewa dapat dilihat pada hal 34.

Nilai fungsi trigometri pada kuadran: pola ASTC



- Kuadran I: $[0, \pi/2]$ semua (All) nilai fungsi trigonometri positif
- Kuadran II:$[\pi/2, \pi]$ hanya Sinus (S) yang positif, lainnya negatif.
- Kuadran III: $[\pi, 3\pi/2]$ hanya Tangen (T) yang positif, lainnya negatif.
- Kuadran IV: $[3\pi/2, 2\pi]$ hanya Cosinus (C) yang positif, lainnya negatif.

Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri berikut mudah dibuktikan dengan bantuan segitiga siku-siku:

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,\ 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.
- $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2},\ \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$.
- Pada sebuah segitiga ABC dengan sisi a, b, dan c berlaku $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ di mana θ adalah sudut yang dibentuk oleh sisi a dan b.
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$.

1. Kerjakan Latihan Selingan 1.22, diskusikan bersama teman. Apakah pola ASTC dapat divalidasi melalui grafik ini?
2. Dengan menggunakan CAS, gambarkan grafik fungsi $y = \cos 2x$, $y = 1 - 2\sin^2 x$, dan $y = 2\cos^2 x - 1$. Bagaimana hasilnya? Mengapa demikian?

Soal-soal evaluasi pembelajaran part 3a:

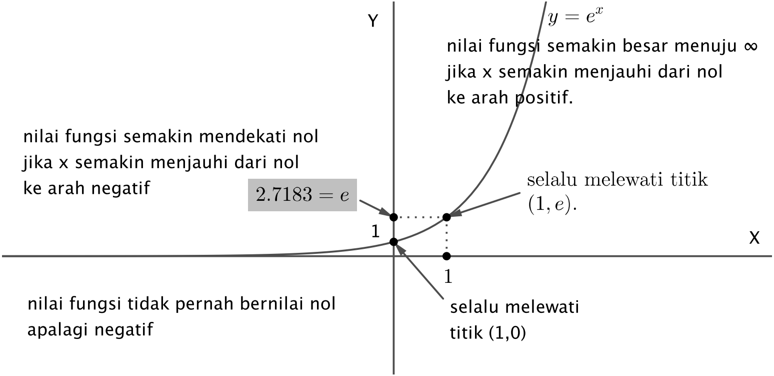
1. Apa yang dimaksud dengan fungsi aljabar campuran?
2. Diberikan fungsi aljabar $f(x) = \frac{4x^2-1}{x^2-1}$. Tentukan domain dan range fungsi ini, kemudian gambarkan grafiknya menggunakan CAS.
3. Salah satu penerapan fungsi cabang adalah pada sistem tarif pajak. Untuk ini, kerjakan soal no 15 pada Latihan Soal Bab1 hal 60.
4. Contoh 1.21 hal 27 tentang sistem penyimpanan data menggunakan fungsi pembulatan ke bawah (flooring). Berikan contoh lain penggunaan fungsi flooring, ceiling, dan rounding.
5. Dengan menggunakan CAS, gambarkan fungsi $y = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$ dan $y = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$. Apakah hasilnya sama? Mengapa?
6. Berapa derajat sudut yang dibentuk oleh lingkaran $r = 1$ yang menghasilkan busur dengan panjang $\frac{5}{2}$.
7. Kerjakan Latihan Selingan 1.19 dan 1.20 hal 33.
8. Hitunglah nilai $\tan 15^0$ dengan menggunakan identitas trigonometri. Validasilah hasil ini dengan menggunakan kalkulator.

Capaian Pembelajaran part 3b:

1. Memahami bentuk fungsi eksponensial dan fungsi logaritma serta penerapannya.
2. Menentukan invers fungsi trigonometri dan menentukan domainnya.
3. Memahami bentuk-bentuk fungsi hiperbolik dan grafiknya.
4. Memahami berbagai macam transformasi fungsi (translasi, refleksi, dan dilatasi).
5. Memahami istilah-istilah gelombang yang direpresentasikan menggunakan fungsi trigonometri.
6. Mengindentifikasi jenis irisan kerucut (lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola) melalui persamaannya dan sebaliknya.

