

PEMODELAN MATEMATIKA

Dr. Burhanudin Arif Nurnugroho, M.Sc
Uswatun Khasanah, M.Sc
Dr. Puguh Wahyu Prasetyo, M.Sc
Dr. Muhammad Ardiyansyah

UAD
PRESS

**Sanksi Pelanggaran Pasal 113
Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014
Tentang Hak Cipta**

1. Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
3. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
4. Setiap orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp. 4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

PEMODELAN MATEMATIKA

Dr. Burhanudin Arif Nurnugroho, M.Sc

Uswatun Khasanah, M.Sc

Dr. Puguh Wahyu Prasetyo, M.Sc

Dr. Muhammad Ardiyansyah



Pemodelan Matematika

Copyright © 2024 Burhanudin Arif Nurnugroho, Uswatun Khasanah, Puguh Wahyu Prasetyo, Muhammad Ardiyansyah

ISBN: 978-623-8449-38-5

16 x 24 cm, xiv + 231 halaman

Cetakan Pertama, Desember 2024

Penulis : Burhanudin Arif Nurnugroho, dkk
Editor : Puguh Wahyu Prasetyo
Layout : Puguh Wahyu Prasetyo, Hafizh Naufal Azmi
Desain Cover : Angger Hafid Prabawa

Diterbitkan oleh:

UAD PRESS

(Anggota IKAPI dan APPTI)

Alamat Penerbit:

Kampus II Universitas Ahmad Dahlan

Jl. Pramuka No. 46, Sidikan, Umbulharjo, Yogyakarta.

Telp. (0274) 563515, Phone (+62) 882 3949 9820

All right reserved. Semua hak cipta © dilindungi undang-undang. Tidak diperkenankan memproduksi ulang atau mengubah dalam bentuk apa pun melalui cara elektronik, mekanis, fotocopy, atau rekaman sebagian atau seluruh buku ini tanpa izin tertulis dari pemilik hak cipta.

Prakata

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunianya sehingga Buku Pemodelan Matematika ini dapat terselesaikan. Buku ini merupakan salah satu bentuk usaha kami, untuk memberikan referensi bagi seluruh mahasiswa yang ingin atau sedang belajar tentang konsep matematika terapan yang mengimplementasikan konsep-konsep yang telah dipelajari pada mata kuliah pendukung yang relevan seperti Kalkulus Diferensial, Kalkulus Integral, Persamaan Differensial, Teori Grup, maupun Metode Numerik.

Terimakasih kami sampaikan kepada seluruh pihak yang telah membantu dalam tersusunnya buku ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada DRTPM dan LPPM UAD. Adapun bab robotika dalam buku ini merupakan bagian dari penelitian DRTPM Tahun 2024 dengan nomor kontrak 107/E5/PG.02.00.PL/2024 Tanggal 11 Juni 2024; 0609.12/LL5-INT/AL.04/2024 Tanggal 14 Juni 2024; 100/PFR/LPPM-UAD/VI/2024 Tanggal 15 Juni 2024. Kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini untuk itu kritik dan saran terhadap penyempurnaan buku ini sangat diharapkan. Semoga buku ini dapat memberi manfaat bagi para pembaca semuanya.

Yogyakarta, Desember 2024

Penulis

Daftar Isi

Prakata	v
Daftar Isi	vi
Daftar Tabel	xi
Daftar Gambar	xii
Bab 1. Pendahuluan	1
1.1. Mengapa Pemodelan Matematika	1
1.2. Proses Pemodelan Matematika	6
1.3. Beberapa Pendekatan dalam Pemodelan Matematika	16
1.4. Metodologi Pemodelan Matematika	27
1.4.1. Identifikasi Masalah	27
1.4.2. Abstraksi Sistem Menjadi Model Matematika	28
1.4.3. Analisis Model	28
1.4.4. Interpretasi Hasil	29
1.4.5. Validasi Model	29
1.4.6. Refinement atau Penyempurnaan Model	30
1.5. Contoh Terintegrasi	30
1.6. Latihan Soal	32
Bab 2. Pemodelan Matematika Sederhana Menggunakan Persamaan Beda dan Persamaan Differensial	33
2.1. Pemodelan dengan Persamaan Beda	33
2.1.1. Latihan	37
2.2. Pemodelan dengan Persamaan Differensial Orde Satu	37
2.2.1. Masalah Benda Jatuh	38
2.2.2. Penentuan Umur Benda / <i>Carbon Dating</i>	41
2.2.3. Hukum Torricelli	43

