Kuliah Kalkulus 1 Semester Ganjil[1] 2023/2024
BAB 3. DERIVATIF

Nama Dosen Pengampu.

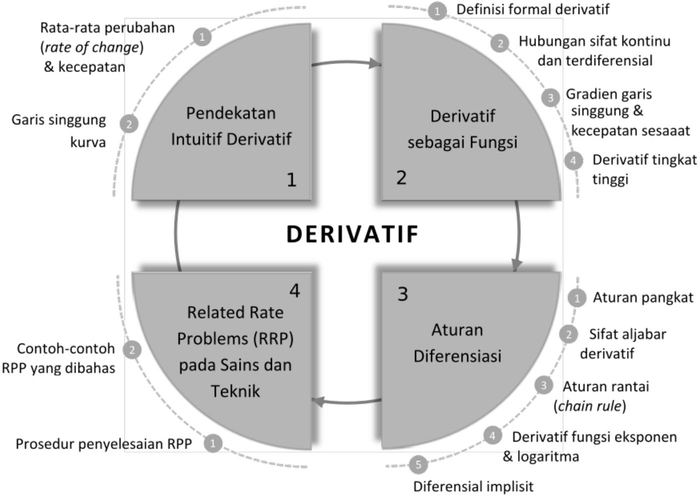
Kuliah disampaikan pada Prodi XYZ
Universitas/Institut/Sekolah Tinggi ABC

LOGO PERGURUAN TINGGI

Ref: Seri Kuliah Ringkas (SKR) KALKULUS 1, Julan Hernadi, Penerbit: Erlangga, 2021

[1] Minat kolaborasi, silakan kontak penulis: julan.hernadi@gmail.com atau julan.hernadi@math.uad.ac.id

Peta Konsep



Rata-rata perubahan (*rate of change*) & kecepatan
Garis singgung kurva
Pendekatan Intuitif Derivatif
1
Definisi formal derivatif
Hubungan sifat kontinu dan terdiferensial
Gradien garis singgung & kecepatan sesaaat
Derivatif tingkat tinggi
Derivatif sebagai Fungsi
2
DERIVATIF
4
Related Rate Problems (RRP) pada Sains dan Teknik
Contoh-contoh RPP yang dibahas
Prosedur penyelesaian RPP
3
Aturan Diferensiasi
Aturan pangkat
Sifat aljabar derivatif
Aturan rantai (*chain rule*)
Derivatif fungsi eksponen & logaritma
Diferensial implisit
1
2
3
4
5

Capaian Pembelajaran:

1. Memahami rata-rata perubahan (rate of change) fungsi.
2. Memahami pengertian intuitif derivatif melalui perubahan rata-rata.
3. Memahami pengertian garis singgung kurva
4. Memahami definisi formal derivatif.
5. Memahami hubungan kekontinuan dan keterdiferensial fungsi.
6. Memahami hubungan gradien dan kecepatan sesaat.

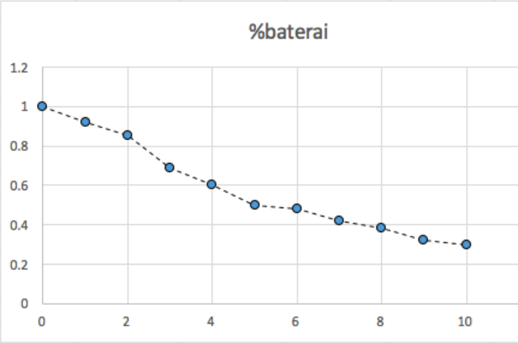
Misalkan $y = f(t)$ sebuah fungsi kontinu dengan variabel bebas t dan variabel terikat y. Rata-rata perubahan nilai fungsi f pada interval $[t_1, t_2]$ dirumuskan oleh:

$$\text{Rata-rata perubahan } = \frac{\triangle y}{\triangle t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{1}$$

Jadi, rata-rata perubahan (rate of change) nilai fungsi adalah perbandingan antara perubahan nilai y dan perubahan nilai t.

