

**Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS Melibatkan Imunitas
Tubuh**

Anisa Sukma Linarta
1900015023

Skripsi diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi Terapan
Sebagai bagian persyaratan untuk meraih derajat
Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika



Universitas Ahmad Dahlan
Yogyakarta
2023

**Mathematical Model of the Spread of HIV/AIDS Involves the Body's
Immunity**

Anisa Sukma Linarta

1900015023

This undergraduate thesis is submitted to
Faculty of Applied Science and Technology
As part of the requirements to obtain

The Bachelor's Degree of Science

In Mathematics Study Program



Universitas Ahmad Dahlan

Yogyakarta

2023

HALAMAN PERSETUJUAN

Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS Melibatkan Imunitas Tubuh

yang dipersiapkan dan disusun oleh

Anisa Sukma Linarta

1900015023

Telah disetujui oleh

Dosen Pembimbing Skripsi Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi Terapan

Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta

dan dinyatakan telah memenuhi syarat untuk diajukan

Pembimbing


Dr. Yudi Ari Adi, S.Si., M.Si.

1960
NIY 60020389

HALAMAN PENGESAHAN

Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS Melibatkan Imunitas Tubuh

Anisa Sukma Linarta
1900015023

Dipertahankan di depan Dewan Penguji tanggal 29 Agustus 2023



Dr. Yudi Ari Adi, S.Si., M.Si.
Ketua/Pembimbing



Joko Purwadi, S.Si., M.Sc.
Penguji 1



Dr. Julan Hernadi, S.Si., M.Si.
Penguji 2

Diterima sebagai bagian
persyaratan untuk meraih derajat
Sarjana Matematika



Dr. Yudi Ari Adi, S.Si., M.Si.
Dekan FAST

PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Anisa Sukma Linarta
NIM : 1900015023
Email : anisa1900015023@webmail.uad.ac.id
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi Terapan
Judul Skripsi : Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS
Melibatkan Imunitas Tubuh

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Hasil karya yang saya serahkan ini adalah asli dan belum pernah mendapatkan gelas keserjanaan baik di Universitas Ahmad Dahlan maupun di institusi pendidikan lainnya.
2. Hasil karya saya ini bukan saduran/terjemahan melainkan merupakan gagasan, rumusan, dan hasil pelaksanaan akademik dan narasumber penelitian.
3. Hasil karya saya ini merupakan hasil revisi terakhir setelah diujikan yang telah diketahui dan disetujui oleh pembimbing.
4. Dalam karya saya ini tidak terdapat karya atau pendapat yang telah ditulis atau dipublikasikan orang lain, kecuali yang digunakan sebagai acuan dalam naskah dengan menyebutkan nama pengarang dan dicantumkan dalam daftar pustaka.

Pernyataan ini saya buat dengan sesungguhnya. Apabila di kemudian hari terbukti ada penyimpangan dan ketidakbenaran dalam pernyataan ini maka saya bersedia menerima sanksi akademik berupa pencabutan gelar yang telah diperoleh karena karya saya ini, serta sanksi lain yang sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Universitas Ahmad Dahlan.

Yogyakarta, 11 September 2023
Yang Menyatakan



(Anisa Sukma Linarta)

PERNYATAAN PERSETUJUAN AKSES

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Anisa Sukma Linarta
NIM : 1900015023 Email : anisa1900015023@webmail.uad.ac.id
Fakultas : FAST Program Studi : Matematika
Judul tugas akhir : Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS Melibatkan
Imunitas Tubuh

Dengan ini saya menyerahkan hak sepenuhnya kepada Perpustakaan Universitas Ahmad Dahlan untuk menyimpan, mengatur akses serta melakukan pengelolaan terhadap karya saya ini dengan mengacu pada ketentuan akses tugas akhir elektronik sebagai berikut

Saya (~~mengizinkan~~/tidak mengizinkan)* karya tersebut diunggah ke dalam Repository Perpustakaan Universitas Ahmad Dahlan.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Yogyakarta, 11 September 2023



Anisa Sukma Linarta

Mengetahui,

Pembimbing**

Dr. Yudi Ari Adi, S.Si., M.Si.