Fungsi Transendental

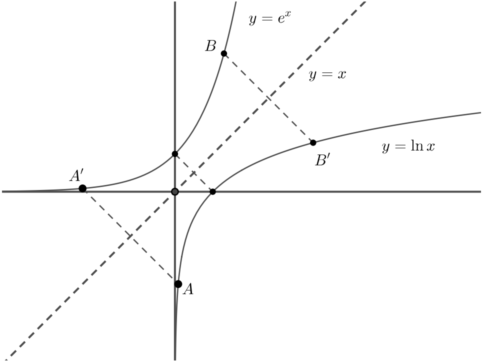
1. Fungsi eksponen: $f(x) = a^x$ di mana $a > 0$ dan $a \neq 1$.
2. Fungsi eksponen khusus, $a = e \approx 2.718$ diperoleh $f(x) = e^x$.



3. Fungsi logaritma natural: $f(x) = \ln x$.

Hubungan Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma

$$y = e^x \longleftrightarrow x = \ln y.$$



Ternyata fungsi $y = e^x$ dan $y = \ln x$ saling invers. Sifat-sifat fungsi eksponen dan hubungannya dengan fungsi logaritma dapat dibaca pada buku hal 38-39. Khususnya, apa yang dimaksud $f(x) = \log x$?

Sifat aljabar fungsi eksponen

Untuk setiap bilangan real x_1 dan x_2 berlaku:

- $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, yakni $f(x_1)f(x_2) = f(x_1+x_2)$.
- $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$, yakni $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = f(x_1-x_2)$.
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, yakni $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

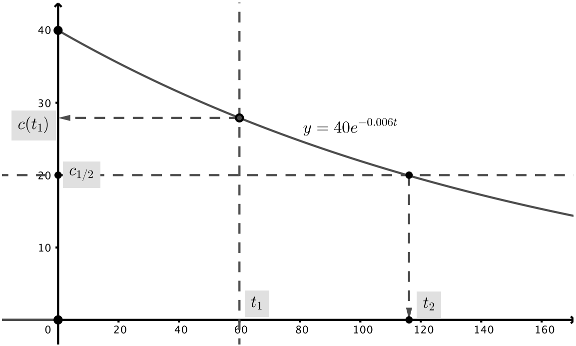
Contoh 1.27: Tentukan nilai x dari persamaan berikut:

1. $\ln\left(\frac{3.72}{x}\right) = 5.14$.
2. $16(1-e^{-x/2}) = 24$.
3. $x^{3.47} = 43.22$.

Penyelesaian:

- Lihat buku hal 40-41. Prinsip yang digunakan adalah jika $\ln x = \ln y$ maka $x = y$.
- Prinsip yang sama juga berlaku untuk fungsi eksponensial.
- Apa yang mendasari prinsip ini?

Contoh 1.28: Pada sebuah reaksi kimia, konsentrasi suatu zat setelah bereaksi selama t menit diberikan oleh relasi $c(t) = 40e^{-0.006t}$ dalam part per milion (ppm). Berapa kosentrasi zat setelah 1 jam? berapa lama waktu dibutuhkan agar kosentrasi tinggal separuhnya dari semula. Berikut grafiknya.

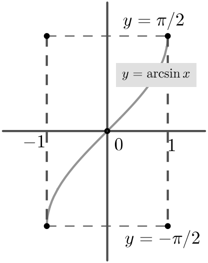


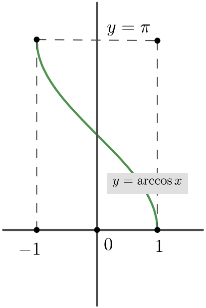
Pembahasan: lihat hal 41-42, diskusikan bersama teman2.

Fungsi Invers Trigonometri

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = 30^0 \text{ atau } \theta = \frac{\pi}{6} \to \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ atau } \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$y = \sin^{-1}(x) \longleftrightarrow x = \sin y, y = \cos^{-1}(x) \longleftrightarrow x = \cos y.$$





Diperlukan restriksi domain agar fungsi dan inversnya tetap sebagai fungsi. Perhatikan grafik ini. Untuk invers trigonometri dibatasi pada domain $[-1, 1]$.