2.2.4. Pengaruh Iklan pada Penjualan	47
2.3. Latihan Soal	53
Bab 3. Pemodelan Masalah Optimasi	 54
3.1. Pemodelan Masalah Optimasi Fungsi Satu Variabel	55
3.1.1. Bagaimanakah strategi dalam menyelesaikan Masalah optimasi fungsi satu variabel?	55
3.1.2. Konsep-konsep penting kalkulus satu variabel untuk masalah optimasi	56
3.1.3. Contoh	56
3.2. Pemodelan Masalah Optimasi Fungsi Variabel Banyak	64
3.2.1. Bagaimanakah strategi dalam menyelesaikan masalah optimasi fungsi variabel banyak	64
3.2.2. Konsep-konsep penting kalkulus variabel banyak untuk masalah optimasi	65
3.2.3. Contoh	67
3.3. Latihan	74
Bab 4. Pemodelan Getaran Mekanis	 75
4.1. Sistem Massa Pegas Tanpa Peredam	75
4.1.1. Kasus 1: Satu Pegas-Satu Massa Tersusun Mendatar	77
4.1.1. Kasus 1: Satu Pegas-Satu Massa Tersusun Vertikal	82
4.2. Sistem Massa Pegas Teredam	84
4.3. Latihan	95
4.4. Gerak Pendulum / Bandul	97
4.4.1. Gerak Pendulum Sederhana	97
4.5. Latihan	102
Bab 5. Pemodelan Kinematika Robot	 104
5.1. Latar Belakang	104
5.2. Pengantar Aljabar Lie	106

5.2.1. Grup Lie	106
5.2.2. Contoh Manifold Diferensial : Bola S^2	108
5.2.3. Aplikasi dalam Robotika	109
5.2.4. Aljabar Lie	109
5.2.5. Contoh Aljabar Lie	110
5.3. Implementasi Aljabar Lie dalam Pemodelan	111
5.3.1. Translasi	111
5.3.2. Representasi Konfigurasi Robot Tranlasi	114
5.4. Model Kecepatan Robot (Kinematika Diferensial)	115
5.4.1. Model Roda Diferensial	115
5.4.2. Transformasi ke Ruang Nyata	116
5.4.3. Hubungan dengan Grup Lie $SE(2)$	116
5.4.4. Implementasi untuk Gerakan	116
5.5. Geometri Gerakan Robot	116
5.4.1. Masalah Kinematik Maju	120
5.4.2. Masalah Kinematik Invers	123
5.6. Latihan Soal	127
Bab 6. Model Pertumbuhan Populasi Satu Spesies	 129
6.1. Model Pertumbuhan Diskrit Satu Spesies	129
6.1.1. Model Pertumbuhan Populasi Fibbonacci	129
6.1.2. Pertumbuhan Populasi Eksponensial	130
6.2. Latihan	135
6.3. Model Pertumbuhan Kontinu Satu Spesies	135
6.3.1. Model Pertumbuhan Konstan (Satu Spesies)	136
6.3.2. Model Logistik	137
6.4. Latihan	144
6.5. Model Pertumbuhan Populasi Spesies dengan Tundaan Waktu	146
6.5.1. Konstruksi Model Tundaan Waktu	146
6.5.2. Linearisasi Model Tundaan Waktu	153
6.5.3. Persaman Diferensi Linear Orde 2 dengan Koefisien Konstan	155

6.5.4. Penyelesaian Model Tundaan	156
6.5.5. Kecocokan Model Tundaan	159
6.5.6. Modifikasi Model Tundaan	160
6.6. Latihan	163
6.7. Model Probabilitas Satu Spesies	165
6.7.1. Pembentukan Model	165
6.7.2. Solusi Model Probabilitas Proses Kelahiran Murni	168
6.7.3. Mean dan Variansi $P_{N_{0+j}}(t)$	175
6.8. Latihan	178
Bab 7. Pemodelan Pertumbuhan Populasi Dua Spesies	 180
7.1. Bidang Phase	181
7.2. Populasi Keseimbangan	183
7.3. Analisis Kestabilan Linear	184
7.4. Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu dengan Koefisien Konstan	187
7.5. Model Pemangsa-mangsa	191
7.6. Latihan	200
Bab 8. Pemodelan Penyebaran Penyakit	 201
8.1. Model SIR	201
8.2. Contoh	208
8.3. Latihan	210
Bab 9. Model Pemungutan Suara	 211
9.1. Latihan	217
Daftar Pustaka	 219
Glosarium	 223
Indeks	 226
Biodata Penulis Pertama	 228
Biodata Penulis Kedua	 229

