

## Penyelesaian Analitik dan Numerik Metode Euler pada Bola Jatuh Bebas Dengan Hambatan Udara

Suwaldi ✉, Ririn Alfiani, Ishafit

Universitas Ahmad Dahlan

Jl. Pramuka 42, Sidikan, Umbulharjo, Yogyakarta, 55161, Indonesia

| [suwaldi.azzam@gmail.com](mailto:suwaldi.azzam@gmail.com) ✉ | DOI : <https://doi.org/10.37729/jips.v5i1.4691> |

### Article Info

#### Submitted

28/03/2024

#### Revised

07/05/2024

#### Accepted

28/05/2024

**Abstrak** – Bola jatuh merupakan fenomena alamiah yang dapat dijelaskan oleh hukum-hukum fisika. Salah satu aspek penting dalam pemahaman pergerakan bola jatuh adalah adanya hambatan udara. Hambatan udara muncul ketika sebuah benda bergerak melalui medium udara, dan efeknya dapat dirasakan secara signifikan terutama pada benda yang bergerak dengan kecepatan tinggi. Pada penelitian ini menghasilkan model komputasi gerak benda bulat yang dijatuhkan dari gedung yang tinggi dan menghasilkan grafik analisis dalam mengeksplorasi keakuratan suatu algoritma komputasi dengan membandingkan hasil komputasi dengan solusi eksak yang diperoleh secara analitis. Akurasi kecepatan terhadap waktu dan posisi akan dilakukan dengan menggunakan tiga jenis bola yaitu bola bowling, bola basket dan bola golf yang dijatuhkan dari ketinggian 440 meter diatas permukaan tanah. Hasil analisis ketiga bola menunjukkan bahwa ada keterkaitan antara luas penampang bola, massa bola dengan kecepatan bola saat di udara. Bola bowling dengan luas penampang  $0,037 \text{ m}^2$  dan massa  $7,26 \text{ kg}$ , tidak mengalami kecepatan konstan saat jatuh di udara. Pada  $t = \pm 11$  sekon bola bowling sudah sampai di tanah dengan kecepatan  $\pm 69 \text{ m/s}$ . Bola basket dengan luas penampang  $0,046 \text{ m}^2$  dan massa  $0,625 \text{ kg}$ , mengalami kecepatan konstan saat  $t = \pm 7,5 \text{ s}$  dan mencapai tanah saat  $t = \pm 23$  sekon dengan kecepatan  $\pm 20,32 \text{ m/s}$ . Bola bisbol dengan luas penampang  $0,0043 \text{ m}^2$  dan massa  $0,145 \text{ kg}$ , mengalami kecepatan konstan saat  $t = \pm 8$  sekon dan mencapai tanah saat  $t = \pm 16$  sekon dengan kecepatan  $\pm 32 \text{ m/s}$ .

**Kata kunci:** Gerak jatuh bebas, Analitik, Numerik, Metode Euler, Hambatan udara

**Abstract** – Falling balls are a natural phenomenon that can be explained by the laws of physics. One important aspect in understanding the movement of a falling ball is the presence of air resistance. Air resistance arises when an object moves through the medium of air, and its effects can be felt significantly, especially on objects moving at high speeds. This research produces a computational model of the motion of a round object dropped from a tall building and produces an analytical graph to explore the accuracy of a computational algorithm by comparing the computational results with the exact solution obtained analytically. Accuracy of speed over time and position will be carried out using three types of balls, namely bowling balls, basketballs and golf balls which are dropped from a height of 440 m above the Earth's surface. The results of the analysis of the three balls show that there is a relationship between the cross-sectional area of the ball, the mass of the ball and the speed of the ball in the air. A bowling ball with a cross-sectional area of  $0.037 \text{ m}^2$  and a mass of  $7.26 \text{ kg}$  does not experience a constant velocity when falling through the air. At  $t \pm 11 \text{ s}$  the bowling ball has reached the ground with a speed of  $\pm 69 \text{ m/s}$ . A basketball with a cross-sectional area of  $0.046 \text{ m}^2$  and a mass of  $0.625 \text{ kg}$  experiences a constant velocity at  $t \pm 7.5 \text{ s}$  and reaches the ground at  $t \pm 23 \text{ s}$  with a speed of  $\pm 20.32 \text{ m/s}$ . A baseball ball with a cross-sectional area of  $0.0043 \text{ m}^2$  and a mass of  $0.145 \text{ kg}$  experiences a constant speed at  $t \pm 8 \text{ s}$  and reaches the ground at  $t \pm 16 \text{ s}$  with a speed of  $\pm 32 \text{ m/s}$ .



