Kuliah Kalkulus 1 Semester Ganjil[1] 2023/2024

BAB 2. LIMIT & KEKONTIUNUAN FUNGSI

Nama Dosen Pengampu.

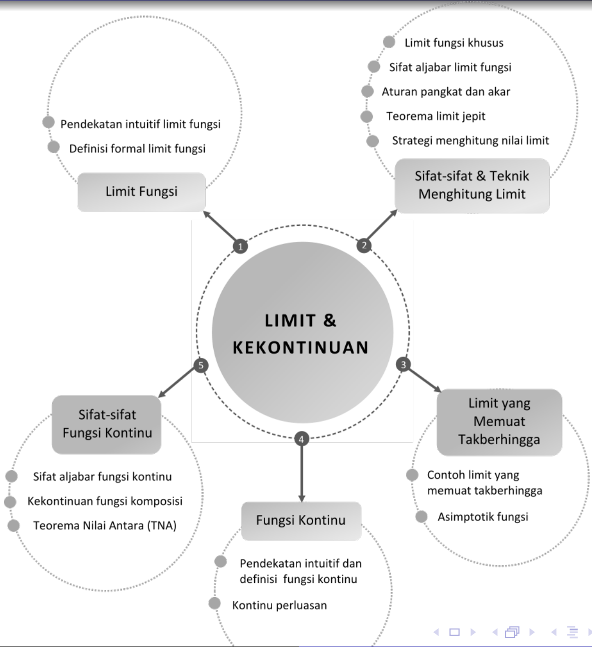
Kuliah disampaikan pada Prodi XYZ
Universitas/Institut/Sekolah Tinggi ABC

LOGO PERGURUAN TINGGI

Ref: Seri Kuliah Ringkas (SKR) KALKULUS 1, Julan Hernadi, Penerbit: Erlangga, 2021

[1] Minat kolaborasi, silakan kontak penulis: julan.hernadi@gmail.com atau julan.hernadi@math.uad.ac.id

Peta Konsep


LIMIT & KEKONTINUAN
1
Limit Fungsi
Pendekatan intuitif limit fungsi
Definisi formal limit fungsi
2
Sifat-sifat & Teknik Menghitung Limit
Limit fungsi khusus
Sifat aljabar limit fungsi
Aturan pangkat dan akar
Teorema limit jepit
Strategi menghitung nilai limit
3
Limit yang Memuat Takberhingga
Contoh limit yang memuat takberhingga
Asimptotik fungsi
4
Fungsi Kontinu
Pendekatan intuitif dan definisi fungsi kontinu
Kontinu perluasan
5
Sifat-sifat Fungsi Kontinu
Sifat aljabar fungsi kontinu
Kekontinuan fungsi komposisi
Teorema Nilai Antara (TNA)

Capaian Pembelajaran:

1. Mengaitkan konsep limit dengan masalah-masalah kontekstual.
2. Mendeskripsikan pengertian limit dalam bahasa sederhana.
3. Menyelidiki nilai limit secara numerik dan melalui grafik.
4. Memahami abstraksi pengertian limit dalam definisi formal.

Ilustrasi 1: Tarif Parkir

Misalkan biaya parkir sistem progresif selama x menit ditentukan oleh fungsi:

$$f(x) := \begin{cases} 4000 & 0 < x \leq 60 \\ 4000 + 1000 & 60 < x \leq 120 \\ 4000 + 2000 & 120 < x \leq 180, \\ \text{dst} & \end{cases}$$

1. Jika lama parkir selama 1,5 jam, berapa biaya parkir yang harus dibayarkan.
2. Jika ada 2 pelanggan, satunya parkir selama 60 menit (1 jam) satunya lagi parkir selama 61 menit. Berapa selisih lama parkir dan selisih biaya parkir yang harus meeka bayarkan?