Fungsi Hiperbolik

Fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ dan } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

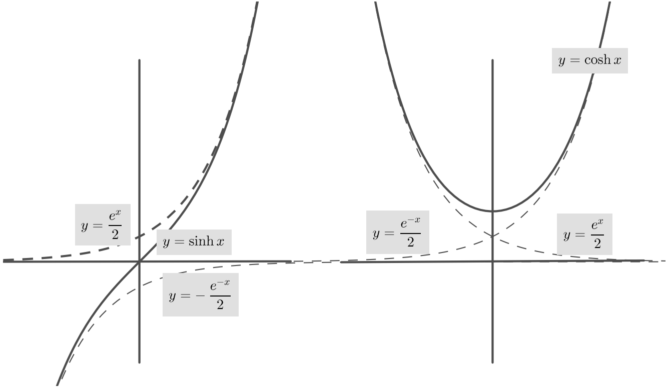
Fungsi hiperbolik lainnya adalah:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$
$$\mathrm{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \ \mathrm{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Beberapa identitas:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$,
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$,
- Lainnya, lihat buku hal 45.

Grafik fungsi hiperbolik



Amati grafik fungsi hiperbolik $y = \sinh x$ dan $y = \cosh x$ terbentuk dari dua fungsi $y_1 = \frac{e^{-x}}{2}$ dan $y_2 = \frac{e^{-x}}{2}$. Coba anda repro grafik ini menggunakan salah satu CAS, misalnya GeoGebra.

Translasi, refleksi, dan dilatasi grafik fungsi

Bentuk umum transformasi fungsi $y = f(x)$ adalah :

$$y = af\left(b(x-c)\right) + d. \tag{6}$$

Parameter a, b, c, dan d menentukan jenis transformasi seperti translasi (horizontal atau vertikal), refleksi terhadap garis tertentu, atau dilatasi (mengembang atau mengecil).

b $>$ 0: dilatasi horizontal
b $<$ 0: $+$ refleksi thd sumbu Y

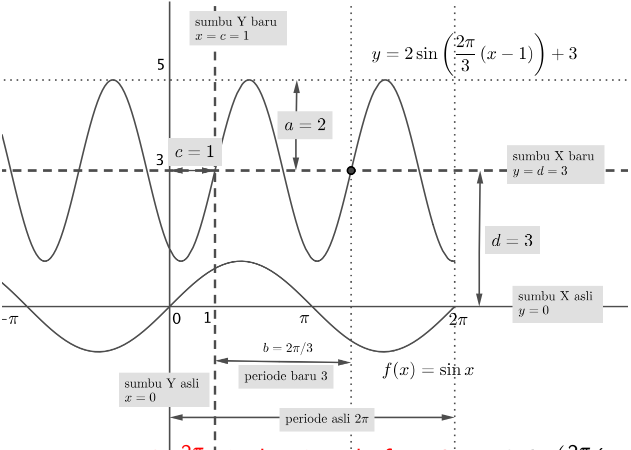
translasi vertikal

$$y = af\left(b(x-c)\right) + d$$

translasi horizontal

a $>$ 0: dilatasi vertikal
a $<$ 0: $+$ refleksi thd sumbu X

$y = f(x) = \sin x \to y = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}(x-1)\right) + 3$. Di sini $f(x) = \sin x$, $a = 2, b = \frac{2\pi}{3}, c = 1$, dan $d = 3$.

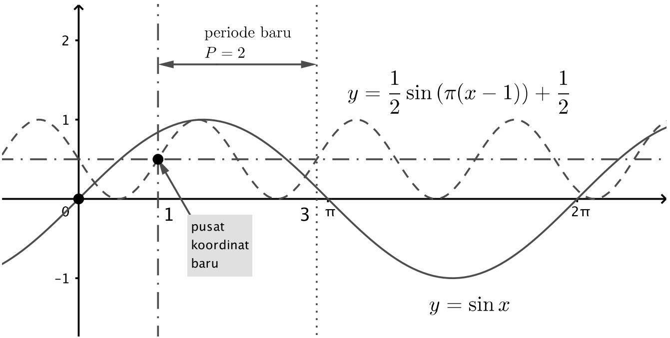


Apa peran paramater 2, $\frac{2\pi}{3}$, 1, dan 3 pada fungsi $y = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}(x-1)\right) + 3$ terhadap bentuk grafik. Pembahasan, lihat hal 47-48.

Gelombang sinus $y = A\sin(\omega t + \varphi)$

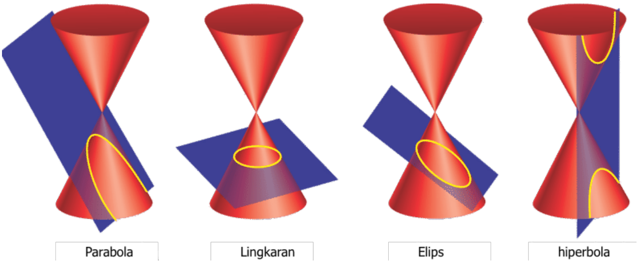
A : amplitudo, ω : frekuensi, dan φ : shifting (phasa).