**Keywords:** Free fall motion, Analitics, Numeric, Euler methods, Air resistance

## 1. Pendahuluan

Kegiatan pembelajaran di sekolah tidak hanya tentang penguasaan materi pelajaran saja, namun mencakup aspek afektif dan psikomotorik peserta didik. Pembelajaran di sekolah sejatinya menghadapi suatu tantangan untuk menjaga minat belajar dan keterlibatan peserta didik dalam setiap tahapannya, hal ini diharapkan dapat memfasilitasi pemahaman konsep yang kompleks. Salah satu metode yang dapat dilakukan yaitu melalui eksperimentasi fisika secara langsung yang diharapkan tidak hanya dapat meningkatkan pemahaman konsep namun membantu peserta didik dalam mengembangkan berpikir kritis, analisis, dan pemecahan masalah [1], [2]. Namun demikian, masih dijumpai kendala dalam kegiatan eksperimen salah satunya ketersediaan peralatan, ketersediaan waktu, dan kemampuan guru menjadi faktor tidak dilaksanakannya kegiatan praktikum atau eksperimen di sekolah [3]. Sebagai langkah antisipasinya, kegiatan eksperimen fisika interaktif dapat dilakukan dalam upaya mengatasi kendala-kendala tersebut melalui penggunaan simulasi, permainan edikatif, dan metode numerik sehingga memungkinkan peserta didik dapat terlibat langsung meskipun tanpa menggunakan perangkat nyata.

Salah satu konsep yang penting untuk diajarkan dalam pembelajaran fisika yaitu tentang gerak jatuh bebas menggunakan percobaan bola jatuh. Selama ini pembahasan di sekolah adalah percobaan gerak jatuh bebas dengan mengabaikan faktor-faktor lainnya, padahal salah satu aspek penting dalam pemahaman pergerakan bola jatuh adalah adanya hambatan udara. Hambatan udara muncul ketika sebuah benda bergerak melalui medium udara, dan efeknya dapat dirasakan secara signifikan terutama pada benda yang bergerak dengan kecepatan tinggi [4]. Banyak gejala fisika yang sukar diamati dan dieksperimentasikan, terutama dalam hal pengukuran yang terbatas oleh kemampuan mata manusia, termasuk fenomena gerak linier pada gerak jatuh bebas. Suatu benda dikatakan mengalami gerak jatuh bebas, jika benda tersebut dilepaskan dari suatu ketinggian tertentu terhadap tanah tanpa kecepatan awal. Benda yang dijatuhkan dari atas akan jatuh ke bumi karena benda tersebut mendapat percepatan gravitasi ( $g$ ) yang arahnya selalu menuju ke pusat bumi [5]. Gerak jatuh bebas terjadi pada kondisi yang ideal artinya banyak faktor yang mempengaruhi gerak jatuh bebas diabaikan seperti pengaruh adanya hambatan udara, untuk menganalisis pengaruh adanya faktor-faktor yang mempengaruhi gerak jatuh bebas maka digunakan pendekatan numerik untuk memudahkan peneliti dalam menganalisis data [4].

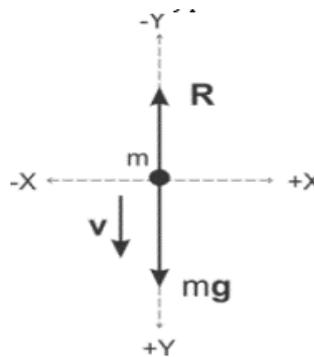
Berdasarkan konsepnya benda yang bergerak vertikal di udara karena pengaruh gaya gravitasi bekerja pula gaya gesekan udara. Suatu benda yang dijatuhkan dari ketinggian awal nol atau tanpa kecepatan awal, percepatan yang dialami oleh benda tersebut adalah percepatan gravitasi bumi  $g$  ( $m/s^2$ ). Lintasan gerak benda ini berupa gerak lurus [6], [7]. Terdapat dua model gaya gesekan udara, yakni gaya gesek yang besarnya berbanding lurus terhadap kecepatan dan gaya gesek yang besarnya berbanding lurus terhadap kuadrat kecepatan. Dalam hal ini, yang akan dilakukan penelitian adalah gaya gesek yang besarnya berbanding lurus dengan kecepatan. Menurut Fowler [8] gerak jatuh bebas dengan pengaruh gesekan udara dapat diselesaikan dengan metode numerik yang menghasilkan solusi numerik sehingga dapat diuraikan dengan suatu operasi hitung seperti penjumlahan, pengurangan, pembagian dan perkalian. Menurut [9] solusi numerik tidak sama dengan solusi analitik karena keduanya terdapat selisih, melalui solusi numerik dapat menghasilkan nilai yang lebih teliti sesuai dengan parameter yang diinginkan [10], [11].

