LOGIKA
MATEMATIKA

Untuk Mahasiswa PGSD

Asih Mardati
Mukti Sintawati

PGSD FKIP UAD

A. Kalimat Pernyataan

Kalimat merupakan susunan kata-kata yang memiliki arti. Kalimat terdiri atas kalimat pernyataan disebut pernyataan dan kalimat bukan pernyataan disebut bukan pernyataan.

Suatu pernyataan adalah suatu kalimat hanya bernilai benar saja, atau hanya bernilai salah saja tetapi tidak keduanya pada kondisi yang sama.

Contoh pernyataan

“Jawa terdiri atas 5 propinsi”

Contoh bukan pernyataan

“Kemana perginya?

“Kerjakan soal ini!”

Contoh bukan kalimat

“Saya terdiri atas tiga huruf”

“Sakit rusa jalan”

Pernyataan dilambangkan dengan huruf p,q,r, dan seterusnya. Pada pernyataan benar diberi nilai kebenaran “ B” (Benar), untuk pernyataan salah diberi nilai kebenaran “S” (Salah). Pernyataan juga diberi nama proposisi, selain itu juga diberi nama kalimat tertutup. Kalimat-kalimat yang tidak mempunyai nilai benar atau nilai salah disebut kalimat terbuka.

Contoh pernyataan:

p: “segitiga memiliki tiga sudut” (B)

q: “delapan adalah bilangan ganjil” (S)

Contoh kalimat terbuka

$\square + 3 = 7$

$8 - x = 4$

Kemarin ia pergi dengan Anu

Pada pernyataan-pernyataan dapat dilakukan operasi pernyataan. Operasi pernyataan digunakan untuk mendapatkan pernyataan baru atas pernyataan yang telah ada. Operasi pernyataan dilakukan pada satu pernyataan (operasi monar, *monary operation)* maupun operasi pada dua pernyataan (operasi binar, *binary operation)*. Untuk menunjukkan kebenaran operasi pernyataan dapat digunakan tabel kebenaran. Tabel kebenaran adalah tabel yang memuat nilai kebenaran beberapa pernyataan.

Tugas

1. Buatlah 3 contoh pernyataan bernilai benar
2. Buatlah 3 contoh pernyataan bernilai salah
3. Buatlah 3 contoh kalimat terbuka

B. Operasi Monar Suatu Pernyataan

Operasi monar suatu pernyataan adalah membentuk pernyataan baru dari suatau pernyataan yang diketahui. Hanya terdapat satu operasi monar suatu pernyataan yaitu ingkaran (penyangkalan) pernyataan. <u>Ingkaran pernyataan adalah kalimat bernilai salah jika pernyataan semula bernilai benar dan bernilai benar jika pernyataan semula bernilai salah.</u> Ingkaran suatu pernyataan p dilambangkan ~p. ~p dibaca tidak p atau bukan p.

Contoh

p : "semua burung bertelur" (B)

~p : "tidak semua burung bertelur" (S)

q : "2+3=8" (S)

~q : "2+3≠8" (B)

Tabel kebenaran dari pernyataan (p) dan ingkarannya (~p) adalah:

p	~p
B	S
S	B

C. Operasi Binar Dua Pernyataan

Operasi binar pada dua pernyataan yang diketahui adalah membentuk pernyataan baru dari dua pernyataan yang diketahui. Hasil operasi binar dua pernyataan disebut pernyataan majemuk. Operasi biner dua pernyataan terdiri atas:

1. Operasi konjugasi
2. Operasi disjungsi
3. Operasi implikasi
4. Operasi biimplikasi

1. Operasi konjungsi

   Operasi konjungsi dilambangkan dengan “∧”, p∧q dibaca “p dan q”.