Contoh 1.32: Diberikan fungsi gelombang sinus $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$. Identifikasilah parameter a, b, c, dan d, kemudian gambarkan grafiknya.
Penyelesaian: Lihat hal 48. Grafiknya sbb:



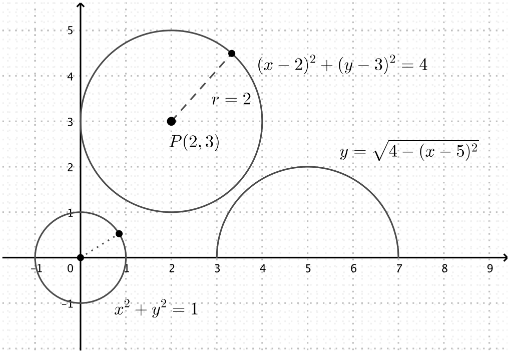
Kerjakan Latihan Selingan 1.33, 1.34, 1.35, dan 1.36, diskusikan bersama teman2.

Irisan kerucut (conic section) adalah kurva yang dihasilkan dari pemotongan sebuah kerucut dalam berbagai sudut.

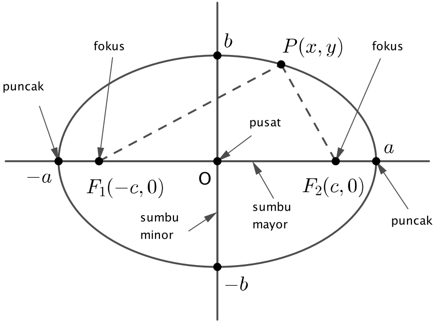


1. Amati masing-masing kurva yang dihasilkan. Bagaimana sudut potong kerucut untuk menghasilkan kurva-kurva tersebut?
2. Apa perbedaan kurva dan grafik fungsi.

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik (*locus*) pada bidang yang berjarak (jari-jari) sama terhadap titik tertentu (pusat). Persamaan lingkaran ditentukan oleh pusat dan jari-jarinya, lihat pers (1.4.4) hal 51.



Amati kurva2 ini, mana kurva yang merupakan fungsi, mana yang bukan? Berikan alasannya.



asumsi $a > b$
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
$F_1P + F_2P = 2a$

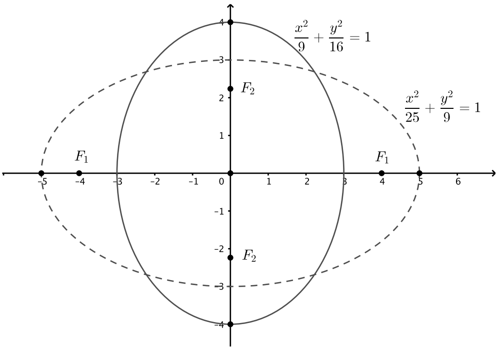
Elips adalah tempat kedudukan titik-titik (*locus*) pada bidang yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu (fokus) adalah tetap (konstan). Pada gambar berlaku $F_1P + F_2P = 2a$ di manapun titik P berada pada elips.

- Unsur-unsur elips: sumbu mayor, sumbu minor, fokus, pusat, dan puncak.
- Bisakah lingkaran dianggap elips, atau sebaliknya? Diskusikan bersama teman.

Contoh soal elips

Diberikan 2 elips dengan persamaan dan kurva berikut:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ dan } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

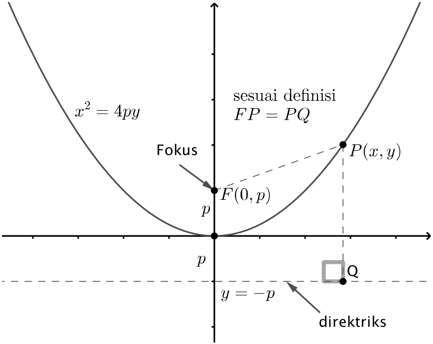


- Tentukan unsur-unsur masing-masing elips.
- Apa bedanya persamaan lingkaran dan persamaan elips.

Jawaban dibahas pada hal 1.33.

Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik (*locus*) pada bidang yang berjarak sama terhadap titik tertentu (fokus) dan terhadap garis tertentu (direktriks).



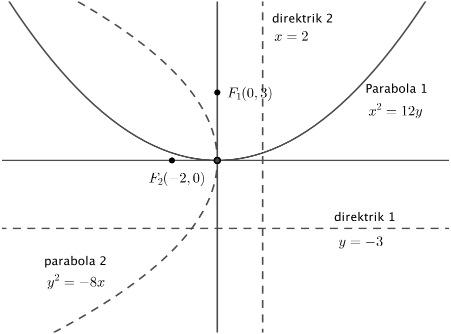
Bentuk standar parabola diberikan oleh persamaan:

$$y = \frac{x^2}{4p} \text{ atau } x^2 = 4py.$$

Contoh soal parabola

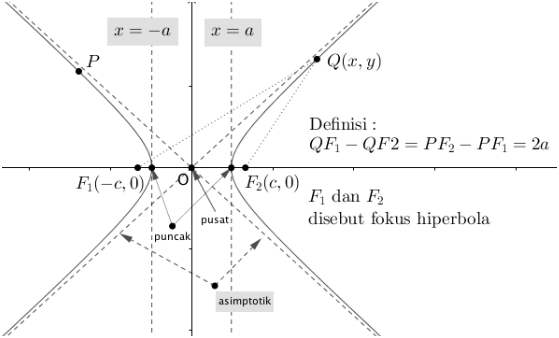
Diberikan dua parabola dengan persamaan dan kurva sbb:

1. $x^2 = 12y$
2. $y^2 = -8x$.



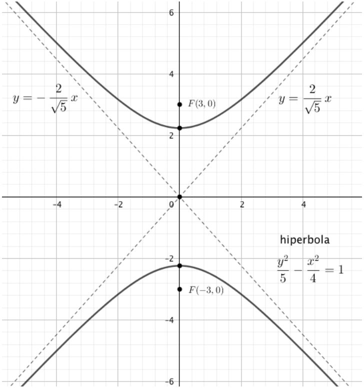
Penyelesaian: Lihat buku hal 54, diskusikan bersama teman2.

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik (*locus*) pada bidang yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu adalah tetap (konstan). Dua titik tertentu di sini disebut fokus hiperbola. Garis yang melalui dua fokus ini disebut sumbu fokus, titik tengah dua fokus disebut pusat, dan titik potong garis sumbu dan kurva disebut puncak hiperbola.



Apa saja unsur-unsur hiperbola?

Diberikan dua hiperbola dengan persamaan dan kurva sbb:
$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ dan $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$.



Tentukan unsur-unsur hiperbola2 ini. Penyelesaian: Lihat buku hal 54, diskusikan bersama teman2.

Translasi pusat irisan kerucut

Jika pusat $(0,0)$ digeser menjadi pusat baru (h,k) maka diperoleh bentuk irisan kerucut baru dengan pusat (h,k), yaitu:

- Lingkaran: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Sebelumnya sudah pernah dibahas.
- Elips: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.
- Parabola: $(x-h)^2=4p(y-k)$ atau $(y-k)^2=4p(x-h)$.
- Hiperbola: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ atau $\frac{(y-h)^2}{a^2}+\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$.

Untuk penguatan pemahaman, kerjakan Latihan Selingan 1.37 (ada 5 soal).

1. Kerjakan soal pada Latihan Selingan 1.27 sampai dengan 1.29 (ada 3 soal). Soal-soal ini merupakan penerapan fungsi eksponen pada bidang fisika.
2. Tentukan nilai invers fungsi trigonometri yang ada pada soal Latihan Selingan 1.30.
3. Kerjakan soal pada Latihan Selingan 1.31 dan 1.31.
4. Diberikan fungsi $f_1(x) = x^2$ dan $f_2(x) = \frac{1}{2}(2x - 1)^2$. Bagaimana cara memperoleh f_2 dari f_1?
5. Apa yang dimaksud dengan frekuensi pada bentuk sinuoida, khususnya apa perbedaan fungsi $f_1(x) = \sin \pi x$, $f_2(x) = \sin 2\pi x$, dan $f_3(x) = \sin 10\pi x$ untuk $x \in [0, 2\pi]$.
6. Kerjakan kembali soal-soal pada Latihan Selingan 1.37.

