

Seri Kuliah “Metode Wavelet untuk Pemrosesan Signal Digital”

Julan Hernadi¹

¹Department of Mathematics and Scientific Computing
Ahmad Dahlan University (UAD)

Kuliah disampaikan pada Program S3 MIPA Universitas
Sriwijaya (UNSRI), Palembang Mei - Juli 2023

Kuliah 1: Apa itu Wavelet?

Wavelet = Wave (gelombang) + let (kecil) \Rightarrow adalah istilah untuk fungsi yang berbentuk gelombang kecil.

- Wavelet Haar: $\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2, \\ -1 & 1/2 \leq x < 1, \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$
- Wavelet Morlet: $\psi(x) = e^{-x^2/2} \cos 5x$
- Wavelet Mexico-hat: $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - x^2)e^{x^2/2}$.
- Wavelet Daubechies: ψ tidak memiliki formula eksplisit, namun ia memenuhi persamaan skala-dua:

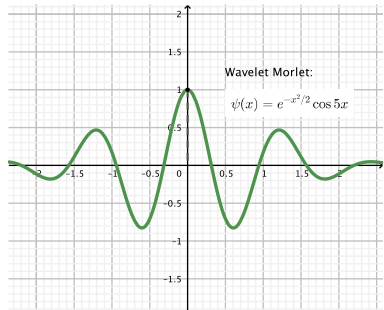
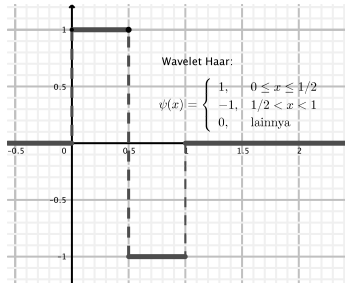
$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \phi(2x - k)$$

dimana

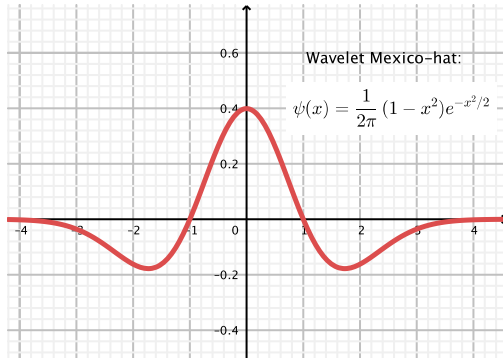
$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \phi(2x - k)$$

$b_k = (-1)^k a_{D-1-k}$, $k = 0, 1, \dots, D-1$, koefisien $\{a_k\}$ diketahui. Di sini D menyatakan lebar support dan digunakan sebagai jenis wavelet.

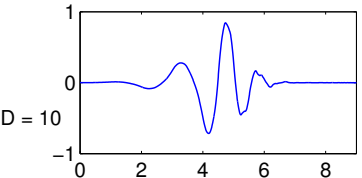
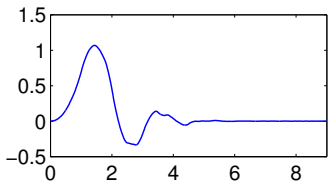
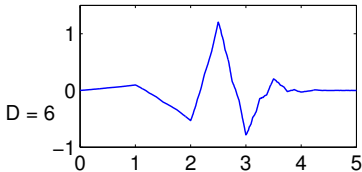
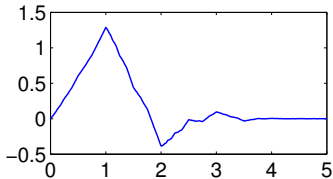
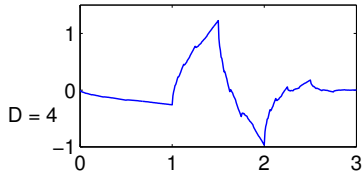
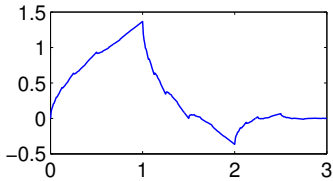
Penampakan Wavelet (Haar dan Morlet)



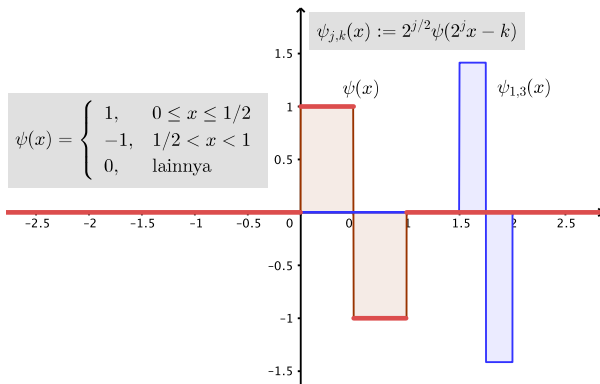
Wavelet Mexicat-hat (Topi orang Meksiko)



Wavelet Daubechies ψ_D (kanan) dan ϕ_D (kiri)



Versi Dilatasi dan Translasi (Basis Wavelet)



Untuk setiap $j, k \in \mathbb{Z}$, berlaku

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) dx = 0.$$

Analisis Multiresolusi (MRA): Selayang Pandang

Wavelet Haar:

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2, \\ -1 & 1/2 \leq x < 1, \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

memiliki pasangan fungsi ϕ di mana

$$\phi_H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Berlaku “relasi skala-dua” (two-scale relation):

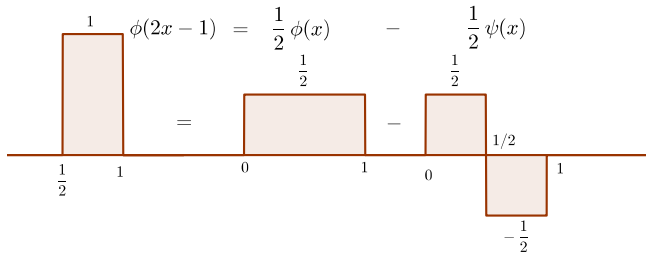
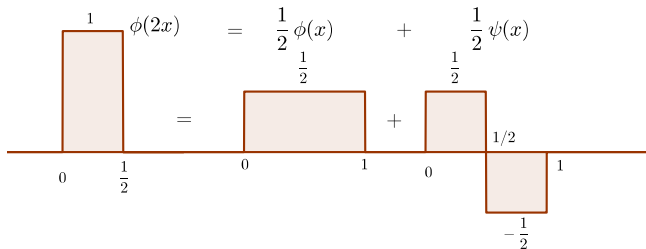
$$\begin{aligned} \phi_H(2x) &= \frac{1}{2}\phi_H(x) + \frac{1}{2}\psi_H(x) \\ \phi_H(2x - 1) &= \frac{1}{2}\phi_H(x) - \frac{1}{2}\psi_H(x). \end{aligned}$$

Dikenal juga istilah “mother wavelet” untuk ψ_H dan “father wavelet” (fungsi skala) untuk ϕ . Secara umum relasi skala dua dapat disajikan ke dalam

$$\phi_H(2x - \ell) = \sum_k \{a_{\ell-2k}\phi_H(x - k) + b_{\ell-2k}\psi_H(x - k)\}, \ell = 0, 1.$$

Di mana $a_0 = a_1 = 1/2$ dan $a_k = 0$ untuk $k \neq 0, 1$; $b_0 = 1/2$, $b_1 = -1/2$ dan $b_k = 0$ untuk $k \neq 0, 1$.

Ilustrasi Grafis Relasi Skala dua



Struktur Ruang MRA

Untuk setiap $j \in \mathbb{Z}$ didefinisikan subruang $V_j \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sebagai berikut:

$$V_j = \overline{\text{span}}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) : \sum_k |c_{j,k}|^2 < \infty \right\}.$$

Karena $\phi_{j,k}$ dan $\phi_{j,\ell}$ tidak tumpang tindih untuk $k \neq \ell$ maka basis ini orthogonal. Selanjutnya koefisien $2^{j/2}$ pada $\phi_{j,k}(x)$ membuat basis ini orthonormal untuk V_j . Sejalan dengan ini didefinisikan himpunan subruang $W_j \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$W_j = \overline{\text{span}}\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x) : \sum_k |c_{j,k}|^2 < \infty \right\}.$$

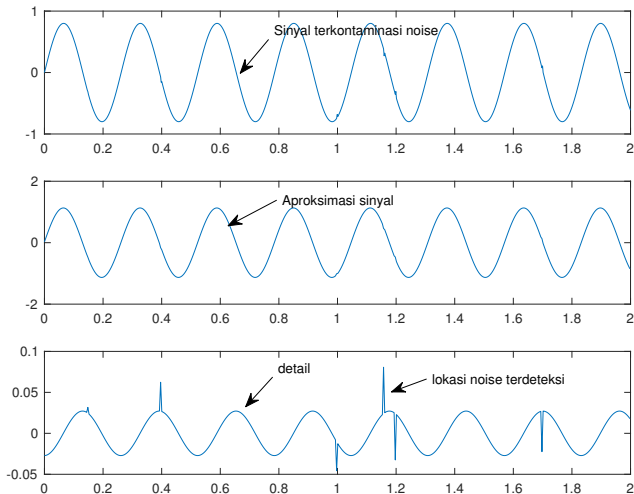
Diperoleh sifat:

- $V_{j+1} = V_j + W_j$, $V_j \cap W_j = \{0\}$ dan $V_j \perp W_j$, diringkas $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.
- $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R})$

V_j disebut ruang aproksimasi level j dan W_j disebut ruang detail.

Dekomposisi Wavelet 1 Level

Sebuah sinyal s yang sudah terkontaminasi noise (gangguan) diproyeksikan ke dalam ruang V_{j+1} , kemudian didekomposisikan ke dalam ruang aproksimasi V_j dan ruang detail W_j .