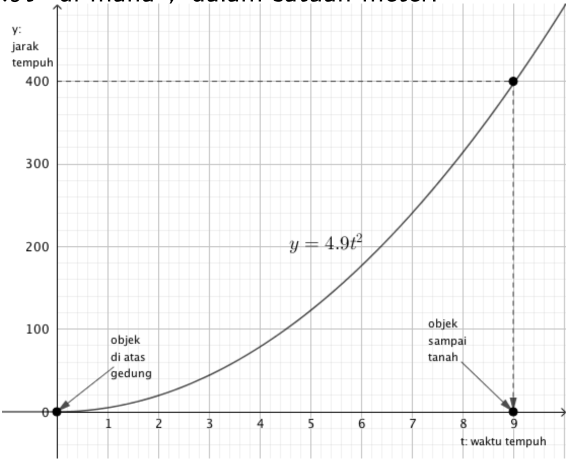
Berikut ini adalah data konsumsi baterai HP yang dicatat setiap jam selama 10 jam sejak terisi penuh 100%.

durasi (jam)	%baterai
0	100%
1	92%
2	85%
3	69%
4	60%
5	50%
6	48%
7	42%
8	38%
9	32%
10	30%



Berapa rata-rata kosumsi baterai per jam? Pada rentang kapan kosumsi terbesar? kosumsi terkeci? Lihat pembahasan hal 103-104.

Misalkan jarak tempuh benda jatuh bebas setelah t detik diberikan oleh $y = 4.9t^2$ di mana y dalam satuan meter.



Selidikilah rata-rata perubahan jarak tempuh pada setiap interval waktu? Pembahasan: hal 104-105.

Kecepatan Sesaat

Pada ilustrasi 2 kita dapat menentukan kecepatan benda pada saat tertentu, misalkan ketika $t = 7$. Caranya adalah:

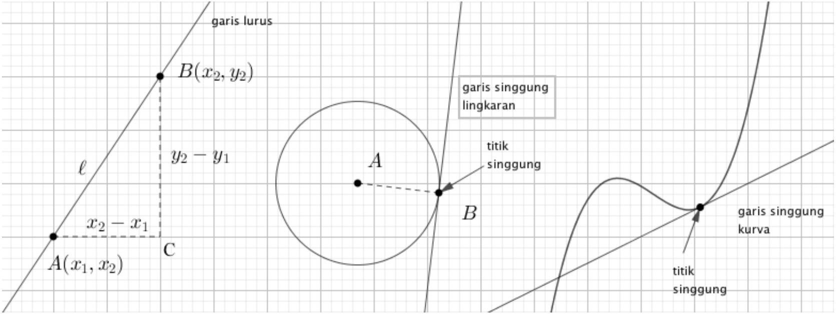
1. Tentukan rata-rata perubahan pada interval $[7, 7 + h]$ untuk suatu $h > 0$. Diperoleh

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = \frac{f(7+h) - f(7)}{h} = 68.6 + 4.9h$$

2. Ambil limit $h \to 0$, yaitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h} = \lim_{h \to 0} (68.6 + 4.9h) = 68.6.$$

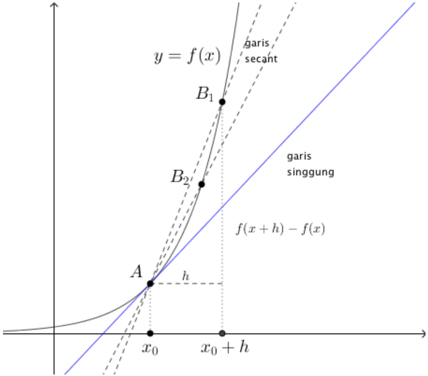
Pembahasan lihat buku hal 106.



Gradien garis ℓ adalah ukuran kemiringan garis, dihitung berdasarkan formula:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{perubahan vertikal}}{\text{perubahan horizontal}}. \tag{2}$$

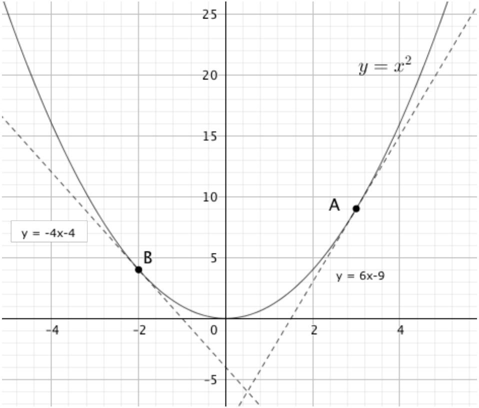
Berikut adalah kurva $y = f(x)$, garis secant, dan garis singgungnya.