Ket:

*coret salah satu

**jika diizinkan TA dipublish maka ditandatangani dosen pembimbing dan mahasiswa

PERNYATAAN

Saya Anisa Sukma Linarta menyatakan dengan sesungguhnya bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi, sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar acuan.

Dinyatakan oleh



Anisa Sukma Linarta

Tanggal : 11 September 2023

MOTTO

“Segala sesuatu sudah memiliki takarannya masing-masing. Jangan biarkan rasa iri menghantui. Keberhasilan akan datang disaat yang tepat” – Anisa Sukma Linarta

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmaanirrahiim

Alhamdulillah puji syukur atas kehadiran Allah SWT atas berkat, rahmat dan hidayah yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS melibatkan Imunitas Tubuh”. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi Besar Muhammad SAW yang membimbing umatnya menuju kebaikan. Skripsi ini disusun untuk melengkapi persyaratan dalam menyelesaikan studi guna mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si) pada Fakultas Sains dan Teknologi Terapan Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta. Dalam penyusunan skripsi ini penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, sehingga dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada “

1. Bapak Dr. Yudi Ari Adi, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Terapan Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta sekaligus Dosen Pembimbing atas ketulusan hati dan kesabarannya dalam membimbing, mendukung, serta mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Joko Purwadi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta.
3. Ibu Nursyiva Irsalinda, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik atas ketulusan hati dan kesabaran dalam membimbing dan mendukung penulis dari awal hingga akhir di Program Studi Matematika Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta.
4. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta atas segala ilmu dan pengalaman yang bermanfaat selama perkuliahan.
5. Staf Tata Usaha Fakultas Sains dan Teknologi Terapan Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta
6. Keluarga tercinta : Bapak Gunarta, Ibu Marlini, Almirza Putra Linarta dan Mimi yang tidak henti-hentinya mendoakan, memotivasi dan mendukung penulis serta keluarga besar yang mendoadkn dan memberikan semangat.

7. Vara Oktavia Anggraini dan sahabat-sahabat penulis yang selalu memberikan semangat dan dukungan.
8. Nurul Chodijah, Novi Selviani, Andrea Kusumastuti, Haniifah Miftaql Farhah, Okta Mega Fortuna, Zenta Norma Evriliana dan semua teman seperjuangan Matematika 2019 Universitas Ahmad Dahlan yang selalu memberikan dukungan semangat dan motivasi kepada penulis.
9. Semua pihak yang telah mendoakan dan membantu penulis selama proses pembuatan skripsi ini.

Semoga Allah SWT senantiasa memberikan rahmat, nikmat dan karunia-Nya kepada mereka semua. Aamiin

Penulis menyadari bahwa dengan keterbatasan kemampuan dalam menyelesaikan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat mengapresiasi kritik dan saran yang dapat membangun skripsi ini menjadi lebih baik. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya pada bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Terapan Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta, Aamiin

DAFTAR ISI

HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
PERNYATAAN TIDAK PLAGIAT	iv
PERNYATAAN PERSETUJUAN AKSES	v
PERNYATAAN	vi
MOTTO	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK.....	xv
BAB I.....	1
PENDAHULUAN	1
1. 1 Latar Belakang	1
1. 2 Identifikasi Masalah.....	4
1. 3 Batasan Masalah	4
1. 4 Rumusan Masalah.....	4
1. 5 Tujuan Penelitian	5
1. 6 Manfaat Penelitian	5
BAB II.....	6
LANDASAN TEORI.....	6
2.1 Imunitas.....	6
2.2 HIV/AIDS	7
2.3 Persamaan Diferensial.....	9
2.4 Sistem Persamaan Diferensial.....	10
2.5 Titik Ekuilibrium (Keseimbangan)	12
2.6 Linearisasi	13
2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	14
2.8 Model SIR Klasik	17
2.9 Angka Reproduksi Dasar	17
2.10 Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium	18
2.11 Analisis Kestabilan Global Titik Ekuilibrium.....	25
2.12 Metode <i>Least Square</i> dalam <i>Fitting</i> Model Penyebaran Penyakit.....	26