Algoritma Dekomposisi dan Rekonstruksi

Sebuah sinyal analog f dimodelkan ke dalam ruang V_n :

$f_n(x) = \sum_k c_{n,k} \phi(2^n x - k)$, kemudian didekomposisikan ke dalam

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + g_{n-1}(x),$$

dimana $f_{n-1} \in V_{n-1}$ dan $g_{n-1} \in W_{n-1}$. Diperoleh representasi

$$f_{n-1}(x) = \sum_k c_{n-1,k} \phi(2^{n-1} x - k), \quad g_{n-1}(x) = \sum_k d_{n-1,k} \psi(2^{n-1} x - k).$$

- Algoritma dekomposisi: menghitung koefisien $\bar{c}_{n-1} = \{c_{n-1,k}\}$ dan $\bar{d}_{n-1} = \{d_{n-1,k}\}$ dari $\bar{c}_n = \{c_{n,k}\}$ menggunakan filter $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$

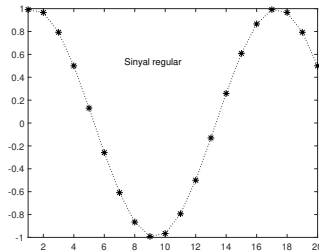
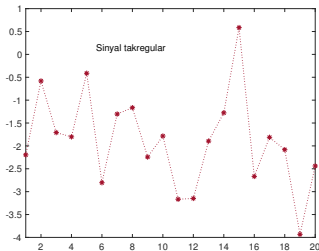
$$c_{n-1,k} = \sum_{\ell} a_{\ell-2k} c_{n,\ell}, \quad d_{n-1,k} = \sum_{\ell} b_{\ell-2k} c_{n,\ell}$$

- Algoritma rekonstruksi: menghitung koefisien $\bar{c}_n = \{c_{n,k}\}$ dari $\bar{c}_{n-1} = \{c_{n-1,k}\}$ dan $\bar{d}_{n-1} = \{d_{n-1,k}\}$ menggunakan filter $\{p_k\}$ dan $\{q_k\}$

$$c_{n,k} = \sum_{\ell} \{p_{k-2\ell} c_{n-1,\ell} + q_{k-2\ell} d_{n-1,\ell}\}$$

Kuliah 2 sesi 1: Konsep Dasar Sinyal

Sinyal kontinu adalah fungsi $x(t)$ yang terdefinisi pada setiap t (waktu). Sedangkan **sinyal diskret** terdefinisi hanya setiap interval waktu tertentu. Dalam hal interval waktu tersebut sama maka dikatakan **sinyal seragam**. Biasanya, sinyal diskret diperoleh dengan cara mencuplik sinyal kontinu: $x(t) \rightarrow x(nT_s)$, $n \in \mathbb{Z}$ dan T_s adalah **sampling interval**. Contoh: $x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{16}n + \frac{\pi}{3}\right)$ bersesuaian dengan $T_s = \frac{2\pi}{16} \approx 0.2937$ det.



$x(t)$: sinyal dimensi 1, misalnya data time-series.

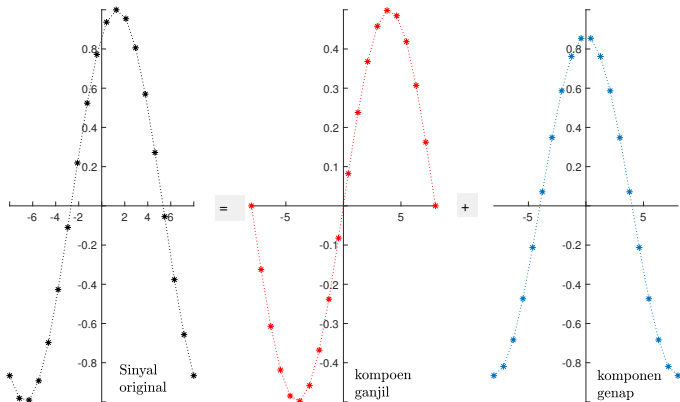
$x(n_1, n_2)$: sinyal dimensi 2, misalnya data citra di mana (n_1, n_2) : lokasi pixel. Untuk citra gray-scale, $x(n_1, n_2)$ bernilai 0 – 255: level keabuan. Untuk citra berwarna, $x(n_1, n_2)$ bernilai vektor 3 dimensi (R, G, B) yang menyatakan Red, Green, dan Blue.

Klasifikasi Sinyal

- Sinyal periodik: $x(n + N) = x(n)$ untuk setiap n , N terkecil disebut periode. Sinyal-sinyal sinusoidal adalah periodik. Kebanyakan sinyal dalam kehidupan nyata adalah non-periodik.
- Sinyal genap: $x(-n) = x(n) \rightarrow$ simetris thd sumbu Y. Sinyal ganjil: $x(-n) = -x(n) \rightarrow$ antisimetris thd sumbu Y.
- Sebarang sinyal dapat dipecah ke dalam komponen genap dan komponen ganjil:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$
$$x_e = \frac{x(n) + x(-n)}{2}, x_o(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}.$$

Dekomposisi Sinyal dalam komponen Ganjil dan Genap



Dekomposisi sinyal ke dalam sinyal-sinyal dasar \rightarrow ekstraksi karakteristik sinyal. Dekomposisi sinyal menggunakan basis wavelet.

Energi Sinyal

Energi sinyal: Misal $x = \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ sebuah sinyal maka energi sinyal x didefinisikan sebagai

$$E := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n).$$

Dalam hal $E < \infty \Rightarrow x$ dikatakan sinyal dengan energi hingga (finite-energy).
Energi kumulatif sinyal: Misalkan $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ adalah sinyal dengan panjang N dan sinyal y didefinisikan sebagai nilai mutlak $x(n)$ dan diurutkan menurun.

$$C(n) = \frac{\sum_{k=0}^n y^2(k)}{\sum_{\ell}^{N-1} y^2(\ell)}, n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

$x(n) = \{1, 6, 11, 16, 18, 14, 17, 20\}$, diperoleh

$y(n) = \{20, 18, 17, 16, 14, 11, 6, 1\}$ dan

$y(n)^2 = \{400, 724, 1013, 1269, 1465, 1586, 1622, 1623\}$.

- Energi $E = 1623$ dan energi kumulatif $\{0.2465, 0.4461, 0.6242, 0.7819, 0.9026, 0.9772, 0.9994, 1\}$.
- $400 = 20^2$, $724 = 20^2 + 18^2$, \dots , $0.2465 = \frac{400}{1623}$, $0.4461 = \frac{724}{1623}$, \dots .

- 1 Sinyal impulsif $\delta(n)$ bernilai 1 untuk $n = 0$ dan bernilai 0 untuk $n \neq 0$, ditulis

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0. \end{cases}$$

- 2 Sinyal satuan $u(n)$ bernilai 1 untuk $n \geq 0$ dan bernilai 0 untuk $n < 0$, ditulis

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0. \end{cases}$$

- 3 Sinyal sinusioda $x(n) = A \sin(\omega n + \theta)$, $n \in \mathbb{Z}$.

- 4 Representasi sinyal dalam sinyal impulsif. Contoh: $x(n) = \{x(-3) = 4, x(0) = -1, x(2) = 3, x(4) = 7\}$ dan $x(n) = 0$ untuk n lainnya. Maka $x(n)$ dapat ditulis sebagai

$$x(n) = 4\delta(n + 3) - \delta(n) + 3\delta(n - 2) + 7\delta(n - 4).$$

- 1 Time-shifting (pergeseran): $x(n) \rightarrow x(n - n_0)$. Contoh:

$$x(n) = \{x(0) = -0.1294, x(1) = 0.2241, x(2) = 0.8365, x(3) = 0.4830\}.$$

Misalkan $y(n) := x(n - 1)$, diperoleh

$$y(0) = x(-1) \text{ (tidak terdefinisi)}$$

$$y(1) = x(0) = -0.1294$$

$$y(2) = x(1) = 0.2241$$

$$y(3) = x(2) = 0.8365$$

$$y(4) = x(3) = 0.4830$$

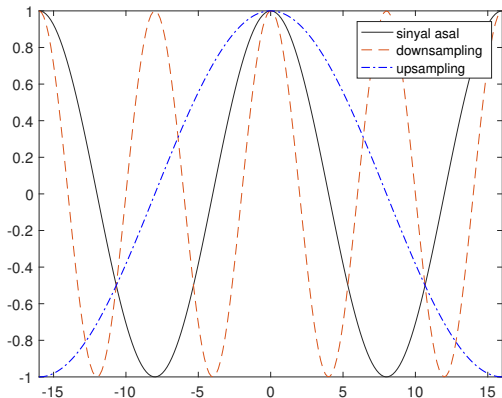
- 2 Time-reversal (pencerminan thd sb Y): $x(n) \rightarrow x(-n)$.

- 3 Time-scaling:

- Kompresi (downsampling): $x(n) \rightarrow x(2n)$. Misalkan $x(n) = \dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots$ maka $y(n) := x(2n)$ diperoleh dengan mengambilkan $x(n)$ dengan ngenap, yaitu $y(n) = \dots, x(-4), x(-2), x(0), x(2), \dots$
- Ekspansi (upsampling): $x(n) \rightarrow x(n/2)$ dengan cara mengisi nilai tertentu diantara dua suku yang ada, misalnya 0. Misalkan $x(n) = \dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots$ maka $y(n) := x(n/2)$ adalah $y(n) = \dots, 0, x(-2), 0, x(-1), 0, x(0), 0, x(1), 0, x(2), 0, \dots$

Contoh Time-Scaling

$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{16}t\right) \rightarrow x_1(t) = x(2t)$ downsampling, $x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{16}t\right) \rightarrow x_2(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$ upsampling.