   Contoh

   p : “Mahasiswa PGSD membayar uang kuliah”

   q : “Mahasiswa PGSD mengisi KRS”

   p∧q: “Mahasiswa PGSD membayar kuliah dan mahasiswa PGSD mengisi krs” dapat juga dinyatakan

   p∧q: “Mahasiswa PGSD membayar uang kuliah dan mengisi KRS”

   Diskusikan:

   Bagaimana kebenaran p∧q?

   a. Jika p dan q keduanya benar
   b. Jika p benar sedangkan q salah
   c. Jika p salah sedangkan q benar
   d. Jika p dan q keduanya salah

   Tabel kebenaran p∧q

p	q	p∧q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

   Kesimpulannya:

   Jika p dan q adalah pernyataan-pernyataan, maka p∧q benar untuk p ________ dan q ________. sebaliknya p∧q salah untuk salah satu dari p dan q ________ atau kedua-duanya ________.

2. Operasi Disjungsi

   Operasi konjungsi dilambangkan “∨”, p ∨ q dibaca “p atau q”.

   Contoh

   p : “Mahasiswa baru PGSD diterima melalui jalur tes”

   q : “Mahasiswa baru PGSD diterima melalui jalur PMDK”

   p∨q: “Mahasiswa baru PGSD diterima melalui jalur tes atau mahasiswa baru PGSD diterima melalui jalur PMDK” dapat juga dinyatakan

$p \vee q$: “Mahasiswa baru PGSD diterima melalui jalur tes atau jalur PMDK”

Diskusikan:

Bagaimana kebenaran $p \vee q$?

a. Jika p dan q keduanya benar
b. Jika p benar sedangkan q salah
c. Jika p salah sedangkan q benar
d. Jika p dan q keduanya salah

Tabel kebenaran

p	q	$p \vee q$
B	B	
B	S	
S	B	
S	S	

Kesimpulannya

Jika p dan q adalah pernyataan-pernyataan, maka $p \vee q$ benar untuk p dan q keduanya atau salah satu dari p dan q sebaliknya $p \vee q$ salah untuk p dan q kedua-duanya .

3. Operasi Implikasi

Gabungan dua pernyataan p dan q sehingga membentuk pernyataan majemuk dengan menggunakan kata penghubung “Jika..., maka...” dinamakan implikasi, ditulis “$p \Rightarrow q$”. Pernyataan p dinamakan anteseden atau hipotesis, sedangkan pernyataan q dinamakan konsekuen atau kesimpulan. Pernyataan implikasi “$p \Rightarrow q$” bernilai salah apabila hipotesis benar dan kesimpulan salah. Selain itu, pernyataan implikasi “ $p \Rightarrow q$” bernilai benar.

p	**q**	**$p \Rightarrow q$**
B	B	B
B	S	S
S	S	B
S	S	B

4. Operasi Biimplikasi

Biimplikasi atau bikondisional ialah suatu pernyataan majemuk yang berbentuk ”p jika dan hanya jika q” yang berarti “jika p maka q dan jika q maka p”. Pernyataan “p jika dan hanya jika q” dilambangkan dengan “p⇔q”. Pernyataan biimplikasi “p⇔q” bernilai benar jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama (semua benar atau semua salah), sedangkan jika nilai kebenaran p dan q tidak sama maka p⇔q merupakan pernyataan yang salah.

p	**q**	**p ⇔q**
B	B	B
B	S	S
S	S	S
S	S	B

Latihan:

1. Isilah tabel kebenaran berikut

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
B		
S		

   Apakah nilai kebenaran $\sim(\sim p)$sama dengan nilai kebenaran p

2. Isilah tabel kebenaran berikut

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
B	B					
B	S					
S	B					
S	S					

   apakah nilai kebenaran $\sim(p \wedge q)$ sama dengan nilai kebenaran $\sim p \vee \sim q$

3. Isilah tabel kebenaran berikut

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B					
B	S					
S	B					
S	S					

   apakah nilai kebenaran $\sim(p \vee q)$ sama dengan nilai kebenaran $\sim p \wedge \sim q$

TAUTOLOGI, KONTRADIKSI &KONTINGENSI

1. **Tautologi**

   Suatu pernyataan merupakan tautologi jika nilai kebenarannya selalu bernilai benar.

   Contoh:

   Perhatikan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan pada contoh (i) dan (ii).

a. $a \vee \sim a$

a	$\sim a$	$a \vee \sim a$
B	S	B
S	B	B

b. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$

a	b	$a \vee b$	$b \vee a$	$(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$
B	B	B	B	B
B	S	B	B	B
S	B	B	B	B
S	S	S	S	B

Terlihat dalam tabel bahwa $a \vee \sim a$ dan $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ selalu bernilai B.