Dalam eksperimen fisika analisis data dapat dilakukan menggunakan berbagai metode numerik dan analitik, salah satunya yaitu metode Euler. Metode ini merupakan metode yang mengambil dua suku pertama dari deret Taylor, alasan menggunakan metode Euler karena karena relatif sederhana dan memudahkan dalam proses penyelesaian persamaan diferensial [12]. Pada beberapa kasus, analisis data hasil eksperimen fisika secara manual relatif lebih rumit dan memerlukan waktu yang relatif lama, sehingga diperlukan solusi agar proses perhitungannya lebih akurat yaitu menggunakan bantuan komputer [13]. Ragam program komputer yang tersedia dapat membantu dalam analisis data, namun untuk program yang lebih canggih memerlukan pengetahuan khusus, maka dalam penelitian ini digunakan program Microsoft Excel untuk mengolah data secara otomatis meliputi perhitungan dasar, penggunaan fungsi dan formula, pembuatan grafik, serta manajemen data [4].

## 2. Metode

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan komputasi dengan metode numerik yang sesuai dengan persamaan yang akan diselesaikan pada eksperimen gerak jatuh bebas dengan memperhitungkan aspek hambatan udara. Metode numerik tersebut digunakan untuk mensimulasikan gerak jatuh bebas dengan memperhitungkan aspek hambatan udara yang diperoleh melalui penentuan persamaan diferensial orde satu yang diperoleh menggunakan metode Euler. Adapun langkah-langkah numerik yang dilakukan sebagai berikut: (1) Menetapkan nilai beberapa besaran yang berkaitan dengan gerak jatuh bebas dengan hambatan udara; (2) Menentukan nilai tinggi, yaitu jarak selang waktu; (3) Menghitung nilai  $a$  (percepatan); (4) Menghitung posisi dan kecepatan untuk masing-masing sumbu koordinat; dan (5) Mengulangi langkah 3 dan 4 (proses iterasi) hingga benda menyentuh tanah. Adapun prinsip skematis benda jatuh dapat ditunjukkan pada Gambar 1.

Proses analisis berbantuan komputasi ini menggunakan perangkat lunak Microsoft Excel untuk kasus gerak benda bulat yang dijatuhkan dari ketinggian tertentu sehingga menghasilkan data dan disusun sebuah grafik analisis. Untuk mengeksplorasi keakuratan suatu algoritma komputasi dengan membandingkan hasil komputasi dengan solusi eksak yang diperoleh secara analitis.



Gambar 1. Gerak Jatuh Dengan Hambatan Udara

Gambar 1 menunjukkan sebuah benda bermassa  $m$  jatuh vertikal dalam waktu sesaat dengan kecepatan sesaat  $v$ , massa dipengaruhi oleh dua gaya yaitu gaya berat dan kekuatan resistif. Gaya resistif diasumsikan sebanding dengan kuadrat kecepatan sesaat massa [6], [7], bentuk gaya resistif yaitu:

$$R = mg - \frac{D\rho A}{2} v^2 \tag{1}$$

dengan menerapkan hukum II Newton pada arah  $Y$ , maka

$$\Sigma F = mg - \frac{D\rho A}{2} v^2 = ma_y \tag{2}$$

$$a_y(t) = g - \frac{D\rho A}{2m} [v_y(t)^2] \tag{3}$$

$$v_y = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \tanh\left(\sqrt{\frac{D\rho Ag}{2m}} t\right) \tag{4}$$

$$y(t) = \frac{2m}{D\rho A} \ln \left[ \cosh\left(\sqrt{\frac{D\rho Ag}{2m}} t\right) \right] \tag{5}$$

keterangan:  $R$  = gaya resistif (N),  $D$  = Konstanta,  $\rho$  = kepadatan udara ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),  $A$  = luas area ( $\text{m}^2$ ),  $v$  = kecepatan ( $\text{m}/\text{s}$ ),  $m$  = massa (kg),  $g$  = percepatan gravitasi ( $\text{m}/\text{s}^2$ ),

Solusi numerik (Euler) dapat ditunjukkan pada persamaan (6) dan persamaan (7)