Ketika sinyal $x(t)$ membutuhkan 2 siklus maka versi ekspansinya $x_2(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$ hanya membutuhkan 1 siklus dalam interval yang sama. Kebalikannya untuk versi kompresinya $x_1(t) = x(2t)$.

Kerjakan Exercises 2.1 - 2.11

- Khusus Soal 2.9 berkenaan dengan aliasing, yaitu sampel sama untuk dua sinyal yang berbeda. Istilah aliasing berkaitan dengan penyamaran suatu sinyal terhadap sinyal lainnya. Materinya dapat dibaca pada buku hal 12-13.
- Untuk Soal 2.11 coba gunakan salah satu software semacam Matlab atau Python, atau pun bisa. Jelaskan informasi apa yang diperoleh dari visual yang ada.

Kuliah 2 sesi 2: Konvolusi dan Korelasi

Tiga operasi lanjutan sinyal yang sering digunakan adalah konvolusi, korelasi, dan DFT (Discrete Fourier Transform). DWT (Discrete Wavelet Transform) diimplementasikan melalui operasi konvolusi.

Konvolusi linear dari dua barisan $x(n)$ dan $h(n)$ didefinisikan sebagai

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n)$$

Output dari konvolusi dua barisan berhingga dengan panjang N dan M adalah $N + M - 1$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$x(n) = \{x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 4, x(3) = 3\}$$

$$h(n) = \{h(0) = 1, h(1) = -2, h(2) = 1\}. \text{ Diperoleh}$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0-k) = x(0)h(0) = 1 \times 1 = 1$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0$$

$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = 1$$

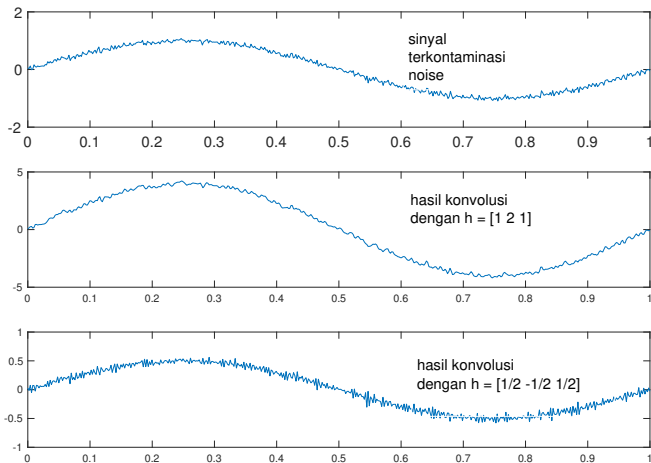
$$y(3) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(3-k) = x(0)h(3) + x(1)h(2) = -3$$

$$y(4) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(4-k) = x(2)h(2) + x(3)h(1) = -2$$

$$y(5) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(5-k) = x(3)h(2) = 3$$

$$y(n) = \{y(0) = 1, y(1) = 0, y(2) = 1, y(3) = -3, y(4) = -2, y(5) = 3\}$$

Konvolusi pada sinyal bernoise



Interpretasikan sendiri hasil konvolusi ini.

Menghitung Konvolusi, Teknik 1: Tabel Pergeseran Indeks

k			0	1	2	3		
$h(k)$			1	-2	1			
$x(k)$			1	2	4	3		
$h(0-k)$	1	-2	1					
$h(1-k)$		1	-2	1				
$h(2-k)$			1	-2	1			
$h(3-k)$				1	-2	1		
$h(4-k)$					1	-2	1	
$h(5-k)$						1	-2	1
n			0	1	2	3	4	5
$y(n)$			1	0	1	-3	-2	3

Perhatikan irisan elemen-elemen pada $x(k) = \{1, 2, 4, 3\}$ dan elemen-elemen pada $h(n-k)$, $n = 0, 1, \dots, 5$. Contoh:

- pada baris $h(0-k)$ hanya $\{1\}$ yang beririsan dengan elemen $\{1\}$ pada $x(k)$, diperoleh $y(0) = 1 \times 1 = 1$
- pada baris $h(2-k)$ diperoleh $\{1, -2, 1\}$ beririsan dengan $\{1, 2, 4\}$ pada $x(k)$, diperoleh $y(2) = (1 \times 1) + (-2 \times 2) + (1 \times 4) = 1$.

Menghitung Konvolusi, Teknik 2: Via konvolusi Dirac

Selalu berlaku sifat $x(n) * \delta(n) = x(n)$ dan $x(n) * \delta(n - k) = x(n - k)$.
Diketahui $x(n) = \{1, 2, 4, 3\}$ ditulis sebagai

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n - 1) + 4\delta(n - 2) + 3\delta(n - 3).$$

Diketahui $h(k) = \{1, -2, 1\}$, yakni $h(0) = 1, h(1) = -2, h(2) = 1$:

- $y_0(n) = h(n) * \delta(n) = h(n) \rightarrow y_0(0) = h(0) * \delta(0) = h(0) = 1,$
 $y_0(1) = h(1) * \delta(1) = h(1) = -2, y_0(2) = h(2) * \delta(2) = h(2) = 1.$
- $y_1(n) = h(n) * 2\delta(n - 1) = 2h(n - 1) \rightarrow y_1(1) = 2h(0) = 2,$
 $y_1(2) = 2h(1) = -4, y_1(3) = 2h(2) = 2.$
- $y_2(n) = h(n) * 4\delta(n - 2) = 4h(n - 2) \rightarrow y_2(2) = 4h(0) = 4,$
 $y_2(3) = 4h(1) = -8, y_2(4) = 4h(2) = 4.$
- $y_3(n) = h(n) * 3\delta(n - 3) = 3h(n - 3) \rightarrow$
 $y_3(3) = 3h(0) = 3, y_3(4) = 3h(1) = -6, y_3(5) = 3h(2) = 3.$

Diperoleh $y(0) = y_0(0) = 1, y(1) = y_0(1) + y_1(1) = -2 + 2 = 0, y(2) =$
 $y_0(2) + y_1(2) + y_2(2) = 1 + (-4) + 4 = 1,$
 $y(3) = y_1(3) + y_2(3) + y_3(3) = 2 + (-8) + 3 = -3,$
 $y(4) = y_2(4) + y_3(4) = 4 + (-6) = -2, \text{ dan } y(5) = y_3(5) = 3.$

Menghitung Konvolusi, Teknik 3: Perkalian 2 polinomial

$h(n) = \{1, -2, 1\}$ bersesuaian dengan polinomial $1 - 2x + x^2$ dan $x(n) = \{1, 2, 4, 3\}$ dengan $1 + 2x + 4x^2 + 3x^3$.

$h(k)$				1	-2	1
$x(k)$			1	2	4	3
Koefisien pangkat polinomial						
				3	-6	3
			4	-8	4	
		2	-4	2		
	1	-2	1			
$y(n)$	1	0	1	-3	-2	3

- baris 1: $3 \times \{1, -2, 1\} = \{3, -6, 3\}$ dibaca dari kanan: 3 adalah koef polinomial derajat 5, -6 adalah koef derajat 4, dan 3 adalah koef derajat 3.
- baris 2: $4 \times \{1, -2, 1\} = \{4, -8, 4\}$ dibaca dari kanan: 4 adalah koef derajat 4, -8 adalah koef derajat 3, dan 4 adalah koef derajat 2. Dan seterusnya.

Diperoleh: $(1 - 2x + x^2)(1 + 2x + 4x^2 + 3x^3) =$

$$1 + (2 - 2)x + (4 - 4 + 1)x^2 + (3 - 8 + 2)x^3 + (-6 + 4)x^4 + 3x^5$$
$$= 1 + x^2 - 3x^3 - 2x^4 + 3x^5$$

Operasi korelasi mengukur similaritas (kemiripan) dua signal. Korelasi signal $x(n)$ dan $y(n)$ didefinisikan sebagai:

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) \text{ atau } r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m), m \in \mathbb{Z}.$$

Jadi, korelasi sebagai fungsi terhadap waktu tunda m . Sebagai contoh “rasa lapar” tergantung dari berapa lama waktu berlalu setelah makan terakhir.

Example

$x(n) = \{x(0) = 3, x(1) = 1, x(2) = 2, x(3) = 4\}$ dan
 $y(n) = \{y(0) = 1, y(1) = -1\}$ Korelasi menggunakan definisi pertama:

$$r_{xy}(-1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+1) = x(0)y(1) = 3 \times (-1) = -3$$

$$r_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) = x(0)y(0) + x(1)y(1) = 3 + (-1) = 2,$$

dan seterusnya diperoleh $r_{xy}(1) = -1$, $r_{xy}(2) = -2$, $r_{xy}(3) = 4$.

Kerjakan Exercises 3.1 - 3.13 pada buku hal 31 - 35.

Kuliah 3: Analisis Fourier

- **Operator time-invariant:** Operator linear L dikatakan “time-invariant” jika dan hanya jika $Lf(t) = g(t) \rightarrow Lf_\tau(t) = Lf(t - \tau) = g(t - \tau)$. Artinya, jika signal input tertunda selama τ maka signal output juga tertunda selama τ .
- Dirac impluse: δ adalah sebuah distribusi (fungsional linear) di mana $\delta(t) = 0$ untuk $t \neq 0$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$. Mengingat $\delta_u(t) := \delta(t - u)$ maka berlaku

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta_u(t)du = f(t) \text{ dan } Lf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)L\delta_u(t)du.$$

Misalkan $L\delta(t) = h(t)$ maka h disebut impulse respons dari L dan berlaku $L\delta_u(t) = h(t - u)$. Berlaku

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)L\delta_u(t)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(t-u)du := (f*h)(t) = (h*f)(t).$$

Jadi operator time-invariant L ekuivalen dengan konvolusi dengan impulse respons h .