Biodata Penulis Ketiga

| 230

Biodata Penulis Keempat

| 231

Daftar Tabel

1.1 Data Pegas Dengan Massa Tertentu	24
1.2 Data Pegas Dengan Massa Tertentu dan s^*	25
1.3 Data Suhu dan Volume Suatu Wadah	25
1.4 Data Kecepatan dan Jarak Tempuh	26
1.5 Data Jarak dan Intensitas Cahaya	27
3.1 Tabel Hasil Pemodelan Matematika 3.2.1.	68
3.2 Ringkasan Data Permasalahan Contoh 3.2.2	70
7.1 Interaksi Dua Spesies	181
7.2 Tabel Jenis Kestabilan	189
7.3 Perspektif Mangsa-Pemangsa	192

Daftar Gambar

1.1	Alur Proses Pemodelan	11
2.2	Ilustrasi Benda Jatuh, Sumber: [31]	38
2.3	Ilustrasi Aliran Air [34]	44
2.3	Grafik fungsi $S(t) = 30 - 10e^{-\frac{1}{6}t}$	50
3.1	Ilustrasi Peluru Kendali dan Tolak Peluru, Sumber: [35]	54
3.2	Ilustrasi Taman, Sumber:[37]	57
3.3	$A(x) = 100x - 2x^2$	58
3.4	Ilustrasi Contoh 3.1.2	59
3.5	Ilustrasi Gerak Proyektil	62
3.6	Ilustrasi Contoh 3.2.1	67
3.7	Ilustrasi Daerah Himpunan H	68
4.1	Percobaan Hooke	76
4.2	Percobaan Hooke didekati dengan fungsi $y = -kx$	76
4.3	Sistem Pegas Horizontal	77
4.4	Titik Keseimbangan Sistem Massa Pegas Horizontal	77
4.5	Gerak Osilasi Pegas	80
4.6	Sistem Pegas Vertikal	82
4.7	Pergerakan Pegas Vertikal	83
4.8	Tiga kemungkinan Perilaku pegas $b^2 - 4mk > 0$ atau $b^2 - 4mk = 0$	88
4.9	$x(t) = -\frac{2}{10}e^{-t} + \frac{3}{10}e^{-4t}$	90
4.10	$x(t) = -\frac{2}{10}e^{-t} + \frac{3}{10}e^{-4t}$	92
4.11	Gerak Pendulum	97
4.12	Representasi Bantul pada Koordinat Kartesius	98
4.13	Vektor jari-jari dan vektor sudut satuan	98
4.14	Gaya Berat dan Gaya Tegangan Tali pada Pendulum	99

4.15	Ilustrasi	100
5.1	Market Share Robot, sumber: [32]	105
5.2	Translasi Vektor \vec{v} Atas Segitiga ABC	113
5.3	Translasi Atas Makeblock mBot2	114
5.4	Contoh model sistem yang menggambarkan struktur lengan robot yang terdiri dari segmen-segmen dan sambungan-sambungan [8].	117
5.5	Dua jenis sambungan pada lengan robot (yang digunakan dalam permodelan di buku ini): sambungan putar (kiri) dan sambungan geser (kanan) [8].	117
5.6	Ilustrasi sistem koordinat lokal pada setiap sambungan Putar [8]	121
5.7	Contoh sistem lengan robot dengan tiga segmen dan tiga sambungan putar [8].	122
6.1	Ilustrasi model Fibonacci pertumbuhan populasi	129
6.2	Populasi diskrit	131
6.3	Perubahan Eksponensial Populasi Diskrit	133
6.4	Hubungan Populasi dan Laju pertumbuhan	138
6.5	Laju pertumbuhan menurut Verhulst	139
6.6	Pergerakan $\frac{dN}{dt}$	139
6.7	Populasi bergerak menuju ke populasi kesimbangan	141
6.8	Populasi bergerak secara osilasi pada suatu eksperimen	146
6.9	Solusi Numerik $N_{m+1} = N_m(1,2 - 0,0025N_{m-1})$	150
6.10	Perilaku $N_{m+1} = N_m(1,2 - 0,0025N_{m-1})$	151
6.11	Solusi Numerik $N_{m+1} = N_m(1,75 - 0,0025N_{m-1})$	152
6.12	Perilaku $N_{m+1} = N_m(1,75 - 0,0025N_{m-1})$	153
6.13	Flow Chart Model Pertumbuhan Populasi Satu Spesies Dengan Tundaan Waktu	163