$$v_{i+1} = v_i + \left(g - \frac{D\rho A}{2m} v_i^2\right) \Delta t \quad (6)$$

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t \quad (7)$$

### 3. Hasil dan Pembahasan

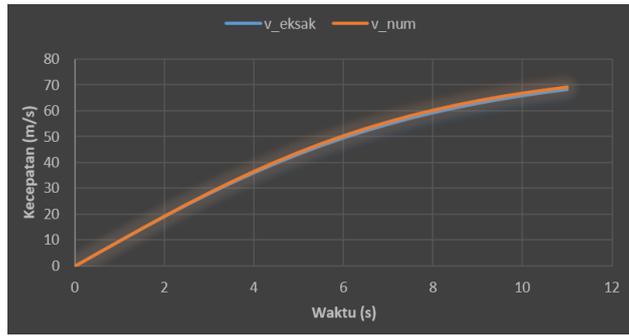
Kegiatan percobaan untuk mengambil data dilakukan dengan memperhatikan variabel berupa akurasi kecepatan ( $v$ ) terhadap waktu ( $t$ ) dan posisi ( $y$ ). Adapun percobaan yang dilakukan menggunakan tiga jenis bola yaitu bola bowling, bola basket, dan bola golf yang dijatuhkan dari ketinggian 440 meter di atas permukaan tanah. Dari ketiga jenis bola tersebut diamati pengaruh massa bola ( $m$ ) dan luas penampang ( $A$ ) terhadap kecepatan bola saat jatuh bebas. Langkah pertama dilakukan uji dengan menggunakan bola bowling dengan menentukan beberapa besaran yang sudah ditetapkan terlebih dahulu yaitu:  $D = 0,5$ ,  $\rho = 1,29$  (kg/m<sup>3</sup>),  $A = 0,037$  (m<sup>2</sup>),  $m = 7,26$  (kg),  $g = 9,8$  (m/s<sup>2</sup>),  $y_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\Delta t = 0,5$  (s). Persamaan (4) dan persamaan (5) dapat digunakan untuk menentukan kecepatan ( $v$ ) dan posisi ( $y$ ) secara analitik (eksak), sedangkan untuk menentukan kecepatan ( $v$ ) dan posisi ( $y$ ) secara numerik (Euler) menggunakan persamaan (6) dan (7). Dari persamaan tersebut dapat menggunakan bantuan Ms. Excel dalam membandingkan ketelitian antara kedua metode tersebut. Hasil perhitungan analitik dan numerik pada bola bowling dapat disajikan pada [Tabel 1](#).

**Tabel 1.** Perbandingan Hasil Perhitungan Analitik dan Numerik Bola Bowling

$t$	$a$	$v\_eksak$	$v\_num$	$y\_eksak$	$y\_num$
0	9.80	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	9.76	4.89	4.90	1.22	0.00
1	9.64	9.75	9.78	4.89	2.45
1.5	9.45	14.52	14.60	10.96	7.34
2	9.19	19.19	19.33	19.39	14.64
2.5	8.88	23.71	23.92	30.12	24.30
3	8.51	28.06	28.35	43.07	36.26
3.5	8.09	32.21	32.59	58.15	50.44
4	7.65	36.15	36.62	75.25	66.73
4.5	7.19	39.86	40.41	94.26	85.04
5	6.71	43.33	43.97	115.07	105.25
5.5	6.24	46.57	47.28	137.55	127.23
6	5.76	49.57	50.35	161.60	150.88
6.5	5.30	52.33	53.16	187.08	176.05
7	4.85	54.87	55.74	213.89	202.63
7.5	4.42	57.19	58.09	241.92	230.50
8	4.02	59.30	60.21	271.05	259.54
8.5	3.64	61.21	62.13	301.18	289.65
9	3.29	62.94	63.86	332.23	320.72
9.5	2.96	64.51	65.41	364.10	352.65
10	2.66	65.91	66.79	396.71	385.35
10.5	2.38	67.17	68.03	429.99	418.75
11	2.13	68.30	69.12	463.86	452.76

Berdasarkan hasil uji pada [Tabel 1](#) menunjukkan analisis menggunakan metode Euler dan solusi eksak hampir tidak dapat dibedakan karena nilai selisihnya sangat kecil. Dengan demikian, terdapat pendekatan asimtotik dari solusi Euler terhadap solusi eksak, hal ini membentuk sifat yang mendekati subjektif dalam menganggap nilai tertentu dari solusi eksak, dengan nilai  $\Delta t$  yang cukup kecil untuk solusi komputasi yang akurat.

Berdasarkan Tabel 1 dapat dibuat grafik kecepatan ( $v$ ) dan posisi bola bowling ( $y$ ) terhadap waktu sehingga dapat memperoleh gambaran yang jelas hubungan antara kecepatan ( $v$ ) dan posisi ( $y$ ) terhadap waktu ( $t$ ) sebagaimana ditunjukkan Gambar 2 dan Gambar 3.



Gambar 2. Grafik Kecepatan ( $v$ ) Terhadap Waktu ( $t$ ) Pada Bola Bowling di Udara



Gambar 3. Grafik Posisi ( $y$ ) Terhadap Waktu ( $t$ ) Pada Bola Bowling di Udara

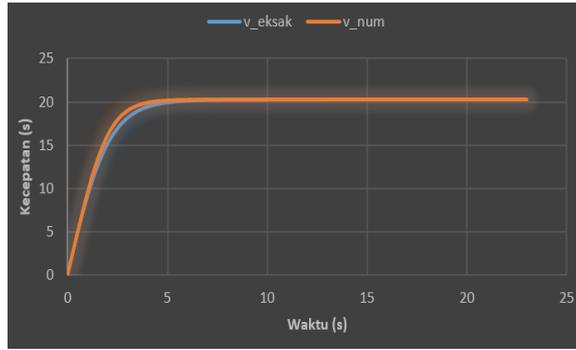
Berdasarkan Gambar 2, Bola bowling tidak mengalami kecepatan konstan sampai di tanah terlihat dari grafik yang masih melengkung, hal tersebut bermakna bahwa bola bowling memerlukan ketinggian lebih dari 440 m agar dapat mengalami kecepatan konstan. Waktu yang dibutuhkan bola bowling sampai ke bumi  $\pm 11$  sekon dengan kecepatan  $\pm 69$  m/s. Ditinjau dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa bola bowling mengalami percepatan yang ditunjukkan pada pola melengkung dan tidak membentuk garis linear.