Garis secant AB_1 pada interval $[x_0 x_0 + h]$, $m_{AB_1} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
Gradien garis singgung (biru) di titik A adalah:

$$m_A = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3}$$

Diberikan kurva parabola $y = x^2$, tentukan kemiringan kurva di titik yang bersesuaian dengan $x = 3$ dan $x = -2$. Tentukan persamaan garis singgung pada kedua titik, kemudian gambarkan grafiknya.



Pembahasan lihat hal 108. Kerjakan Latihan Selingan 3.2 hal 109.

Definisi Formal Derivatif

Derivatif fungsi f terhadap variabel x adalah fungsi f' yang didefinisikan sebagai:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{4}$$

asalkan limit ini ada. Jika limit ini ada maka $f'(x)$ disebut derivatif f di x dan kita katakan f terdiferensial di x. Istilah yang lebih familiar untuk derivatif adalah turunan. Jika f terdiferensial pada semua x pada domain maka f disebut fungsi terdiferensial.

Beberapa notasi untuk menyatakan derivatif:

- $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$.
- $\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ disebut notasi Leibniz.

Contoh 3.4

Tentukan rumus derivatif untuk fungsi-fungsi $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, dan $h(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

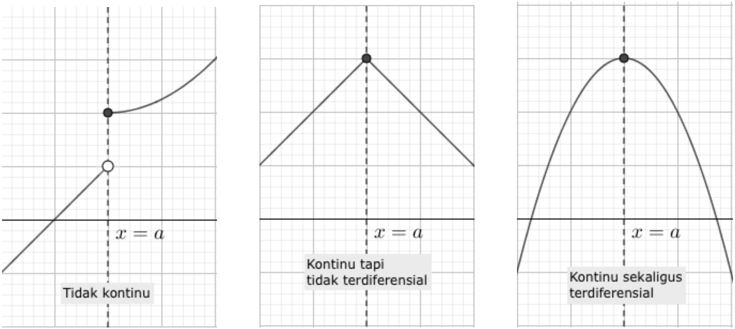
Untuk fungsi $g(x) = x^2$ diperoleh $g(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$ dan $g(x) = x^2$ sehingga $g(x+h) - g(x) = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = 2hx + h$. Diperoleh

$$\begin{aligned} g'(x) :&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x = 2x. \end{aligned}$$

Lainnya lihat buku hal 111. Secara intuitif diperoleh

- $f(x) = 1 = x^0 \to f'(x) = 0$, $f(x) = x = x^1 \to f'(x) = 1$, $f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x$
- Dugaan (konjektur): $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$? Pangkatnya berkurang 1.

Teorema: Jika f terdiferensial di a maka f kontinu di a. Bukti lihat buku hal 112. Perlu diingatkan kontinu berarti nilai fungsi dan nilai limit sama. Berikut profil fungsi tidak kontinu, kontinu tapi tidak terdiferensial, dan fungsi kontinu sekaligus terdiferensial.



Silakan bahas soal pada Contoh 3.6 hal 113-114.

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di $x = a$ adalah

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \tag{5}$$

di mana $m = f'(a)$ adalah gradiennya. Dua macam garis singgung khusus

- Garis singgung horizontal, yaitu ketika $m = f'(a) = 0$.
- Garis singgung vertikal ketika $f'(a) \to \infty$.