6.14	Grafik fungsi probabilitas $P_{N_0+j}(t) = e^{-\lambda N_0 t}$	169
6.15	Grafik fungsi probabilitas $P_{N_0+1}(t) = N_0 e^{-\lambda N_0 t} (1 - e^{-\lambda t})$	171
6.16	Grafik fungsi probabilitas $P_{N_0+2}(t)$	174
6.17	Grafik fungsi probabilitas $P_{N_0+j}(t)$	175
7.1	Kurva trayektori $N_2 = DN_2^{2/3}$	182
7.2	Ilustrasi jenis kestabilan	190
7.3	Ilustrasi bidang phase $x = \frac{D}{y^2}$	191
7.4	Ilustrasi $f(y) = \frac{y^a}{e^{by}}$ dan $g(x) = \frac{x^c}{e^{dx}}$	195
7.5	Ilustrasi solusi $\frac{x^c}{e^{dx}} = s$	196
7.6	Saat $x_m < x < x_M$, maka f memiliki tepat dua solusi	197
7.7	Diagram Phase Model Pemangsa-Mangsa [14]	198
7.8	Diagram Phase Model Pemangsa-Mangsa Serigala-kelinci[2]	199
8.1	Diagram Alur S-I-R	202
8.2	Trayektori S-I	204

Daftar Pustaka

- [1] B. Susanta, *Pemodelan Matematika*, Edisi 1, Universitas Terbuka, Indonesia, 2008.
- [2] B. Sparks, "Coupled Differential Equations," konten digital melalui <https://www.geogebra.org/m/pwwcdafy> (akses 21 Desember 2020).
- [3] C. Abbott Paul, *Mathematica*, in *Revival: The Handbook of Software for Engineers and Scientists (1995)*, CRC Press, 2018, pp. 926–962.
- [4] C. Armanini et al., "Discrete Cosserat Approach for Closed-Chain Soft Robots: Application to the Fin-Ray Finger," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 37, no. 6, pp. 2083–2098, Dec. 2021, doi: 10.1109/TRO.2021.3075643.
- [5] C. C. Cossette et al., "Navlie: A Python Package for State Estimation on Lie Groups," in *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2023, pp. 5282–5287, doi: 10.1109/IROS55552.2023.10342362.
- [6] C. Muller, "World Robotics 2023," Frankfurt am Main, 2023. Accessed: Sep. 03, 2024. [Online].
- [7] C. Wang et al., "Formation tracking of multi-robot systems with switching directed topologies based on Udwadia-Kalaba approach," *Appl Math Model*, vol. 126, pp. 147–158, Feb. 2024, doi: 10.1016/j.apm.2023.10.035.
- [8] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, and M. Sweedler, *Ideals, varieties, and algorithms*, Volume 3, Springer, 1997.
- [9] D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman, and B. Sturmfels, *Computations in algebraic geometry with Macaulay 2*, Volume 8, Springer Science & Business Media, 2001.
- [10] D. Georgieva and T. Georgieva-Trifonova, "Developing Mathematical Competencies Through Makeblock mBot Programming in Computer Modelling Education," *TEM Journal*, vol. 12, no. 4, pp. 2437–2447, Nov. 2023, doi: 10.18421/TEM124-56.