Kegiatan uji yang kedua dilakukan dengan menggunakan bola basket, adapun besaran yang ditetapkan meliputi:  $D = 0,5$ ;  $\rho = 1,29$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ );  $A = 0,046$  ( $\text{m}^2$ );  $m = 0,625$  ( $\text{kg}$ );  $g = 9,8$  ( $\text{m}/\text{s}^2$ );  $y_0 = 0$ ;  $v_0 = 0$ ; dan  $\Delta t = 0,5$  (s). Dengan menggunakan persamaan persamaan (4) dan (5) dapat ditentukan kecepatan ( $v$ ) dan posisi ( $y$ ) secara analitik (eksak), sedangkan untuk mencari kecepatan dan posisi secara numerik dapat kita gunakan persamaan (6) dan (7). Perhitungan secara analitik dan numerik menggunakan bantuan Ms.Excel dapat disajikan pada Tabel 2.

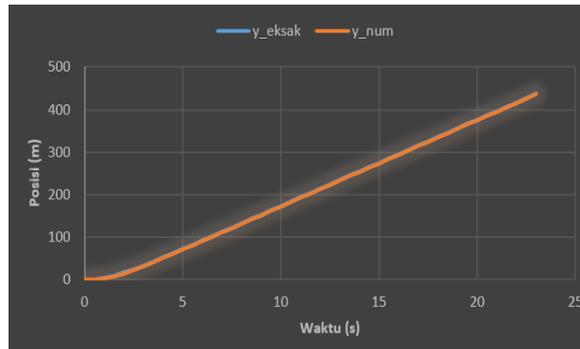
Berdasarkan Tabel 2 tentang analisis Euler dan solusi eksak, terdapat selisih antara data kecepatan saat  $t = 1,5$  sekon hingga  $t = 3,5$  sekon. Namun, perbedaan tersebut tidak signifikan sehingga model analisis diantara keduanya mendekati sama, hal ini membentuk sifat yang mendekati subjektif dalam menganggap nilai tertentu dari solusi eksak. Ditinjau dari data pada Tabel 2 dapat disusun grafik hubungan antar variabel sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4 dan Gambar 5.

**Tabel 2.** Perbandingan Hasil Perhitungan Analitik dan Numerik Bola Basket

$t$	$a$	$v\_eksak$	$v\_num$	$y\_eksak$	$y\_num$
0	9.80	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	9.25	4.81	4.90	1.21	0.00
1	7.83	9.10	9.52	4.72	2.45
1.5	6.04	12.58	13.34	10.18	7.21
2	4.34	15.16	16.13	17.15	13.88
2.5	2.96	16.97	17.94	25.21	21.94
3	1.95	18.19	19.02	34.03	30.91
3.5	1.25	18.98	19.63	43.33	40.42
4	0.79	19.48	19.96	52.95	50.24
4.5	0.50	19.80	20.13	62.78	60.21
5	0.31	20.00	20.22	72.73	70.28
5.5	0.19	20.12	20.27	82.76	80.39
6	0.12	20.20	20.29	92.84	90.52
6.5	0.07	20.24	20.31	102.95	100.67
7	0.05	20.27	20.31	113.08	110.82
7.5	0.03	20.29	20.32	123.22	120.98
8	0.02	20.30	20.32	133.37	131.14
8.5	0.01	20.31	20.32	143.52	141.30
9	0.01	20.31	20.32	153.68	151.45
9.5	0.00	20.32	20.32	163.84	161.61
10	0.00	20.32	20.32	173.99	171.77
10.5	0.00	20.32	20.32	184.15	181.93
11	0.00	20.32	20.32	194.31	192.09
11.5	0.00	20.32	20.32	204.47	202.25
12	0.00	20.32	20.32	214.63	212.41
12.5	0.00	20.32	20.32	224.79	222.57
13	0.00	20.32	20.32	234.95	232.73
13.5	0.00	20.32	20.32	245.11	242.89
14	0.00	20.32	20.32	255.27	253.05
14.5	0.00	20.32	20.32	265.43	263.21
15	0.00	20.32	20.32	275.59	273.37
15.5	0.00	20.32	20.32	285.75	283.53
16	0.00	20.32	20.32	295.91	293.69
16.5	0.00	20.32	20.32	306.07	303.85
17	0.00	20.32	20.32	316.23	314.01
17.5	0.00	20.32	20.32	326.39	324.17
18	0.00	20.32	20.32	336.55	334.33
18.5	0.00	20.32	20.32	346.71	344.49
19	0.00	20.32	20.32	356.86	354.65
19.5	0.00	20.32	20.32	367.02	364.81
20	0.00	20.32	20.32	377.18	374.97
20.5	0.00	20.32	20.32	387.34	385.13
21	0.00	20.32	20.32	397.50	395.29
21.5	0.00	20.32	20.32	407.66	405.45
22	0.00	20.32	20.32	417.82	415.61
22.5	0.00	20.32	20.32	427.98	425.76
23	0.00	20.32	20.32	438.14	435.92