- Sebuah filter dikatakan **kausal** jika $Lf(t)$ tidak bergantung pada nilai $f(u)$ untuk $u > t$. Dikatakan **stabil** jika $Lf(t)$ terbatas untuk $f(t)$ yang terbatas.

Contoh Filtering

- 1 Amplification and delay system: $Lf(t) = \lambda f(t - \tau)$
bersesuaian dengan impulse respons $h(t) = \lambda\delta(t - \tau)$.
- 2 Uniform averaging f over interval of size T :
 $Lf(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(u)du$ bersesuaian dengan impulse respons
 $h(t) = \frac{1}{T}\chi_{[-T/2, T/2]}(t)$.
- 3 Khusus $f(t) = e^{i\omega t}$ maka

$$\begin{aligned}Lf(t) &= Le^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{i\omega(t-u)} du \\ &= e^{i\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\omega u} du}_{=\hat{h}(\omega)} = \hat{h}(\omega)e^{i\omega t} \\ Le^{i\omega t} &= \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Dalam hal ini $e^{i\omega t}$ vektor eigen dari L dengan nilai eigen $\hat{h}(\omega)$.

Untuk materi “Deret Fourier”, baca pada buku Analisis Real Elementer (Julan Hernadi, Erlangga 2015).

Misalkan $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ maka transformasi Fourier dari f adalah \hat{f} yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt. \quad (1)$$

$\hat{f}(w)$ mengukur “seberapa banyak” osilasi pada frekuensi w yang ada dalam f . Invers transformasi Fourier diberikan oleh

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt} dw. \quad (2)$$

Maknanya, menyajikan fungsi f sebagai jumlahan gelombang sinus $e^{iwt} = \cos wt + i \sin wt$ dengan amplitudo $\hat{f}(w)$.

Konvolusi pada domain frekuensi

Misalkan $f, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dan $g = h * f$, i.e.

$$(h * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)f(t - u)du$$

Diperoleh

$$\hat{g}(w) = \hat{h}(w)\hat{f}(w) \quad (3)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w)e^{iwt} dw \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(w)\hat{f}(w)e^{iwt} dw \quad (5)$$

Misalkan $Lf(t) = g(t)$ maka $Lf(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(w)\hat{f}(w)e^{iwt} dw$, i.e. komponen frekuensi e^{iwt} dengan amplitudo $\hat{f}(w)$ diamplifikasi atau ditekan oleh $\hat{h}(w)$. Konvolusi ini disebut *frequency filtering* dan h disebut fungsi transfer.

Beberapa Contoh

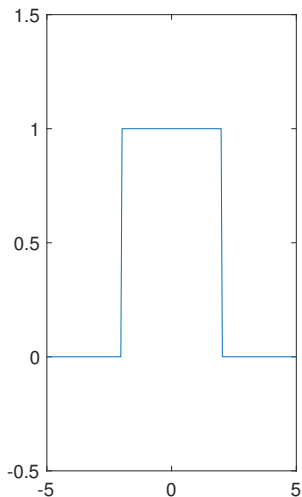
- 1 Fungsi indikator $f(t) = \chi_{[-T, T]}(t) \iff \hat{f}(w) = \frac{2 \sin(Tw)}{w}$.
- 2 Ideal low-pass filter memiliki fungsi transfer $\hat{h}(w) = \chi_{[-\xi, \xi]}(w)$ berkaitan dengan impulse respons $h(t) = \frac{\sin(\xi t)}{\pi t}$.
- 3 Dirac $\delta_\tau(t) := \delta(t - \tau) \iff \hat{\delta}_\tau(w) = e^{-i w \tau}$.
- 4 Dirac comb

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - nT) \iff \hat{c}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inTw}$$

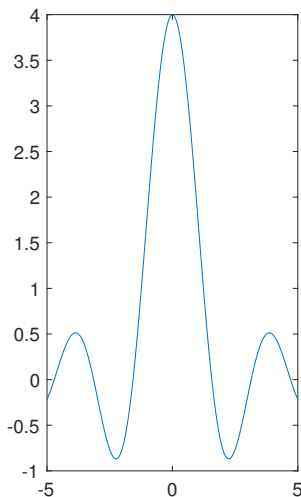
Formula Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inTw} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi k}{T}\right).$$

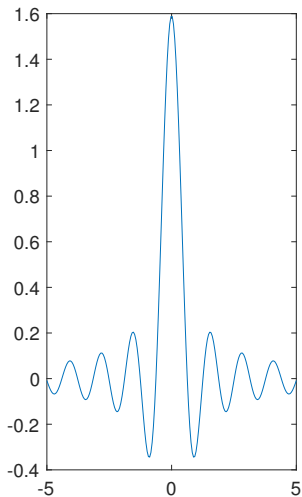
Visual Grafik Fungsi dan Transformasi Fouriernya



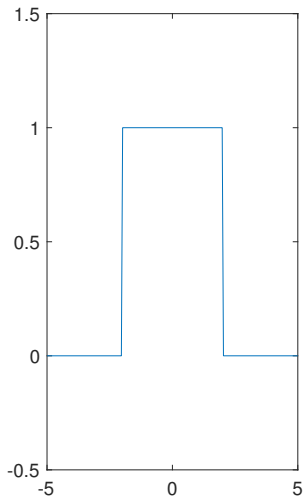
$$f(t) = \chi_{[-T, T]}(t), T = 2$$



$$\hat{f}(w) = \frac{2 \sin(Tw)}{w}$$



$$h(t) = \frac{\sin(\xi t)}{\pi t}$$



$$\hat{h}(w) = \chi_{[-\xi, \xi]}(w)$$

Sampling Signal Analog

Misal sampling $\{f(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ditulis sebagai $f_d(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$ maka diperoleh $\hat{f}_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-inT\omega}$.

Bagaimana menghitung $f(t)$ dari nilai samplanya $f(nT)$ atau $f_d(t)$?

Teorema sampling Whitaker (hb antara \hat{f} dan \hat{f}_d):

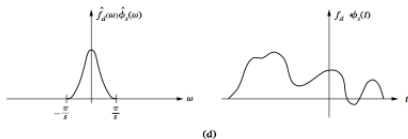
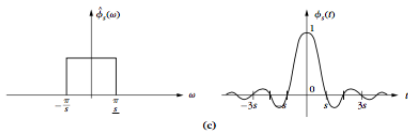
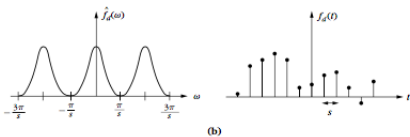
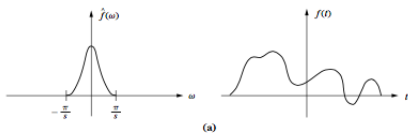
$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right).$$

Teorema Shannon, Whitaker (rekonstruksi $f(t)$ dari $f(nT)$): Jika support f termuat di dalam $[-\pi/T, \pi/T]$ maka berlaku

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(nT)\phi_s(t - nT)$$

di mana $\phi_s(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$.

Skema sampling dan rekonstruksi signal



Transformasi Fourier Diskret

Diketahui signal dalam domain waktu $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)\}$.

Transformasi Fourier diskret (DFT) dari x adalah

$X(k) = \{X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1)\}$ diberikan oleh:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

di mana $W_N = e^{-i2\pi/N}$. Diasumsikan signal $x(n)$ periodik. Invers transformasi Fourier diskret (IDWT) adalah

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

- Jika $x(n)$ dan $h(n)$ periodik N maka DWT dari $z(n) = x(n) * h(n)$ adalah $Z(k) = X(k)H(k)$.
- Untuk menghitung DFT dari signal $x(n)$ dengan panjang N dibutuhkan kompleksitas $\mathcal{O}(N^2)$. Ilustrasi, data dengan $N = 1000$ dibutuhkan sekitar 1 juta operasi aritmatika. Solusinya menggunakan transformasi Fourier cepat (FFT) yang mereduksi kompleksitas menjadi $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Ilustrasi $N = 1000$ dibutuhkan hanya sekitar 10 ribu operasi aritmatika.

Fast Fourier Transform (FFT)

- Untuk indeks genap $X(2k)$, suku-suku n dan $n + N/2$ dikelompokkan, diperoleh

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(n) + x(n + N/2)) W_N^{2nk}.$$

- Untuk indeks ganjil $X(2k + 1)$, pengelompokan suku yang sama diperoleh

$$X(2k + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^n (x(n) + x(n + N/2)) W_N^{2nk}.$$

Jadi untuk indeks genap, cukup dihitung FWT sebanyak $N/2$ dari signal periodik $x_e(n) = x(n) + x(n + N/2)$. Untuk indeks ganjil cukup dihitung sebanyak $N/2$ dari signal $x_o(n) = W_N^n (x(n) - x(n + N/2))$.

- Invers fast Fourier Transform (IFFT) dihitung dari kompleks konjugatnya:

$$x^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}.$$

- Toolbox Matlab untuk menghitung DWT dan IDWT: `fft` dan `ifft`.

Perhitungan Manual DFT

Diketahui data

$$x(n) = \{x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 1, x(3) = 0\}$$

Akan dihitung transformasi Fourier $X(k) = \{X(0), X(1), X(2), X(3)\}$.