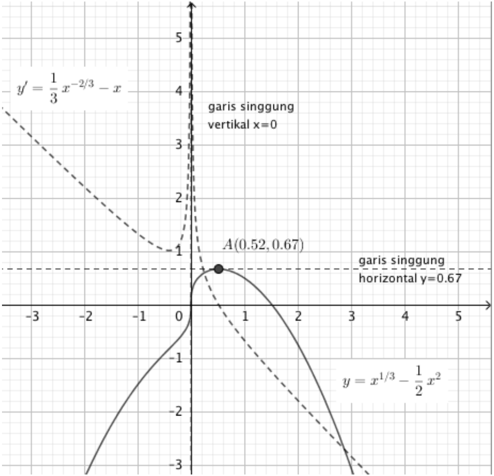
Misalkan benda bergerak dengan fungsi jarak $y = s(t)$ maka

- $v(t_0) = s'(t_0)$ adalah kecepatan sesaat benda di saat t_0.
- Dalam hal $v(t_0) = 0$ maka benda mencapai jarak terjauh (maksimum) ketika $t = t_0$.
- Perubahan kecepatan terhadap waktu disebut percepatan, disimbolkan dengan $a(t)$ yaitu

$$a(t) = v'(t). \tag{6}$$

Contoh 3.7

Diberikan fungsi $f(x) = x^{1/3} - \frac{1}{2}x^2$. Temukan garis singgung horizontal dan garis singgung vertikal kurva ini.



Pembahasan lihat buku hal 114-115.

Soal-soal Evaluasi Capaian Pembelajaran Part 1

1. Latihan Selingan 3.1 hal 109.
2. Soal No 1 pada Soal-soal Latihan Bab 3 hal 133.
3. Latihan Selingan 3.3 hal 109.
4. Tentukan syarat agar fungsi $y = f(x)$ terdiferensial di $x = a$.
5. Gunakan definisi formal derivatif untuk membuktikan bahwa derivatif dari $f(x) = 3x^{4/3}$ adalah $f'(x) = 4x^{1/3}$.
6. Mengapa fungsi tidak kontinu pasti tidak terdiferensial? Jelaskan argumen anda.
7. Soal No 3 pada Soal-soal Latihan Bab 3 hal 133.

Capaian Pembelajaran:

1. Memahami pengertian derivatif tingkat tinggi.
2. Menurunkan formula aturan pangkat pada derivatif.
3. Memahami sifat-sifat aljabar derivatif dan penggunaannya.
4. Memahami aturan rantai dan penggunaannya.
5. Memahami dearivatif fungsi eksponensial, fungsi logaritma, dan fungsi trigonometri.
6. Memahami derivatif fungsi dalam bentuk implisit

Derivatif tingkat n dinyatakan oleh $f^{(n)}$ diperoleh dari fungsi f yang diturunkan sebanyak n kali, ditulis:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{7}$$

Notasi $f^{(n)}$ dibaca derivatif ke-n fungsi f. Misalnya untuk $n = 2$, $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

Contoh 3.8. Tentukan turunan pertama, kedua, dan ketiga dari fungsi $f(x) = x^3 - x$.

Pembahasan lihat buku hal 116.

Aturan Pangkat

Misalkan $f(x) = x^n$ di mana $n$bilangan bulat taknegatif. Kita akan menemukan formula untuk $f'(x)$.

- Untuk $n = 0$ yaitu $f(x) = x^0 = 1$ mudah ditunjukkan $f'(x) = 0$. (lihat buku hal 117)
- Untuk $n = 1$ yaitu $f(x) = x$ diperoleh $f'(x) = 1$ (lihat pembahasan Contoh 3.4 hal 111)
- Untuk $n = 2$ yaitu $f(x) = x^2$ diperoleh $f'(x) = 2x$ (lihat pembahasan Contoh 3.4 hal 111)
- Bagaimana untuk $n = 2, 3, 4, \cdots$?

Perhatikan kembali definisi derivatif

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = \lim_{z \to x} \frac{x^n - z^n}{x - z}$$

Dengan penjabaran cukup panjang, diperoleh

$$f'(x) = nx^{n-1} \tag{8}$$

Pembahasan, lihat buku hal 117.

Sifat Aljabar Derivatif

1. Perkalian skalar: $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$.
2. Penjumlahan:

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = f'(x)+g'(x). \tag{9}$$

3. Perkalian:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x) = f(x)g'(x)+f'(x)g(x). \tag{10}$$

   Disingkat $(uv)' = u'v + uv'$.

4. Pembagian:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \tag{11}$$

   Disingkat $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Pembuktian sifat-sifat ini menggunakan definisi formal derivatif. Silakan dikembangkan sendiri.