Pada akhir Bab 1 telah disiapkan sebanyak 50 soal. Soal-soal ini dimaksudkan untuk memperkuat pemahaman konsep fungsi dan juga membuka kesadaran bahwa materi fungsi ini memiliki spektrum penerapan pada berbagai bidang sains dan kehidupan. Berikut beberapa sampel soal yang ada.

Pajak penghasilan 2020 ditetapkan sebagai berikut. Pertama, tidak ada pajak untuk penghasilan sampai dengan Rp54.000.000,00 per tahun, ini disebut penghasilan tidak kena pajak (PTKP). Selanjutnya, untuk penghasilan kena pajak (PKP) dikenakan tarif pajak sebagai berikut: 5% untuk penghasilan sampai dengan Rp50.000.000,00; 15% untuk penghasilan di atas Rp50.000.000,00 sampai dengan Rp250.000.000,00; 25% untuk penghasilan di atas Rp250.000.000,00 sampai dengan Rp500.000.000,00, dan 30% untuk penghasilan di atas Rp500.000.000,00.

1. Sketsalah grafik tarif (rate) pajak (R) sebagai fungsi penghasilan (I).
2. Berapa besar pajak yang harus dibayarkan oleh seseorang yang berpenghasilan Rp120.000.000,00 per tahun?
3. Sketsalah grafik total pajak yang harus dibayarkan (T) sebagai fungsi penghasilan (I).

Seorang ahli biologi mencatat bahwa banyaknya derik jangkrik spesies tertentu bergantung pada temperatur dan hubungan ini hampir linear. Seekor jangkrik menghasilkan 113 derik per menit pada suhu 173°F dan 173 derik pada 80°F. Ini artinya kita dapat memperkirakan temperatur berdasarkan banyak derik jangkrik.

1. Temukan persamaan linear yang memodelkan temperatur T sebagai fungsi dari banyaknya derik jangkrik per menit N, kemudian gambarkan grafikmya.
2. Jika jangkrik menderik sebanyak 150 kali per menit, berapa estimasi temperatur saat itu?

Sampel Soal Latihan (Gaji tetap vs Gaji progresif)

Andaikan anda ditawarkan gaji untuk sebuah job dengan durasi selama 1 bulan (30 hari). Anda diminta memilih salah satu skema gaji sebagai berikut.

1. Gaji pasti, yaitu pada akhir bulan anda dibayar Rp500 juta,
2. Gaji akumulatif, hari pertama dibayar 1 rupiah, hari kedua dibayar 2 rupiah, hari ketiga dibayar 4 rupiah, dan seterusnya jika anda bekerja sampai dengan akhir bulan akan dibayar 2^{30-1} rupiah.

Sampel Soal (Jarak planet ke matahari vs Waktu Revolusi)

Data berikut adalah rata-rata jarak planet terhadap matahari (satuan: jarak bumi-matahari) d dan periodenya T yaitu waktu yang dibutuhkan untuk satu kali revolusi (dalam tahun).

Nama Planet	d	T
Venus	0.723	0.615
Bumi	1.000	1.000
Mars	1.530	1.881
Jupiter	5.203	11.861
Saturnus	9.541	29.457
Uranus	19.190	84.008
Neptunus	30.086	164.784
Pluto	39.507	284.350

Sebagai contoh jarak Bumi-Matahari 149.6 juta km maka jarak Saturnus-Matahari adalah 9.541×149.6 juta km $= 1.427$ milyar km. Begitu juga revolusi Bumi 1 tahun (365 hari) maka revolusi Saturnus 29.457 tahun (10751 hari).

Lanjutan

1. Plotinglah data tersebut pada bidang kartesian dengan sumbu horizontalnya adalah planet-planet dan sumbu vertikal masing-masing jarak dan waktu revolusi.
2. Tentukan fungsi pangkat $y = x^a$ yang paling cocok dengan data ini.
3. Hukum Keppler III mengatakan "Kuadrat dari periode revolusi sebuah planet adalah sebanding dengan pangkat tiga rata-rata jaraknya terhadap Matahari". Selidikilah akurasi dari hukum Keppler III ini.

HARAPAN: Mahasiswa sangat diharapkan memiliki penguasaan yang baik terhadap konsep fungsi ini karena fungsi merupakan benang pengikat topik-topik lainnya dalam matematika maupun ilmu terapan. Istilah-istilah populer seperti "signal", "data", "optimasi" yang banyak digunakan dalam bidang teknologi AI saat ini didominasi oleh konsep fungsi dalam matematika.