Berdasarkan formula $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ diperoleh SPL:

$$X(0) = x(0)W_N^{0 \cdot 0} + x(1)W_N^{1 \cdot 0} + x(2)W_N^{2 \cdot 0} + x(3)W_N^{3 \cdot 0}$$

$$X(1) = x(0)W_N^{0 \cdot 1} + x(1)W_N^{1 \cdot 1} + x(2)W_N^{2 \cdot 1} + x(3)W_N^{3 \cdot 1}$$

$$X(2) = x(0)W_N^{0 \cdot 2} + x(1)W_N^{1 \cdot 2} + x(2)W_N^{2 \cdot 2} + x(3)W_N^{3 \cdot 2}$$

$$X(3) = x(0)W_N^{0 \cdot 3} + x(1)W_N^{1 \cdot 3} + x(2)W_N^{2 \cdot 3} + x(3)W_N^{3 \cdot 3}$$

Setelah dihitung kita sajikan ke dalam bentuk persamaan matriks $X = Wx$ sbb:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}.$$

Setelah diselesaikan diperoleh

$$X(k) = \{X(0) = 4, X(1) = -2i, X(2) = 0, X(3) = 2i\}.$$

Perhitungan Manual IDFT

Diketahui DFT sebuah data:

$$X(k) = \{X(0) = 4, X(1) = -2i, X(2) = 0, X(3) = 2i\}$$

Akan ditemukan kembali data asli $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3)\}$.

Berdasarkan formula $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ diperoleh SPL:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}.$$

Diperoleh data aslinya, yaitu

$$x(n) = \{x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 1, x(3) = 0\}.$$

Menggunakan toolbox MATLAB

```
>> x = [1 2 1 0];  
>> X = fft(x)  
X =  
    Columns 1 through 3  
    4.0000 + 0.0000i    0.0000 - 2.0000i    0.0000 + 0.0000i  
    Column 4  
    0.0000 + 2.0000i  
>> x1 = ifft(X)  
x1 =  
    1    2    1    0
```

Simulasi Menghitung DFT dengan FFT

Sebuah signal yang memuat frekuensi 50Hz dengan amplitudo 0.7 dan frekuensi 120Hz dengan amplitudo 1 diganggu oleh white-noise $\mathcal{N}(0, 4)$. Signal dicuplik sebanyak $N = 1024$, dengan frekuensi sampling $f_s = 1000$, periode sampling $T = \frac{1}{f_s}$.

```
>> fs = 1000; T = 1/fs; N = 1024;
>> t = (0:N-1)*T;
>> s = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t); %signal asli
>> s1 = s + 2*randn(size(t)); %signal yg sdh terkontaminasi
>> plot(t,s1) %menggambar signal yg sdh terkontaminasi
>> xlim([0,1])
>> S = fft(s1); %DFT dari s1 menggunakan FFT
>> f = fs*(0:N/2)/N; %mendefinisikan domain utk frek
>> S1 = abs(S/N); %modulus
>> S11 = S1(1:N/2+1); % setengah bagian kiri dari S1
>> figure
>> plot(f,S11) %grafik DWT dari S1.
```

Grafik signal dan DFTnya

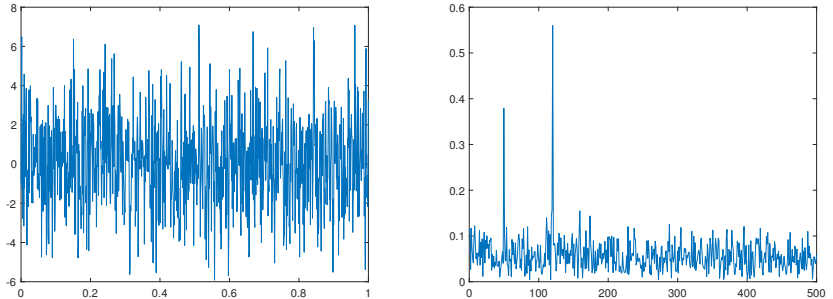


Figure: Signal asli (kiri) dan DFTnya (kanan)

Frekuensi 50Hz dan 120Hz tidak terlihat pada signal asli, namun sangat jelas terdeteksi pada transformasi Fouriernya.

Energi Signal

Berdasarkan formula $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ maka dapat dipahami bahwa DFT mendekomposisi signal ke dalam basis eksponensial kompleks W_N^{-nk} dengan koefisien $\frac{X(k)}{N}$. Power setiap eksponensial kompleks adalah $\frac{|X(k)|^2}{N^2} N = \frac{|X(k)|^2}{N}$. Norma/Power/energi signal didefinisikan sebagai jumlahan dari suku-suku pembangunnya ini, yaitu

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2. \quad (6)$$

Formula (6) dikenal dengan Teorema Parseval atau Formula Plancherel yang mengaitkan norma fungsi (signal) pada domain waktu dan domain frekuensi. Cek:

```
>> sum(s1.^2)
ans =
    4.6950e+03
>> sum(abs(S).^2)/N
ans =
    4.6950e+03
```

Transformasi Fourier Waktu-Diskret (DTFT)

Transformasi Fourier waktu-diskret (DTFT) dari signal $x(n)$ didefinisikan sebagai

$$X(\omega) = X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} \quad (7)$$

Inversnya (IDTFT) didefinisikan sebagai

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega})e^{i\omega n} d\omega, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

Karena $e^{-in(\omega+2\pi)} = e^{-i\omega n} e^{-i2\pi n} = e^{-i\omega n} \underbrace{(\cos 2\pi n - i \sin 2\pi n)}_{=1} = e^{-i\omega n}$ maka

$X(\omega)$ periodik dengan periode 2π , yakni

$$X(\omega + 2\pi) = X(\omega).$$

Agar (7) konvergen haruslah $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, i.e. $\{x(n)\}$ absolute summable.

Contoh Perhitungan DTFT

Tentukan DTFT dari signal berikut:

- impulse signal: $\delta(n) = 1$ untuk $n = 0$ dan $\delta(n) = 0$ untuk $n \neq 0$.

Jawab: $X(e^{iw}) = 1$ untuk setiap $w \in [-\pi, \pi]$.

- Barisan $x(n)$ dengan suku taknol adalah $x(0) = -\frac{1}{4}$, $x(1) = \frac{1}{2}$, dan $x(2) = -\frac{1}{4}$.

Jawab: $X(e^{iw}) = \frac{1}{2}e^{-iw}(1 - \cos w)$. \rightarrow highpass filter

- Barisan $\ell(n)$ dengan suku taknol adalah $\ell(0) = 1 - \sqrt{3}$, $\ell(1) = 3 - \sqrt{3}$, $\ell(2) = 3 + \sqrt{3}$, dan $\ell(3) = 1 + \sqrt{3}$.

Jawab: $L(e^{iw}) = (1 - \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3})e^{-iw} + (3 + \sqrt{3})e^{-i2w} + (1 + \sqrt{3})e^{-i3w} \rightarrow$
lowpass filter

- Barisan $h(n)$ dengan $h(n) := (-1)^n \ell(n)$.
- Barisan $b(n)$ dengan $b(n) := (-1)^n \ell(-n)$.

Materi Bab ini yang tersisa: dipelajari Mandiri

- Konvolusi dengan eksponensial kompleks (subbab2 4.3.1).
- Konvolusi dalam DWT → Desain 4 filter yang memenuhi syarat rekonstruksi sempurna (subbab 4.3.2)
- Korelasi dua signal dalam domain frekuensi (subbab2 4.3.3)
- Korelasi dalam DWT → cek syarat 4 filter yang disebut double-shift orthogonality (subbab2 4.3.4)
- Time-expansion → ekspansi dan kompresi signal dengan operasi skala (subbab2 4.3.5)
- Sampling theorem → Jaminan bahwa sebuah sampel dapat digunakan untuk rekonstruksi signal asli (subbab2 4.3.7, sudah pernah dibahas).
- Parseval's Theorem → Energi signal dalam time-domain vs energi signal dalam freq-domain (subbab2 4.3.7, sudah pernah dibahas).
- Approximation DTFT (subbab 4.4): *In studying the wavelet transform, as is the case in almost all aspects of signals and systems, we have to use the Fourier analysis, and it is approximated by the DFT. We use the DFT to approximate the DTFT in some chapters. The samples of the continuous DTFT spectrum can be approximated by taking the DFT of the time-domain samples.*
- Transformasi Fourier (sbubab 4.5): sudah dibahas

Kerjakan Exercises 4.1 - 4.7 pada buku hal 57 - 58.

Kuliah 4-1: Transformasi-z

Transformasi z dari sebuah signal diskret $x(n)$ didefinisikan sebagai

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (9)$$

di mana z variabel kompleks. Transformasi ini didefinisikan pada daerah di mana ia konvergen. Khususnya $z = e^{i\omega}$ berada pada lingkaran satuan.