- [11] E. Gallo, “The $SO(3)$ and $SE(3)$ Lie Algebras of Rigid Body Rotations and Motions,” Universidad Politécnica de Madrid, 2022. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2205.12572>.
- [12] Frank R. Giordano, William P. Fox, Steven B. Horton *A First Course in Mathematical Modeling*, Cengage Learning, 2013. http://data.fmipa.unand.ac.id/matematika/file_bahankuliah/A_Predator-Prey_Model.pdf (akses 20 Desember 2020).
- [13] G. Bastin, *Lectures on Mathematical Modelling of Biological Systems*, 2018. <https://perso.uclouvain.be/georges.bastin/lectures-bio.pdf> (akses 21 Desember 2020).
- [14] J. C. Ponce Campuzano, ”Lotka-Volterra predator-prey model,” konten digital melalui <https://www.geogebra.org/m/PNv9hgxm> (akses 20 Desember 2020).
- [15] J. Deray and J. Solà, “Manif: A micro Lie theory library for state estimation in robotics applications,” *J Open Source Softw*, vol. 5, no. 46, p. 1371, Feb. 2020, doi: 10.21105/joss.01371.
- [16] J. Kerami, *Pemodelan Matematis*, Edisi 2, Universitas Terbuka, Indonesia, 2015.
- [17] J. M. Selig, “Lie Groups and Lie Algebras in Robotics,” in *Computational Noncommutative Algebra and Applications*, J. Byrnes, Ed., 2004. [Online]. Available: <http://www.wtv-books.de/nato-pco.htm>.
- [18] J. Poullet and J. Previte, ”Analysis of nanofluid flow past a permeable stretching/shrinking sheet,” *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, November 2020.
- [19] M. Sangalli et al., “Differential Invariants for $SE(2)$ -Equivariant Networks,” in *Proceedings - International Conference on Image Processing*, IEEE, 2022, pp. 2216–2220, doi: 10.1109/ICIP46576.2022.9897301.
- [20] M. Friedman and K. Krauthausen, *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century*, Springer, New York, 2022.
- [21] Matlab, MATLAB and Statistics Toolbox Release (2012) The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States. Volume 9, 2012.
- [22] P. Coelho and U. Nunes, “Lie algebra application to mobile robot control: A tutorial,” *Robotica*, vol. 21, no. 5, pp. 483–493, Sep. 2003, doi: 10.1017/S0263574703005149.

- [23] P. Raj and D. Pal, “Lie Algebraic Criteria for Stability of Switched Systems of Differential Algebraic Equations (DAEs),” *IEEE Control Syst Lett*, vol. 5, no. 4, pp. 1333–1338, Oct. 2021, doi: 10.1109/LCSYS.2020.3036577.
- [24] R. Chand et al., “A Car-like Mobile Manipulator with an n-link Prismatic Arm,” in *2021 IEEE Asia-Pacific Conference on Computer Science and Data Engineering*, IEEE, 2021, doi: 10.1109/CSDE53843.2021.9718408.
- [25] R. Haberman, *Mathematical Models, Mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow*, Prentice-Hall, New Jersey, 1977.
- [26] S. Kousar et al., “Construction of Nilpotent and Solvable Lie Algebra in Picture Fuzzy Environment,” *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol. 16, no. 1, Dec. 2023, doi: 10.1007/s44196-023-00213-w.
- [27] S. Melliani, O. Castillo, and A. El Hajaji, *Applied Mathematics and Modelling in Finance, Marketing and Economics*, Springer, New York, 2024.
- [28] S. Mondal et al., “Intelligent controller for nonholonomic wheeled mobile robot: A fuzzy path following combination,” *Math Comput Simul*, vol. 193, pp. 533–555, Mar. 2022, doi: 10.1016/j.matcom.2021.10.028.
- [29] Widodo, *Pengantar Model Matematika Bidang Biologi*, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, UGM, 2005.
- [30] Widowati and S. Sutimin, *Pemodelan Matematika*, FMIPA, Universitas Diponegoro, 2007.
- [31] <https://www.clipartmax.com>.
- [32] Fortune Business Insights: <https://www.fortunebusinessinsights.com>.
- [33] https://id.wikipedia.org/wiki/Hukum_Hooke (akses 19 Oktober 2020).
- [34] <https://commons.wikimedia.org>
- [35] <https://pixy.org/1516840/>.
- [36] <https://thenounproject.com>.
- [37] <https://math.libretexts.org>.