2.13	Analisis Sensitivitas	27
2.14	Analisis Bifurkasi.....	27
2.15	Runge-Kutta Orde 4	28
BAB III		37
METODOLOGI PENELITIAN.....		37
3.1	Pengumpulan Literatur.....	37
3.2	Pengkajian Literatur.....	37
3.3	Pelaksanaan Penelitian.....	37
3.4	Sistematika Penulisan Skripsi	39
BAB IV		40
Hasil dan Pembahasan		40
4.1	Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS	40
4.2	Sifat Dasar Model Matematika	44
4.3	Menentukan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	46
4.4	Menentukan Angka reproduksi dasar	47
4.5	Menentukan Titik Ekuilibrium Endemik	49
4.6	Menentukan Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	50
4.7	Menentukan Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Endemik.....	52
4.8	Analisis Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	53
4.9	Analisis Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Endemik	55
4.10	Estimasi Parameter.....	58
4.11	Analisis Sensitivitas	61
4.12	Simulasi Numerik	66
BAB V		77
Kesimpulan dan Saran		77
5.1.	Kesimpulan	77
5.2.	Saran	78
DAFTAR PUSTAKA		80
LAMPIRAN.....		83

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Model SIR Klasik.....	17
Gambar 2.2 Kestabilan Lokal	19
Gambar 2.3 Kestabilan titik ekuilibrium.....	20
Gambar 2.4 Bifurkasi <i>transkritikal</i>	28
Gambar 2.5 Dinamika subpopulasi <i>susceptible</i> dan <i>infected</i> terhadap t pada $R_0 = 9.146$	35
Gambar 3.1 Tahapan penelitian	38
Gambar 4.1 Ilustrasi penyebaran penyakit HIV/AIDS melibatkan imunitas tubuh. ...	42
Gambar 4.2 Simulasi data HIV/AIDS dengan model	60
Gambar 4.3 Pengaruh perubahan β terhadap subpopulasi I_1, I_2 dan A	64
Gambar 4.4 Pengaruh perubahan μ terhadap subpopulasi I_1, I_2 dan A	65
Gambar 4. 5 Grafik subpopulasi S, I_1, I_2, A, T dengan $R_0 = 0.4032$	67
Gambar 4.6 Potret fase S, I_1, I_2 dengan nilai awal berbeda pada titik E_0	68
Gambar 4.7 Potret fase S, A, T dengan nilai awal berbeda pada titik E_0	69
Gambar 4.8 Grafik subpopulasi S, I_1, I_2, A, T dengan $R_0 = 4.1565$	71
Gambar 4.9 Potret Fase Subpopulasi S, I_1, I_2 dengan nilai awal berbeda pada E_1	72
Gambar 4.10 Potret Fase Subpopulasi S, A, T dengan nilai awal berbeda pada E_1	72
Gambar 4.11 Bifurkasi pada $R_0 = 1$	76

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Definisi variabel dan parameter	41
Tabel 4.2 Nilai parameter.....	60
Tabel 4.3 Indeks sensitivitas parameter terhadap R_0	62
Tabel 4.4 Nilai awal variabel Model Penyebaran Penyakit HIV/AIDS.....	66

DAFTAR SIMBOL

S	: Subpopulasi <i>susceptible</i>
I_1	: Subpopulasi <i>infected</i> dengan imunitas kuat
I_2	: Subpopulasi <i>infected</i> dengan imunitas lemah
A	: Subpopulasi AIDS
T	: Subpopulasi <i>treatment</i>
Λ	: Laju <i>recruitment</i> subpopulasi <i>susceptible</i>
β	: Laju penularan penyakit dari individu yang terinfeksi HIV terhadap individu rentan
ω_1	: Laju perpindahan individu terinfeksi HIV dengan imunitas tubuh kuat menjadi individu terinfeksi HIV dengan imunitas tubuh lemah
ω_2	: Laju perpindahan individu terinfeksi HIV dengan imunitas tubuh lemah menjadi individu terjangkit AIDS
α	: Laju pengobatan oleh individu terinfeksi dengan imunitas tubuh kuat
ρ	: Laju pengobatan oleh individu terinfeksi dengan imunitas tubuh lemah
m	: Laju pengobatan oleh individu yang terjangkit AIDS
d	: Laju kematian akibat penyakit AIDS
μ	: Laju kematian alami
λ	: Nilai eigen
R_0	: Angka reproduksi dasar
K	: Matriks generasi selanjutnya
ρ	: Radius spectral
ε	: Jarak solusi dengan titik ekuilibrium
δ	: Jarak kondisi awal dengan titik ekuilibrium
\Re	: Bagian real dari semua nilai eigen
E_0	: Titik ekuilibrium bebas penyakit
E_1	: Titik ekuilibrium endemik