2. **Kontradiksi**

   Suatu pernyataan merupakan kontradiksi jika nilai kebenarannya selalu bernilai salah.

   Contoh:

   Perhatikan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan pada contoh (i) dan (ii).

   a. $a \wedge \sim a$

a	$\sim a$	$a \wedge \sim a$
B	S	S
S	B	S

   b. $(a \wedge b) \wedge \sim a$

a	b	~a	$a \wedge \sim a$	$(a \wedge b) \wedge \sim a$
B	B	S	B	S

B	S	S	S	S
S	B	B	S	S
S	S	B	S	S

3. **Kontingensi**

Suatu pernyataan majemuk yang kadang-kadang bernilai benar dan kadang-kadang bernilai salah untuk tiap substitusi nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya disebut kontingensi (*contingency*)

Contoh:

$a \Longrightarrow \sim a$

a	$\sim a$	$a \Longrightarrow \sim a$
B	S	S
S	B	B

LATIHAN

Tentukanlah mana di antara proposisi berikut yang termasuk Tautologi, kontradiksi, dan Kontingensi.

1. $[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Rightarrow q$
2. $q \wedge (\backsim p \vee q)$
3. $[(q \Longrightarrow p) \wedge q] \Rightarrow p$
4. $(p \wedge \backsim q) \vee (\backsim p \wedge q)$
5. $p \vee [(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)]$
6. $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\backsim p \vee q)$
7. $[p \wedge (p \Leftrightarrow \backsim q)] \wedge q$

INVERS, KONVERS DAN KONTRAPOSISI

Perhatikan bentuk implikasi berikut!

Jika dua garis saling tegaklurus, maka kedua garis itu membentuk sudut siku-siku. Implikasi di atas bernilai benar.

Dari bentuk implikasi di atas, kita dapat menyatakannya menjadi pernyataan baru.

a. Jika dua garis tidak saling tegaklurus, maka kedua garis itu tidak membentuk sudut siku-siku.
b. Jika kedua garis membentuk sudut siku-siku, maka dua garis saling tegaklurus.
c. Jika kedua garis tidak membentuk sudut siku-siku, maka dua garis tidak saling tegaklurus.

Misalnya pernyataan-pernyataan penyusun dari implikasi awal kita nyatakan sebagai

p: dua garis tidak saling tegaklurus

q: kedua garis itu membentuk sudut siku-siku
maka pernyataan-pernyataan (a)-(c) dapat dinyatakan sebagai

a. $\sim p \Rightarrow \sim q$
b. $q \Rightarrow p$
c. $\sim q \Rightarrow \sim p$

Bentuk-bentuk di atas berturut-turut disebut *invers, konvers,* dan *kontraposisi* dari suatu implikasi $p \Rightarrow q$.

Dengan demikian, dari suatu implikasi kita mengubahnya menjadi pernyataan baru yaitu invers, konvers dan kontraposisi. Sehingga diperoleh:

a. $p \Rightarrow q$ **inversnya adalah** $\sim p \Rightarrow \sim q$
b. $p \Rightarrow q$ **konversnya adalah** $q \Rightarrow p$
c. $p \Rightarrow q$ **kontraposisinya adalah** $\sim q \Rightarrow \sim p$

Tabel kebenaran dari invers, konvers dan kontraposisi dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah sebagai berikut.

p	q	~p	~q	$p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Perhatikan bahwa nilai kebernaran dari $p \Rightarrow q$ adalah sama dengan $\sim q \Rightarrow \sim p$. Dengan demikian,

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

Perhatikan pula bahwa invers dankonvers dari suatu implikasi memiliki nilai kebenaran yang sama. Dengan kata lain invers dari suatu implikasi adalah kontraposisi dari konversnya, yaitu

$$\sim p \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow p$$

LATIHAN

Tentukan Invers, Konvers, dan Kontraposisi dari pernyataan berikut.