Glosarium

Basis Groebner

Basis Groebner adalah sebuah konsep dalam algebra komutatif dan geometri aljabar yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan polinomial secara sistematis. Basis Groebner memungkinkan untuk menyederhanakan perhitungan dalam masalah aljabar, seperti menyelesaikan sistem persamaan atau melakukan pemrograman algebra secara simbolik. 120

Carbon Dating

Carbon dating, atau penanggalan karbon, adalah metode ilmiah untuk menentukan umur benda-benda yang mengandung karbon, seperti fosil, artefak kayu, atau tulang, dengan memanfaatkan isotop radioaktif karbon-14. viii, 41

End-Effector

End-Effector adalah komponen pada ujung manipulator robotik yang dirancang untuk berinteraksi dengan lingkungan. Fungsi dan bentuk end-effector bergantung pada tugas yang harus dilakukan, seperti memegang, memotong, mengelas, atau memindahkan objek. 109

Era Society 5.0

Era Society 5.0 adalah konsep yang diperkenalkan oleh pemerintah Jepang sebagai visi masyarakat masa depan, di mana teknologi canggih seperti kecerdasan buatan (AI), Internet of Things (IoT), big data, dan robotika digunakan untuk menciptakan kehidupan yang lebih baik dan seimbang bagi manusia. Society 5.0 sering disebut sebagai evolusi setelah era Society 4.0 (Masyarakat Informasi), dengan fokus pada penyelesaian masalah sosial melalui inovasi teknologi. 104

Gerak Pendulum

Gerak pendulum adalah gerakan osilasi yang terjadi pada suatu benda (pendulum) yang digantung pada sebuah titik tetap dan dapat berayun di bawah

pengaruh gravitasi. ix, 97

Grup

Grup adalah himpunan tak kosong dikenai operasi biner yang memenuhi empat aksioma, yaitu closure (tertutup), asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. 106

Grup Lie

Grup Lie adalah struktur matematika yang merupakan gabungan antara grup (struktur aljabar yang memiliki operasi dengan sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan elemen invers) dan manifold diferensial (ruang yang secara lokal menyerupai ruang Euklidean). 106

Hukum Hooke

Hukum Hooke adalah hukum atau ketentuan mengenai gaya dalam bidang ilmu fisika yang terjadi karena sifat elastisitas dari sebuah pegas. 75

Hukum Torricelli

Hukum Torricelli adalah prinsip fisika yang menjelaskan kecepatan aliran fluida (seperti air) melalui sebuah lubang pada wadah yang berada di bawah pengaruh gravitasi. Hukum ini dikembangkan oleh Evangelista Torricelli, seorang ilmuwan Italia pada abad ke-17, yang terkenal juga atas penemuannya dalam barometer. ix, 43

Masalah Optimasi

Masalah optimasi adalah cabang ilmu yang fokus pada menemukan solusi terbaik (optimum) untuk suatu masalah yang melibatkan pilihan dari sekumpulan solusi yang memungkinkan. Optimasi sangat penting dalam berbagai bidang, seperti matematika, ilmu komputer, teknik, ekonomi, dan ilmu manajemen. 55

Persamaan Navier-Stokes

Persamaan Navier-Stokes adalah seperangkat persamaan diferensial parsial yang menggambarkan perilaku fluida, seperti cairan dan gas, dalam gerakan. Persamaan ini merupakan dasar dalam mekanika fluida dan digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena fisika, seperti aliran udara di sekitar pesawat terbang, pergerakan air di laut, dan aliran darah dalam tubuh manusia. 15

Ruang Hausdorff

Ruang Hausdorff adalah salah satu konsep penting dalam topologi, yang sering digunakan untuk memahami dan membangun struktur matematika dalam berbagai bidang, termasuk analisis, geometri, dan teori himpunan. 107

Simultaneous Localization and Mapping (SLAM)

Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) adalah pendekatan di bidang robotika dan computer vision yang memungkinkan robot atau agen untuk membangun peta lingkungan sekaligus menentukan posisinya di dalam peta tersebut. SLAM digunakan dalam berbagai aplikasi, termasuk robot otonom, kendaraan tanpa awak, drone, dan augmented reality (AR). 109

Stereographic Projection

Stereographic Projection adalah metode dalam matematika dan geometri untuk memetakan permukaan sebuah bola ke sebuah bidang. Teknik ini sering digunakan dalam kartografi, kompleks analisis, dan geometri diferensial karena sifatnya yang menjaga sudut (konform). 108

Titik Singular

Titik singular dalam konteks matematika memiliki definisi yang berbeda tergantung pada bidangnya, seperti dalam kalkulus, geometri diferensial, atau aljabar. Secara umum, titik singular adalah titik di mana suatu sifat matematis tertentu gagal memenuhi syarat normal. 58

Titik Stasioner

Titik stasioner adalah titik pada suatu fungsi di mana turunan pertama fungsi tersebut sama dengan nol. 58