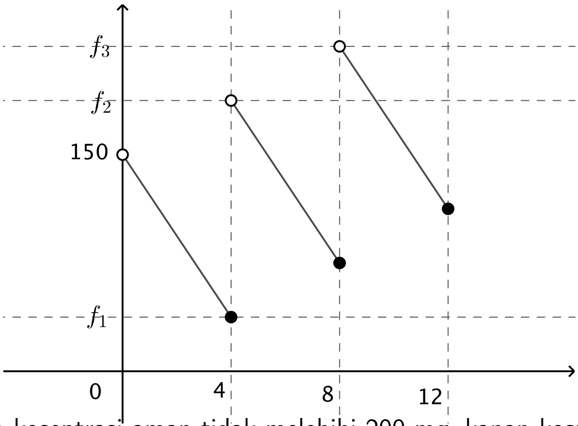
Permasalahan 2 berkenaan dengan konsep limit kiri dan limit kanan.

$$\lim_{x \to 60^-} f(x) = 4000 \text{ dan } \lim_{x \to 60^+} = 4000 + 1000 = 5000.$$

Penjelasan lebih detail: lihat buku hal 69-70.

Ilustrasi 2: Injeksi Obat

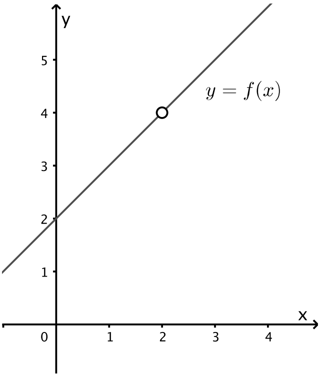
Misalkan seorang pasien mendapat injeksi dosis 150 mg setiap 4 jam. Konsentrasi obat dalam darah menurun secara linear sehingga pada awal injeksi berikutnya masih tersisa 25% dari dosis sebelumnya. Tentukan kosentrasi obat menjelang dan sesaat sesudah dosis ke-3 (jam ke-8).



Seandainya kosentrasi aman tidak melebihi 200 mg, kapan kosumsi obat harus dihentikan?

Proses Terhenti Sesaat

Sebuah proses bertumbuh secara linear menurut fungsi $f(x) = x + 2$ di mana x menyatakan waktu dan $f(x)$ adalah ukuran pada waktu x. Pertumbuhan terhenti tepat pada saat $x = 2$, kemudian mulai lagi setelah $x > 2$.



Dalam hal ini $f(2)$ tidak ada, tetapi limitnya di $x = 2$ ada. (Lihat buku hal 71-72).

Definisi Intuitif Limit

[DEFINISI 2.1] Kita katakan limit dari $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L, ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

jika kita dapat membuat nilai $f(x)$ sangat dekat kepada L dengan cara mengambil x cukup dekat kepada a. Istilah "cukup dekat" di sini tidak harus $x = a$.

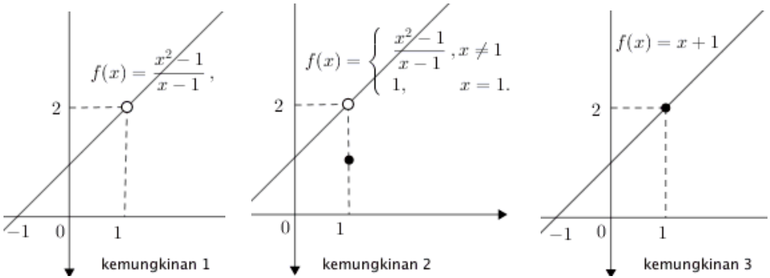
Ada 2 ukuran dekat:

1. Dekatnya x terhadap a
2. Dekatnya $f(x)$ terhadap L.

Penjelasan detail, lihat buku hal 73.

Nilai Limit vs Nilai Fungsi

1. Nilai fungsi $f(a)$ tidak ada tetapi nilai $\lim_{x\to a} f(x)$ ada.
2. Nilai fungsi $f(a)$ ada, nilai limit $\lim_{x\to a} f(x)$ ada tetapi tidak sama.
3. Nilai fungsi $f(a)$ ada, nilai limit $\lim_{x\to a} f(x)$ ada dan nilainya sama, yaitu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.