1 $x(n) = \delta(n)$ diperoleh

$$X(z) = 1, \text{ untuk setiap } z.$$

$x(n) = \delta(n - m)$ diperoleh

$$X(z) = z^{-m}, z \neq 0 \text{ jika } m > 0 \text{ dan } z \neq \infty \text{ untuk } m < 0.$$

2 $x(n) = \{x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 6, x(3) = 2, x(4) = 1\}$, diperoleh

$$X(z) = \frac{z^4 + 2z^3 - 6z^2 + 2z + 1}{z^4}, |z| > 0$$

Sifat Transformasi-z

1 Linear: $ax(n) + by(n) \iff aX(z) + bY(z)$

2 Pergeseran waktu:

$$x(n) \iff X(z) \rightarrow x(n+m) \iff z^m X(z)$$

Misalkan

$x(n) = \{x(-2) = 1, x(-1) = 2, x(0) = 6, x(1) = 2, x(2) = 1\}$
diperoleh

$$X(z) = z^2 + 2z + 6 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

Digeser +1 barisan menjadi $y(n) = x(n+1) = \{x(-1) = 1, x(0) = 2, x(1) = 6, x(2) = 2, x(3) = 1\}$, diperoleh

$$Y(z) = zX(z) = z^3 + 2z^2 + 6z + 2 + z^{-1}.$$

3 Konvolusi: Misalkan $x(n) \iff X(z)$ dan $h(n) \iff H(z)$ maka berlaku

$$x(n) * h(n) \iff X(z)H(z)$$

Kuliah 4-2: Finite Impulse Response (FIR) Filter

Jika impulse respons suatu filter time-invariant $h(n)$ berdurasi hingga maka ia disebut finite impulse response (FIR). FIR ini disebut kausal jika $h(n) = 0$ untuk $n < 0$ atau $n \geq N$. Sebuah FIR kausal dicirikan oleh persamaan selisih order $N - 1$ sebagai berikut:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k),$$

di mana $y(n)$: output, $h(n)$: impulse respons, dan $x(n)$: input. Khusus FIR order dua diberikan oleh:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2).$$

Untuk $x(n) = \delta(n)$, i.e. $X(z) = 1$ maka transformasi- z fungsi transfer order 2 diberikan oleh

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2}.$$

Filter Ideal Lowpass, Highpass, dan Bandpass

Misalkan magnitudo dari frekuensi respons simetris thd sumbu ω dan periodik dengan periode 2π .

- Lowpass:

$$|H(e^{i\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

- Highpass:

$$|H(e^{i\omega})| = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 1 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

- Bandpass:

$$|H(e^{i\omega})| = \begin{cases} 1 & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & 0 \leq \omega \leq \omega_{c1} \text{ dan } \omega_{c2} < \omega \leq \pi. \end{cases}$$

Kuliah 4-3: Decimation dan Downsampling

Misal signal $x(n)$ dicuplik dengan sampling frekuensi f_s , didefinisikan signal $x_d(n)$ dengan

$$x_d(n) = x(Mn),$$

maka x_d : downsampling $x(n)$ dengan faktor M . Sampling frekuensi $x_d(n)$ adalah f_s/M . Untuk menghindari aliasing, sinyal asal perlu difilter dengan lowpass dengan cutoff $f_s/(2M)$ sebelum downsampling. Lowpass filtering diikuti downsampling disebut decimation.

$$x(n) \rightarrow v(n) = x(n) * h(n) \rightarrow v_d(n) = v(2n) := y(n).$$

Kombinasi konvolusi dan downsampling diberikan oleh:

$$y(n) = \sum_k h(k)x(2n - k) = \sum_k x(k)h(2n - k).$$

Downsampling dalam domain frekuensi:

$$x_d(n) = x(2n) \iff X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j(\frac{\omega}{2} + \pi)}) \right)$$

Downsampling diikuti filtering

Strateginya:

- 1 tukar signal yang akan di-downsampling-kan dengan filter
 $h(n) = \{h(0), 0, h(1), 0, \dots, h(N-1), 0\}$,
- 2 kemudian didownsampling
 $h_d(n) = \{h(0), h(1), \dots, h(N-1)\}$.
- 3 Maka berlaku

$$\text{downsampling of } x(n) * h(n) = x_d * h_d(n).$$

Coba cek pada signal $x(n) = \{2, 1, 3\}$ dan
 $h(n) = \{1, 0, 3, 0, -2, 0\}$.

Upsampling & Interpolation

Untuk upsampling signal $x(n)$ dengan faktor M , sisipkan nol di antara dua data yang berdekatan. Signal hasil upsampling diberikan oleh

$$x_u(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{M}\right) & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Interval sampling berkurang dengan faktor M dan sampling frekuensi bertambah menjadi Mf_s . Filtering dengan lowpass diikuti upsampling disebut interpolasi. Outputnya berupa konvolusi impulse response $h(n)$ dan $x_u(n)$:

$$y(n) = \sum_k x_u(k)h(n-k) = \sum_{k \text{ genap}} x\left(\frac{k}{2}\right)h(n-k) = \sum_m x(m)h(n-2m)$$

Upsampling dalam domain frekuensi:

$$x_u(n) \iff X_u(e^{jw}) = X(e^{j2w}), 0 < w < 2\pi.$$

Filtering diikuti upsampling

Strateginya:

- 1 tukar signal yang akan di-upsampling-kan dengan filter $h(n) = \{h(0), 0, h(1), 0, \dots, h(N-1), 0\}$,
- 2 kemudian didownsampling $h_d(n) = \{h(0), h(1), \dots, h(N-1)\}$.
- 3 Maka berlaku

$$\text{upsampling of } x(n) * h_d(n) = x_u * h(n).$$

Coba cek pada signal $x(n) = \{1, 2\}$ dan $h(n) = \{2, 0, 3\}$. Di sini, $x_u(n) = \{1, 0, 2\}$ dan $h_d(n) = \{2, 3\}$.

Filter Bank 2-Kanal (Two-Channel Filter Bank)

Asumsikan interval sampling adalah 1 detik, rentang frekuensi efektif adalah $[0, \pi]$. Frekuensi dekat dengan nol disebut rendah dan dekat dengan π disebut tinggi.

Dalam transformasi wavelet diskret (DWT), signal disajikan ke dalam beberapa komponen berdasarkan level spektrumnya.

Spektrum dipecah menjadi dua bagian menggunakan lowpass dan highpass filter. Output highpass di-downsampling. Output lowpass juga di-downsampling kemudian dipecah lagi menggunakan lowpass dan highpass filter yang sama. Desain ini disebut filter bank 2-kanal.

Representasi Filter Bank 2-Kanal

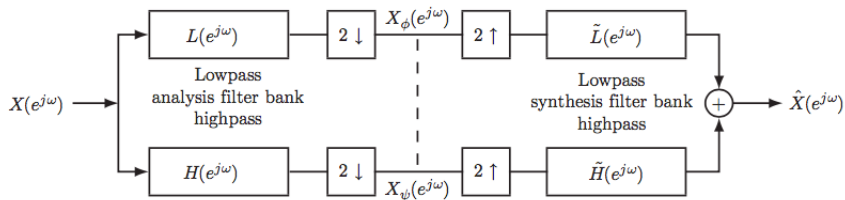


Figure: Representasi domain frekuensi filter bank 2-kanal

Transformasi Wavelet

Wavelet adalah sebuah fungsi $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ dengan rata-rata nol:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (10)$$

Dinormalisasi: $\|\psi\| = 1$ dan terpusat di sekitar $t = 0$. Diperoleh himpunan atom time-frekuensi, diperoleh melalui scaling faktor s dan translating sejauh u fungsi ψ :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (11)$$

Atom-atom ini tetap normal: $\|\psi_{u,s}\| = 1$. Transformasi wavelet fungsi $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pada saat u dan skala s didefinisikan sebagai:

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \quad (12)$$

di mana ψ^* adalah kompleks konjugat dari ψ .

Transformasi wavelet $Wf(u, s)$ dapat ditulis sebagai:

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt = (f * \bar{\psi}_s)(u) \quad (13)$$

di mana

$$\bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right).$$

Bandingkan dengan transformasi Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \langle f, g \rangle$$

di mana $g(t) = e^{-i\omega t}$. Transformasi Fourier dari $\bar{\psi}_s(t)$ adalah

$$\hat{\psi}_s(\omega) = \sqrt{s} \hat{\psi}^*(s\omega). \quad (14)$$

Karena $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, maka $\hat{\psi}$ nampak sebagai fungsi transfer dari bandpass filter. Konvolusi (13) menghitung transformasi wavelet dengan band-pass filter yang dilatasi (scaling)

Wavelet Real versus Wavelet Real

Misalkan ψ real. Karena reratanya nol maka transformasi Fourier

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt$$

mengukur variasi f di persekitaran u yang ukuran proporsional thd s . Aplikasinya adalah untuk deteksi *signal transient* dan analisis *signal fractal*.

- Mexican hats wavelet: $\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp \left(\frac{-t^2}{2\sigma^2} \right)$ dengan transformasi Fourier-nya $\hat{\psi}(\omega) = \frac{-\sqrt{8}\sigma^{5/2} \pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \omega^2 \exp \left(\frac{-\sigma\omega^2}{2} \right)$.

Sedangkan wavelet analitik (kompleks) digunakan untuk memisahkan informasi fasa dan amplitudo signal

- Morse (generalized) wavelet: transformasi Fourier-nya $\hat{\psi}_{\beta,\gamma}(\omega) = U(\omega) a_{\beta,\gamma} \omega^\beta \exp(-\omega^\gamma)$ di mana U adalah unit steps.