Gambar 4. Grafik Kecepatan Bola Basket di Udara



Gambar 5. Grafik Posisi Bola Basket di Udara

Dari grafik Gambar 4 dan Gambar 5 terlihat bahwa bola basket mengalami kecepatan konstan, yaitu pada grafik garis lurus setelah lengkungan, yaitu pada saat  $t = 7,5$  sekon dengan kecepatan rata-rata  $20,32 \text{ m/s}$ . Grafik posisi setelah  $t = 2$  sekon juga menunjukkan garis linear artinya perubahan posisi terhadap waktu hampir mendekati selisih yang sama. Waktu yang dibutuhkan bola basket sampai ke bumi  $\pm 23$  sekon dengan kecepatan  $\pm 20,32 \text{ m/s}$ . Sementara itu uji ketiga dengan menggunakan bola bisbol dengan beberapa besaran:  $D = 0,5$ ;  $\rho = 1,29 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ;  $A = 0,0043 \text{ (m}^2\text{)}$ ;  $m = 0.145 \text{ (kg)}$ ;  $g = 9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$ ;  $y_0 = 0$ ;  $v_0 = 0$ ;  $\Delta t = 0,5 \text{ (s)}$ .

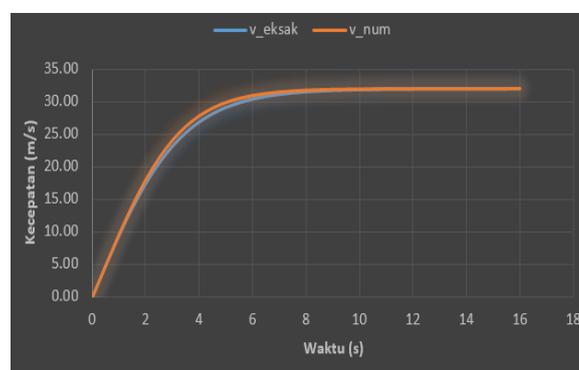
Dalam penelitian ini, analisis numerik dan analitik mengacu pada persamaan (4) dan persamaan (5) untuk menentukan posisi secara analitik/ eksak, sedangkan untuk menentukan kecepatan dan posisi secara numerik dapat menggunakan persamaan (6) dan persamaan (7). Untuk membantu mendapatkan gambaran data dan grafik hubungan variabel maka digunakan Ms. Excel sebagai piranti bantu sehingga diperoleh gambaran yang lebih jelas. Uji analitik dan numerik gerak jatuh bebas pada bola bisbol dapat disajikan pada Tabel 3. Adapun data uji meliputi waktu ( $t$ ), percepatan ( $a$ ), kecepatan eksak, kecepatan numerik, posisi eksak, dan posisi numerik.

Tabel 3. Perbandingan Hasil Perhitungan Analitik dan Numerik Bisbol

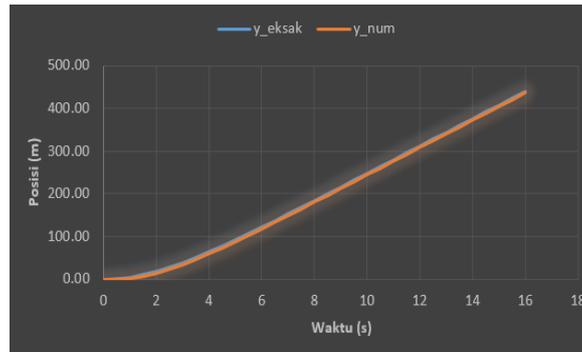
$t$	$a$	$v_{\text{eksak}}$	$v_{\text{num}}$	$y_{\text{eksak}}$	$y_{\text{num}}$
0	9.80	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	9.57	4.86	4.90	1.22	0.00
1	8.94	9.50	9.69	4.83	2.45
1.5	7.99	13.75	14.14	10.66	7.29
2	6.88	17.47	18.08	18.49	14.36
2.5	5.73	20.62	21.42	28.03	23.40
3	4.65	23.21	24.12	39.01	34.11
3.5	3.68	25.29	26.24	51.16	46.17
4	2.87	26.92	27.85	64.23	59.29
4.5	2.20	28.18	29.04	78.02	73.22