1. $p \Rightarrow (q \vee \backsim p)$
2. $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$
3. Jika suatu bangun datar adalah persegi, maka bangun datar tersebut segiempat.
4. Jika suatu bilangan adalah bilangan genap, maka habis dibagi 2.
5. Jika Nisa rajin belajar, maka nisa lulus ujian.

PENARIKAN KESIMPULAN

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menghadapi berbagai persoalan dan kita harus menentukan keputusan yang tepat untuk menyelesaikan masalah tersebut. Dalam logika matematika, penarikan keimpulan dilakukan berdasarkan premis-premis penyusunnya sampai dengan diperoleh suatu kesimpulan (konklusi). Misalkan, premis-premis tersebut adalah p1,p2,p3,...,pn dan kesimpulan yang diperoleh adalah q. Penarikan kesimpulan dapat dilakukan berdasarkan konjungsi dari premis-premisnya. Penarikan kesimpulan dikatakan sah atau valid jika konklusi q merupakan konsekuensi dari premis-premisnya. Artinya jika premis-premisnya benar, maka benar. Berikut akan kita pelajari beberapa metode penarikan kesimpulan, antara lain modus ponen, modus tollen, dan silogisme.

Modus ponen

Penarikan kesimpulan dengan modus ponen dilakukan berdasarkan premis-premisnya yang berbentuk

$p \Rightarrow q$ dan p yang menghasilkan konklusi q.

Secara umum

$p \Rightarrow q$ $\quad (premis\ 1)$ p $\quad (premis\ 2)$

$\therefore q$

Modus ponen di atas dinyatakan dalam bentuk implikasi, yaitu:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Artinya konjungsi dari $p \Rightarrow q$ dan p berimplikasi konklusi q.

Untuk menguji keabsahannya dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \Longrightarrow q$	$(p \Longrightarrow q) \wedge p$	$[(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa $[(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ merupakan pernyataan yang selalu bernilai benar.

Modus Tollen

Penarikan kesimpulan dengan modus tollen dilakukan berdasarkan premis-premisnya yang berbentuk

$p \Rightarrow q$ dan $\backsim q$ yang menghasilkan konklusi $\backsim p$.

Secara umum

$p \Rightarrow q$ $\quad (premis\ 1)$ $\backsim q$ $\quad (premis\ 2)$

$\therefore \backsim p$

Modus Tollen di atas dinyatakan dalam bentuk implikasi, yaitu:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \backsim q] \Rightarrow \backsim p$$

Artinya konjungsi dari $p \Rightarrow q$ dan $\backsim q$ berimplikasi konklusi $\backsim p$.

Untuk menguji keabsahannya dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran berikut:

p	q	$\backsim p$	$\backsim q$	$p \Longrightarrow q$	$(p \Longrightarrow q) \wedge \backsim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \backsim q] \Rightarrow \backsim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge \backsim q] \Rightarrow \backsim p$ merupakan pernyataan yang selalu bernilai benar.

Silogisme

Penarikan kesimpulan dengan silogisme dilakukan berdasarkan premis-premisnya yang berbentuk

$p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow r$yang menghasilkan konklusi $p \Rightarrow r$.

Secara umum

$p \Rightarrow q$ $\quad (premis\ 1)$ $\quad q \Rightarrow r$ $\quad (premis\ 2)$

$\therefore p \Rightarrow r$

Silogisme di atas dinyatakan dalam bentuk implikasi, yaitu:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Untuk menguji keabsahannya dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran berikut:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

LATIHAN

Tentukan kesimpulan (konklusi) dari premis-premis berikut.

1. Jika hewan adalah mamalia, maka bernapas dengan paru-paru.

   Ikan bernapas tidak dengan paru-paru
2. Jika hari ini hujan, maka hari ini mendung

   Hari ini hujan
3. Jika suatu bangun datar adalah persegi panjang, maka bangun datar tersebut adalah segiempat.

Jika bangun datar adalah segiempat, maka bangun datar memiliki empat sisi.

KALIMAT BERKUANTOR

Perhatikan kalimat berikut!