Contoh 3.10

Tentukan derivatif fungsi-fungsi berikut: $y = 3 - 2x - \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{x^3+1}{x}$, $y = (1+x^2)(x^{1/2} - x^{-1/2})$, dan $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

Penyelesaian: Gunakan aturan pangat dan sifat-sifat derivatif. Di sini cukup dibahas $y = \frac{x^3+1}{x}$. Fungsi ini berupa hasil bagi $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ di mana $u = f(x) = x^3 + 1$ dan $v = g(x) = 1$. Diperoleh

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$

Cara lain disederhakan dulu, yaitu $f(x) = \frac{x^3}{x} + \frac{1}{x} = x^2 + x^{-1}$ kemudian terapkan aturan pangkat, diperoleh

$$f'(x) = 2x - x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$

Untuk fungsi lainnya, lihat pembahasan pada buku hal 118-119.

Aturan Rantai

Pada Bab 1 telah dibahas fungsi komposisi $f \circ g$. Derivatif fungsi ini diberikan oleh

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x). \tag{12}$$

Jika ada tiga fungsi $f \circ g \circ h$ maka derivatifnya adalah

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(x)h(x))\,g'(h(x))h'(x). \tag{13}$$

Aturan rantai dalam notasi Leibniz: $y = f(u)$ dan $u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{14}$$

Pembuktian rumus derivatif komposisi fungsi ini tidak sederhana, silakan mencari referensi lanjutan.

Tentukan derivatif dari fungsi $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Di sini $y = (f \circ g)(x)$ dengan $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Diperoleh $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dan $g'(x) = 2x$ sehingga

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Lihat pembahasan pada buku hal 119.

Derivatif Fungsi Eksponen

Bentuk umum fungsi eksponen $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$. Derivatif fungsi eksponen ini adala

$$f'(x) = a^x f'(0) \tag{15}$$

Di mana $f'(0)$ adalah derivatif f di $x = 0$, yaitu

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Bilangan a di mana $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = 1$ disebut bilangan alam (natural), biasa ditulis e. Nilai e dapat ditemukan secara grafis, namun dapat juga menggunakan formula

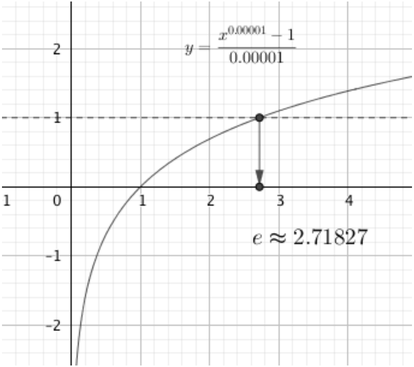
$$e = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}. \tag{16}$$

Secara aproksimasi $e \approx 2.71827$. Jadi berlaku

$$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x. \tag{17}$$

.

- Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \frac{x^h - 1}{h}$ di mana $h \to 0$, misalnya $h = 0.00001$.
- Identifikasi nilai x di mana $f(x) \to 1$.



- Pembahasan lengkap lihat buku hal 120-121.

Telah dibahas pada bab 1 bahwa fungsi $f(x) = \ln x$ dan $g(x) = e^y$ adalah saling invers.

$$y = \ln x \longleftrightarrow x = e^y \longleftrightarrow \frac{dx}{dy} = e^y \longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Diperoleh

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \tag{18}$$

Tentukan derivatif fungsi berikut: $y = (1+2x)e^{-2x}$, $y = \frac{\ln x}{1+\ln x}$, dan $y = \ln\left(2e^{-x} + x^2\right)$.

Lihat pembahasan pada buku hal 121.

Derivatif Fungsi Trigonometri

Cukup perhatikan 2 fungsi trigonometri, yaitu $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ karena fungsi trigonometri lainnya dapat diturunkan dari dua fungsi ini. Perhatikan $y = \sin x$ maka

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.
\end{aligned}$$

Dengan cara sejalan diperoleh derivatif berikut:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x.$$

Lihat pembahasan pada buku hal 122.

Contoh 3.13

Tentukan derivatif fungsi berikut: $y = (\sin x + \cos x)^3$,$y = \frac{x+\sin x}{1-\cos 3x}$, dan $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$.