5	1.67	29.15	29.91	92.36	87.74
5.5	1.26	29.88	30.53	107.13	102.69
6	0.95	30.43	30.97	122.21	117.96
6.5	0.71	30.84	31.29	137.53	133.44
7	0.52	31.14	31.51	153.03	149.08
7.5	0.39	31.37	31.66	168.66	164.84
8	0.29	31.54	31.77	184.39	180.67
8.5	0.21	31.66	31.84	200.19	196.55
9	0.16	31.75	31.89	216.04	212.47
9.5	0.12	31.82	31.93	231.94	228.42
10	0.09	31.87	31.95	247.86	244.38
10.5	0.06	31.91	31.97	263.81	260.36
11	0.05	31.93	31.98	279.77	276.34
11.5	0.03	31.95	31.99	295.74	292.34
12	0.03	31.97	32.00	311.72	308.33
12.5	0.02	31.98	32.00	327.71	324.33
13	0.01	31.99	32.00	343.70	340.33
13.5	0.01	31.99	32.01	359.70	356.33
14	0.01	32.00	32.01	375.70	372.34
14.5	0.01	32.00	32.01	391.70	388.34
15	0.00	32.00	32.01	407.70	404.34
15.5	0.00	32.01	32.01	423.70	420.35
16	0.00	32.01	32.01	439.70	436.35

Berdasarkan Tabel 3 hasil analisis data menggunakan metode Euler dan solusi eksak terdapat selisih antara data kecepatan saat  $t = 2$  sekon hingga  $t = 6,5$  sekon. Meskipun terdapat perbedaan namun tidak signifikan sehingga model analisis diantara keduanya a mendekati sama, hal ini membentuk sifat yang mendekati subjektif dalam menganggap nilai tertentu dari solusi eksak. Dari Tabel 3 diatas dapat dibuat Gambar 6 dan Gambar 7 untuk melihat hubungan antar variable dengan jelas, dimana bola bisbol mulai mengalami kecepatan konstan saat  $t = 8$  sekon dengan kecepatan rata-rata 32 m/s. Waktu yang dibutuhkan bola bisbol sampai ke bumi  $\pm 16$  sekon dengan kecepatan  $\pm 32$  m/s.



Gambar 6. Grafik Kecepatan Bola Bisbol di Udara



**Gambar 7.** Grafik Posisi Bola Bisbol di Udara

Hasil percobaan gerak jatuh bebas pada beberapa benda dari ketinggian tertentu dengan memperhitungkan aspek-aspek lainnya menunjukkan hasil yang relatif sama, artinya hasil analisis data secara numerik dan analitik menggunakan metode Euler signifikan dan terdapat hubungan yang jelas antara posisi ( $y$ ), kecepatan ( $v$ ), dan percepatan ( $a$ ). Hasil dan temuan ini sejalan dengan penelitian [4] bahwa melalui metode Euler dapat membuktikan solusi numerik untuk gerak jatuh bebas meskipun gesekan udara diabaikan. Penelitian lain yang sejalan dengan temuan penelitian ini tentang pengaruh gesekan udara pada gerak vertikal oleh [6], [7] dengan dan tanpa gesekan udara.

Hasil analisis ketiga bola menunjukkan bahwa ada keterkaitan antara luas penampang bola, massa bola dengan kecepatan bola saat di udara. Bola bowling dengan luas penampang  $0,037 \text{ m}^2$  dan massa  $7,26 \text{ kg}$ , tidak mengalami kecepatan konstan saat jatuh di udara. Pada  $t = \pm 11$  sekon bola bowling sampai di atas permukaan tanah dengan kecepatan  $\pm 69 \text{ m/s}$ . Bola basket dengan luas penampang  $0,046 \text{ m}^2$  dan massa  $0,625 \text{ kg}$  memiliki kecepatan konstan saat  $t = \pm 7,5$  sekon dan mencapai tanah saat  $t = \pm 23$  sekon dengan kecepatan  $\pm 20,32 \text{ m/s}$ . Bola bisbol dengan luas penampang  $0,0043 \text{ m}^2$  dan massa  $0,145 \text{ kg}$  memiliki kecepatan konstan saat  $t = \pm 8$  sekon dan mencapai tanah saat  $t = \pm 16$  sekon dengan kecepatan  $\pm 32 \text{ m/s}$ . Bola dengan massa besar dan penampang lebih luas akan membutuhkan waktu lebih lama agar terjadi kecepatan konstan. Berdasarkan hasil temuan tersebut, maka penelitian ini dapat dimanfaatkan dalam kegiatan eksperimen dan analisis data berbantuan Ms. Excel khususnya untuk gerak jatuh bebas. Perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk besaran yang lain dan menggunakan perangkat bantu lainnya agar hasilnya lebih umum dan mendekati teoretis.