ABSTRAK

Penyakit HIV/AIDS merupakan salah satu penyakit infeksi menular seksual disebabkan oleh virus HIV yang menyerang sistem kekebalan tubuh manusia dan menurunkan jumlah sel CD4 serta mengakibatkan penyakit AIDS. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dan mensimulasikan model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan melibatkan imunitas tubuh sehingga dapat menekan perkembangan virusnya. Tahapan penelitian yang dilakukan meliputi membangun model matematika dari modifikasi SIR dasar sehingga menghasilkan model baru bertipe S, I_1, I_2, A, T . Kemudian, melakukan analisis model meliputi mencari titik ekuilibrium, angka reproduksi dasar, menganalisis kestabilan lokal titik ekuilibrium dengan proses linearisasi, kestabilan global titik ekuilibrium menggunakan fungsi Lyapunov, sensitivitas parameter dan analisis bifurkasi menggunakan vektor eigen kanan dan kiri untuk menentukan jenis bifurkasi pada model. Selain itu, mensimulasikan dan menginterpretasikan model model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan melibatkan imunitas tubuh menggunakan software Matlab dengan metode Runge-Kutta Orde 4. Hasil analisis menunjukkan model memiliki dua titik ekuilibrium, yakni titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan global ketika angka reproduksi dasar, R_0 , kurang dari satu. Sedangkan, untuk titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal dan global ketika R_0 lebih dari satu. Kemudian, parameter yang paling berpengaruh terhadap model adalah laju penularan penyakit individu terinfeksi HIV terhadap individu rentan. Jenis bifurkasi transkritikal sesuai dengan model yang menyebabkan terjadinya perubahan kestabilan ketika melewati nilai ambang batas. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik yang menggambarkan hasil ketika $R_0 < 1$ jumlah individu terinfeksi HIV/AIDS akan menurun hingga menuju titik ekuilibrium bebas penyakit. Namun, ketika $R_0 > 1$ dalam waktu panjang infeksi virus HIV/AIDS tetap berada dalam populasi.

Kata kunci : HIV/AIDS, imunitas, kestabilan lokal dan global, bifurkasi

ABSTRACT

HIV/AIDS is a sexually transmitted infection caused by the HIV virus, which attacks the human immune system, reduces the number of CD4 cells, and causes AIDS. This study aims to analyze the stability of the equilibrium point and simulate a mathematical model of the spread of HIV/AIDS by involving the body's immunity so that it can suppress the development of the virus. The stages of the research carried out included building a mathematical model from the modification of the basic SIR to produce a new type of model. Then, analyzing the model included finding the equilibrium point, the basic reproduction number, analyzing the local stability of the equilibrium point with the linearization process, the global stability of the equilibrium point using the Lyapunov function, the sensitivity of parameters, and bifurcation analysis using right and left eigenvectors to determine the type of bifurcation in the model. In addition, simulating and interpreting mathematical models of the spread of HIV/AIDS by involving the body's immunity using Matlab software with the Runge-Kutta Order 4 method. The results of the analysis show that the model has two equilibrium points, namely disease-free and endemic equilibrium points. Local and global asymptotically stable disease-free equilibrium points when the basic reproduction number is less than one. Meanwhile, for local and global asymptotically stable endemic equilibrium points when there are more than one, Then, the parameter that has the most influence on the model is the rate of transmission of HIV-infected individuals to susceptible individuals. According to the model, the type of transcritical bifurcation causes a change in stability when it passes a threshold value. Next, a numerical simulation is carried out that describes the result when, at $R_0 > 1$, the number of individuals infected with HIV/AIDS will decrease to a disease-free equilibrium point. However, when $R_0 > 1$, after a long time, the HIV/AIDS virus infection remains in the population.

Keywords : *HIV/AIDS, immunity, local and global stability, bifurcation*