Titik-Titik Kritis

Titik-titik kritis dalam masalah optimasi adalah titik-titik di mana fungsi objektif memiliki sifat khusus yang memungkinkan solusi optimum berada di sana. Dalam konteks optimasi, titik-titik kritis adalah titik-titik di mana turunan fungsi (gradien) bernilai nol atau tidak terdefinisi. 58

Varietas Aljabar Affine

Varietas Aljabar Affine adalah salah satu konsep fundamental dalam geometri aljabar yang menggambarkan himpunan solusi suatu sistem persamaan polinomial dalam ruang affine. 118

Indeks

- Aljabar Lie, 109
Analisis Kestabilan Linear, 184
Analisis Tingkat Keterinfeksi, 203
- Basis Groebner, 120
- Carbon Dating, 41
- Deret Taylor, 168
Diagram Alur S-I-R, 202
Differential Equation of Delay, 148
Dimensi manifold, 108
Dinamika Fluida, 15
- Elie Cartan, 109
Ellipsoida, 74
End-Effector, 109
Era Society 5.0, 104
- Gaya Berat, 82
Gaya Hooke, 82
Gaya Newton, 82
Gerak Pendulum, 97
Gerak Proyektil, 62
Grafik fungsi probabilitas, 174
Grup, 106
Grup Lie, 106
- Homogenitas Spasial, 202
Hukum Hooke, 75
Hukum Torricelli, 43
- Indeks Pengaruh Banzhaf, 215
Indeks Shapley-Shubik, 212
Interaksi Dua Spesies, 181
- Konstruksi Model Tundaan waktu, 146
Koordinat Polar, 102
Kurva Trayektori, 181
- Linearisasi Model Tundaan Waktu, 153
Lornarno Da Pisa, 130
- Makeblock mBot2, 111
Manifold Diferensial, 107
Masalah Kinematik Invers, 123
Masalah Kinematik Maju, 120
Masalah Optimasi, 55
Matriks Homogen, 114
Matriks Jacobian, 193
Matriks Rotasi, 114
Model Deterministik dan Stokastik, 20
Model Empiris, 16
Model Logistik, 137
Model Pemungutan Suara, 211
Model Penjualan-Promosi Vidale Wolfe, 50
Model Penyebaran Penyakit, 201
Model Pertumbuhan Populasi Fibonacci, 129

- Model Probabilistik, 165
Model Probabilitas Satu Spesies, 165
Model Roda Diferensial, 115
Model Simulasi, 19
Model SIR, 201
Nilai Eigen, 188
Nilai maksimum atau minimum, 58
Pemodelan Matematika, 1
Pengujian titik ekstrim, 66
Persamaan Lotka-Volterra, 4
Persamaan Navier-Stokes, 15
Perspektif Mangsa-Pemangsa, 192
Pertumbuhan Populasi Dua Spesies, 180
Pertumbuhan Populasi Eksponensial, 130
Populasi diskrit, 131
Populasi Keseimbangan, 183
Populasi Tertutup, 202
Rasio Reproduksi Dasar, 204
Rotasi, 110
Ruang Hausdorff, 107
Simbiosis Mutualisme, 181
Simultaneous Localization and Mapping, 109
Sistem Autonomus, 180
Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu dengan Koefisien Konstan, 187
Sophus Lie, 109
Stereographic Projection, 108
Struktur Manifold Diferensial, 108
Teorema Apit, 92
Threshold, 210
Titik Pelana, 190
Titik Singular, 58
Titik Stasioner, 58
Titik-Titik Kritis, 58
Translasi, 110
Varietas Aljabar Affine, 118
Wilhelm Killing, 109

BIOGRAFI PENULIS



Burhanudin Arif Nurnugroho merupakan dosen tetap di Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika FKIP UAD. Background Pendidikannya adalah Matematika baik di level sarjana yang lulus dari UIN Sunan Kalijaga Tahun 2009, Master dari Universitas Gadjah Mada Tahun 2012 dan Doktor dari Universitas Gadjah Mada Tahun 2019. Saat ini ia mendapatkan amanah sebagai Sekretaris Program Studi S2 Pendidikan Matematika FKIP UAD masa jabatan 2023-2027.