## 4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan bahwa metode Euler dapat digunakan sebagai metode pendekatan analisis ketika terjadi kesulitan dalam penyelesaian persamaan secara eksak. Hasil perhitungan data dengan menggunakan metode Euler memperoleh hasil yang cukup presisi dengan hasil analisis eksak, hal tersebut didasarkan pada data hasil percobaan yang menunjukkan bahwa metode analisis yang digunakan tersebut menghasilkan data yang relatif sama.

## Daftar Pustaka

- [1] C. O. Windari dan F. A. Yanti, "Penerapan model problem based learning untuk meningkatkan keterampilan berpikir kritis peserta didik," *Edu Sains J. Pendidik. Sains Dan Mat.*, vol. 9, no. 1, hlm. 61–70, 2021.
- [2] E. Julfitri, S. Efwindi, dan Z. Zulkarnaen, "The C3PDR Learning Model to Increase Conceptual Understanding and Creative Thinking Skills of Senior High School Students," *Berk. Ilm. Pendidik. Fis.*, vol. 8, no. 3, hlm. 170–182, 2020.
- [3] S. D. Aprilia, S. N. Wulandari, K. D. Agustina, dan N. F. Sulaeman, "Mengeksplorasi Dampak Ketersediaan Peralatan pada Pelaksanaan Praktikum Fisika di Laboratorium SMA," *J. Literasi Pendidik. Fis. JLPEF*, vol. 5, no. 1, hlm. 49–58, 2024.

- [4] N. Nurhamidah, "Solusi Numerik Menggunakan Metode Euler Untuk Persamaan Gerak Jatuh Bebas Tanpa Gesekan Udara Pada Microsoft Excel 2013," *Allmi J. Pendidik. MIPA*, vol. 12, no. 1, hlm. 27–32, 2023.
- [5] A. Ristiawan, "Analisis gerak jatuh bebas dengan metode video based laboratory (vbl) menggunakan software tracker," *J. Teach. Learn. Phys.*, vol. 3, no. 2, hlm. 26–30, 2018.
- [6] N. Yuningsih dan Y. C. Dewi, "Gaya Gesekan Udara Terhadap Benda yang Bergerak Vertikal Tanpa Kecepatan Awal," dalam *Prosiding Industrial Research Workshop and National Seminar*, 2022, hlm. 14–19. Diakses: 13 Juni 2024. [Daring]. Tersedia pada: <https://jurnal.polban.ac.id/ojs-3.1.2/proceeding/article/view/4337>
- [7] N. Yuningsih dan S. Sardjito, "Gerak Vertikal Benda Berukuran Berbeda yang Jatuh Tanpa Kecepatan Awal dan Bergesekan dengan Udara," dalam *Prosiding Industrial Research Workshop and National Seminar*, 2020, hlm. 710–714. Diakses: 13 Juni 2024. [Daring]. Tersedia pada: <https://jurnal.polban.ac.id/proceeding/article/view/2104>
- [8] M. Fowler, "Using Excel to Simulate Pendulum Motion and Maybe Understand Calculus a Little Better," *Sci. Educ.*, vol. 13, no. 7–8, hlm. 791–796, Nov 2004, doi: 10.1007/s11191-004-6731-1.
- [9] J. Da Costa, "Analisis Numerik untuk Gerak Osilasi Bergandeng pada Air Track dengan Metode Runge-Kutta," PhD Thesis, Program Studi Pendidikan Fisika FSM-UKSW, 2014. Diakses: 13 Juni 2024. [Daring]. Tersedia pada: <https://repository.uksw.edu/handle/123456789/4950>
- [10] A. Basuki, N. Ramadijanti, dan S. Kom, "Metode Numerik dan Algoritma Komputasi," 2005, Diakses: 13 Juni 2024. [Daring]. Tersedia pada: <https://openlibrary.telkomuniversity.ac.id/home/catalog/id/98821/slug/metode-numerik-dan-algoritma-komputasi.html>
- [11] D. E. C. Rahmad, D. S. E. Ikawati, S. SI, dan Y. W. Syaifudin, *Metode Numerik: Metode Numerik*, vol. 1. UPT Percetakan dan Penerbitan Polinema, 2018. Diakses: 13 Juni 2024. [Daring].
- [12] R. S. Azis dan I. Ramli, "Implementasi Metode Euler Pada Gerak Pegas Dengan Menggunakan Scilab," *Appl. Phys. Cokroaminoto Palopo*, vol. 2, no. 1, hlm. 9–14, 2021.
- [13] S. Maiyena, "Penggunaan Metode Euler Pada Persamaan Diferensial Orde Dua Pada Rangkaian Listrik Seri LC," *J. Sainstek IAIN Batusangkar*, vol. 3, no. 2, hlm. 176–181, 2011.