1. Setiap hari tumbuhan membutuhkan air.
2. Beberapa mahasiswa kelas A tidak membawa buku.
3. Semua mahasiswa PGSD UAD memiliki seragam kuliah.
4. Ada mahasiswa PGSD UAD yang berasal dari Jawa Tengah.
5. X adalah binatang yang hidup di darat dan di air, X = {katak, salamander}

Kata-kata semua........, setiap........., beberapa........, terdapat........, ada........ disebut dengan kalimat berkuantor (Quantifier). Kuantor tersebut menunjukkan atau berkait dengan banyaknya pengganti peubah x sehingga didapatkan suatu pernyataan berkuantor yang bernilai benar saja atau salah saja.

Kuantor merupakan cara untuk mengubah kalimat terbuka menjadi kalimat tertutup. Kalimat no 5 merupakan kaliamat yang belum dapat ditentukan kebenarannya sebelum X-nya diganti dengan himpunan {katak atau salamander}. Jika X diganti katak atau salamander maka kalimat no 5 akan menjadi benar.

Kuantor ada 2 yaitu:

1. Kuantor Universal (*universal quantifier*)

   Lambang "∀"

   $\forall x$ dibaca "untuk setiap x" atau "untuk semua x"

   Perhatikan pernyataan berikut.

   "Semua mahasiswa harus rajin belajar"

   Untuk melakukan pengkuantoran universal pada pernyataan tersebut maka dilakukan langkah-langkah seperti berikut :

   a. Carilah lingkup (*scope*) dari kuantor universalnya, yaitu

      "Jika x adalah mahasiswa, maka x harus rajin belajar".

      Selanjutnya akan ditulis :

      mahasiswa(x) ⇒harus rajin belajar(x)

   b. Berilah kuantor universal di depannya

      (∀x)(mahasiswa(x) ⇒harus rajin belajar(x))

   c. Ubahlah menjadi suatu fungsi

      (Ax)(M(x) ⇒B(x))

2. Kuantor Eksistensial (*exintensialquantifier*)

   Lambang "∃"

   ∃x dibaca "ada x (sedemikian hingga)" atau "terdapat x (sedemikian hingga)" atau "ada sekurang-kurangnya satu x (sedemikian hingga)" atau "beberapax (sedemikian hingga)".

   Contoh:

Kalimat terbuka "x + 6 = 10" diberi simbol dengan "D(x)"

(∃x)D(x) dibaca "ada x sedemikian hingga x + 6 = 10"

Kalimat (∃x)D(x) merupaan pernyataan yang bernilai benar.

Perhatikan kalimat berikut ini :

" Ada pelajar yang memperoleh beasiswa berprestasi "

Untuk melakukan pengkuantoran eksistensial pada pernyataan tersebut, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Carilah scope dari kuantor-kuantor eksistensialnya, yaitu :

"Ada x yang adalah pelajar, dan x memperoleh beasiswa berprestasi ".

Selanjutnya akan ditulis :

Pelajar(x) ∧ memperoleh beasiswa berprestasi(x)

b. Berilah kuantor eksisitensial di depannya.

(∃x) (Pelajar(x) ∧ memperoleh beasiswa berprestasi(x))

c. Ubahlah menjadi suatu fungsi.

(∃x)(P(x) ∧B(x))

Pemakaian Kuantor dengan dua variabel

$$(\forall x)(\exists y)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall x)[(\exists y)p(x,y)]$$

Dibaca "untuk setiap x, ada y sehingga $p(x,y)$"

$$(\exists y)(\forall x)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)[(\forall x)p(x,y)]$$

Dibaca "ada y sehingga untuk tiap x, $p(x,y)$"

LATIHAN

Ubahlah kalimat-kalimat berikut dalam simbol predikat dan kuantor.

1. Ada mahasiswa PGSD yang tidak lulus matematika dasar.
2. Semua siswa menghormati gurunya.
3. Beberapa mahasiswa gemar matematika.
4. Tidak ada hakim yang menjadi pengacara.

Tentukan pernyataan berikut bernilai benar atau salah, untuk x, y, dan z himpunan bilangan riil.

5. $(\forall x)(2x + 3 = 11)$
6. $(\exists y)(y^2 \leq 0)$
7. $(\forall x)(x + 2 < 5)$
8. $(\exists y)(y + 1 \geq 0)$