BIOGRAFI PENULIS



Uswatun Khasanah Uswatun Khasanah, M.Sc merupakan ketua prodi Pendidikan Matematika FKIP UAD masa jabatan 2018-2022. Ia dilahirkan di Bantul Pada Tanggal 12 Oktober 1978. Ia pernah menempuh Pendidikan S1 (konsentrasi bidang matematika analisis) dan S2 di jurusan Matematika (konsentrasi statistika) FMIPA UGM. Saat ini sedang menempuh S3 Matematika (Statistika) di jurusan Matematika FMIPA UGM konsentrasi dalam data science.

BIOGRAFI PENULIS



Puguh Wahyu Prasetyo adalah dosen tetap dengan jabatan akademik Lektor Kepala dan sekaligus ketua Program Studi Tahun Jabatan 2023-2026 di Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Ahmad Dahlan. Lahir di Blera pada 22 Juli 1988, ia memperoleh gelar sarjana di bidang Matematika dari Universitas Negeri Yogyakarta pada tahun 2010, diikuti dengan gelar magister di bidang Matematika dari Universitas Gadjah Mada pada tahun 2012. Pada tahun 2018, ia menyelesaikan gelar doktoral di bidang Matematika di Universitas Gadjah Mada, di bawah bimbingan Prof. Dr. rer.nat. Indah Emilia Wijayanti, M.Si; Prof. Dr. Halina France-Jackson; dan Prof. Joe Repka, Ph.D.

Pada tahun 2016, ia diundang sebagai Mahasiswa Pascasarjana Internasional di University of Toronto di bawah bimbingan Prof. Joe Repka. Ia berhasil menyelesaikan program doktor pada Tahun 2018 dan PostDoctoral pada tahun 2022 melalui penelitian kolaboratif dengan Prof. Dr. rer. nat. Indah Emilia Wijayanti, M.Si (Universitas Gadjah Mada), dan Prof. Hidetoshi Marubayashi, Ph.D (Naruto University of Education).

Pada Musim Gugur 2023, ia berpartisipasi dalam program kunjungan di Departemen Matematika, University of Toronto, yang berfokus pada Aljabar Abstrak dan konsep-konsep terkait.

BIOGRAFI PENULIS



Muhammad Ardiyansyah adalah seorang peneliti pascadoktoral di University of Jyväskylä, Finlandia, khususnya di Departemen Ilmu Biologi dan Lingkungan di bawah Fakultas Matematika dan Sains. Beliau terlibat dalam penelitian yang terkait dengan bidang ilmu biologi dan lingkungan, terutama hal yang berhubungan dengan metode sequencing DNA. Sebelumnya, beliau menamatkan studi doktoral di Aalto University, Finlandia dan studi master di Rheinische Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn, Jerman di bidang matematika. Selama studi doktoral, beliau meneliti penerapan metode-metode aljabar di beberapa aspek, seperti phylogenetics dan factor analysis model. Sementara itu, gelar sajana beliau diraih di Universitas Gadjah Mada dengan skripsi di bidang aljabar murni. Anda dapat menghubungi beliau melalui email pribadi di muhammadardiyansyah13@yahoo.com untuk informasi lebih lanjut tentang kegiatan akademik dan risetnya. Untuk profil resmi dan kontak lainnya, kunjungi halaman pribadi beliau di <https://sites.google.com/view/muhammad-ardiyansyah/>

Buku *Pemodelan Matematika* ini menawarkan panduan lengkap tentang konsep, proses, dan aplikasi pemodelan matematika untuk mahasiswa dan peneliti. Ditulis oleh Dr. Burhanudin Arif Nurnugroho, M.Sc; Uswatun Khasanah, M.Sc; Dr. Puguh Wahyu Prasetyo, M.Sc; Dr. Muhammad Ardiyansyah buku ini mencakup topik seperti persamaan diferensial, optimasi, getaran mekanis, kinematika robot, pertumbuhan populasi, hingga penyebaran penyakit.

Setiap bab dilengkapi dengan teori, contoh kasus, dan latihan soal untuk mendukung pemahaman. Buku ini menjadi referensi penting dalam matematika terapan, menghubungkan teori dengan praktik nyata untuk menyelesaikan berbagai permasalahan.

UAD
PRESS
Alamat Penerbit:

Kampus II Universitas Ahmad Dahlan
Jl. Pramuka No. 46, Sidikan, Umbulharjo, Yogyakarta.
Telp. (0274) 563515, Phone (+62) 882 3949 9820