Grafik Mexicat hat wavelet dan transformasi Fouriernya

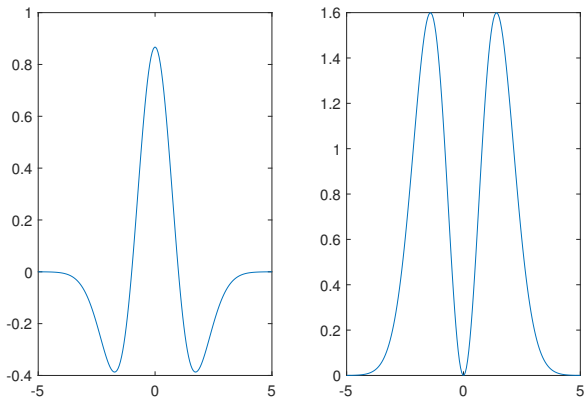


Figure: Negatif Mexican hat wavelet $-\psi$ (kiri) dan Transformasi Fouriernya (kanan)

Time-Frequency Analysis

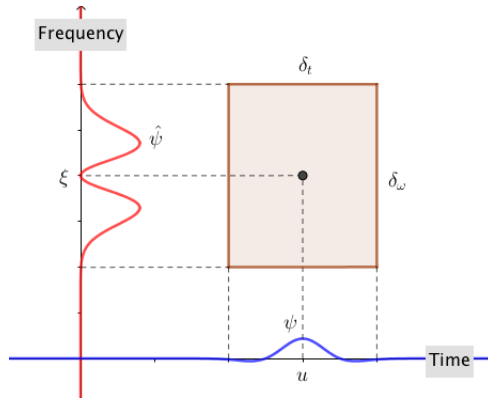


Figure: Sifat support kompak wavelet pada time-domain dan frequency-domain

Penggunaan wavelet Morse untuk analisis gempa Kobe

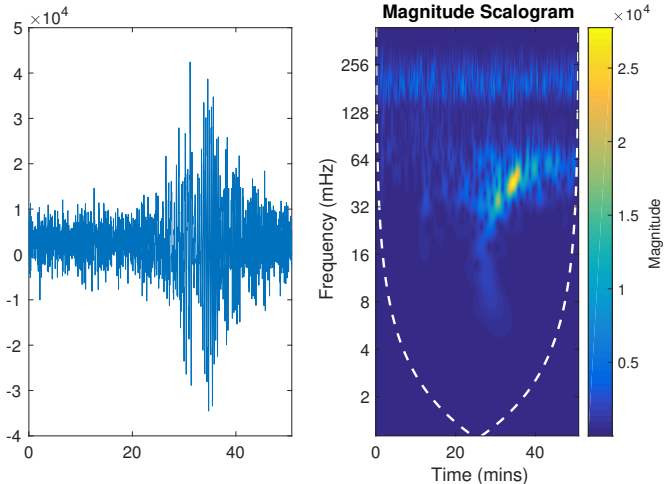


Figure: Data time-series (kiri) dan analisis Scalogram (kanan)

Kuliah 5: Multiresolusi Analisis (MRA)

Pada MRA terdapat barisan ruang fungsi V_n dan W_n dengan sifat:

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \rightarrow \mathcal{L}^2 \quad (15)$$

$$V_n = V_{n-1} + W_{n-1}, \text{ dan } V_{n-1} \cap W_{n-1} = \{0\} \quad (16)$$

Basis yang membangun V_n dan W_n adalah

$$V_n = \text{clos}_{\mathcal{L}^2} \langle \phi(2^n t - k) : k \in \mathbb{Z} \rangle, W_n = \text{clos}_{\mathcal{L}^2} \langle \psi(2^n t - k) : k \in \mathbb{Z} \rangle \quad (17)$$

Dalam hal ini ψ disebut wavelet (mother wavelet) dan ϕ disebut fungsi skala (father wavelet). Syarat perlu bagi ψ adalah $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ dan $\psi \neq 0$ hanya pada interval sempit. Oleh karena itu ψ haruslah berupa gelombang-kecil (wavelet). Dalam hal $W_{n-1} \perp V_{n-1}$ maka relasi (16) ditulis $V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$. Mengingat $W_{n-1} \subset V_n$ maka berlaku

$$W_n \perp W_k \text{ untuk semua } n \neq k.$$

Multiresolusi Analisis (MRA): Lanjutan

Untuk $n \in \mathbb{Z}$, repetisi pada relasi $V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$ sampai dengan $M < n$ diperoleh

$$\begin{aligned}V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= (V_{n-2} \oplus W_{n-2}) \oplus W_{n-1} \\ &= \dots \\ &= V_{n-M} \oplus (W_{n-M} \oplus W_{n-M+1} \oplus \dots \oplus W_{n-1})\end{aligned}$$

Diperoleh dekomposisi wavelet:

$$\mathcal{L}^2 = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} W_n. \quad (18)$$

Artinya setiap fungsi dengan energi terbatas dapat disajikan dalam bentuk jumlahan orthogonal fungsi-fungsi pada W_n . Bagian fungsi (signal) yang berada di W_n disebut *octave ke-n* dan sisanya di dalam V_{n-M} disebut *blur* atau *detail component (DC)*.

Representasi Fungsi pada MRA

Misalkan data f dimodelkan sebagai fungsi di dalam V_3 maka diperoleh dekomposisi sbb:

$$V_3 = V_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3.$$

$$f = f_0 + g_0 + g_1 + g_2 + g_3$$

$$f(t) = \sum_k c_{3,k} \phi(2^3 t - k)$$

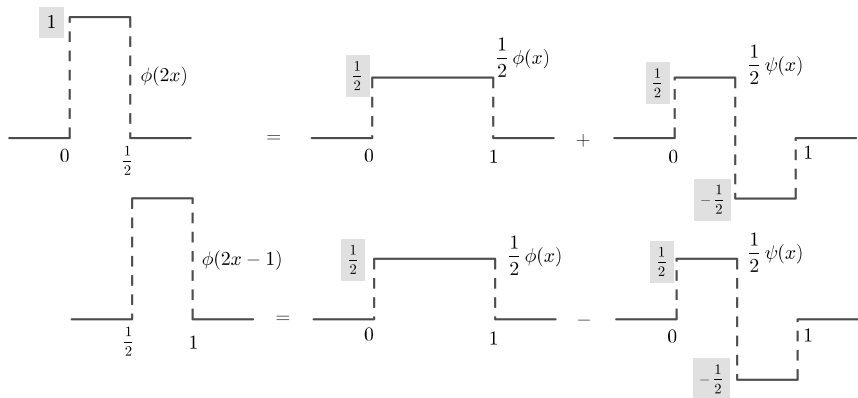
$$f_0(t) = \sum_k c_{0,k} \phi(t - k) \text{ dan } g_n(t) = \sum_k d_{n,k} \psi(2^n t - k), n = 0, 1, 2, 3.$$

Transformasi wavelet fokus pada algoritma memecah koefisien $\{c_{3,k}\}$ ke dalam $\{c_{0,k}\}$, $\{d_{0,k}\}$, $\{d_{1,k}\}$, $\{d_{2,k}\}$, dan $\{d_{3,k}\}$. Jadi transformasi wavelet bekerja pada koefisien representasi, bukan pada data asli.

Transformasi Wavelet Cepat (FWT)

Ilustrasi fungsi skala dan wavelet Haar:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases} \text{ dan } \psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$



$$\phi(2x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\psi(x) \text{ dan } \phi(2x-1) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\psi(x)$$

FWT: Relasi Skala Dua

$\phi(2x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\psi(x)$ dan $\phi(2x - 1) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\psi(x)$ dapat ditulis sebagai

$$\phi(2x - \ell) = \sum_k \{a_{\ell-2k}\phi(x - k) + b_{\ell-2k}\psi(x - k)\}$$

di mana $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$ dan $a_k = 0$ untuk $k \neq 0, 1$; $b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$ dan $b_k = 0$ untuk $k \neq 0, 1$. Pada MRA berlaku $V_j \subset V_{j+1}$ dan $W_j \subset V_{j+1}$ sehingga harus dipenuhi relasi skala dua berikut:

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$$

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k).$$

Dalam hal fungsi skala ϕ dan wavelet Haar ψ dipenuhi oleh $p_0 = p_1 = 1$ dan $p_k \neq 0$ untuk $k \neq 0, 1$; $q_0 = 1$, $q_1 = -1$ dan $q_k = 0$ untuk $k \neq 0, 1$. Dua pasangan barisan $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ dan $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ inilah yang akan memainkan peran utama dalam FWT.

FWT: Algoritma Dekomposisi

Misalkan model analog $f_n(t) = \sum_k c_{n,k} \phi(2^n t - k)$ didekomposisikan sebagai $f_n(t) = f_{n-1}(t) + g_{n-1}(t)$ di mana $f_{n-1} \in V_{n-1}$ dan $g_{n-1} \in W_{n-1}$ dalam bentuk

$$f_{n-1}(t) = \sum_k c_{n-1,k} \phi(2^{n-1} t - k),$$
$$g_{n-1}(t) = \sum_k d_{n-1,k} \psi(2^{n-1} t - k).$$

Diketahui koefisien $\{c_{n,k}\}$, akan dihitung koefisien dekomposisi $\{c_{n-1,k}\}$ dan $\{d_{n-1,k}\}$ menggunakan filter $\{a_\ell\}$ dan $\{b_\ell\}$.

$$\begin{cases} c_{n-1,k} = \sum_\ell a_{\ell-2k} c_{n,\ell} \\ d_{n-1,k} = \sum_\ell b_{\ell-2k} c_{n,\ell} \end{cases} \quad (19)$$

Bandingkan: $\phi(2t - \ell) = \sum_k \{a_{\ell-2k} \phi(t - k) + b_{\ell-2k} \psi(t - k)\}$. Operasi pada (19) adalah sebuah konvolusi kemudian “downsampling”.

FWT: Algoritma Rekonstruksi

Diketahui koefisien $\{c_{n-1,k}\}$ dan $\{d_{n-1,k}\}$ akan dihitung koefisien $\{c_{n,k}\}$ menggunakan filter $\{p_\ell\}$ dan $\{q_\ell\}$.

$$c_{n,k} = \sum_{\ell} \{p_{k-2\ell} c_{n-1,\ell} + q_{k-2\ell} d_{n-1,\ell}\} \quad (20)$$

Perhatikan jika indeks ℓ pada barisan input $c_{n-1,\ell}$ dan $d_{n-1,\ell}$ adalah 2ℓ , kemudian memandang input dengan indeks ganjil adalah nol, maka operasi (20) adalah convolusi setelah “upsampling”.

Barisan (filter) dekomposisi: $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ dan barisan rekonstruksi $\{p_k\}$ dan $\{q_k\}$ sesuai dengan fungsi skala ϕ dan wavelet ψ . Untuk wavelet ortonormal, berlaku:

- Barisan dekomposisi: $\{h_{-k}\}, \{(-1)^k h_{k+1}\}$;
- Barisan rekonstruksi: $\{h_k\}, \{(-1)^k h_{1-k}\}$.