Penyelesaian: Cukup dibahas $y = (\sin x + \cos x)^3$. Di sini diterapkan aturan derivatif komposisi fungsi, aturan pangkat dan rumus derivatif fungsi trigonometri.

$$\begin{aligned} y' &= 3(\sin x + \cos x)^{3-1}\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) \\ &= 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Untuk derivatif soal lainnya, lihat pembahasan pada buku hal 122.

Diferensial Implisit

- Bentuk eksplisit $y = f(x)$ yaitu variabel x dan y dapat dipisahkan, contoh $y = x + \sin x$.
- Bentuk implisit $f(x, y) = 0$ yaitu variabel x dan y tidak dapat dipisahkan, contoh $x^3 + y^3 = 6xy$.

Teknik menentukan derivatifnya:

- Diferensialkan suku-suku pada persamaan terhadap x dan perlakukan y sebagai fungsi terdiferensial terhadap x.
- Kumpulkan suku-suku dengan dy/dx kemudian selesaikan persamaan untuk dy/dx.

Makna derivatif implisit: misalkan $f(x, y) = 0$ menyatakan sebuah kurva maka $dy/dx := m(x, y)$ dimaknai sebagai gradien garis singgung kurva di titik (x, y)

Contoh 3.14

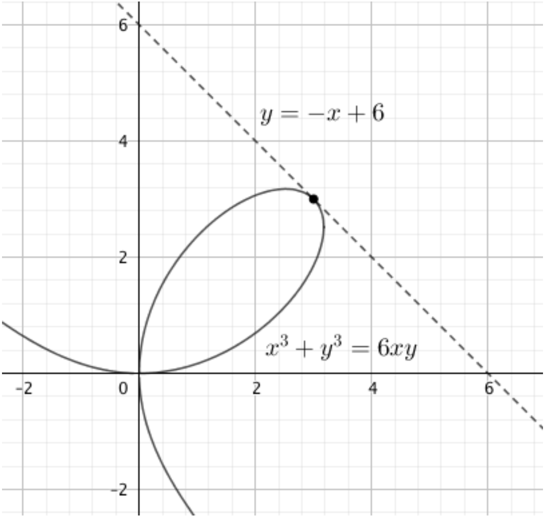
Diberikan relasi implisit $x^3 + y^3 = 6xy$. Tentukan dy/dx, kemudian buktikan kurva relasi ini melalui $(3,3)$, kemudian tentukan persamaan garis singgung pada titik ini. Terakhir, gambarkan grafik dan garis singgung tersebut.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 6xy \\ 3x^2 dx + 3y^2 dy &= 6(xdy + ydx) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}. \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung di titik $(3,3)$ adalah $y = -x + 6$.
Penjabaran lengkap, lihat buku hal 123.

Grafik fungsi implisit dan garis singgung



Soal-soal Evaluasi Capaian Pembelajaran Part 2

1. Aturan pangkat yang mengatakan jika $f(x) = x^n$ maka $f'(x) = nx^{n-1}$ ternyata berlaku juga untuk $n < 0$ dan n bukan bilangan bulat selain bilangan bulat. Tentukan derivatif fungsi berikut menggunakan aturan pangkat ini:
   1. $y = x^{1-\sqrt{2}}$.
   2. $y = 1/\sqrt{x}$.
2. Tentukan derivatif pertama, kedua, dan ketiga dari fungsi berikut $y = 1 - x^2 + 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$.
3. Soal No 15 pada Soal-soal Latihan Bab 3, halaman 135.
4. Latihan Selingan 3.4 hal 122.
5. Latihan Selingan 3.5 hal 122.
6. Latihan Selingan 3.6 hal 124.

Capaian Pembelajaran:

Mahasiswa memahami masalah dunia nyata dan mampu menterjemahkannya ke dalam masalah matematika, dan dapat menyelesaikannya secara matematis.

Langkah-langkah:

1. Sketsa pemasalahan (jika perlu), identifikasi variabel dan konstanta yang terlibat dalam permasalahan sains & teknik, rumuskan tujuan akhir
2. Susun formula yang mengaitkan variabel-variabel yang terlibat.
3. Terapkan operasi diferensial untuk menemukan penyelesaian masalah yang ada.
4. Substitusi variabel yang ada melalui data yang diketahui.