Contoh: Nilai Limit vs Nilai Fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, a = 1.$$

Nilai $f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ tidak ada, sedangkan Nilai untuk x dekat dengan 1, nilai $f(x) = \frac{t^2 - 1}{t - 1}$ ada, yaitu 2. Coba cek sendiri. Oleh karena itu dapat ditulis:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Bahkan kita dapat membuat nilai fungsi sangat dekat dengan 2 asalkan x sangat dekat dengan 1.

Definisi Formal Limit Fungsi (lihat hal 74)

Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ dan a sebuah titik limit A. Kita katakan L adalah limit fungsi f di $x = a$ ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

jika dan hanya jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang maka terdapat $\delta > 0$ sehingga pernyataan berikut berlaku.

$$x \in I, 0 < |x - a| < \delta \to | f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1}$$

Contoh: Hitunglah $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
Dalam soal ini diketahui $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dan $a = 1$. Jelas $f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ tidak terdefinisi. Untuk limit dihitung sebagai berikut:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1+1 = 2.$$

Adakah suku yang dicoret? Mengapa kita boleh mencoretnya?

Menghitung Limit Secara Numerik

Hitunglah limit berikut: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x^2}$. Tabulasi nilai $f(x)$ di sekitar $x = 0$:

x	-0.1	-0.05	-0.01	0	0.001	0.01	0.05	0.1
$f(x)$	0.2884	0.2886	0.2887	$-$	0.2887	0.2887	0.2886	0.2884

Apakah kita dapat menebak bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x^2} = 0.2887$?

Selidikilah nilai limit berikut: $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$.
Nilai numerik $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ untuk beberapa nilai x dekat dengan nol:

$$x = \frac{1}{\pi} \approx 0.31 \to y = \sin(\pi) = 0$$
$$x = \frac{1}{2\pi} \approx 0.1592 \to y = \sin(2\pi) = 0$$
$$x = \frac{1}{10\pi} \approx 0.0318 \to y = \sin(10\pi) = 0$$
$$x = \frac{1}{100\pi} \approx 0.0032 \to y = \sin(100\pi) = 0.$$

Apakah dapat disimpulkan $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x} = 0$?

Limit Satu Sisi

Bilangan L dikatakan limit kiri fungsi f di $x = a$ ditulis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

jika dan hanya jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang maka terdapat $\delta > 0$ sehingga pernyataan berikut berlaku.

$$x \in I, a - \delta < x < a \to | f(x) - L| < \varepsilon. \tag{2}$$

Juga, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ jika hanya jika

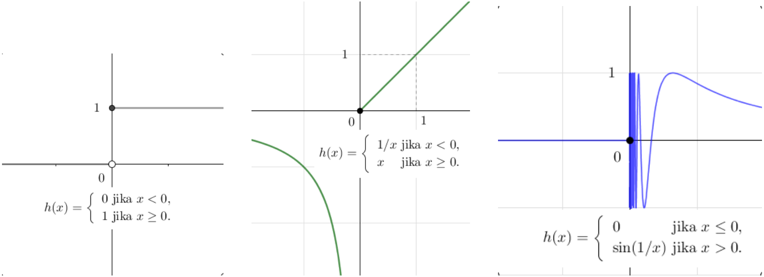
$$x \in I, a < x < a + \delta \to | f(x) - L| < \varepsilon. \tag{3}$$

Dengan demikian berlaku

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Contoh limit satu sisi

Tentukan limit kiri dan limit kanan di sekitar $x = 0$ fungsi yang grafiknya sebagai berikut:



Pembahasan detail: lihat buku hal 76-77.