Example

- Wavelet Haar: $h_0 = 0, h_1 = -1$, diperoleh dekomposisi $p_0 = h_0 = 1, p_1 = (-1)^1(-1) = 1$ dan rekonstruksi $q_0 = h_0 = 1, q_1 = (-1)^1 h_0 = -1$.
- Wavelet Daubechies order- m $\phi_{D;m}(t)$ dan $\psi_{D;m}(t)$ memiliki filter yang panjangnya $2m$. Untuk $m = 2$ diberikan $h_0 = 0.48296 \dots, h_1 = 0.83651 \dots, h_2 = 0.22414 \dots$, dan $h_3 = -0.12940 \dots$.

Skema Algoritma FWT

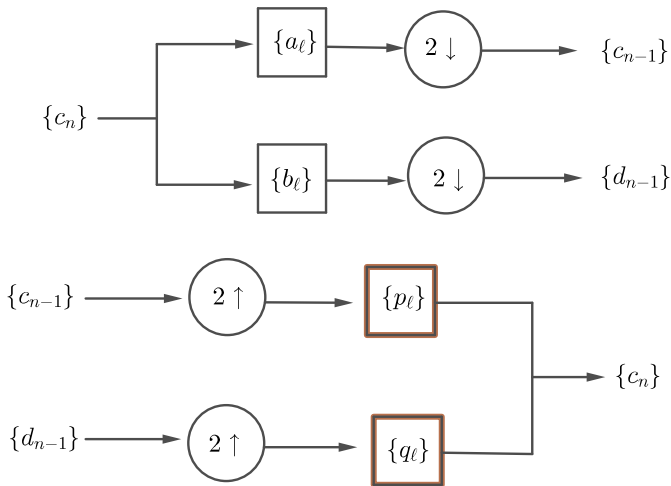


Figure: Skema Dekomposisi (atas) dan Rekonstruksi (bawah)

Interprestasi Hasil Dekomposisi

Asumsi signal asli direpresentasikan oleh koefisien $c_n = \{c_{n,k}\}$, misalkan panjangnya 2^K untuk suatu $K \in \mathbb{N}$. Koefisien ini mencakup semua frekuensi yang ada pada signal. Perhatikan dekomposisi

$$\{c_{n,k}\} \rightarrow \{c_{n-1,k}\}, \{d_{n-1,k}\}$$

Maka signal terpecah menjadi 2 kelompok frekuensi, yaitu frekuensi rendah direpresentasikan oleh $\{c_{n-1,k}\}$ dan frekuensi tinggi oleh $\{d_{n-1,k}\}$. Dekomposisi tahap berikutnya

$$\{c_{n-1,k}\} \rightarrow \{c_{n-2,k}\}, \{d_{n-2,k}\}$$

Interpretasinya sama dengan sebelumnya, tetapi signal yang dipecah sekarang adalah direpresentasikan oleh $\{c_{n-1,k}\}$. Dan seterusnya. Diperoleh dekomposisi level M

$$\{c_{n,k}\} \rightarrow \{c_{n-M,k}\}, \{d_{n-M,k}\}, \{d_{n-M-1,k}\}, \dots, \{d_{n-1,k}\}$$

Semakin ke kanan semakin tinggi frekuensi yang ditangkap.

Time-Frequency Plane DWT

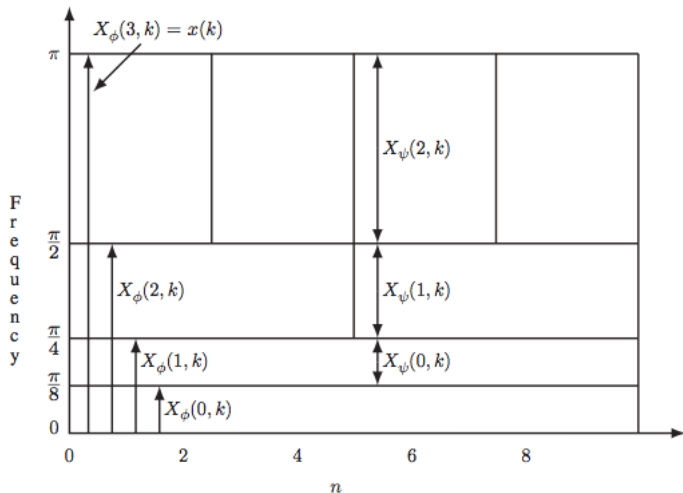


Figure: Time-Frequency Plane DWT pada Level 3

Kuliah 6: DWT - Aproksimasi Koefisien

Misalkan data dinyatakan oleh barisan $x(n)$:

$$\{x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)\},$$

$N = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$. Data ini akan dipecah ke dalam komponen $X_\phi(j_0, k)$ dan $X_\psi(j, k)$ di mana $j_0 \in \{0, 1, \dots, J-1\}$ level starting dan $j = j_0, j_0 + 1, \dots, J-1$ level dekomposisi. Indeks k menyatakan rentang waktu basis fungsi di mana $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$. Bentuk umum DWT diberikan oleh

$$X = W_{N,j}x \quad (21)$$

di mana $x = x(n)$ vektor input dan X vektor output berupa dekomposisi atas X_ϕ dan X_ψ .

- DWT wavelet Haar 2 titik 1 level: ($N = 2, j = 0$):

$$\begin{bmatrix} X_\phi(0,0) \\ X_\psi(0,0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} \text{ atau } X = W_{2,0}x \quad (22)$$

- IDWT wavelet Haar:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\phi(0,0) \\ X_\psi(0,0) \end{bmatrix} \text{ atau } x = W_{2,0}^{-1}X.$$

Fakta, $W_{2,0}^{-1} = W_{2,0}^T$.

Misalkan A matriks berukuran $M \times N$ dan B berukuran $P \times Q$ maka hasil kali Kronecker matriks A dan B adalah

$$A \otimes B = a_{ij}B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1N}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1}B & \cdots & a_{MN}B \end{bmatrix}.$$

Matriks DWT Haar level 1 (skala $\log_2(N) - 1$) diberikan oleh

$$W_{N, \log_2(N)-1} = \begin{bmatrix} I_{\frac{N}{2}} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ I_{\frac{N}{2}} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

di mana I_N matriks identitas berukuran $N \times N$. Secara umum

$$W_{N,j} = \begin{bmatrix} W_{\frac{N}{2},j} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ I_{\frac{N}{2}} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, j = 0, 1, \dots, [\log_2(N) - 2].$$

Contoh

Diberikan barisan $x = \{x(0) = 3, x(1) = 4, x(2) = 3, x(3) = -2\}$. Matriks DWT level 2 wavelet Haar adalah $W_{4,0}$, yaitu

$$\begin{aligned} W_{4,0} &= \begin{bmatrix} W_{2,0} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ I_2 \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X_\phi(0,0) \\ X_\psi(0,0) \\ X_\psi(1,0) \\ X_\psi(1,1) \end{bmatrix} = W_{4,0} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ x = W_{4,0}^{-1} X &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Skema dekomposisi level 2 signal dengan 512 titik sampel

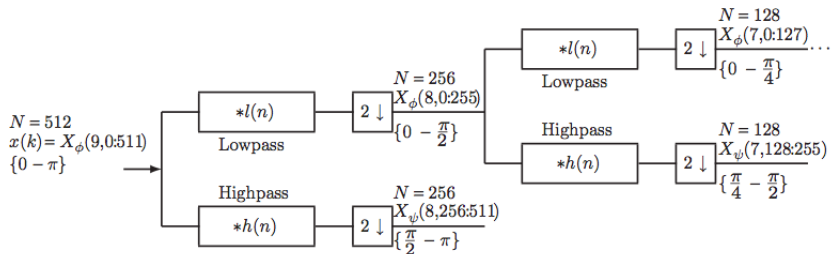


Figure: Skema dekomposisi 2 level signal 512 sampel

Aproksimasi Koefisien melalui Nilai Data

Dalam MRA, fungsi f harus diproyeksikan ke dalam ruang V_J di mana

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(t).$$

Kemudian algoritma dekomposisi dan rekonstruksi diterapkan pada koefisien $\{c_{j,k}\}$. Fakta, data yang diperoleh melalui sampling berupa nilai diskret

$$\{x(0), x(1), x(2), \dots, x(N)\}.$$

Bolehkan data $\{x(k)\}$ ini digunakan sebagai pengganti $\{c_{j,k}\}$?

Perhatikan fungsi skala ϕ memiliki sifat berikut

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 0 \text{ dan } \phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k).$$

$$c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j,k}(t) dt$$

Di sini kita asumsikan basis $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormal.

Aproksimasi Koefisien: Lanjutan

Dengan asumsi $\text{supp}(\phi) = [0, 1]$ maka $\text{supp}(\phi_{j,k}) = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$ sehingga

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{j,k}(t) dt = \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(t)\phi_{j,k}(t) dt$$

Untuk j cukup besar maka aproksimasi $f(t) \approx f\left(\frac{k}{2^j}\right)$ untuk $t \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$. Mengingat $\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} \phi_{j,k}(t) dt = 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(t)\phi_{j,k}(t) dt \approx \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f\left(\frac{k}{2^j}\right)\phi_{j,k}(t) dt \\ &= f\left(\frac{k}{2^j}\right) \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} \phi_{j,k}(t) dt = f\left(\frac{k}{2^j}\right). \end{aligned}$$

Jadi cukup reasonable bahwa koefisien starting dekomposisi diaproksimasi oleh nilai data, yaitu

$$c_{j,k} \approx f\left(\frac{k}{2^j}\right) := x(k).$$