Contoh 3.16 [Kenaikan Volume Balon]

Sebuah balon udara diisi gas sedemikian hingga ketika radiusnya 60 cm, maka radius ini bertambah sebesar 5 cm per menit. Berapa cepat volume balon berubah pada saat ini? Seandainya balon hanya dapat menampung gas sebanyak 1500 liter dan penambahan volume tetap, kapan balon akan pecah jika dipompa terus-menerus.

1. Tidak perlu sketsa. Variabel yang terlibat adalah volume bola (V), jari-jari bola (r), konstanta $\pi \approx 3.14$.
2. Menentukan waktu yang membuat balon pecah.
3. Rumus volume bola $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Perubahan volume bola bergantung pada perubahan variabel r, jika $r$bertambah maka volume bertambah. Tulis $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.
4. Fungsi volume V didiferensialkan terhadap r diperoleh

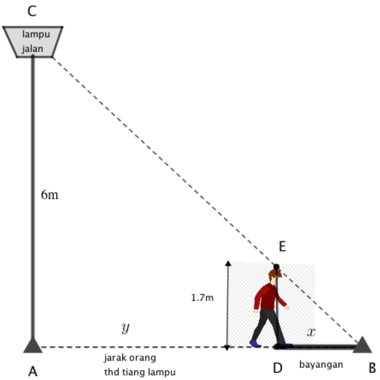
$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

5. Diketahui data $\frac{dr}{dt} = 5$ ketika $r = 60$, volume maksimal 1500 liter, maka bola akan pecah setelah menit ke 6.637.

Pembahasan lengkap lihat buku hal 126.

Contoh 3.17 [Panjang Bayangan]

Sketsa permasalahan:

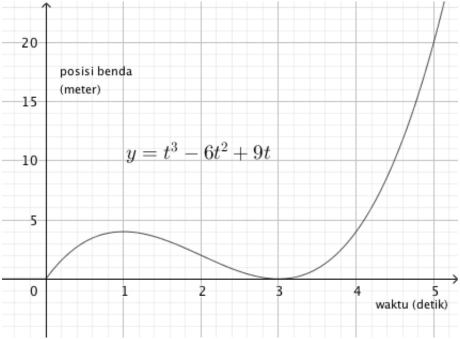


Redaksi lengkap lihat buku hal 125.

Jawaban: Rata-rata perubahan bayangan orang tersebut adalah 0.89 meter per detik.

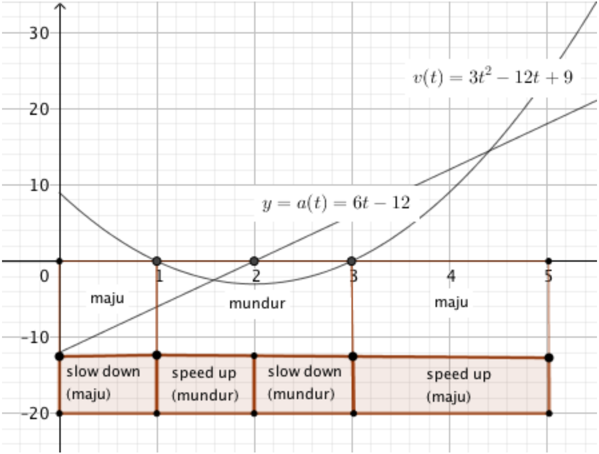
Pembahasan lengkap, lihat buku hal 126-127.

Persamaan gerak sebuah benda diberikan oleh
$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t$dalam detik dan s dalam meter.
Informasi apa saja yang dapat diperoleh dalam 5 detik pertama.



Pembahasan diberikan pada buku hal 127-128.