Soal-soal Evaluasi Capaian Pembelajaran Part 1

1. Kerjakan Latihan Selingan 2.1 (ada 3 soal).
2. Soal Latihan Bab 2 No 2.
3. Soal Latihan Bab 2 No 5.
4. Soal Latihan Bab 2 No 7.
5. Soal Latihan Bab 2 No 8.

Capaian Pembelajaran:

1. Memahami limit fungsi khusus.
2. Memahami sifat-sifat limit dan penggunaannya untuk menghitung limit fungsi.
3. Menerapkan strategi menghitung limit.
4. Memahami konsep limit yang memuat takberhingga.

Limit Fungsi Polinomial dan Fungsi Rasional

1. Polinomial derajat n: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c),$$

   yakni cukup disubstitusi langsung.

2. Fungsi rasional: $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ di mana p dan q adalah polinomial. Jika $q(c) \neq 0$ maka

$$\lim_{x\to c} r(x) = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

Terapkan sifat fungsi khusus ini untuk menyelesaikan limit berikut:

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2-1}{x^2+2}$.
2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-2x}$

Lihat pembahasan hal 79.

Sifat Aljabar Limit Fungsi

1. Penjumlahan:
   $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
2. Perkalian: $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
3. Perkalian skalar: $\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x)$.
4. Pembagian: Jika $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ maka berlaku

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Terapkan sifat-sifat aljabar limit ini untuk menyelesaian masalah limit pada Contoh 2.10 hal 79-80. Untuk penguatan konsep bahas juga Latihan Selingan 2.2.

Aturan Pangkat dan Akar

- Aturan Pangkat: $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$
- Aturan Akar: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

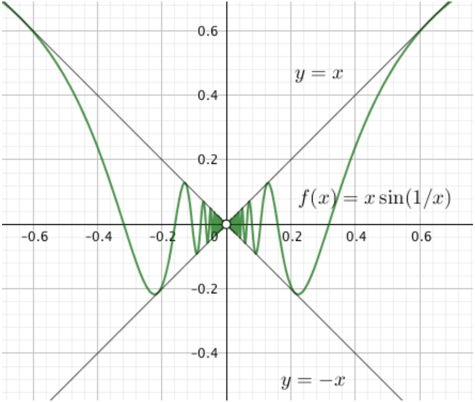
Contoh 2.11. Hitunglah nilai limit berikut:

1. $\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2$
2. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{2x-8}$.

Penyelesaian: Lihat hal 81.

Teorema Limit Jepit

Misalkan $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk semua x kecuali mungkin di $x = 0$. Jika $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim_{x \to} f(x) = L$.



Diperoleh $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$ (lihat pembahasan di buku hal 82). Pahami juga pembahasah Contoh 2.13.

Strategi Menghitung Limit

1. Untuk fungsi tidak bercabang, coba substitusi langsung. Jika hasilnya berupa salah satu bentuk taktentu seperti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, atau $\infty - \infty$, maka nilai limitnya belum ketemu. Lanjutkan dengan menggunakan teknik faktorisasi, merasionalkan pembilang atau penyebut, atau manipulasi aljabar lainnya. Terapkan pada Contoh 2.14 dan Contoh 2.15 hal 83.
2. Untuk fungsi cabang, jika titik limit terletak pada transisi maka dicek limit kiri dan limit kanannya. Terapkan pada Contoh 2.18 dan Contoh 2.19.
3. Menggunakan Teorema Limit Jepit, menemukan dua fungsi yang mendominasi dari atas dan dari bawah. Implementasinya pada Contoh 2.20 hal 84-85.

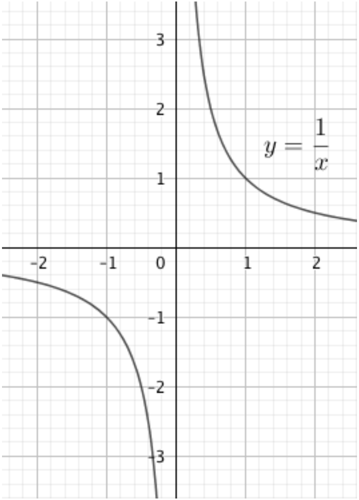
Limit Memuat Takberhingga

1. Titik limit mendekati takhingga, nilai limit berhingga: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.
2. Titik limit berhingga, nilai limit takberhingga: $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.
3. Titik limit dan nilai limit keduanya bernilai takberhingga.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Lihat pembahasan Contoh 2.21 dan Gambar 2.8. Pahami juga pembahasan Contoh 2.22 hal 86.

Grafik Fungsi $y = \frac{1}{x}$



Asimptotik Fungsi

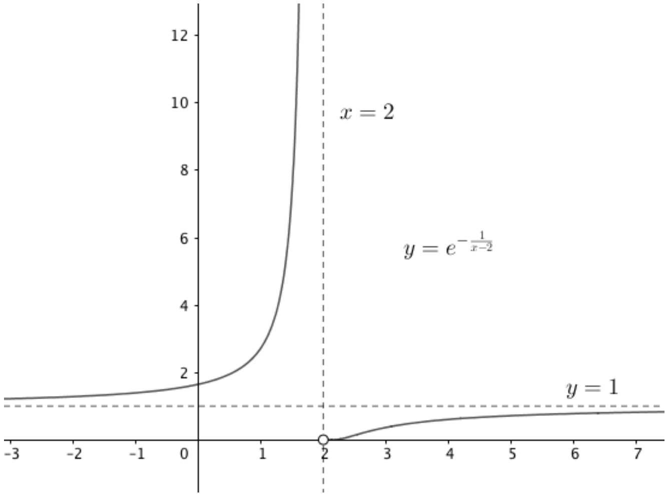
- Asimptot vertikal di $x = a$:

$$\lim_{x - a^-} f(x) = \pm\infty \text{ atau } \lim_{x \to a^+} = \pm\infty \text{ atau } \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

- Asimtot horizontal di $y = L$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Contoh Asimptot Fungsi $y = e^{-\frac{1}{x-2}}$



Identifikasilah asimptot fungsi eksponen ini. Lihat pembahasan Contoh 2.22 hal 86-87. Bahas pula Contoh 2.3 hal 87-88.

Soal-soal Evaluasi Capaian Pembelajaran Part 2

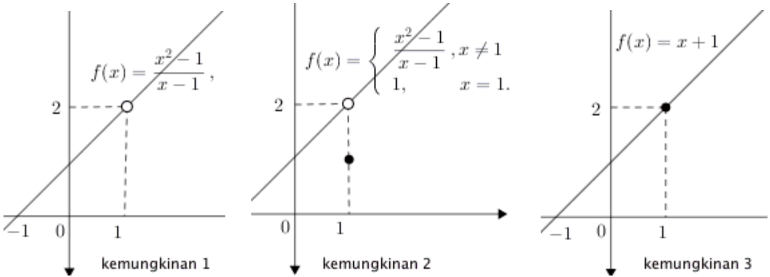
1. Latihan Selingan 2.1 hal 77-78 (ada 3 soal)
2. Latihan Selingan 2.2 hal 80.
3. Latihan Selingan 2.3 hal 85 (ada 3 soal)
4. Latihan Selingan 2.4 hal 88 (ada 4 soal)

Capaian Pembelajaran Part 3:

1. Memahami pendekatan intuitif konsep fungsi kontinu
2. Memahami syarat cukup fungsi kontinu
3. Mengidentifiaksi kekontinuan fungsi pada suatu titik
4. Memahami konsep fungsi kontinu dalam kehidupan sehari-hari
5. Memahami konsep kontinu perluasan.
6. Memahami sifat-sifat fungsi kontinu.