Grafik Kecepatan dan Percepatan

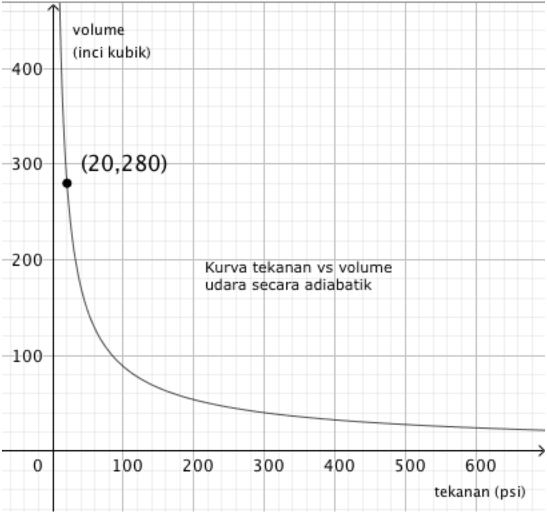


Lihat buku hal 128-129 untuk memahami interpretasi grafis ini.

Ketika udara berkembang secara adiabatik (tanpa ada perubahan panas), maka tekanan P dan volume V dihubungkan oleh $PV^{1.4} = C$ di mana tekanan dalam psi (lb/inci persegi), volume dalam inci kubik, dan C sebuah konstanta. Pada keadaan tertentu, diperoleh data 20 psi dan volume 280 inci kubik. Jika pada keadaan ini volume berkurang 5 inci per detik, berapa rata-rata perubahan tekanan? Gambarkan grafik hubungan antara tekanan dan volume.

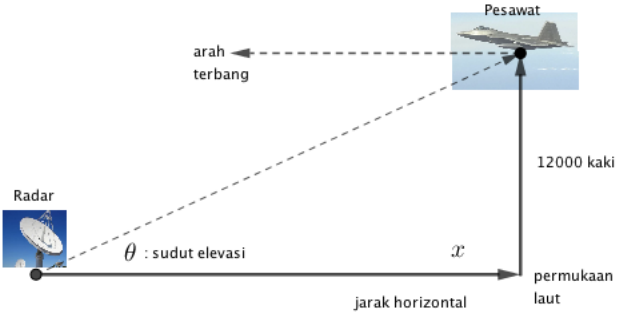
Pembahasan lihat buku hal 128-129.

Grafik Tekanan versus Volume



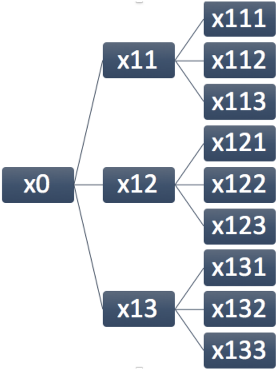
Penjelasan detail lihat buku hal 129.

Sketsa:



Pelajari rumusan masalah dan penyelesaian dibahas pada buku hal 130.

Skema:



Pelajari rumusan masalah dan penyelesaian dibahas pada buku hal 131.

Contoh 3.22 [Biaya Total vs Biaya Marginal]

Misalkan $C(x)$ adalah biaya total perusahaan dalam memproduksi x unit komoditas maka C disebut fungsi biaya (*cost function*). Jika banyak item yang diproduksi bertambah dari x_1 unit menjadi x_2 unit maka biaya rata-rata per unit adalah:

$$\frac{\triangle C}{\triangle x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Biaya marginal adalah $\frac{\triangle C}{\triangle x}$ di mana $\triangle x \to 0$. Dalam fakta sesungguhnya definisi ini tidak mungkin diterapkan karena paling sedikit $\triangle x = 1$ yaitu unit terkecil produksi. Ketika jumlah produksi n unitnya cukup besar maka $\triangle x = 1$ dapat dipandang kuantitas yang mendekati nol sehingga biaya marginal dapat diaproksimasi oleh selisih berikut

$$C'(x) \approx C(n+1) - C(n).$$

Silakan pahami pembahasannya pada buku hal 131-132. Masalah ini sangat banyak digunakan pada bidang industri.

Soal-soal Evaluasi Capaian Pembelajaran Part 3

1. Latihan Selingan 3.7 hal 132
2. Latihan Selingan 3.8 hal 132
3. Soal No 24 pada Soal-soal Latihan Bab 3.
4. Soal No 26 pada Soal-soal Latihan Bab 3.
5. Soal No 28 pada Soal-soal Latihan Bab 3.