Pendekatan Intuitif Fungsi Kontinu

Dalam keseharian, kontinu merujuk pada sebuah proses yang terus menerus alias tanpa terputus. Bagaimana istilah “kontinu” dalam matematika? Perhatikan kembali 3 kemungkinan nilai limit versus nilai fungsi:



Mana yang terputus (diskontinu), mana yang kontinu? Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di $a \in A$ jika dan hanya jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

yakni nilai limit dan nilai fungsi di titik a adalah sama.

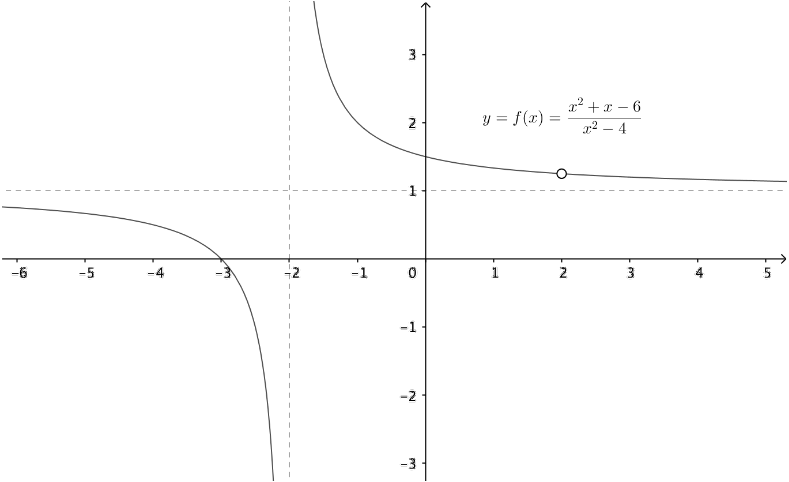
Syarat Cukup Kontinu

1. Fungsi f terdefinisi di a, yaitu $f(a)$ ada.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ ada. Limit ini ada manakala limit kiri dan limit kanan ada dan nilainya sama.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Sebagian besar fungsi-fungsi yang ada di sekitar kita adalah kontinu. Fungsi-fungsi khusus pada Contoh 2.24 adalah kontinu.

Banyak fenomena dalam kehidupan sehari-hari dapat disajikan dalam fungsi kontinu, lihat pembahasan hal 90.

Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$. Tentukan titik-titik di mana fungsi ini tidak kontinu. Dapatkah fungsi ini diperluas menjadi fungsi kontinu? Lihat pembahasan Contoh 2.25 hal 90-91. Juga Contoh 2.26 hal 92.



Jika f dan g kontinu di a maka fungsi-fungsi berikut kontinu di a:

$$f + g, f - g, f \cdot g, cf.$$

Hasil bagi $\frac{f}{g}$ juga kontinu asalkan $g(a) \neq 0$.

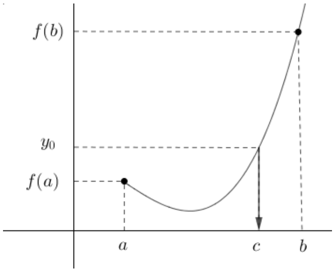
Contoh 2.27. Diberikan fungsi $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. Tentukan titik-titik di mana fungsi f kontinu. Lihat pembahasan hal 93.

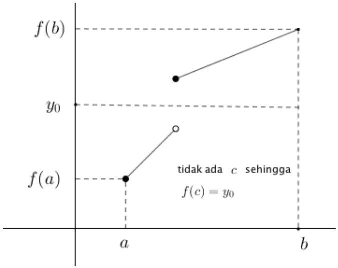
Kekontinuan Fungsi Komposisi

1. Jika f kontinu di a dan $\lim_{x\to a} g(x)$ ada maka berlaku
$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$
Ini artinya untuk menghitung $\lim_{x\to a} f(g(x))$ kita bisa menghitung $\lim_{x\to a} g(x)$ dulu baru kemudian diterapkan fungsi di luarnya.
2. Jika g kontinu di a dan f kontinu di $g(a)$ maka $f \circ g$ juga kontinu di a.

Contoh 2.28. Hitunglah $\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)$. Pembahasan lihat buku hal 94. Bahas juga Contoh 2.29.

Jika f sebuah fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan y_0 nilai di antara $f(a)$ dan $f(b)$ maka ada $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = y_0$. Bukti, lihat hal 94-95.





Pada panel kiri, berapapun nilai y_0 yang terletak di antara $f(a)$ dan $f(b)$ selalu dapat ditemukan c sehingga $f(c) = y_0$. Sebaliknya jika syarat kontinu tidak dipenuhi seperti terlihat pada panel kanan maka ada y_0 yang terletak di antara $f(a)$ dan $f(b)$ namun tidak ada c yang membuat $f(c) = y_0$

1. Kurva fungsi kontinu selalu tersambung yakni tidak ada bolong maupun *jump*.
2. Pada interval di mana ada fungsi bernilai positif dan ada fungsi bernilai negatif maka pasti ada fungsi bernilai nol. Nilai c di mana $f(c) = 0$ disebut pembuat nol atau akar persamaan $f(x) = 0$.

Contoh 2.30. Tunjukkan persamaan taklinear $x^2 - 4\sin x = 0$ mempunyai akar yang taknol. Perhatikan $x = 0$ adalah salah satu akarnya.

Pembahasan lihat hal 95.

Soal-soal Evaluasi Capaian pembelajaran Part 3

1. Latihan selingan 2.5
2. Latihan Selingan 2.6
3. Latihan Selingan 2.7
4. Latihan Selingan 2.8
5. Soal Latihan Bab 2 No 10
6. Soal Latihan Bab 2 No 11

Dalam teori relativitas, massa sebuah partikel yang bergerak dengan kecepatan v diberikan oleh

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

di mana m_0 adalah massa saat diam dan c adalah kecepatan cahaya. Apa yang terjadi jika kecepatan benda mendekati kecepatan cahaya. (Petunjuk: pandang m sebagai fungsi dari v yaitu $m = m(v)$, hitunglah $\lim_{v \to c^-} m(v)$).

Contoh Penerapan 2

Versi lain teori relativitas mengatakan bahwa panjang objek bergerak misalkan sebuah roket, terlihat oleh pengamat bergantung pada kecepatan objek yang sedang bergerak. Jika dalam keadaan diam panjang objek adalah L_0 maka pada saat kecepatannya v panjang objek terlihat menjadi

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

di mana c adalah kecepatan cahaya. Formula ini disebut kontraksi Lorentz.

1. Apa yang terjadi terhadap panjang L jika kecepatan v bertambah?
2. Apa yang terjadi jika benda bergerak mendekati kecepatan cahaya?
3. Andaikan roket Satum V dalam misi Apollo 11 NASA dalam keadaan diam panjangnya 100 meter dan bergerak dengan kecepatan 39000 km per jam, berapa panjang yang terlihat oleh pengamat. Kecepatan cahaya sekitar 3×10^8 m/detik?

Contoh Penerapan 3

Sebuah tangki memuat 5000 liter air murni, kemudian air garam yang memuat 30 gram garam dalam setiap liternya dimasukkan ke dalam tangki dengan rate 25 liter per menit.

1. Tunjukkan konsentrasi garam dalam tangki setelah t menit adalah
$$c(t) = \frac{30t}{200+t}.$$
(Petunjuk: setiap menit garam yang masuk tangki adalah 25×30 gram sedangkan volume tangki menjadi $5000 + 25$ sehingga konsentrasi garam pada $t = 1$ adalah $c(1) = \frac{25\times 30}{5000+25}$. Proses ini digeneralisasi untuk memperoleh rumus yang diminta).
2. Tentukan konsentrasi maksimumnya.
(Petunjuk: konsentrasi maksimum dicapai ketika $t \to \infty$, jadi cukup hitung $\lim_{t\to\infty} c(t)$)